ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 138–143

УДК 517.54

СОЗДАНИЕ НОВОЙ МАТЕМАТИКИ ШКОЛЬНИКАМИ

© 2023 г. Академик РАН А. Л. Семенов[1,2,3,*], С. Ф. Сопрунов[4,**], И. А. Иванов-Погодаев[2,***]

Поступило 25.01.2023 г.
После доработки 26.02.2023 г.
Принято к публикации 09.03.2023 г.

В работе обсуждается пример учебного проекта современной математики, образовательный процесс которого опирается на создании учащимися новой для них математики. В рассматриваемом примере полученные в результате работы учащихся математические результаты в области теории определимости обладают также “абсолютной” новизной, являются основой для профессиональных публикаций. Описанный курс был построен на базе последних результатов авторов настоящей статьи в теории определимости. Новые результаты были получены группой из 10 школьников из разных регионов России.

Ключевые слова: российская математическая школа, школа Константинова, деятельностная педагогика, математическое образование, исследовательская деятельность школьников, теория определимости, высокомотивированные учащиеся

DOI: 10.31857/S2686954323700224, **EDN:** MTJGZA

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди образовательных принципов (правил) великого Яна Коменского [1, гл. XXI] мы находим, что учиться делать что-то надо, делая это (**Fabricando fabricamur** – создавая, создаешь себя): учиться ковать – ковкой, учиться рассуждать, рассуждая и т.д. Школа должна быть местом, где кипит работа. В XX веке Пол Халмош писал: “Единственный способ изучать математику – это ее создавать” [2, с. 7]. Обсуждаемый им подход восходит к Роберту Муру [3].

В Советском Союзе данный подход использовался в университетском образовании, в частности в школе Николая Николаевича Лузина (“Лузитании”) и в школьных математических кружках, начиная с середины 1930-х гг. В середине 1960-х гг. он стал элементом регулярного школьного образования для высоко-мотивированных учащихся. Его идеологом и пропагандистом главой всего направления в педагогике в течение ряда десятилетий был Николай Николаевич Константинов [4].

Анализ продолжающейся традиции российского математического образования [5, 6] приводит нас к выводу о том, что эффективный способ освоения математической деятельности может опираться на:

- самостоятельное создание математики: эксперимент, высказывание гипотез, формулирование определений, теорем, построение и отладка доказательств;
- высокий уровень новизны задач для обучающегося – решение задач, которые “неизвестно-как-решать”.

Мы полагаем, что такой подход становится необходимым в XXI веке не только для математиков, поскольку наиболее востребованными качествами человека на рабочем месте и в жизни сегодня становятся именно *способность к самостоятельному поиску решений, способность решать новые, неожиданные задачи.*

Важно, что эти качества нужны уже не только “творческим” личностям, ученым-исследователям, изобретателям и пр. Они оказываются полезными, востребованными для всех людей. Отсюда следует желательность их формирования для всех учащихся массовой школы. Нам кажется, что наиболее эффективно эта задача может ре-

[1] *Московский государственный университет мени М.В. Ломоносова Москва, Россия*
[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
[3] *Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань, Россия*
[4] *Центр педагогического мастерства Департамента образования и науки Москва, Россия*
**E-mail: alsemno@ya.ru*
***E-mail: soprunov@mail.ru*
****E-mail: ivanov-pogodaev@mail.ru*

шаться именно в рамках математического образования, хотя мы не отрицаем такой возможности ни в одном школьном предмете.

Задача такого формирования чрезвычайно упрощается благодаря цифровым технологиям. Разгружая человека (ученика – в том числе) от нетворческих задач, от заучивания рутинных операций и их автоматического выполнения, они позволяют сосредоточиться на творческих задачах.

2. ПРОЕКТ

В настоящей работе мы описываем реализацию указанных принципов в работе не с массовыми школьниками, а с высокомотивированными школьниками "первой лиги". Это первый этап исследования, целью которого являются исследование эффективности выбранных методов обучения и возможность в дальнейшем их применения в массовой школе.

В России центром работы с высокомотивированными школьниками является Образовательный центр "Сириус", расположенный в районе города Сочи на берегу моря. Авторы настоящей работы получили предложение по проведению в Сириусе Проекта "Теория определимости" в рамках Майской проектной программы по математике и теоретической информатике 1–24 мая 2022 г. [7] (дальше для краткости будем писать просто Проект).

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В качестве математического содержания Проекта была выбрана теория определимости. Основы этой теории были заложены еще в XIX веке; на знаменитых математическом и философском конгрессах 1900 г. в Париже ей было посвящено несколько докладов ведущих математиков. В последующие годы эти вопросы изучались польскими (Альфред Тарский) и американскими (Эдвард Хантингтон) логиками. Определенный ренессанс проблематики наметился в 1950-е гг., когда Ларс Свенониус доказал свою замечательную теорему – "теорему полноты" для определимости [8]. В тот же период интенсивно развивались методы конечных автоматов, в этом русле был получен выдающий результат Рабина об определимости на бесконечных деревьях, доложенный на конгрессе в Ницце [9], среди вызвавших интерес и широко цитируемых была теорема Кобхема–Семенова [10] и результаты ученика Семенова – Андрея Мучника – по решению проблемы Рабина [11] и новому доказательству теоремы Кобхема–Семенова [12]. Доказательство Мучника последней теоремы было основано на развитии идеи Тарского о самоопределимости. Несмотря на десятки работ последних десятилетий по проблематике теории определимости, по сравнению с другими областями математической логики эта тема мало разработана, и есть большие шансы получить там новые красивые результаты. В последние годы авторы настоящей публикации получили ряд результатов в этой области и поставили проблемы, относящиеся к определимости на числовых и графовых структурах, которые не являются однородными (для однородных структур результаты были получены ранее результаты другими авторами).

Наш выбор проблематики мини-курса Проекта был основан на следующем:

• возможность быстрого вхождения школьников в тему – небольшой объем теории, которую нужно освоить перед началом работы;

• возможность проведения эксперимента и обсуждения результатов, "олимпиадный" стиль возникающих задач; возможность использования числовой и графовой интуиции;

• высокая вероятность получения "абсолютно" нового (т.е. неизвестного ни руководителям Проекта, ни, по всей видимости, мировой математике) результата на базе уже имеющихся результатов и подходов.

Приведем систему математических понятий, которую мы использовали в нашем Проекте (см. [13]).

Пусть задано некоторое множество объектов – *универсум*. В нашем Проекте мы начинали с универсумов целых и рациональных чисел. Рассматривались также натуральные числа и графовые обобщения целых и натуральных чисел – древесные структуры.

На универсуме задаются *отношения*. Основными случаями в программе Проекта были отношения следования ($y = x + 1$) и обычного линейного порядка.

Пусть теперь на универсуме задана произвольная система отношений S. Отношение R *определимо* через систему S, если существует логическая формула, определяющая R, значения имен отношений в которой берутся из S. Например, отношение "между" на рациональных числах определимо через отношение порядка – "меньше". Этот простой пример является исходным для понимания всей рассматриваемой ситуации. Действительно, можно увидеть, что отношение "меньше", наоборот, неопределимо через "между". И взрослые математики, и способные школьники относительно быстро находят доказательство этого факта: существует преобразование (перестановка) рациональных чисел, сохраняющая "между" (а значит, сохраняющая также все, что можно определить через "между") и не сохраняющая "меньше". Такой перестановкой – автоморфизмом "между" – является "переворачивание" рациональной прямой, например, смена знака рационального числа. В общем случае возникают естественно определяемые понятия:

• *пространство* определимости – множество отношений, замкнутое относительно определимости;

• *группы автоморфизмов* пространства;

• *соответствие Галуа* между пространствами определимости и их группами автоморфизмов.

Формулируется *Основная задача:* описать *решетку* определимости всех подпространств данного пространства.

Естественно пытаться описывать решетку определимости, рассматривая замкнутые (в естественной топологии) *надгруппы группы автоморфизмов* исходного пространства. Однако простейшие примеры, которые быстро находят сами учащиеся, показывают, что такой подход продуктивен, но недостаточен: группы автоморфизмов в некоторых случаях оказываются слишком бедными.

Достижение Ларса Свенониуса – теорема полноты для определимости – состоит в том, что автоморфизмов оказывается достаточно, если наряду с основной структурой рассматривать ее *элементарные расширения*. Идея последнего понятия состоит в добавлении к универсуму некоторых "идеальных элементов", при этом истинность в меньшей структуре любого высказывания с параметрами из нее эквивалентна его истинности в большей структуре. Например, в случае следования целых чисел элементарное расширение можно получить, добавив к целым числам сколько-то не связанных копий этого множества. В случае порядка рациональных чисел всякое его расширение просто изоморфно самим упорядоченным рациональным числам.

Мы кратко описали весь "реквизит", который нам необходим для развертывания исследовательской работы учащихся. Как видите, он имеет небольшой объем и базируется на доступных школьникам понятиях.

4. СТРУКТУРА УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПРОЕКТА

Наша работа с учащимися состояла из следующих этапов.

1. Формирование содержания Проекта как одного из четырех направлений работы майской смены Сириуса.

2. Предложение учащимся-кандидатам задач подготовительного цикла с пояснениями по всем четырем направлениям.

3. Выбор каждым кандидатом своего направления и решение задач подготовительного цикла этого направления.

4. Предложение учащимся задач второго этапа подготовительного цикла выбранного направления и личное онлайн-собеседование по задачам второго этапа подготовительного цикла.

5. Очная работа в Сириусе с отобранными учениками, которые успешно прошли второй этап.

Использованный нами формат очной работы школы Сириуса предполагает мини-курсы, составленные из четырех этапов, каждый из которых занимает 4 дня. Между этапами объявляется день отдыха, занятый экскурсиями и другими видами отдыха. Весь учебный день с перерывами на обед и краткие перемены состоит в совместной работе в небольшой аудитории и мало управляемой самостоятельной работы учащихся вне аудитории. Общий режим дня регламентируется временем завтрака, обеда и ужина – питание для учеников бесплатно. По количеству учебных часов такой мини-курс вполне можно приравнять к семестровому университетскому курсу или исследовательскому семинару.

Помимо авторов статьи, в реализации Проекта также принимал участие А.Я. Канель-Белов. Предварительная апробация программы Проекта прошла в 2021 г. в рамках Летней конференции Турнира городов в Берендеевых полянах в Костромской области [14, 15], где несколько школьников работали 8 дней.

В результате входного отбора и персонального выбора кандидатов на наш Проект пришли 10 учащихся 10-х и 11-х классов из следующих городов: Жуковский (Московская область), Курган, Новоуральск (закрытый город в Свердловской области), Москва (двое школьников, один из них – из Ярославской области, но учится в московском интернате), Томск, Кемерово, Самара, Санкт-Петербург.

В течение первого из четырех этапов Проекта учащиеся изучали основные понятия, кроме понятия элементарного расширения, строили примеры определения одних отношений через другие. Это позволило им освоиться с базовой системой объектов, "кирпичиков", из которых строятся конструкции и рассуждения. Они строили формулы, соответствующие интуитивному представлению о том, как что-то одно можно определить через что-то другое. Важным моментом здесь было понимание того, что НЕЛЬЗЯ использовать в определении. А именно, в определении нельзя использовать имена объектов и, конечно, отношений, о которых заранее не объявлено, что они могут входить в определения, нельзя использовать переменные для множеств, последовательностей, функций: переменные могут иметь значениями только объекты – элементы универсума. В этом обсуждении мы не давали сразу формального определения формулы, правил использования скобок и т.п., что обычно делается в курсах математической логики. В какой-то момент такого общего обсуждения всем стало ясно, что такое формула и в чем смысл использования скобок.

Завершением первого этапа Проекта была постановка задачи о том, как доказать, что что-то НЕЛЬЗЯ определить. В нашем контексте, как и во многих других случаях в математике, доказательство невозможности требовало выхода за рамки уже построенной системы понятий. Учащиеся на частном примере упомянутых выше отношений “меньше” и “между” приходили к идее автоморфизма. Формальное определение не составляло большого труда, понимание метода автоморфизмов было важным достижением. Как известно, осознание ключевой роли автоморфизмов было основой для построения знаменитой Эрлангенской программы Феликса Клейна [16].

Второй этап Проекта включал построение автоморфизмов структур там, где это получается. В частности, строились надгруппы автоморфизмов, соответствующие известным, уже обсужденным примерам отношений Хантингтона и в нужных случаях устанавливалась не-определимость. Обсуждался вопрос об изоморфизме решеток определимости для элементарно эквивалентных структур, в частности, для элементарных расширений. Для некоторой пары подпространств в пространстве следования целых чисел учащиеся доказывали их различие переходом к элементарно эквивалентным. Основной моделью решения задач и проверки найденных решений становилось попарное и групповое обсуждение.

Два последних этапа Проекта были в основном исследовательскими; о них пойдет речь в следующем разделе.

В качестве отклонений от основной линии курса были предложены занятия, где также в форме цепочки задач давались два замечательных результата теории определимости:

• теорема Тарского об элиминации кванторов и, как следствие, разрешимости элементарной алгебры и геометрии;

• теорема Геделя—Тарского о неопределимости истины и, как следствие, теорема Геделя о неполноте.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Уже на втором этапе Проекта были сформированы четыре исследовательские группы. Каждая группа с участием преподавателей сформулировала открытую проблему для решения. Каждая из проблем относилась к построению решетки определимости для соответствующей структуры. Рассматривались такие структуры:

1. Порядок на неотрицательных рациональных числах (Ирина Шатова, Новоуральск).

2. Следование натуральных чисел (Алексей Рутковский, Жуковский; Федор Колотилин, Самара; Анатолий Славнов, Москва; Леонид Михайлов, Санкт-Петербург).

3. Сложение рациональных чисел (Кирилл Дик, Москва; Константин Зюбин, Томск).

4. Бесконечный граф, без циклов, все вершины которого имеют степень 3 (Артемий Денисов, Кемерово; Михаил Сибиряев, Курган; Андрей Дмитриенко, Санкт-Петербург; Леонид Михайлов, Санкт-Петербург).

В качестве основного инструмента для решения задач было выбрано рассмотрение надгрупп автоморфизмов в элементарных расширениях. В виде последовательности задач учащимися была доказана теорема Свенониуса.

В ходе двух последующих этапов Проекта все обучающиеся получили новые, неизвестные преподавателям результаты:

• описали некоторые серии пространств отношений;

• доказали некоторые включения для отношений в одних случаях и отсутствие включений — в других.

Участники записывали свои построения, довольно быстро перейдя от заметок на бумаге к набору в редакторе TeX. Итоговые тексты, оформленные как драфт-статьи, были размещены на сайте смены. В ходе двух заключительных этапов Проекта выделялось время для рассказа каждой из групп учащихся другим участникам о своих продвижениях.

Один из участников — Леонид Михайлов, Санкт-Петербург — по своей инициативе самостоятельно построил доказательство известной сложной теоремы, описывающей решетку определимости для порядка рациональных чисел. Первое доказательство этой теоремы, полученное в 1965 г., содержало более сотни страниц [17], последующие доказательства включали тонкие теоретико-групповые построения. Именно такой алгебраический характер носит и доказательство Л. Михайлова, во многом близкое по стилю с доказательством известного математика Питера Камерона [18] (с доказательством Камерона Леонид, конечно, не был знаком).

Полученные результаты каждой группы были первоначально записаны для внутреннего использования в группе. Запись большинства из них на этом этапе потребовала десятков страниц. Дальнейшая совместная работа между членами каждой из групп и преподавателями продолжилась дистанционно. Уже сейчас результаты, доказательство которых проверено, заслуживают публикации в профессиональных математических журналах. Все группы результатов, видимо, могут быть расширены и дополнены. Совместная работа групп продолжается.

Учащиеся освоили и использовали в математической деятельности систему понятий, включая:

- структура (универсум с отношениями, имеющими имена);
- логический язык;
- определимость;
- автоморфизмы;
- элементарные расширения;
- решетки;
- соответствия Галуа;

а также получили опыт построения и изложения доказательств, использующих эти понятия. Все учащиеся получили опыт коллективной работы, в одной из групп возник и был отдельно прояснен вопрос об авторстве отдельных построений.

6. УНИВЕРСИТЕТСКИЙ ПРИМЕР

В более массовом варианте этот подход используется нами в последние годы для порядка 200 студентов третьего семестра мехмата в рамках обязательного курса математической логики и теории алгоритмов [19]. Здесь, конечно, мы уже не ставим перед всеми студентами курса настоящих исследовательских задач. Речь идет о том, чтобы многие задачи курса оказывались неожиданными для большинства студентов.

Особенно эффективным этот курс оказался в период пандемии. Применение дистанционной технологии обеспечивало хорошее качество прямого диалога между лектором и каждым студентом, который проявляет инициативу. Для других студентов такая учебная ситуация приближает их к математической кухне их товарищей, а не только взрослых математиков. Во вне-ковидное время такое качество содержательной коммуникации видимо потребуют технологического наращивания в аудиториях более одной небольшой группы. Письменное общение (записки лектору) его не заменяет, возможность использования каждым студентом голосового общения через мобильник требует дополнительных технических и организационно-педагогических мероприятий.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализация Проекта в Майской проектной программе “Сириуса” подтвердила возможность эффективного освоения нового раздела математики школьниками в режиме интенсивного решения новых задач в течение 20 дней. В ситуации работы высокомотивированных детей уровня призеров Всероссийской олимпиады, при определенном выборе проблематики, это может привести к получению абсолютно новых математических результатов.

Обычно для молодых математиков подготовка первой публикации вызывает затруднения: либо нужно изучать большой объем литературы, либо сами результаты носят откровенно технический характер, либо студенту сложно оформить имеющиеся исследования в нужном формате. Описанный проект в значительной степени позволяет преодолеть эти трудности и при этом получить результаты хорошего качества.

Сегодня все одиннадцатиклассники-участники проекта поступили в намеченные ими университеты (Матфак Высшей школы экономики, Санкт-Петербургский государственный университет, Университет ИТМО, Московский физико-технический институт) и успешно учатся, а десятиклассники, в основном, уже обеспечили себе поступление в желаемые вузы. Руководители Проекта надеются, что работа над темами продолжится и завершится профессиональными публикациями участников.

Применение современных цифровых технологий в Проекте не было совершенно необходимым, но мы считаем его критически важным, именно:

- исходный набор учащихся и выбор ими тематики проходили дистанционно;
- учащиеся и преподаватели использовали систему математического набора и презентации на экране;
- в период сессии и после него профессиональная коммуникация продолжается в дистанционной среде.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Фонд “Талант и успех”, Образовательный центр “Сириус”, А.Я. Канель-Белова за помощь в организации и проведении Проекта.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским научным фондом, грант 22-11-00177 (А.Л. Семенов, И.А. Иванов-Погодаев – введение и разделы “Проект”, “Структура учебной программы Проекта”, “Результаты”, “Университетский пример”) и Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 19-29-14199 мк (С.Ф. Сопрунов – разд. “Математическое содержание”, заключение).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коменский Я.А.* Великая дидактика // СПб: Типография А.М. Котомина, 1875. Приложение к журналу “Наша Начальная школа” на 1875 год. URL: https://ru.wikisource.org/wiki/Великая_дидактика_(Коменский_1875)/Глава_XXI (дата обращения 25 января 2023 г.).

2. *Halmos P.R.* A Hilbert Space Problem Book. Springer New York, NY, 1982. 373 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6
3. Journal of Inquiry-Based Learning in Mathematics // URL: https://jiblm.org/ (дата обращения 25 января 2023 г.).
4. *Арлазаров В.Л., Белов А.Я., Бугаенко В.О., Васильев В.А., Городенцев А.Л., Дориченко С.А., Ильяшенко Ю.С., Имайкин В.М., Комаров С.И., Кушниренко А.Г., Лысов Ю.П., Семенов А.Л., Тихомиров В.М., Толпыго А.К., Хованский А.Г., Якушкин П.А., Ященко И.В.* Николай Николаевич Константинов (некролог) // Успехи математических наук. 2022. Т. 77. Вып. 3(465). С. 346–355. https://doi.org/10.4213/rm10052
5. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1(77). С. 413–446. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446
6. *Семенов А.Л.* О продолжении российского математического образования в XXI веке // Вестник Московского университета. 20 серия. Педагогическое образование. 2023. Т. 21. № 2. С. 7–45. https://doi.org/10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45.
7. Майская проектная программа по математике и теоретической информатике, 1–24 мая 2022 г. // Страница сайта Образовательного центра “Сириус”. URL: https://sochisirius.ru/obuchenie/nauka/smena1170/5657 (дата обращения 25 января 2023 г.).
8. *Svenonius L.* A theorem on permutations in models. // Theoria, 1959, 25.3. P. 173–178.
9. *Rabin M.O.* Decidability and definability in second-order theories // Actes du CongrГEs International des Mathématiciens 1970, Gauthier-Villars, Paris 1971. V. 1. P. 239–244. URL: https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1970.1/ICM1970.1.ocr.pdf (дата обращения 25 января 2023 г.).
10. *Семенов А.Л.* Пресбургеровость предикатов, регулярных в двух системах счисления // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18. № 2. С. 403–418.
11. *Мучник Ан.А.* Игры на бесконечных деревьях и автоматы с тупиками. Новое доказательство разрешимости монадической теории двух следований // Дипломная работа, кафедра математической логики, мех.-мат. ф-т МГУ, 1981. Семиотика и информатика, 24, ВИНИТИ, М., 1985. С. 16–40.
12. *Muchnik An.A.* The Definable Criterion for Definability in Presburger Arithmetic and its Applications // Theoretical Computer Science. 2003. 290.3. P. 1433–1444.
13. *Семенов А.Л., Сопрунов С.Ф.* Решетка определимости (редуктов) для целых чисел с операцией следования // Известия РАН. Серия математическая. 2021. 85 (6). С. 245–258. https://doi.org/10.4213/im9107
14. Титульная страница сайта 32-й Летней конференции Международного математического Турнира городов, онлайн, 26.01.2021–03.02.2021 // URL: https://www.turgor.ru/lktg/2020/ (дата обращения 25 января 2023 г.).
15. *Семенов А.Л., Сопрунов С.Ф., Иванов-Погодаев И.А., Исаев Р.Д., Канель-Белов А.Я., Кондратьев В.В., Френкин Б.Р.* Проект 4. Теория определимости: Логика. Алгебра. Геометрия // Сб.: “33rd Summer Conference of the International Mathematical Tournament of Towns”, МИИ, 2021.
16. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (“Эрлангенская программа” // Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей, М.: ГИТТЛ, 1956. С. 399–434.
17. *Frasnay C.* Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes, *Annales de l' institut Fourier*. 1965. V. 15. № 2. P. 415–524.
18. *Cameron P.* 1976 Transitivity of Permutation Groups on Unordered Sets *Matische Zeitschrift* 1976, Vol. 148, 127-139 9 by Springer-Verlag 1976.
19. Страница сайта кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ курс “Введение в математическую логику и теорию алгоритмов” // URL: http://logic.math.msu.ru/vml/2022/

CREATING NEW MATHEMATICS BY SCHOOLCHILDREN

Academician of the RAS A. L. Semenov[a,b,c], S. F. Soprunov[d], and I. A. Ivanov-Pogodaev[b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[b] *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*
[c] *Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan, Russian Federation*
[d] *Center of Pedagogical Excellence of the Department of Education and Science of Moscow, Russian Federation*

The paper discusses an example of an educational project of modern mathematics, the educational process of which is based on the creation by students of new mathematics for them. In the example under consideration, the mathematical results obtained as a result of the work of students in the field of the theory of definability also have an “absolute” novelty and are the basis for professional publications. The described course was built the basis of the latest results of the authors of this article in the theory of definability. The new results were obtained by a group of 10 schoolchildren from different regions of Russia.

Keywords: Russian mathematical school, Konstantinov school, active learning, learning by doing, mathematical education, research activity of schoolchildren, definability theory, highly motivated students