ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 9–14

МАТЕМАТИКА

УДК 517.957

ОБ АТТРАКТОРАХ УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ В ОБЛАСТИ С ЛОКАЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МИКРОСТРУКТУРОЙ. СУБКРИТИЧЕСКИЙ, КРИТИЧЕСКИЙ И СУПЕРКРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАИ

© 2023 г. К. А. Бекмаганбетов[1,2,*], А. А. Толемис[3,2,], В. В. Чепыжов[4,***], Г. А. Чечкин[6,5,2,****]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 30.03.2023 г.
После доработки 02.07.2023 г.
Принято к публикации 17.08.2023 г.

В работе рассматривается задача для комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау в среде с локально периодическими мелкими препятствиями. При этом предполагается, что поверхность препятствий может иметь разные коэффициенты проводимости. Доказано, что траекторные аттракторы этой системы стремятся в определенной слабой топологии к траекторным аттракторам задачи для усредненных уравнений Гинзбурга–Ландау с дополнительным потенциалом (в критическом случае), без дополнительного потенциала (в субкритическом случае) в среде без препятствий или просто исчезают (в суперкритическом случае).

Ключевые слова: аттракторы, усреднение, уравнения Гинзбурга–Ландау, нелинейные уравнения, слабая сходимость, перфорированная область, быстро осциллирующие члены

DOI: 10.31857/S2686954323600180, **EDN:** AFZAZA

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе изучается поведение аттракторов начально-краевой задачи для комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау в области с локально периодическими мелкими препятствиями, расстояние между которыми и их диаметры зависят от малого параметра, при стремлении этого малого параметра к нулю. Отметим некоторые результаты по усреднению аттракторов, которые появились в последнее время (см. [1–5]). В работах [2] и [5] изучалось усреднение аттракторов эволюционных уравнений и систем с диссипацией в периодически перфорированной области. Результаты по усреднению аттракторов системы уравнений Навье–Стокса в периодической изотропной среде см. в [3]. В работе [4] рассмотрена задача усреднения для уравнения Гинзбурга–Ландау в стохастической постановке. Методы, которые использовались при исследовании таких задач, были разработаны в [6–10].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сначала мы определим перфорированную область. Пусть Ω – гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Введем обозначения

$$\Upsilon_\varepsilon = \left\{ r \in \mathbb{Z}^d : \operatorname{dist}(\varepsilon r, \partial\Omega) \geq \sqrt{d}\varepsilon \right\},$$

$$\square \equiv \left\{ \xi : -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, \ldots, d \right\}.$$

Пусть $F(x,\xi)$ – гладкая, 1-периодическая по переменной ξ функция и такая, что $F(x,\xi)|_{\xi\in\partial\square} \geq$ $\geq \text{const} > 0$, $F(x,0) = -1$, $\nabla_\xi F \neq 0$ при $\xi \in \square\backslash\{0\}$. Определим множества

$$G_\varepsilon^r = \left\{ x \in \varepsilon(\square + r) \,|\, F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 0 \right\}, \quad G_\varepsilon = \bigcup_{r\in\Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^r$$

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал, Астана, Казахстан*
[2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[3]*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
[4]*Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия*
[5]*Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия*
[6]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.kz*
***E-mail: abylaikhan9407@gmail.com*
****E-mail: chep@iitp.ru*
*****E-mail: chechkin@mech.math.msu.su*

и вводим перфорированную область следующим образом

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash G_\varepsilon.$$

Обозначим через $G(x)$ множество $\{\xi \in \mathbb{R}^d \,|\, F(x,\xi) < 0\}$, и через $S(x)$ множество $\{\xi \in \mathbb{R}^d \,|\, F(x,\xi) = 0\}$.

В соответствии с вышеприведенной конструкцией граница $\partial\Omega_\varepsilon$ состоит из $\partial\Omega$ и границы включений $S_\varepsilon \subset \Omega$, $S_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \cap \Omega$.

Мы будем изучать асимптотическое поведение траекторных аттракторов следующей начально-краевой задачи для комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = (1+\alpha \mathrm{i})\Delta u_\varepsilon + R\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon - \\ -\left(1+\beta\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{i}\right)|u_\varepsilon|^2 u_\varepsilon + f(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ (1+\alpha \mathrm{i})\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^\theta q\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon = 0, \\ x \in S_\varepsilon, \quad t \in (0,+\infty), \\ u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon = U(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad t = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь α – вещественная константа, ν – единичный вектор внешней нормали к границе области, $u = u_1 + \mathrm{i}u_2 \in \mathbb{C}$, $R(x,\xi) \in C(\Omega \times \mathbb{R}^d)$, $f(x) \in C^1(\Omega;\mathbb{C})$, $q(x,\xi) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ и $q(x,\xi)$ – неотрицательная 1-периодическая по ξ функция. Предполагается, что

$$-R_1 \le R(x,\xi) \le R_2, \quad 0 < \beta_1 \le \beta(x,\xi) \le \beta_2 \tag{2}$$

для $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ и функции $R\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ и $\beta\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ имеют средние $\overline{R}(x)$ и $\overline{\beta}(x)$ в смысле пространства $L_{\infty,*w}(\Omega)$ соответственно, т.е.,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega R\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx \to \int_\Omega \overline{R}(x)\varphi(x)dx, \\ &\int_\Omega \beta\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx \to \int_\Omega \overline{\beta}(x)\varphi(x)dx \end{aligned} \tag{3}$$

при $\varepsilon \to 0+$ для любой функции $\varphi(x) \in L_1(\Omega)$.

Введем следующие обозначения для пространств $\mathbf{H} := L_2(\Omega;\mathbb{C})$, $\mathbf{H}_\varepsilon := L_2(\Omega_\varepsilon;\mathbb{C})$, $\mathbf{V} := H_0^1(\Omega;\mathbb{C})$, $\mathbf{V}_\varepsilon := H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega;\mathbb{C})$ – множество функций из $H^1(\Omega_\varepsilon;\mathbb{C})$ с нулевым следом на $\partial\Omega$ и $\mathbf{L}_p := L_p(\Omega;\mathbb{C})$, $\mathbf{L}_{p,\varepsilon} := L_p(\Omega_\varepsilon;\mathbb{C})$. Нормы в этих пространствах определяются, соответственно, следующим образом

$$\|v\|_0^2 := \int_\Omega |v(x)|^2 dx, \quad \|v\|_{0,\varepsilon}^2 := \int_{\Omega_\varepsilon} |v(x)|^2 dx,$$

$$\|v\|_1^2 := \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx, \quad \|v\|_{1,\varepsilon}^2 := \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v(x)|^2 dx,$$

$$\|v\|_{\mathbf{L}_p}^p := \int_\Omega |v(x)|^p dx, \quad \|v\|_{\mathbf{L}_{p,\varepsilon}}^p := \int_{\Omega_\varepsilon} |v(x)|^p dx.$$

Напомним, что $\mathbf{L}_q$ и $\mathbf{L}_{q,\varepsilon}$ являются сопряженными пространствами к $\mathbf{L}_p$ и $\mathbf{L}_{p,\varepsilon}$, где $q = p/(p-1)$. Обозначим через $\mathbf{V}' := H^{-1}(\Omega;\mathbb{C})$ и $\mathbf{V}_\varepsilon' := H^{-1}(\Omega_\varepsilon;\mathbb{C})$ пространства, сопряженные, соответственно, к $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_\varepsilon$.

Предполагается, что параметр θ принимает положительные значения. В зависимости от этого параметра будут получаться различные предельные (усредненные) задачи.

Рассматриваются (см. [7]) обобщенные решения задачи (1), т.е. функции $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t)$, $x \in \Omega_\varepsilon$, $t \ge 0$,

$$u_\varepsilon \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_4^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_{4,\varepsilon}),$$

удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\begin{gathered} -\int_0^\infty\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial t}\, dxdt + (1+\alpha\mathrm{i})\int_0^\infty\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla\psi\, dxdt - \\ -\int_0^\infty\int_{\Omega_\varepsilon}\left(\left(R\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon - \left(1+\beta\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{i}\right)|u_\varepsilon|^2 u_\varepsilon\right)\right)\psi\, dxdt + \\ + \varepsilon^\theta \int_0^{+\infty}\int_{S_\varepsilon} q\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon\psi\, d\sigma dt = \int_0^\infty\int_{\Omega_\varepsilon} f(x)\psi\, dxdt \end{gathered} \tag{4}$$

для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}_\varepsilon \cap \mathbf{L}_{4,\varepsilon})$.

Если $u_\varepsilon \in L_4(0,M;\mathbf{L}_{4,\varepsilon})$, то

$$\begin{aligned} &R\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(x,t) - \left(1+\beta\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{i}\right)|u_\varepsilon(x,t)|^2 u_\varepsilon(x,t) \in \\ &\qquad \in L_{4/3}(0,M;\mathbf{L}_{4/3,\varepsilon}), \end{aligned}$$

если $u_\varepsilon \in L_2(0,M;\mathbf{V}_\varepsilon)$, то $(1+\alpha\mathrm{i})\Delta u_\varepsilon(x,t) + f(x) \in L_2(0,M;\mathbf{V}_\varepsilon')$, поэтому для любого решения u_ε задачи (1) имеем

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{4/3}(0,M;\mathbf{L}_{4/3,\varepsilon}) + L_2(0,M;\mathbf{V}_\varepsilon').$$

По теореме вложения Соболева

$$L_{4/3}(0,M;\mathbf{L}_{4/3,\varepsilon}) + L_2(0,M;\mathbf{V}_\varepsilon') \subset L_{4/3}\left(0,M;\mathbf{H}_\varepsilon^{-r}\right),$$

где $\mathbf{H}_\varepsilon^{-r} := H^{-r}(\Omega_\varepsilon)$ и $r = \max\{1, d/4\}$. Следовательно, для любого обобщенного решения u_ε задачи (1) имеем $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{4/3}(0,M;\mathbf{H}_\varepsilon^{-r})$.

Замечание 2.1. *Существование обобщенного решения $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (1) для любой $U \in \mathbf{H}_\varepsilon$ и фикси-*

рованного ε, *так, что* $u_\varepsilon(x,0) = U(x)$ *доказывается стандартным методом* (*см., например,* [6, 7, 11]).

Имеет место следующая лемма (ее доказательство проводится аналогично доказательству утверждения XV.3.1 из [7]).

Лемма 2.1. *Пусть* $u_\varepsilon(x,t)$ — *обобщенное решение задачи* (1). *Тогда*

(i) $u \in C(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon)$;

(ii) *функция* $\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{0,\varepsilon}$ *является абсолютно непрерывной на* $\mathbb{R}_+$ *и более того*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{0,\varepsilon} + \|\nabla u_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{0,\varepsilon} + \|u_\varepsilon(\cdot,t)\|^4_{\mathbf{L}_{4,\varepsilon}} - \\ - \int_{\Omega_\varepsilon} R\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)|u_\varepsilon(x,t)|^2dx + \\ + \varepsilon^\theta\int_{S_\varepsilon} q\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)|u_\varepsilon(x,t)|^2 d\sigma = \int_{\Omega_\varepsilon}\mathbb{R}\, f(x)\bar{u}_\varepsilon(x,t)dx,$$

для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$.

При описании пространства траекторий $\mathcal{K}^+_\varepsilon$ для задачи (1), будем следовать общей схеме (см., например, [1, 2]) и определим для каждого отрезка $[t_1,t_2] \in \mathbb{R}$ банаховы пространства

$$\mathcal{F}_{t_1,t_2} : L_4(t_1,t_2;\mathbf{L}_4) \cap L_2(t_1,t_2;\mathbf{V}) \cap L_\infty(t_1,t_2;\mathbf{H}) \cap \\ \cap\left\{v \,|\, \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}(t_1,t_2;\mathbf{H}^{-r})\right\} \tag{5}$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1,t_2}} := \|v\|_{L_4(t_1,t_2;\mathbf{L}_4)} + \|v\|_{L_2(t_1,t_2;\mathbf{V})} + \\ + \|v\|_{L_\infty(0,M;\mathbf{H})} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L_{4/3}(t_1,t_2;\mathbf{H}^{-r})}. \tag{6}$$

Положив $\mathcal{D}_{t_1,t_2} = \mathbf{L}_2(t_1,t_2;\mathbf{V})$, получаем, что $\mathcal{F}_{t_1,t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1,t_2}$, и если $u \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}$, тогда $A(u) \in \mathcal{D}_{t_1,t_2}$, где $A(u) = (1+\alpha \mathrm{i})\Delta u + R(\cdot,\cdot)u \quad - \quad (1+\beta(\cdot,\cdot)\mathrm{i})|u|^2u + f(\cdot)$ (см. [1, 2]). Будем рассматривать обобщенные решения задачи (1).

Определим пространства

$$\mathcal{F}^{\mathrm{loc}}_+ = L^{\mathrm{loc}}_4(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_4) \cap L^{\mathrm{loc}}_2(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}) \cap L^{\mathrm{loc}}_\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}) \cap \\ \cap\left\{v \,|\, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{\mathrm{loc}}_{4/3}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}^{-r})\right\},$$

$$\mathcal{F}^{\mathrm{loc}}_{+,\varepsilon} = L^{\mathrm{loc}}_4(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_{4,\varepsilon}) \cap L^{\mathrm{loc}}_2(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}_\varepsilon) \cap L^{\mathrm{loc}}_\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon) \cap \\ \cap\left\{v \,|\, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{\mathrm{loc}}_{4/3}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}^{-r}_\varepsilon)\right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{K}^+_\varepsilon$ множество всех обобщенных решений задачи (1). Напомним, что для любой функции $U \in \mathbf{H}$ существует хотя бы одна траектория $u(\cdot) \in \mathcal{K}^+_\varepsilon$ такая, что $u(0) = U(x)$ (см., например, [6, 7, 11]). Следовательно, пространство траекторий $\mathcal{K}^+_\varepsilon$ задачи (1) не пусто и достаточно велико. Заметим, что теорема единственности для обобщенного решения задачи (1) доказана не для всех возможных диапазонов изменения дисперсионных параметров α и β (см., [11]).

Ясно, что $\mathcal{K}^+_\varepsilon \subset \mathcal{F}^{loc}_{+,\varepsilon}$ и пространство траекторий $\mathcal{K}^+_\varepsilon$ является трансляционно-инвариантным, то есть, если $u(\cdot) \in \mathcal{K}^+_\varepsilon$, тогда и $T(h)u(\cdot) = u(h+\cdot) \in \mathcal{K}^+_\varepsilon$ для любых $h \geq 0$. Операторы трансляций $\{T(h), h \geq 0\}$ образуют полугруппу, действующую в фазовом пространстве траекторий:

$$T(h) : \mathcal{K}^+_\varepsilon \to \mathcal{K}^+_\varepsilon, \quad h \geq 0.$$

Определим метрики $\rho_{t_1,t_2}(\cdot,\cdot)$ в пространствах $\mathcal{F}_{t_1,t_2}$ следующим образом:

$$\rho_{t_1,t_2}(u,v) = \left(\int_{t_1}^{t_2}\|u(s)-v(s)\|^2_0 ds\right)^{1/2}, \\ \forall\, u,v \in \mathcal{F}_{t_1,t_2}.$$

Эти метрики порождают топологию Θ^{loc}_+ в пространстве $\mathcal{F}^{\mathrm{loc}}_+$. По определению последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}^{\mathrm{loc}}_+$ сходится к функции $v \in \mathcal{F}^{\mathrm{loc}}_+$ при $k \to \infty$ в Θ^{loc}_+, если $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathbf{L}_2(t_1,t_2;\mathbf{H})} \to 0$ $(k \to \infty)$ для любых $t_1, t_2 \geq 0$. Аналогично определяется топология $\Theta^{\mathrm{loc}}_{+,\varepsilon}$ в пространстве $\mathcal{F}^{\mathrm{loc}}_{+,\varepsilon}$ для перфорированной области. Топологии Θ^{loc}_+ и $\Theta^{\mathrm{loc}}_{+,\varepsilon}$ метризуемы и соответствующие метрические пространства являются полными. Мы рассматриваем топологию $\Theta^{\mathrm{loc}}_{+,\varepsilon}$ в пространстве траекторий $\mathcal{K}^+_\varepsilon$ задачи (1).

Напомним, что норма в пространстве $L^b_p(\mathbb{R}_+;E)$, где E – некоторое банахово пространство, определяется по формуле

$$\|f\|_{L^b_p(\mathbb{R}_+;E)} = \left(\sup_{h\geq 0}\int_h^{h+1}\|f(s)\|^p_E ds\right)^{1/p}.$$

Для определения ограниченных множеств в пространстве траекторий $\mathcal{K}^+_\varepsilon$ введем банахово пространство

$$\mathcal{F}^b_{+,\varepsilon} = L^b_4(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_{4,\varepsilon}) \cap L^b_2(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_\varepsilon) \cap \\ \cap\left\{v \,|\, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^b_{4/3}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}^{-r}_\varepsilon)\right\}. \tag{7}$$

Аналогично вводим пространство

$$\mathcal{F}^b_+ = L^b_4(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_4) \cap L^b_2(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}) \cap \\ \cap\left\{v \,|\, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^b_{4/3}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}^{-r})\right\}.$$

Пространства $\mathscr{F}_{+}^{b}$ и $\mathscr{F}_{+,\varepsilon}^{b}$ являются подпространствами пространств $\mathscr{F}_{+}^{\mathrm{loc}}$ и $\mathscr{F}_{+,\varepsilon}^{\mathrm{loc}}$ соответственно.

Напомним, что траекторным аттрактором трансляционной полугруппы $\{T(h)\}$ в пространстве $\mathscr{K}_{\varepsilon}^{+}$ называется множество $A_{\varepsilon} \subset \mathscr{K}_{\varepsilon}^{+}$, которое ограничено в $F_{+,\varepsilon}^{b}$, компактно в $\Theta_{+,\varepsilon}^{\mathrm{loc}}$, строго инвариантно, т.е., $T(h)A_{\varepsilon} = A_{\varepsilon}$ при всех $h \geq 0$, и которое притягивает ограниченные в $F_{+,\varepsilon}^{b}$ множества из $\mathscr{K}_{\varepsilon}^{+}$ в топологии $\Theta_{+,\varepsilon}^{\mathrm{loc}}$ при $h \to +\infty$ (см. [6, 7, 9]).

Пусть $\mathscr{K}_{\varepsilon}$ означает ядро задачи (1), которое состоит из всех обобщенных решений $u_{\varepsilon}(x,t)$, т.е. функций, удовлетворяющих интегральному тождеству

$$
\begin{gathered}
-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_{\varepsilon}} u_{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dxdt + (1+\alpha\mathrm{i})\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_{\varepsilon}} \nabla u_{\varepsilon}\nabla\psi\,dxdt - \\
-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_{\varepsilon}}\left(\left(R\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon} - \left(1+\beta\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{i}\right)|u_{\varepsilon}|^{2}u_{\varepsilon}\right)\right)\psi\,dxdt + \\
+\varepsilon^{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{S_{\varepsilon}} q\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon}\psi\,d\sigma dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega_{\varepsilon}} f(x)\psi\,dxdt \qquad (8)
\end{gathered}
$$

для любой функции $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}; \mathbf{V}_{\varepsilon} \cap \mathbf{L}_{4,\varepsilon})$ и ограниченных в пространстве

$$
\begin{gathered}
\mathscr{F}_{\varepsilon}^{b} = L_4^{b}(\mathbb{R}; \mathbf{L}_{4,\varepsilon}) \cap L_2^{b}(\mathbb{R}; \mathbf{V}_{\varepsilon}) \cap L_{\infty}(\mathbb{R}; \mathbf{H}_{\varepsilon}) \cap \\
\cap \left\{ v \,|\, \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}^{b}(\mathbb{R}; \mathbf{H}_{\varepsilon}^{-r}) \right\}.
\end{gathered}
$$

Аналогично определяется $\mathscr{F}^{b}$ для области без перфорации.

Имеет место утверждение, доказательство которого практически полностью совпадает с доказательством, приведенным в [7] для более частного случая, с использованием вывода диссипативного неравенства для перфорированных областей (см. [5]). Обозначим через Π_{+} — оператор сужения на полуось $\mathbb{R}_{+}$.

Утверждение 2.1. Задача (1) имеет траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_{\varepsilon}$ в топологическом пространстве $\Theta_{+,\varepsilon}^{\mathrm{loc}}$. Множество $\mathfrak{A}_{\varepsilon}$ равномерно (по $\varepsilon \in (0,1)$) ограничено в $\mathscr{F}_{+,\varepsilon}^{b}$ и компактно в $\Theta_{+,\varepsilon}^{\mathrm{loc}}$. Более того,

$$
\mathfrak{A}_{\varepsilon} = \Pi_{+}\mathscr{K}_{\varepsilon},
$$

причем ядро $\mathscr{K}_{\varepsilon}$ непусто и равномерно (по $\varepsilon \in (0,1)$) ограничено в $\mathscr{F}_{\varepsilon}^{b}$.

3. ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом разделе изучаются предельное поведение траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_{\varepsilon}$ для уравнений Гинзбурга–Ландау (1) при $\varepsilon \to 0+$ и их сходимость к траекторному аттрактору соответствующего усредненного уравнения для различных значений параметра $\theta > 0$.

3.1. Критический случай $\theta = 1$

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_0}{\partial t} - (1+\alpha\mathrm{i})\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}_{ij}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right) - \\
-\overline{R}(x)u_0 + (1+\overline{\beta}(x)\mathrm{i})|u_0|^2 u_0 + Q(x)u_0 = \\
= |\square\backslash G(x)|\, f(x), \quad x \in \Omega, \\
u_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\
u_0 = U(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0,
\end{cases} \qquad (9)
$$

где

$$
\hat{a}_{ij}(x) = \int_{\square\backslash G(x)} \sum_{l=1}^{d}\left(\frac{\partial M_i(x,\xi)}{\partial \xi_l} + \delta_{ij}\right)d\xi,
$$
$$
Q(x) = \int_{S(x)} q(x,\xi)\,d\sigma_{\xi}.
$$

Здесь $M_i(x,\xi)$ — 1-периодические функции по ξ, удовлетворяющие задачам

$$
\Delta_{\xi}(M_i + \xi_i) = 0 \quad \text{в} \quad \square\backslash G(x),
$$
$$
\frac{\partial M_i}{\partial \nu_{\xi}} = \nu_i \quad \text{на} \quad S(x),
$$

и имеющие нулевые средние по ячейке периодичности, $G(x) = \{\xi \in \square\colon F(x,\xi) \leq 0\}$ — локальное включение, а $S(x) = \{\xi \in \square\colon F(x,\xi) = 0\}$ — граница включения $G(x)$ в растянутом пространстве ξ, ν_{ξ} — вектор единичной внешней нормали к $S(x)$.

Рассматриваются обобщенные решения задачи (9), т.е. функции $u_0 = u_0(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$,

$$
\begin{gathered}
u_0 \in L_4^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_{+}; \mathbf{L}_4) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_{+}; \mathbf{V}) \cap L_{\infty}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_{+}; \mathbf{H}) \cap \\
\cap \left\{ v \,|\, \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_{+}; \mathbf{H}^{-r}) \right\},
\end{gathered}
$$

удовлетворяющие интегральному тождеству

$$
\begin{gathered}
-\int_{0}^{\infty}\int_{\Omega} u_0\frac{\partial v}{\partial t}\,dtdx + (1+\alpha\mathrm{i})\int_{0}^{\infty}\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{d}\hat{a}_{ij}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dtdx - \\
-\int_{0}^{\infty}\int_{\Omega}(\overline{R}(x)u_0 - (1+\overline{\beta}(x)\mathrm{i})|u_0|^2 u_0 - Q(x)u_0)v\,dtdx = \qquad (10) \\
= \int_{0}^{\infty}\int_{\Omega} |\square\backslash G(x)|\, f(x)v\,dtdx
\end{gathered}
$$

для любой функции $v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_{+}; \mathbf{V} \cap \mathbf{L}_4)$.

Задача (9) имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в соответствующем пространстве траекторий $\overline{\mathcal{K}}^{+}$, причем

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_{+}\overline{\mathcal{K}},$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ – ядро задачи (9) в $\mathcal{F}^{b}$, которое определяется по аналогии с $\overline{\mathcal{K}}_{\varepsilon}$, но для области без перфорации.

Сформулируем основную теорему об усреднении аттракторов уравнений Гинзбурга–Ландау в этом случае.

Теорема 3.1. *В топологическом пространстве* Θ_{+}^{loc} *справедливо предельное соотношение*

$$\mathfrak{A}_{\varepsilon} \to \overline{\mathfrak{A}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{11}$$

Кроме того

$$\mathcal{K}_{\varepsilon} \to \overline{\mathcal{K}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \text{ в } \quad \Theta^{\text{loc}}. \tag{12}$$

Замечание 3.1. Заметим, что все функции, определенные в перфорированной области и удовлетворяющие граничным условиям, могут быть продолжены внутрь отверстий с сохранением соответствующих норм (см. [12, 13] и [14]). Отметим, что оператор продолжения строится аналогично работе [14]. Он действует только по переменной x и не зависит от t. Соотношения (11) и (12) надо понимать с учетом оператора продолжения и они выполняются для любого такого продолжения.

3.2. Субкритический случай $\theta > 1$

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} - (1+\alpha i)\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}_{ij}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right) - \overline{R}(x)u_0 + \\ +(1+\overline{\beta}(x)i)|u_0|^2 u_0 = |\square\backslash G(x)|\, f(x), \quad x \in \Omega, \\ u_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_0 = U(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \end{cases} \tag{13}$$

здесь $\hat{a}_{ij}(x)$ – определены также как и в подразделе 2.1 ($i, j = 1,\ldots,d$).

Рассматриваются обобщенные решения задачи (13), т.е. функции $u_0 = u_0(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$,

$$u_0 \in L_4^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_4) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}) \cap \\ \cap \left\{ v \,|\, \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}^{-r}) \right\},$$

удовлетворяющие интегральному тождеству

$$-\int_0^\infty\int_\Omega u_0 \frac{\partial v}{\partial t}\,dtdx + (1+\alpha i)\int_0^\infty\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} \hat{a}_{ij}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dtdx - \\ - \int_0^\infty\int_\Omega (\overline{R}(x)u_0 - (1+\overline{\beta}(x)i)|u_0|^2 u_0)v\,dtdx = \tag{14}$$

$$= \int_0^\infty\int_\Omega |\square\backslash G(x)|\, f(x)v\,dtdx$$

для любой функции $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{V} \cap \mathbf{L}_4)$.

Задача (13) имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в соответствующем пространстве траекторий $\overline{\mathcal{K}}^{+}$, причем

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_{+}\overline{\mathcal{K}},$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ – ядро задачи (13) в $\mathcal{F}^{b}$.

Сформулируем основную теорему об усреднении аттракторов уравнений Гинзбурга–Ландау в этом случае.

Теорема 3.2. *В топологическом пространстве* Θ_{+}^{loc} *справедливо предельное соотношение*

$$\mathfrak{A}_{\varepsilon} \to \overline{\mathfrak{A}} \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{15}$$

Кроме того

$$\mathcal{K}_{\varepsilon} \to \overline{\mathcal{K}} \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+ \text{ в } \Theta^{loc}. \tag{16}$$

3.3. Суперкритический случай $\theta < 1$

Решения исходной задачи в этом случае стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0+$.

Сформулируем основную теорему об усреднении аттракторов уравнений Гинзбурга–Ландау в этом случае.

Теорема 3.3. *В топологическом пространстве* Θ_{+}^{loc} *справедливо предельное соотношение*

$$\mathfrak{A}_{\varepsilon} \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{17}$$

Кроме того

$$\mathcal{K}_{\varepsilon} \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+ \quad \textit{в} \quad \Theta^{\text{loc}}. \tag{18}$$

4. КОММЕНТАРИИ

Доказательство основных утверждений проводится на основе асимптотического анализа. Решения ищутся в виде асимптотического ряда

$$u_\varepsilon(t,x) = u_0(t,x) + \\ + \varepsilon u_1\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 u_3\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \ldots, \tag{19}$$

после подстановки которого в задачу приравниваются слагаемые с соответствующими степенями ε (см., например, [15]).

Используя равномерные оценки по малому параметру, которые доказываются с помощью леммы 2.1, получаем утверждения о сходимости решений, а затем и аттракторов.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого и второго авторов в подразделах 3.1 и 3.3 поддержана КН МНиВО РК (грант AP14869553), работа четвертого автора в подразделе 3.2 поддержана РНФ (грант 20-11-20272), а в разделе 2 поддержана МОН РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 157 075-15-2022-284).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны анонимным рецензентам за внимательное прочтение текста работы и высказанные замечания, которые позволили улучшить презентацию результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* Strong Convergence of Trajectory Attractors for Reaction–Diffusion Systems with Random Rapidly Oscillating Terms // Communications on Pure and Applied Analysis (CPAA). 2020. V. 19. № 5. P. 2419–2443.
2. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 140. Art. No 110208.
3. *Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А.* Об аттракторах системы уравнений Навье–Стокса в двумерной пористой среде // Проблемы математического анализа. 2022. Т. 115. С. 15–28.
4. *Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Pankratov L.S.* Homogenization of Trajectory Attractors of Ginzburg–Landau equations with Randomly Oscillating Terms // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B (DCDS-B). 2018. V. 23. № 3. P. 1133–1154.
5. *Бекмаганбетов К.А., Чепыжов В.В., Чечкин Г.А.* Сильная сходимость аттракторов системы реакции–диффузии с быстро осциллирующими членами в ортотропной пористой среде // Известия РАН. Серия математическая. 2022. Т. 86. № 6. С. 47–78.
6. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
7. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002.
8. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linкires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
9. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York (NY): Springer-Verlag, 1988.
10. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. № 10. P. 913–964.
11. *Mielke A.* The complex Ginzburg–Landau equation on large and unbounded domains: sharper bounds and attractors // Nonlinearity. 1997. V. 10. P. 199–222.
12. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
13. *Жиков В.В.* Об усреднении в перфорированных случайных областях общего вида // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 1. С. 41–58.
14. *Conca C.* On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics. // J. Math. Pures Appl. 1985. (9) 64. № 1. P. 31–75.
15. *Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 4. С. 730–754.

ON ATTRACTORS OF GINZBURG–LANDAU EQUATIONS IN DOMAIN WITH LOCALLY PERIODIC MICROSTRUCTURE. SUBCRITICAL, CRITICAL AND SUPERCRITICAL CASES

K.A. Bekmaganbetov[a,b], A. A. Tolemys[c,b], V. V. Chepyzhov[d], and G.A. Chechkin[f,e,b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Astana, Kazakhstan*

[b] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[c] *Eurasian National University named after L.N. Gumilyov, Astana, Kazakhstan*

[d] *Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow, Russia*

[e] *Institute of Mathematics with a Computer Center — a division of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation*

[f] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In the paper we consider a problem for complex Ginzburg–Landau equations in a medium with locally periodic small obstacles. It is assumed that on the obstacle surface one can have different conductivity coefficients. We prove that the trajectory attractors of this system converge in a certain weak topology to the trajectory attractors of the homogenized Ginzburg–Landau equations with an additional potential (in the critical case), without the additional potential (in the subcritical case) in a medium without obstacles, or simply disappear (in the supercritical case).

Keywords: attractors, homogenization, Ginzburg–Landau equations, nonlinear equations, weak convergence, perforated domain, rapidly oscillating terms