

Уважаемый читатель, данную статью с цветными иллюстрациями Вы можете найти на сайте
https://www.elibrary.ru/title_about_new.asp?id=71077

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

© 2023 г. Г. Б. Шабат^{1,2,3,*}, академик РАН А. Л. Семенов^{4,5,6,**}

Поступило 01.01.2023 г.

После доработки 21.01.2023 г.

Принято к публикации 31.01.2023 г.

Математический эксперимент всегда был ключевым источником для математического открытия. За последние 50 лет благодаря цифровым технологиям его роль в математических исследованиях существенно выросла. Цифровые технологии открыли принципиально новые возможности для эксперимента в математическом образовании, в приближении для основной массы обучающихся математического образования к математическому исследованию. Такое приближение особенно желательно именно в современном мире, где оно становится возможным благодаря цифровым технологиям. В статье обсуждаются результаты работы авторов в течение последних десятилетий по применению компьютерного математического эксперимента на разных ступенях школьного и университетского образования. Особое внимание уделяется средам динамической геометрии. Также рассматриваются возможности использования систем компьютерной алгебры. Подробно рассматривается проект работы школьников над обобщениями теоремы Наполеона.

Ключевые слова: математический эксперимент в образовании, компьютерный эксперимент, динамическая геометрия, системы компьютерной алгебры, модернизация математического образования, математические открытия школьников, обобщения теорем Наполеона, теорема ван Обеля

DOI: 10.31857/S2686954323700212, EDN: VRUGUQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена перспективам коренного обновления подходов к изучению математики. Основой этого обновления является систематическое использование компьютерных экспериментов (в некоторых местах мы сокращаем — КЭ), прежде всего — в работе обучающегося.

Основное положение, разделяемое авторами и подробно обсуждаемое в работе [1], состоит в следующем:

В сегодняшнем мире для большинства учащихся, в аспекте их мотивации, математического и интеллектуального развития, освоение общих методов математической деятельности должно иметь больший приоритет, чем знание формулировок и доказательств теорем, алгоритмов и стратегий решения известных классов задач.

В работе математика и изучающего математику ученика мы выделяем экспериментальную фазу математической деятельности, планирование и постановку эксперимента, наблюдение, выдвижение, подтверждение и опровержение гипотез. При этом уже имеющаяся мировая практика убеждает нас в том, что компьютер является чрезвычайно мощным средством математического эксперимента. Он делает реальностью экспериментальную работу каждого учащегося. Особую важность имеет наглядная среда проведения эксперимента и представления его результатов.

Попытки доказательства должны логично вытекать из экспериментального материала, им мотивироваться и постоянно соотноситься с ним. Индивидуально конструируемые каждым учащимся, на его уровне, доказательства также создаются при наглядной компьютерной поддерж-

¹ Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия

² Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия

³ Независимый Московский университет, Москва, Россия

⁴ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

⁵ Институт образования, НИУ Высшая школа экономики, Москва, Россия

⁶ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*E-mail: george.shabat@gmail.com

**E-mail: alsemno@ya.ru

ке: чертежи иллюстрируют доказательства, отдельные вычисления проводит компьютер и т.д.

Мы утверждаем, что математические эксперименты уже на школьном уровне могут быть столь же зрелищными, как физические, химические и биологические. В таких экспериментах компьютер, как правило, играет решающую роль, внося вклад в осознание учащимся красоты математики.

Наконец, даже при традиционном подходе к преподаванию, когда ученикам *сообщаются* утверждения и доказательства, а они должны их выучить (в лучшем случае — понять), “демонстрационный эксперимент” или иллюстрация, представляемые учителем, оказываются полезными (как и демонстрации в естественных науках).

Настоящая работа содержит примеры соответствующих образовательных ситуаций и стратегий как для стандартных тем школьной и университетской “общеобразовательной” математики, так и для исследовательских проектов, дополняющих эти стандартные темы. В рамках нашего подхода ответ на вопрос “*Чему учим?*” тавтологичен *математике*, а не навыкам решений стандартных задач. По поводу *зачем?* обратимся к [2]:

*Математика — замечательная наука, и, кого бы мы ей ни обучали, наша главная цель — убедить в этом обучаемых. ... Однако передать наши чувства ... невозможно, лишь предоставив учащемуся возможность наблюдать за чужими рассуждениями и действиями — даже восхищенно, как за танцами Майи Плисецкой (“я все равно так никогда не смогу...”); недостаточно также ограничиться действиями по образцу, непонятными и неинтересными. Необходимо помочь каждому учащемуся построить **собственные отношения с математикой**, честные, осмысленные и приносящие радость; в рамках этих отношений он должен научиться что-то делать, что-то понимать и что-то формулировать.*

В рамках грамотно (с участием учителя) спланированных серий компьютерных экспериментов учащиеся самых разных уровней могут всему этому научиться, получая удовольствие и испытывая законную гордость в случае успеха.

О роли доказательств следует сказать подробнее. Традиционные возражения против экспансии математических экспериментов состоят в том, что доказательные рассуждения — основа математики — отодвигаются на второй план или вообще исчезают.

Отчасти эти возражения основательны. Однако, во-первых, само понятие доказательства в математике не является чем-то абсолютным и совершенно ясным, см. [3] и [4]. Мы еще вернемся к этому тезису. Во-вторых, принципиальной ошибкой является единообразное рассмотрение задач обучения доказательным рассуждениям разных категорий учащихся.

Для учащихся, далеких от математики, ситуация сегодня в лучшем случае сводится к бездумному заучиванию чужих доказательств, без какого-то бы ни было их понимания, а тем более — “присвоения”. Один из авторов (ГБШ), проработавший более 30 лет в Российском гуманитарном государственном университете, может утверждать это с полной ответственностью. Для этих обучающихся понимание математики как экспериментальной науки, в которой истинность хотя бы некоторых утверждений допускает **проверку**, предпочтительнее восприятия математики как набора текстов (некоторые из которых помечены словами *теорема*, *следовательно*, *необходимо* и т.п.), иногда на специальных языках, а овладение математикой — как способности к **воспроизведению** этих текстов. Мнение о том, что некоторые из этих текстов действительно что-то *доказывают*, делают более обоснованным, убедительным, увы, почти исключительно тоже является повторением текста, бездумным воспроизведением точки зрения учителя. Таким образом, мы получаем картину, полностью противоположную желаемой: вместо уважения к истине и самостоятельному ее открытию, мы получаем ничем не подкрепленное (кроме отметки на экзамене) следование авторитету.

Более серьезен вопрос о сохранении обучения доказательствам (иногда скучноватым) будущих математиков, физиков, аййтишников, инженеров и т.п. Предлагаемый нами подход предполагает сочетание эксперимента как источника гипотез и инструмента их проверки, с доказательством. Конечно, доказательство может представлять собой полный перебор в каком-то множестве, если полнота перебора *доказана* (например, очевидна). Формирование умения что-то доказывать является частью профессиональной квалификации, отсутствие доказательства какого-то утверждения может обернуться неэффективностью труда или даже опасностью для жизни.

Предлагаемый нами подход выглядит естественным для ученика, если и эксперимент, и доказательство возникают, используются, доставляют удовольствие, вызывают доверие — другими словами становятся частью математической культуры — уже в *начальной школе*. В более старшем возрасте доверие к “очевидным” “экспериментальным фактам” полезно подорвать **опровержением** правдоподобных утверждений — например, что определяемая *методом Ньютона* последовательность $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ всегда (и очень быстро) сходится к решению уравнения $f(x) = 0$. В результате такого “подрыва” мы возвращаемся к необходимости доказательства.

Но даже уделяя достаточное внимание и время классическим доказательствам, не следует их

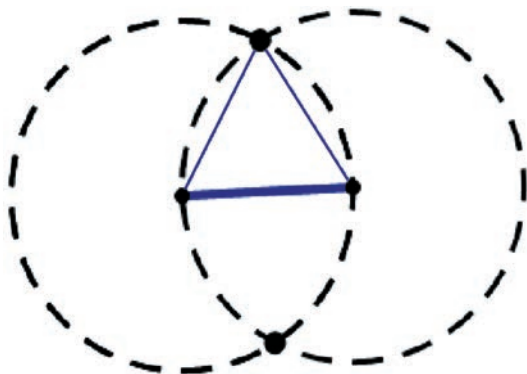


Рис. 1. Пересечение окружностей.

идеализировать и полагать, что проблемы обучения *строгому мышлению* решаются возвращением к стандартам, царившим в докомпьютерную эпоху. Дело в том, что представление о полной строгости даже таких почтенных аксиоматических наук, как *евклидова планиметрия*, требует серьезных оговорок. Классическим примером формального пробела в Евклидовых “Началах” (см. [5]) является утверждение о непустом пересечении окружностей, на котором основан “алгоритм” построения равностороннего треугольника с заданной стороной, см., например, [6]. Успешной попыткой заполнения пробелов такого рода является книга [7], но не может быть и речи о школьном курсе (даже для самых продвинутых), построенном на ее основе¹. Также улучшение ситуации намечено в [8], однако эта попытка нуждается в продвижении и завершении.

Даже в лучших школах докомпьютерной эпохи допускались разные “уровни” строгости доказательств, а это безусловно противоречит “пуристичному” профессиональному взгляду на доказательства (ср. булгаковский диалог Воланда с буфетчиком о *первой и второй свежести осетрины*). Конечно, ценность доказательств школьной геометрии — не в воспроизведении “всего Евклида”, а в том, чтобы дать каждому ребенку *опыт его деятельности* в важнейшей области — математического доказательства, поддержанной наглядностью. С этой точки зрения не так уж важно, наглядность эта — бумажная или компьютерная, просто компьютерная позволяет искать доказательства быстрее и большему числу учащихся, расширить круг участников и сделать более твор-

ческим и увлекательным их труд. В пользу компьютерного эксперимента можно сказать и то, что любые доказательства нетривиальных фактов лучше всего усваиваются на материале проведенных экспериментов с проверкой шагов доказательства в той же компьютерной среде, в которой проводились эксперименты.

Резюмируя, можно сформулировать позицию авторов. *Математика — не просто набор формул, формулировок и методов, знание и умение применять которые необходимы для получения различных аттестатов и дипломов. Это — область интеллектуальной деятельности человечества, некоторое представление о которой, формируемое на основе собственного опыта, весьма желательно для современного культурного человека. Компьютерный эксперимент позволяет приобрести такой опыт.*

О содержательных аспектах компьютерных экспериментов мы поговорим в основной части статьи.

2. ГЕОМЕТРИЯ

Традиционная евклидова геометрия уже в 1980-е гг. представлялась естественным полем для школьного математического эксперимента с применением компьютера. За прошедшие десятилетия многие тысячи учителей и учеников, в том числе в России, использовали в своей работе экспериментальные среды *Cabri Geometry*, *Живой математики (Geometer's Sketchpad)*, *Математического конструктора* и *GeoGebra* (бесплатно распространяемая и общедоступная система). Заметим при этом, что в период 1980-х гг. создание качественных сред динамической (экспериментальной) геометрии было с математической и программистской точки зрения делом весьма нетривиальным, требовавшим очень высокой квалификации и таланта, продемонстрированных Ж.-М. Лабордом и Н. Джакивом.

В 1993 г. Г.Б. Шабат по инициативе А.Л. Семёнова стал руководителем и в 1993—1996 гг. был основным исполнителем (при участии Н.Х. Розова, А.В. Пантуева и др.) масштабной работы Института новых технологий образования (ИНТ — основной распространитель образовательной философии конструкционизма в России) по реализации динамической геометрии в российском образовании. В рамках этой работы все определения, теоремы, доказательства и упражнения основных линий российских учебников по геометрии (авторские коллективы под руководством Атанасяна и Колмогорова) были переведены в формат динамической геометрии “Живая геометрия”, реализованной ИНТ на базе *Geometer's Sketchpad*. Продолжением этой работы стала работа над “Математическим конструктором” под руководством В.Н. Дубровского. Параллельно, в

¹ Краткая и изящная аксиоматика, предлагаемая в [9], определяет плоскость над произвольным полем $\mathbb{K}$ и, в принципе, дополненная характеристикой поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ как единственного локально компактного связного упорядоченного поля, могла бы лечь в основу строгой теории евклидовой плоскости. Однако и этот подход, хотя и доступный особенно сильным школьникам, далеко отстоит от традиций современной педагогики и практики современной школы.

сотрудничестве с болгарским коллективом, в Северном (Арктическом) федеральном университете имени М.В. Ломоносова шла образовательная деятельность группы М.В. Шабановой со школьниками и студентами на базе GeoGebra. Наконец, в том же ИНТ под руководством С.Ф. Сопрунова развивался подход к динамической (в данном случае можно сказать — алгоритмической) геометрии на базе версий Лого во взаимодействии с канадскими (LCSI) и болгарскими (ПГО) исследователями и педагогами.

Традиционные возражения против геометрических курсов, целиком построенных на основе компьютерного эксперимента, звучат как *картинка не может заменить логические рассуждения*. Выше мы уже рассматривали это возражение в общем виде. Фактически оно означает, что выучивание (при сомнительном понимании) чужого доказательства принципиально важнее самостоятельного выдвижения гипотезы о верности геометрического утверждения. Такая позиция, основная и очевидная для массовой школы XIX—XX вв., сегодня становится все менее оправданной и попросту — архаичной.

Мы же считаем, как и ряд других известных математиков, что самостоятельный *анализ математической реальности* (очень хорошо, если представленной наглядно) является необходимым элементом работы математика и ученика, изучающего математику.

Подчеркнем еще раз, что *в наиболее ясной форме доказательство геометрического утверждения проводится именно в той самой динамической среде, в которой это утверждение было открыто (до доказательства и в ходе доказательства) экспериментально*. Предпочтительно, чтобы и доказательство было открыто учащимся — с помощью учителя или самостоятельно. Однако любой объем доказательств, который мы сочтем необходимым для освоения конкретным школьником, потребует меньших затрат времени и энергии от учителя и учащегося, если эти доказательства будут проходить в наглядной среде — на общем экране в классе или на индивидуальных планшетах учеников.

Резюмируем: наглядность является главной опорой школьных геометрических доказательств, очевидность каких-то фактов всегда помогала их доказательству. Использование динамической геометрии расширяет сферу такой помощи.

Если мы принимаем решение о приоритете самостоятельного наблюдения, выдвижения гипотез и построения доказательств о геометрической реальности, то мы получаем основу для пересмотра состава геометрических теорем школьного курса. Необходимость такого пересмотра, перегруженность курса для массового школьника сегодня сомнений не вызывают.

Мы рассматриваем только *планиметрические* темы. Современная компьютерная графика высокой четкости, вычислительная мощность процессоров, применение виртуальной и дополненной реальности, 3D-принтеров делают возможными еще более существенные изменения в изучении *школьной стереометрии* благодаря компьютерному эксперименту.

Рассмотрим несколько показательных примеров, начиная с простейших.

(а) Окружность. Одним из главных детских впечатлений великого математика Александра Гротендика было *определение окружности* — см. его знаменитый текст [10]. Гротендика восхитила сама возможность выражения *идеальной круглости* точной формулировкой (согласно тридцатилетнему опыту одного из авторов, лишь небольшая доля современных студентов нематематического Университета знают определение окружности как геометрического места точек, равноудаленных от ее центра).

Как писал Гротендик², *...в возрасте около 12 лет я был заключен в концлагерь в Риекрос (близ Манда). Там я узнал от другой заключенной, Марии, дававшей мне бесплатные частные уроки, определение окружности. Оно восхитило меня своей простотой и очевидностью, тогда как до этого определения “идеальная круглость” казалась мне мистическим свойством, не выразимым словами. Именно тогда, я думаю, я в первый раз почувствовал (разумеется, не объясняя это себе такими словами) креативную мощь “хорошего” математического определения, формулировки, объясняющей суть дела. Кажется, и по сегодняшний день волнение, которое я испытал тогда, почувствовав эту мощь, ничуть не утихло.*

Эти слова написаны математиком, прославившимся своими “абстрактными” определениями в различных областях математики (прежде всего, в алгебраической геометрии); к его соображениям о правильных определениях и их понимании, иногда эмоционально окрашенном, следует относиться как к исключительно авторитетным.

Мы обсуждаем не столько взаимоотношения учащихся с *текстами* определений, сколько компьютерные эксперименты, проясняющие эти определения. В данном случае речь идет о не вполне очевидной (согласно и Гротендику, и пе-

² В оригинале: *...vers l'âge de douze ans, j'étais interné au camp de concentration de Rieucros (près de Mende). C'est là que j'ai appris, par une détenue, Maria, qui me donnait des leçons particulières bénévoles, la définition du cercle. Celle-ci m'avait impressionné par sa simplicité et son évidence, alors que la propriété de “rotondité parfaite” du cercle m'apparaissait auparavant comme une réalité mystérieuse au-delà des mots. C'est à ce moment, je crois, que j'ai entrevu pour la première fois (sans bien sûr me le formuler en ces termes) la puissance créatrice d'une “bonne” définition mathématique, d'une formulation qui décrit l'essence. Aujourd'hui encore, il semble que la fascination qu'a exercé sur moi cette puissance-là n'a rien perdu de sa force.*

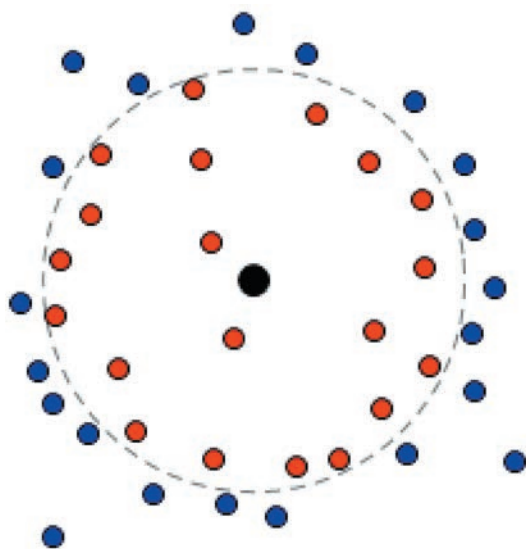


Рис. 2. Расстояния от цветных точек до черной.

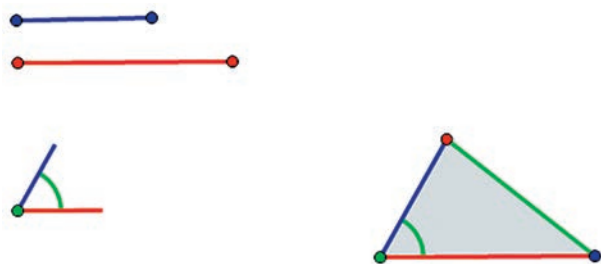


Рис. 3. Первый признак.

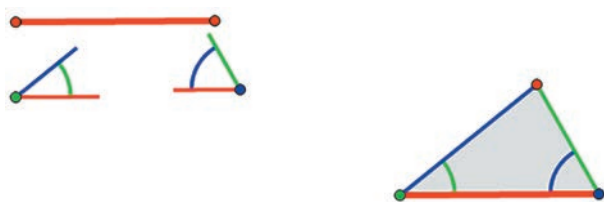


Рис. 4. Второй признак.

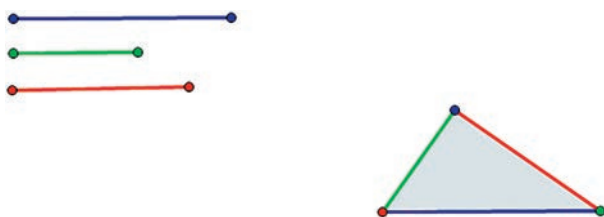


Рис. 5. Третий признак.

дагогическому опыту авторов) связи между *круглостью* и расстояниями до фиксированной точки.

Измерение расстояний между фиксированной и многочисленными случайно выбранными точками, сравнение этих расстояний с фиксированным и разная окраска в результате этих сравнений наглядно постепенно формируют определение *круга* в памяти даже самых “нематематических” учащихся (см. рис. 2).

(б) Теория треугольников. Признаки равенства треугольников могут осваиваться экспериментально как задачи на построение треугольников с заданными элементами.

Эксперимент показывает, что построения, связанные с 1-м и 2-м признаком, возможны при разнообразных комбинациях исходных данных, тогда как на чертеже, связанном с 3-м признаком, треугольник исчезает, как только длина какой-либо стороны превосходит сумму двух других. И возможность, и невозможность, и единственность (последняя и есть признак равенства) результата не только выглядят очевидными; становятся очевидны и причины этого. Школьные “доказательства” этих фактов бледнеют в свете этой очевидности. Но связано это в данном случае не столько с убедительностью наглядности, но и с размытостью оснований школьной геометрии.

На тех же чертежах ученику легко экспериментально открыть необходимость условия “между” для первого признака и условия “прилежащих” для второго признака.

Динамические среды позволяют также экспериментально исследовать равенства треугольников в терминах изометрий — как собственных, так и обращающих ориентацию. Треугольник удастся реально, а не “мысленно” “наложить” на другой — или непосредственно, или отразив.

(с) Изопериметрическая задача для многоугольников. Отношение квадрата периметра многоугольника к его площади инвариантно относительно гомотетий (преобразований подобия). Этот факт, неочевидный для далеких от математики школьников (*квадрат периметра* кажется неосознаваемой абстракцией), убедительно обосновывается с помощью компьютерного эксперимента. Минимизация этой величины может интерпретироваться как задача *Дидоны* (см., например, [8]). Задача нахождения в динамической среде *наилучшего*, в смысле этой величины из n -угольников при фиксированном n весьма поучительна.

Итак, для многоугольника P обозначим

$$\text{Didona}(P) := \frac{\text{perimeter}(P)^2}{\text{area}(P)}.$$

Эксперименты в динамической геометрии могут дать, например, следующие результаты (см. рис. 6).

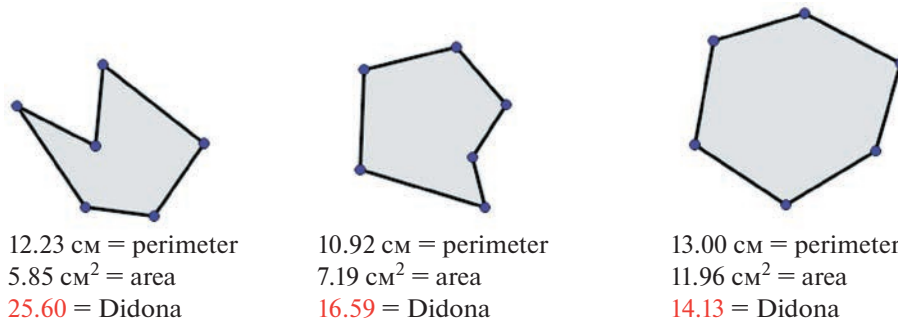


Рис. 6. Эксперименты “число Дидоны”.

Из этих результатов видно, что, чем “круглее” многоугольник, тем меньше его число Дидоны. Наоборот, для многоугольников, которые, например, “изрезаны” или “сплющены”, число Дидоны может быть как угодно велико — в этом можно убедиться экспериментально, рисуя всевозможные многоугольники и видя, как меняется для них число Дидоны. “Нащупав” какую-то закономерность, можно предложить какую-то последовательность многоугольников, для которых число Дидоны будет превосходить заданную границу. Задача доступна заинтересованному восьмикласснику, и важно, что вычисления взял на себя компьютер, а ученику осталась исследовательская и творческая часть.

Широко известна несколько более простая задача: существует ли треугольник со сторонами больше одного метра (километра) и площадью меньше одного квадратного сантиметра (миллиметра). Здесь тоже можно, если задача не решилась сразу, начать экспериментировать, нарисовав треугольник, вычислив его площадь (это делает компьютер), и дальше двигать вершины, чтобы при этом стороны “оставались длинными”, а площадь уменьшалась.

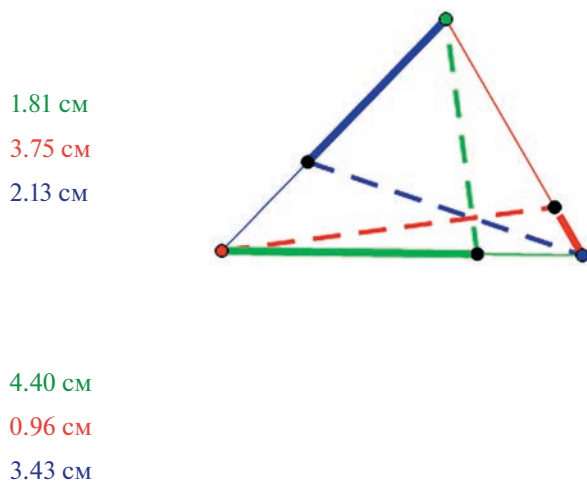


Рис. 7. Теорема Чевы.

В контексте же задачи Дидоны при продолжении исследования возникает вопрос о *минимальном возможном значении* числа Дидоны по всем n -угольникам при фиксированном n . Эксперименты позволяют предположить, что это значение достигается для *правильного* n -угольника, хотя доказать это не очень просто.

Эксперименты же подводят к идее рассмотреть проблему при $n \rightarrow \infty$, т.е. для многоугольников со *сколь угодно большим* числом сторон. Эксперимент подсказывает, что чемпионом среди “многоугольников” будет *окружность*. Для окружности радиуса r число Дидоны:

$$\text{Didona}_{\min} \frac{(2\pi r)^2}{\pi r^2} = 4\pi \approx 12.56,$$

— это число и ограничивает снизу все значения числа Дидоны, которые экспериментатор может (в динамике!) наблюдать. Теоретическое продумывание этого факта содержит много хорошей математики — в частности, определение длины окружности.

Задача Дидоны, конечно, замечательна еще и тем, что вводит ученика в проблему оптимизации ресурсов. Такие проблемы в современном мире играют принципиальную роль.

(д) Теорема Чевы. Предложим Экспериментатору (ученику) нарисовать произвольный треугольник, выбрать на его сторонах три произвольные точки и соединить их с противоположными вершинами (соединяющие отрезки называются *чевианами*, они на рисунке пунктирные). Далее нужно раскрасить участки сторон, как на рисунке: используются три цвета и чередуются “жирные” и “тонкие” отрезки. Это — подготовка к эксперименту, “конструирование экспериментальной установки” с использованием элементарных графических и вычислительных возможностей динамической геометрии.

Следующий шаг — измерение в “среде эксперимента”, на “экспериментальной установке” интересующих нас параметров: длин отрезков, — продемонстрирован на рис. 7.

В нашем тексте и иллюстрациях к нему мы упрощаем изложение: в реальной динамической геометрии, как и в обычных геометрических рассуждениях, всем точкам, отрезкам и т.д. можно давать имена. Дальше можно оперировать с длинами отрезков, получивших имена. После этого ненужные обозначения, вычисления и другие детали можно скрыть на экране. То, что получается, мы и приводим на иллюстрациях.

Задача, которую ставит учитель перед учениками: записать два произведения — всех жирных и всех тонких отрезков.

Следующая фаза эксперимента может состоять в том, чтобы рассмотреть в качестве чевиан известные школьнику отрезки в треугольнике — медианы, биссектрисы, высоты — и посмотреть на два произведения — “жирное” и “простое”. Трудно не заметить, что эти произведения оказываются равными.

Можно поступить и иначе: предложить поэкспериментировать с тремя произвольными отрезками, пытаясь добиться, чтобы получилось равенство.

Теперь можно вернуться к нашей экспериментальной установке, опять рассмотреть общую ситуацию и поставить вопрос об условиях равенства двух произведений. Многие ученики делают эмпирическое открытие и высказывают простую гипотезу: “произведения равны, когда три чевианы проходят через одну точку”.

Эксперимент стал стимулом для доказательства теоремы Чебы, а заодно может дать возможность экскурса в историю Италии, ее математиков и инженеров.

Доказательство, в разных вариантах, также может быть построено совместно с учащимися и с использованием динамической геометрии. Кто-то может начать с доказательства в частных случаях медиан, высот и биссектрис: построив эти линии, вывести на экран полученные шестерки отрезков. Здесь в каждом из случаев начинается новый эксперимент с продумыванием результата: надлежащим образом названные (а лучше покрашенные) отрезки измерить, найти (возможно, с чьей-то помощью) алгебраические выражения для них, многократно в динамической среде перемножить их численно, а затем ОДИН раз проверить соответствующее алгебраическое тождество. Вот как выглядят соответствующие формулы для медиан, высот и биссектрис:

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2},$$

$$a \cos \gamma \cdot b \cos \alpha \cdot c \cos \beta = b \cos \gamma \cdot c \cos \alpha \cdot a \cos \beta,$$

$$\frac{ab}{a+c} \cdot \frac{bc}{b+a} \cdot \frac{ca}{c+b} = \frac{bc}{a+c} \cdot \frac{ca}{b+a} \cdot \frac{ab}{c+b}.$$

Продумывание частных случаев, к примеру, показывает, насколько сильна обобщающая формулировка.

(е) Теорема Наполеона и ее обобщения. Императору Наполеону приписывают следующую теорему:

Теорема 1 (Наполеона). *Центры равносторонних треугольников, построенных (внешним образом) на сторонах произвольного треугольника, сами образуют равносторонний треугольник.*

Теорема эта представляет собой пример занимательного и глубокого “математического фокуса”: начиная с произвольного “неправильного” объекта и применив к нему красивые и понятные операции, мы получаем абсолютно правильный, симметричный объект (того же рода). Конечно, полностью оценить красоту этого факта (и самостоятельно открыть его, до доказательства!) ученик массовой школы может только в среде динамической геометрии. Именно там он, сначала немного “шевелия” вершины треугольника, а потом “войдя во вкус”, старается их переместить в самые экзотические места экрана, видит чудо: “Наполеонов” треугольник — всегда равносторонний.

В настоящее время мы не можем рассчитывать на то, что “массовый” ученик самостоятельно, даже с помощью учителя, докажет теорему Наполеона. Однако многие могут справиться с задачами наблюдения и выдвижения гипотез. Следующий шаг: рассмотрение правильных треугольников, построенных “внутри” исходного.

Связанный с теоремой Наполеона факт, который “рядовой ученик” может не только увидеть, но и доказать — это

Теорема 2 (Вариныона). *Средины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*

Следуя нашему общему принципу подходить к любому ученику как к работающему математику, мы и здесь предлагаем школьнику самому построить “серединный” четырехугольник для различных исходных четырехугольников и ответить на вопрос о том, нет ли свойства, общего для всех получающихся “серединных” четырехугольников.

Кому-то можем предложить даже сделать исходный четырехугольник невидимым, оставить только его вершины, “за которые можно подвигать” всю конфигурацию.

Дальше наступает этап доказательства. Тем, у кого оно сразу не получится, можно посоветовать провести диагональ, рассмотреть часть возникающего чертежа — треугольник и т.д.

Тем, кто справился с задачей доказательства, можно предложить рассмотреть случай невыпуклого четырехугольника, попытаться найти экспе-

риментально и доказательно площадь срединного четырехугольника и т.д.

У обобщений теоремы Наполеона своеобразная история. В 2002–2003 гг. один из авторов (ГБШ) участвовал в использовании “Живой Геометрии” на уроках математики. В частности, это происходило в 8-м классе московской 45-й школы (ныне школе имени Л.И. Мильграма, ее тогдашнего директора) совместно с учительницей В.В. Кулагиной. Наряду с основным материалом учащимся были предложены исследовательские проекты, среди тем которых была и теорема Наполеона. Естественно было рассмотреть какие-то более общие ситуации. Другой автор (АЛС) предположил, что при этом в результате использования мощных средств наглядного компьютерного эксперимента могут быть найдены даже новые, неизвестные не только школьникам, школьным учителям, но и участвовавшим в работе математикам, а возможно, и “абсолютно новые” теоремы.

Это предположение в большой степени оправдалось, вот детальный рассказ о событиях. Восьмиклассником 45-й школы Женей Лисицыным была экспериментально обнаружена “теорема о квадратоиде” (так мы решили называть четырехугольник, диагонали которого равны и перпендикулярны). А теорема состоит в следующем:

Теорема 3 (О квадратоиде). *Центры квадратов, построенных вовне на сторонах любого четырехугольника, являются вершинами квадратоида.*

В 2004 г. организованная А.Л. Семеновым российская делегация из 100 человек участвовала в 10-м международном конгрессе по математическому образованию в Копенгагене (см. [11, 12]). Там был специальный “Российский день” — на 400 кв. м была развернута российская математическая выставка, и мы пропагандировали научно-исследовательскую работу школьников, иллюстрируя утверждение о ее плодотворности результатом Лисицына; квадратоиды были даже изображены на майках членов делегации. Г.Б. Шабат выступил с докладом на эту тему, который был доброжелательно воспринят; полученный математический результат воспринимался как новый, по существу и будучи таким.

Впоследствии Г.Б. Шабат разрабатывал со студенткой МПГУ Полиной Макаровой и преподавательницей МПГУ О.Ю. Тесля методики геометрических исследований с применением динамических сред [13]; обобщения теоремы Наполеона были важным примером. И тогда Полина обнаружила, что “теорема Лисицына” все же известна, она имеет название *теоремы ван Обеля* и была доказана в XIX веке, см. [14].

О некоторых других обобщениях теоремы Наполеона см. [13].

В следующем разделе (до перехода к алгебре в данной статье), написанном Г.Б. Шабатом, пока-

зано, как для доказательства теорем элементарной геометрии можно применять высшую алгебру — комплексные числа и матрицы.

Это делает данную область элементарной геометрии особенно ценной в подготовке учителей математики. Сегодня такая подготовка перегружена разделами математики, даже по своим формулировкам не имеющим отношения к школе, и дает студентам материал, который им никогда не понадобится, плохо усваивается и не содействует их математическому, общепознавательному и общекультурному развитию.

Наш подход связан с рассмотрением *преобразований множеств многоугольников*; этот же подход развит в книге [15], замечательной по сочетанию элементарности и глубины.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАПОЛЕОНА–ДЭВИСА

Для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ введем (симплициальный) конус многоугольников

$$\mathcal{P}_n := \{z = (z_1, \dots, z_n) \mid z_1, \dots, z_n$$

— вершины выпуклого n -угольника\} \subset \mathbb{C}^n.

Очевидно, множество $\mathcal{P}_n$ непусто лишь при $n \geq 3$.

Для произвольного угла $\alpha \in (0, \pi)$ определим *преобразование Наполеона–Дэвиса*

$$N\mathcal{D}_{n,\alpha} : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n,$$

сопоставляющее каждому многоугольнику новый многоугольник, вершины которого лежат вне³ исходного в вершинах равнобедренных треугольников, построенных на сторонах исходного и имеющих равные углы α при вершинах, противолежащих сторонам исходного многоугольника (см. рис. 11).

Преобразование, приписываемое Наполеону, во введенных обозначениях представляет собой $N\mathcal{D}_{3, \frac{2\pi}{3}}$, а теорема Наполеона утверждает, что образ $N\mathcal{D}_{3, \frac{2\pi}{3}}(\mathcal{P}_3)$ состоит из точек пространства $\mathbb{C}^3$, соответствующих равносторонним треугольникам.

Предложение. *Преобразование Наполеона–Дэвиса продолжается до линейного отображения*

$$N\mathcal{D}_{n,\alpha} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Если w_k — вершина равнобедренного треугольника, опирающегося на сторону $[z_{k-1}z_k]$, то это отображение задается формулами:

³ Мы для простоты не рассматриваем новые многоугольники, обращенные *внутрь* исходного.

$$w_k = \frac{i}{2} \frac{e^{-\frac{i\alpha}{2} z_{k-1}} - e^{\frac{i\alpha}{2} z_k}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

где $k \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Доказательство. По определению преобразования Наполеона–Дэвиса имеют место равенства

$$\frac{z_{k-1} - w_k}{z_k - w_k} = e^{i\alpha},$$

для всех $k \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, откуда и следует предложение.

ЧТД

Следствие. В стандартном базисе преобразование Наполеона задается матрицей, пропорциональной матрице

$$ND_{n,\alpha} := \begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 & \dots & \dots & \dots & e^{-\frac{i\alpha}{2}} \\ -e^{\frac{i\alpha}{2}} & e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -e^{\frac{i\alpha}{2}} & -e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\frac{i\alpha}{2}} & -e^{\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix}.$$

Геометрически содержательные обобщения теоремы Наполеона связаны с обнаружением параметров преобразования Наполеона–Дэвиса, при которых результаты этого преобразования обладают какими-то специальными свойствами, т.е. само преобразование не является сюръективным. Поскольку оно линейно, оно не сюръективно тогда и только тогда, когда вырождено.

Основная теорема. Преобразование Наполеона–Дэвиса $\mathcal{ND}_{n,\alpha}$ вырождено тогда и только тогда, когда $e^{in\alpha} = 1$.

Доказательство. Применим простой вспомогательный результат.

Лемма. Имеет место формула для определителя $n \times n$ -матрицы

$$\det \begin{pmatrix} -p & 0 & \dots & \dots & \dots & q \\ q & -p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & q & -p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q & -p \end{pmatrix} = (-1)^n (p^n - q^n).$$

Доказательство. Индукция по n с разложением по 1-му столбцу. **ЧТД**

Для установления основной теоремы остается

положить в лемме $p = e^{\frac{i\alpha}{2}}$ и $q = e^{-\frac{i\alpha}{2}}$. **ЧТД**

Из основной теоремы следует, что при рассмотрении преобразований n -угольников достаточно ограничиться рассмотрением углов, кратных $\frac{2\pi}{n}$; в соответствии с исторической традицией мы будем интерпретировать эти углы как центральные углы правильных многоугольников. Иначе говоря, мы собираемся строить на сторонах произвольных n -угольников правильные m -угольники.

Правильные m -угольники и углы $\alpha = \frac{2\pi}{m}$. Согласно нашей основной теореме, для несюръективности преобразования $\mathcal{ND}_{n,\frac{2\pi}{m}}$ необходимо и

достаточно, чтобы $e^{\frac{2\pi in}{m}} = 1$, т.е. m делит n .

Мы укажем несколько пар (m, n) , при которых многоугольники из образа преобразования Наполеона–Дэвиса $\mathcal{ND}_{n,\frac{2\pi}{m}}$ могут быть описаны геометрически.

Вырожденный случай $m = 1$. Преобразование $\mathcal{ND}_{n,\alpha}$ при $\alpha = 2\pi$ имеет вид

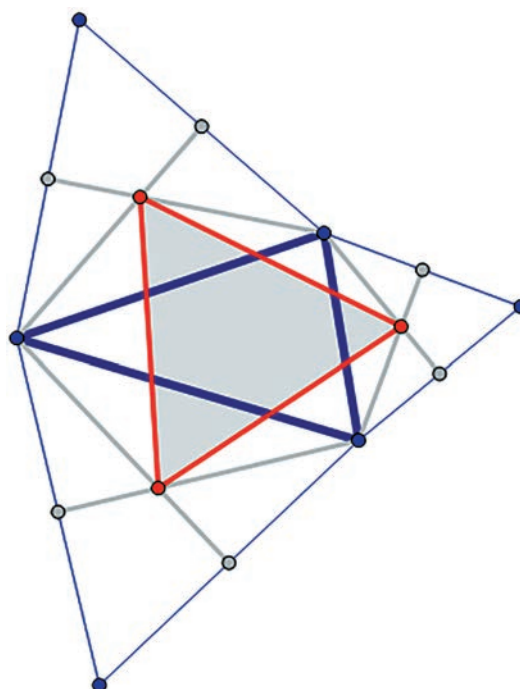


Рис. 8. Теорема Наполеона.

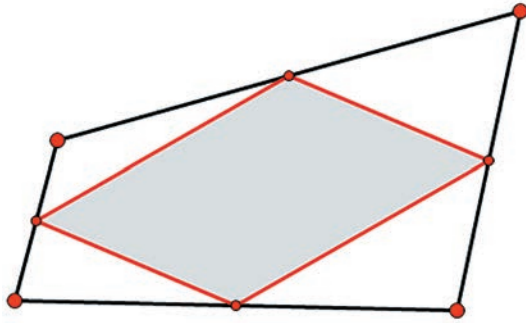


Рис. 9. Теорема Вариньона.

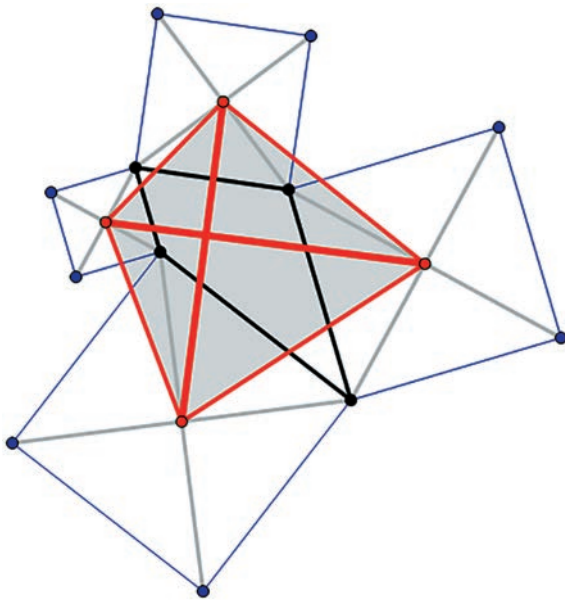
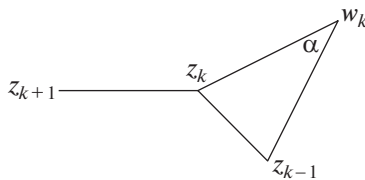
Рис. 10. Теорема о квадратоиде $(-24, 30)z_k$.

Рис. 11.

$$ND_{n,2\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Например,

т.е.

$$ND_{3,2\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$ND_{3,2\pi} := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 - z_3 \\ z_2 - z_1 \\ z_3 - z_2 \end{pmatrix}.$$

Это отображение ставит в соответствие треугольнику *последовательность его направленных сторон*. Аналогичный смысл отображение $ND_{n,2\pi}$ имеет и для n -угольников при произвольных $n > 3$.

Вырожденный случай $m = 2$. Хотя выражение *построение правильного 2-угольника на сторонах произвольного n -угольника* и не имеет традиционного геометрического смысла, угол $\alpha = \pi$ можно подставить в формулу преобразования и получить

$$w_k = \frac{z_{k-1} + z_k}{2}$$

— мы получаем *преобразование многоугольника в многоугольник, образованный серединами сторон исходного!*

Эта конструкция подробно рассматривается в книге [15]. Основной результат, касающийся образа преобразования Наполеона—Дэвиса в этом случае, называется **теоремой Вариньона**, которую мы уже упомянули выше.

На нашем языке: *преобразование Наполеона—Дэвиса $ND_{2,\pi}$ переводит произвольный четырехугольник в параллелограмм.*

Случай $m = n = 3$. Именно здесь мы встречаемся с тем, что обычно называется **теоремой Наполеона**.

В наших обозначениях она проверяется так:

$$ND_{3, \frac{2\pi}{3}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{-\pi i}{3}} & 0 & -e^{\frac{\pi i}{3}} \\ -e^{\frac{\pi i}{3}} & e^{\frac{\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & -e^{\frac{\pi i}{3}} & e^{\frac{\pi i}{3}} \end{pmatrix},$$

поэтому, если ввести обозначение

$$ND_{3, \frac{2\pi}{3}} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{3}} z_1 - e^{\frac{\pi i}{3}} z_3 \\ -e^{\frac{\pi i}{3}} z_1 + e^{\frac{\pi i}{3}} z_2 \\ -e^{\frac{\pi i}{3}} z_2 + e^{\frac{\pi i}{3}} z_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

то

$$\frac{w_3 - w_2}{w_2 - w_1} = \frac{(-e^{\frac{\pi i}{3}} z_2 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_3) - (-e^{\frac{\pi i}{3}} z_1 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2)}{(-e^{\frac{\pi i}{3}} z_1 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2) - (e^{\frac{\pi i}{3}} z_1 - e^{\frac{-\pi i}{3}} z_3)} =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{3}} z_1 - z_2 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_3}{-z_1 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2 + e^{\frac{\pi i}{3}} z_3} = e^{\frac{\pi i}{3}} \frac{z_1 - e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2 + e^{\frac{-2\pi i}{3}} z_3}{-z_1 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2 + e^{\frac{\pi i}{3}} z_3} = -e^{\frac{\pi i}{3}}$$

(последнее сокращение имеет место, поскольку $e^{\frac{-2\pi i}{3}} = -e^{\frac{\pi i}{3}}$). Это и есть **теорема Наполеона**.

Случай $m = n = 4$. Имеем

$$ND_{4, \frac{\pi}{2}} := \begin{pmatrix} -e^{\frac{\pi i}{4}} & 0 & 0 & e^{\frac{-\pi i}{4}} \\ e^{\frac{\pi i}{4}} & -e^{\frac{\pi i}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi i}{4}} & -e^{\frac{\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\pi i}{4}} & -e^{\frac{\pi i}{4}} \end{pmatrix}.$$

Теперь, если ввести обозначение

$$ND_{4, \frac{\pi}{2}} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{\frac{\pi i}{4}} z_1 + e^{\frac{\pi i}{4}} z_4 \\ e^{\frac{\pi i}{4}} z_1 - e^{\frac{\pi i}{4}} z_2 \\ e^{\frac{\pi i}{4}} z_2 - e^{\frac{\pi i}{4}} z_3 \\ e^{\frac{\pi i}{4}} z_3 - e^{\frac{\pi i}{4}} z_4 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix},$$

то вычисляется

$$\frac{w_4 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{(e^{\frac{\pi i}{4}} z_3 - e^{\frac{\pi i}{4}} z_4) - (e^{\frac{\pi i}{4}} z_1 - e^{\frac{\pi i}{4}} z_2)}{(e^{\frac{\pi i}{4}} z_2 - e^{\frac{\pi i}{4}} z_3) - (-e^{\frac{\pi i}{4}} z_1 + e^{\frac{\pi i}{4}} z_4)} =$$

$$= \frac{-e^{\frac{\pi i}{4}} (z_1 - iz_2 - z_3 + iz_4)}{e^{\frac{\pi i}{4}} (z_1 - iz_2 - z_3 + iz_4)} = -e^{\frac{-\pi i}{2}} = i.$$

Мы установили следующий аналог теоремы Наполеона:

Преобразование Наполеона—Дэвиса $ND_{4, \frac{\pi}{2}}$ переводит произвольный четырехугольник в квадратоид.

Завершив геометрический раздел комментария к теореме Наполеона и ее обобщениям, присланным В.Н. Дубровским, доцентом кафедры математики СУНЦ МГУ, который познакомился с проектом этой статьи.

Имеется доступное сильным школьникам геометрическое доказательство Основной теоремы о преобразовании Наполеона—Дэвиса; оно фактически содержится в решении задачи 19 из класси-

ческой книги И.М. Яглома [16]. Попробуем строить обратное преобразование: возьмем любой n -угольник P и произвольную точку z_1 и начнем строить его прообраз — ломаную $z_1 z_2 \dots$. В этой ломаной каждая вершина z_{k+1} должна быть образом z_k при повороте на α вокруг соответствующей вершины P . Получим n -звенную, необязательно замкнутую ломаную $z_1 z_2 \dots z_{n+1}$. Если P — образ некоторого n -угольника $z_1 z_2 \dots z_n$, то $z_{n+1} = z_1$ (ломаная замыкается), т.е. z_1 — неподвижная точка композиции n поворотов на угол α . При $n\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$ эта композиция — поворот, т.е. z_1 определяется однозначно, а значит преобразование невырождено. Если же $n\alpha = 0 \pmod{2\pi}$, то композиция — параллельный перенос на вектор, зависящий от P . И тут возможны два случая. Для “большинства” многоугольников P вектор ненулевой; эти многоугольники не принадлежат образу преобразования Наполеона—Дэвиса. Но есть специальные P , для которых вектор равен нулю. Тогда композиция — тождественное преобразование, и при любом выборе z_1 есть (одна) ломаная с вершиной z_1 , переходящая при преобразовании Наполеона—Дэвиса в P , т.е. это преобразование вырождено. Следующий вопрос — описать эти специальные многоугольники P . В случае треугольников получим, что P — правильный треугольник (это теорема Наполеона), в случае четырехугольников P — это “квадратоид” (теорема Ван Обеля).

Школьников можно подвести к формулировкам этих теорем и их геометрическим доказательствам через эксперимент. Ставится задача построить n -угольник по его образу P при различных значениях α . Выполнив описанное выше построение в программе динамической геометрии, пытаемся совместить мышью концы z_1 и z_{n+1} ломаной $z_1 z_2 \dots z_{n+1}$. Если получится — имеем невырожденный случай, если нет — увидим, что z_1 и z_{n+1} связаны параллельным переносом, но их можно совместить, перетаскивая вершины P . Причем достаточно передвинуть только одну вершину — это уже приведет и к “случаю Наполеона”, и к “квадратоиду”. Задания, основанные на этом эксперименте, реализованы в “Математическом конструкторе”, см. [17]. Продолжая это исследование, можно получить и ответ на более сложный вопрос о том, когда n -угольник P будет правильным при $\alpha = 2\pi/n$ (теорема Наполеона—Барлотти).

Важным достоинством этих экспериментов является то, что они образуют серию, начинающуюся с простого случая $\alpha = \pi$, и приводят школьников к формулировке результатов исподволь, в ходе исследования решений не очень сложной задачи на построение.

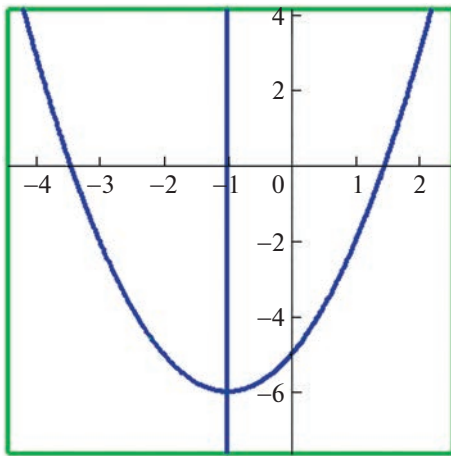


Рис. 12. Осевая симметрия параболы.

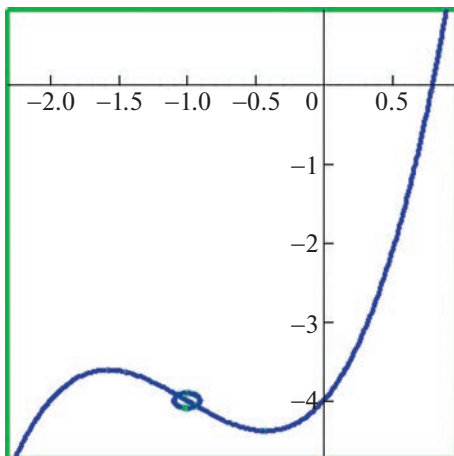


Рис. 13. Центральная симметрия кубической параболы.

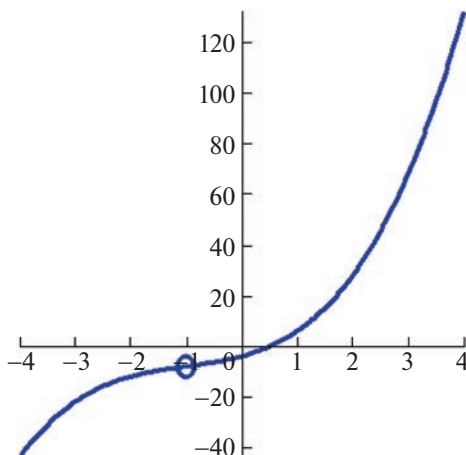


Рис. 14. Центральная симметрия кубической параболы.

4. АЛГЕБРА

Компьютерная алгебра позволяет перейти от рецептурной школьной теории квадратичных многочленов и квадратных уравнений к исследовательским обобщениям.

(а) Графики многочленов. Мало кто из встречавшихся авторам студентов-гуманитариев (и даже не все учителя математики) знают, что, наряду с *осевой* симметрией графиков квадратичных многочленов (см. рис. 12) имеет место *центрально* симметрия графиков кубических парабол (см. рис. 13).

Задание для учащихся, работающих в среде динамической математики: “на глаз” определить наличие симметрий у графиков многочленов. Особенно наглядно это получается, если на экране размещены “ползунки”, позволяющие плавно менять коэффициенты многочлена.

Следующий шаг — попытаться совместить, передвигая график, ось симметрии с осью ординат, центр симметрии с началом координат. При этом мы можем видеть, как меняются значения коэффициентов.

Следующий шаг — понять, какому алгебраическому преобразованию соответствует такой сдвиг в различных частных случаях.

После этого более сильные учащиеся могут изобрести общую формулу сдвига, другие могут воспринять общую природу обсуждаемых симметрий из рассуждений учителя: график многочлена

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

при $n \in \{2, 3\}$ заменой $x = x' - \frac{a_1}{n}$ превращается при $n = 2$ в график *четной* функции, а при $n = 3$ — в сдвинутый в вертикальном направлении график *нечетной* функции.

Полезно также отметить, что центр симметрии графика кубического многочлена является *точкой перегиба* этого графика.

В предыдущем примере мы продуктивно использовали сочетание формул с наглядностью. Однако не все, даже школьные, компьютерные, эксперименты построены на наглядности, хотя она и очень желательна.

Что же является инструментом компьютерного эксперимента, расширяющим возможности динамической геометрии? Естественно — это *компьютерная алгебра*. Инструменты компьютерной алгебры сегодня успешно применяются всюду, где когда-то требовались сложные аналитические вычисления. Может показаться, что они “тривиализируют” школьную алгебру. В некоторой степени так и есть, ведь эти инструменты тривиализировали и те профессиональные аналитические вычисления, о которых речь шла выше.

Однако, как и в других случаях, компьютер открывает простор для творческой исследовательской деятельности школьника, поддержанной учителем.

В последующих примерах мы не всегда явно выделяем и подробно объясняем, какой компьютерный эксперимент проводит студент, что ему показывает и рассказывает преподаватель, какие задания студенту дает, какие исследовательские вопросы ставит.

При детальном планировании образовательной ситуации целесообразно выделить:

0. Мотивировку: почему задача интересна во “взрослой” математике и может быть интересна обучающемуся.

1. Какой эксперимент предлагается поставить.
2. Наблюдение результатов.
3. Какое ожидается открытие, какие могут возникнуть гипотезы.
4. Доказательства гипотез и связанная с ними НЕэкспериментальная математика.

(b) Кубическая формула Кардано над $\mathbb{R}$. Вопрос о решении уравнений степени выше второй привлекал внимание с глубокой древности (ср. *удвоение куба*). Ближе к нашему времени его решение знаменовало Возрождение в математике (*мы способны не только воспроизводить результаты древних, но можем получить и свои, им недоступные*), наступившее позже Возрождения в литературе, архитектуре и живописи. С решения в XVI веке итальянскими математиками кубических уравнений началась современная алгебра.

Кроме того, кубические уравнения примыкают к квадратным и в отдельных задачах “повышенной трудности” встречаются в школьной математике — например, в современной Англии — систематически. Поэтому для заинтересованных школьников естествен “внепрограммный” **вопрос:**

есть ли для кубических уравнений такая же формула, как для квадратных?

Ответ: **да**, но существенно сложнее.

Общее кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1.2a)$$

при $a \neq 0$ заменой $x \leftarrow x - \frac{b}{3a}$ (упоминавшейся выше в связи с объяснением центральной симметричности графиков кубических многочленов) с последующим делением на a принимает более компактный вид

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1.2b)$$

В отличие от итальянцев Возрождения современному человеку достаточно дать команду *solve* системе компьютерной алгебры. Мы берем в ка-

честве такой системы MAPLE и получаем решение

$$x = \frac{1}{6} \sqrt[3]{-108q + 12\sqrt{12p^3 + 81q^2}} - \frac{p}{\sqrt[3]{-108q + 12\sqrt{12p^3 + 81q^2}}}. \quad (1.2c)$$

Экспериментатор получает предварительный ответ на вопрос: перед ним формула с радикалами, ее надо осознать.

Одна из возникающих проблем: (осложнявших жизнь и итальянцам в XVI веке) под знаком квадратного корня иногда стоят отрицательные числа, а хотя бы один корень есть всегда. Этот факт также может быть открыт экспериментально: те же системы компьютерной алгебры содержат и инструменты построения графиков; наблюдения над ними приводят к гипотезе, которую можно доказать, сочетая оперирование с неравенствами с аргументами анализа или топологии. Этот эксперимент можно провести еще до вычисления корней в компьютерной алгебре.

Систематические алгебраические эксперименты связаны с *подстановкой чисел вместо букв в формуле Кардано*. Выделяются случаи, когда формула дает численно правильный ответ — его можно проверить подстановкой. Но и в этих случаях есть поле для экспериментирования с *поддачками*: при заданных $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ поработать с многочленом $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x + x_1 + x_2)$. Применение формулы Кардано даст загадочные равенства, связывающие кажущиеся иррациональными числа с рациональными. Эти равенства легко проверять численно, и встает задача их ОСОЗНАНИЯ. Полезно составление собственной структурированной коллекции.

• *Не может ли знаменатель в правой части (1.2c) обратиться в 0?* Несложный анализ показывает, что это возможно, но лишь в случае $p = 0$, в котором уравнение (1.2b) решается простым извлечением кубического корня.

Дальнейшее наблюдение показывает, что иногда формула Кардано дает правильный и осмысленный ответ, а иногда — нет. Рассмотрение графиков кубических многочленов позволяет определить границу между несколькими (как в случае квадратных уравнений) типами вещественных кубических уравнений. Особое внимание привлекают границы между типами (снова параллель с квадратными многочленами!) — многочлены с КРАТНЫМИ корнями. В нашем случае это будут многочлены $P(x) = (x - \alpha)^2(x + 2\alpha)$, и формулу Кардано для них надо будет проанализировать особо.

• *Сохраняет ли формула (1.2c) смысл, если стоящее под знаком квадратного корня число $\sqrt{12p^3 + 81q^2}$ от-*

рицательно? Ответ в рамках строгой школьной математики — не имеет. Но именно здесь компьютерный эксперимент может прояснить ситуацию. Действительно, подстановка (случайных) численных значений $p, q \in \mathbb{R}$ в левую часть уравнения (1.2b) позволяет и увидеть график этого многочлена, а с его помощью — одно или три приближенных решения уравнения (1.2b). Подстановка выбранных значений p, q в формулу (1.2c) убедит школьника в том, что формула (1.2c) имеет какой-то *внешкольный* смысл, и в некоторых случаях побудит его освоить *комплексные* числа.

• Почему иррациональность $\sqrt[3]{-108q + 12\sqrt{12p^3 + 81q^2}}$ входит в слагаемые правой части формулы (1.2c) как-то несимметрично? В отличие от первых двух вопросов, этот вопрос неточен — и не имеет точного ответа. Вернее, ответ заключается в том, что MAPLE выдает именно формулу (1.2c), и она правильна, более того, она проверяема программой в символическом виде, в отличие от более красивой и традиционной (см., например, [18]), вывод которой мы сейчас напомним.

Подставив в уравнение (1.2b) (для создания дополнительной степени свободы)

$$x = u + v, \quad (1.2d)$$

получим $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$, что преобразуется к

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) = -q. \quad (1.2e)$$

Постулируем (воспользовавшись упомянутой свободой)

$$3uv + p = 0. \quad (1.2f)$$

Упростив (1.2e) с помощью (1.2f) и возведя чуть преобразованное (1.2f) в куб, получим систему уравнений

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}, \quad (1.2g)$$

из которой видно, что u^3 и v^3 — корни квадратного уравнения, которое строится по коэффициентам исходного кубического, т.е.

$$(\lambda - u^3)(\lambda - v^3) \equiv \lambda^2 + q\lambda - \frac{p^3}{27} \quad (1.2h)$$

и, следовательно,

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right\}, \quad (1.2i)$$

откуда, наконец, с учетом (1.2d)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (1.2j)$$

Сравнительный анализ формул (1.2j) и (1.2c) требует компьютерного эксперимента (КЭ). Формула (1.2j) красивее и понятнее, чем (1.2c), но (по неизвестным авторам причинам) с помощью MAPLE в общем виде не проверяется, в отличие от (1.2c). Поэтому весьма целесообразны развернутые КЭ с рассмотрением многочисленных частных случаев и проверкой как нетривиальных равенств между иррациональностями, так и приближенных численных значений корней, полученных по обеим формулам. Полезны при этом “поддавки” — анализ формул при известных корнях, т.е. выбор чисел $x_{1,2,3}$, удовлетворяющих $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, и исследование кубических многочленов с заданными корнями $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \equiv x^3 + px + q$; такая работа приводит к более глубокому пониманию теоремы Виета, чем при ее освоении по стандартным школьным методикам.

Наконец, осмысленность обеих формул зависит от знака числа

$$12p^3 + 81q^2 = 324 \left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \right).$$

Это число, определенное (как и в случае квадратных трехчленов) с точностью до умножения на квадрат рационального числа, заслуживает названия *дискриминанта* кубического многочлена. Полезно осознание его связи с величиной $((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3))^2$ для кубического многочлена

$$ax^3 + dx^2 + cx + d \equiv a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Все эти действия весьма трудоемки при ручных вычислениях, но могут быть вполне убедительны в рамках грамотно организованных компьютерных экспериментов.

После соответствующей классификации и уточнений формула Кардано дает ОДИН из корней всегда. В случае, когда надо извлекать квадратный корень из отрицательного числа, формулу надо трансформировать и связать с *трисекцией угла*.

Строгие доказательства, проведенные в двух случаях (в архаичной итальянской, невозможной сегодня, терминологии *приводимом* и *неприводимом*), оставляют ощущение неудовлетворенности: неужели с этими разными случаями надо так по-разному обращаться? Сам собой напрашивается переход к комплексным числам. После полного прояснения теории *разложения кубического трехчлена на линейные множители* естественно встает вопрос о многочленах 4-й степени, и, наверное, удивительным окажется тот факт, что итальянцы свели его к многочленам 3-й степени, рассмотрев для многочлена 4-й степени с корнями x_1, x_2, x_3, x_4 многочлен 3-й степени с корнями

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4,$$

$$y_2 = x_1x_3 + x_2x_4,$$

$$y_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

В ходе внеэкспериментальных рассуждений полезно постоянно обращаться к примерам их экспериментальной части (компьютер здесь абсолютно необходим, вычисления чудовищно громоздки). После освоения этого материала учащийся будет готов к восприятию Основной Теоремы Алгебры и теории Галуа.

(с) Уравнение Пелля. Так называется⁴ уравнение в целых числах (см., например, [19])

$$x^2 - Dy^2 = 1;$$

мы ограничимся обсуждением случая $D = 2$. Это одно из простейших уравнений в целых числах (наименьшей нетривиальной) степени 2, однако с ним связана интересная математика, уходящая в глубокую древность [20].

Первый из вопросов – найти экспериментально какие-то решения. Следующий – найти их как можно больше.

Естественно возникает вопрос: *существуют ли как угодно большие решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$?* Продвижение в этом вопросе с помощью КЭ доступно учащимся с как угодно малой математической подготовкой и минимальными навыками программирования: решения могут искажаться простым перебором. Для школьника это прекрасное введение в использование компьютера в теории чисел.

Затем заинтересовавшимся учащимся можно рассказать о кольце чисел $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$, ввести сопряжение $\overline{x + y\sqrt{2}} := x - y\sqrt{2}$ и норму $N(z) := z\bar{z}$ с тем, чтобы интерпретировать уравнение Пелля как уравнение

$$N(z) = 1.$$

Мультипликативность нормы (т.е. тождество $N(z_1z_2) \equiv N(z_1)N(z_2)$), которое учащийся с минимальной подготовкой может проверить непосредственно) позволяет предъявить бесконечную последовательность решений с начальной парой $x_1 = 3, y_1 = 2$ и рекурренцией

$$\begin{cases} x_{n+1} := 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} := 2x_n + 3y_n \end{cases}.$$

КЭ здесь не только помогает убедительно ответить на поставленный выше вопрос о бесконечности множества решений, но и дает широкий простор для установления и проверки многочисленных доказуемых оценок и асимптотик.

⁴ Из-за ошибки Эйлера, перепутавшего двух англичан: Джона Пелля (1611–1685) и Уильяма Браункера (1620–1684).

Кроме того, естественно обсудить одно приложение уравнения Пелля: после установления (почти очевидного, но тоже требующего доказательства) равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{2},$$

введенная последовательность дает возможность *аппроксимации* числа $\sqrt{2}$. В табл. 1 приведены вычисленные на MAPLE (допускающем, в отличие от классических языков программирования, работу с как угодно большими натуральными числами и дающем как угодно точные десятичные приближения рациональных чисел) значения определенных выше натуральных чисел x_n, y_n и десятичных приближений рациональных чисел $\frac{x_n}{y_n}$.

Красным выделены *стабилизирующиеся* знаки приближений – полезно доказать, что это – *верные* десятичные знаки числа $\sqrt{2}$. Одного взгляда на цветную таблицу достаточно, чтобы отметить, что *количество верных знаков приблизительно пропорционально номеру приближения*. Уточнение и доказательство этого утверждения (которое возникло в результате несложного КЭ!) вместе с освоением *конструктивного* определения предела гораздо полезнее заучивания стандартного определения (*не* конструктивного).

В дальнейшем изложении мы уже не выделяем специально различные стадии компьютерного эксперимента учащегося и учителя, а указываем показательные примеры, где есть опыт такого эксперимента, а читатель может выстроить сам эксперимент на свой вкус.

(д) Численное решение полиномиальных уравнений. Упомянувшийся выше *метод Ньютона*⁵ исключительно эффективен и почти универсален. Он применим к произвольным гладким функциям

$$w = f(z)$$

(мы используем обозначения переменных, характерные для комплексного анализа, поскольку собираемся сравнить результаты этого и предыдущего разделов) и основан на рекурсии

$$z_{n+1} := z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

имеющей прозрачный геометрический смысл.

Рассмотрим в качестве примера многочлен

$$f(z) = z^2 - 2$$

⁵ Называемый также (например, в Англии) методом *Ньютона–Рафсона*.

и найдем его корень $\sqrt{2}$ методом Ньютона, начиная с (довольно грубого) начального приближения $z_1 := 2$. Имеем $z_{n+1} := z_n - \frac{z_n^2 - 2}{2z_n}$, или

$$z_{n+1} := \frac{z_n^2 + 2}{2z_n}.$$

Соответствующая таблица десятичных приближений имеет следующий вид (см. табл. 2).

Очевидно, метод Ньютона вычисления $\sqrt{2}$ гораздо *эффективнее* рассмотренного выше метода, основанного на решениях уравнения Пелля. Как было отмечено выше, *количество верных знаков было приблизительно пропорционально номеру приближения*. При применении метода Ньютона действует менее очевидный закон:

количество верных знаков приблизительно пропорционально квадрату номера приближения.

Более тщательная проверка этого закона, его более точная формулировка и обоснование требуют дальнейших КЭ. Склонность школьников к занятиям математикой проявится в том, что им захочется рассмотреть аналогичные вопросы для других приближений — как минимум $\sqrt{3}$.

Отметим, наконец, что само понятие *эффективности алгоритмов*, естественно возникающее при работе в духе рассмотренных примеров, современно и важно как с теоретической, так и с практической точек зрения. В современных ЕГЭ-программах оно не находит места, а с помощью КЭ может быть вполне содержательно введено и изучено.

5. АНАЛИЗ

Здесь мы ограничимся обсуждением возможностей иллюстрации базовых понятий с использованием КЭ.

(а) Производная. Здесь необходимо освоить понятия *секущих* и *касательных* графически.

Формулировка *касательная — предельное положение секущих* сохраняется в памяти многих выпускников современных школ, но обычно не связывается ни с наглядными образами, ни с точными математическими понятиями. Возможно, это объясняется тем, что графики элементарных функций (иногда за исключением параболы и гиперболы) трудно точно изобразить мелом на доске; то же верно относительно секущих и касательных.

Формула секущей графика

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) \quad (1.3a)$$

— одна из важнейших в анализе⁶. Трудность в ее понимании заключается в том, что входящие в нее буквы

$$f; x_0; h; x, y$$

относятся к четырем разным уровням “постоянности”:

(1) f — функция, секущие к графику которой обсуждаются;

(2) x_0 — абсцисса точки, через которую проходит семейство секущих;

(3) h — параметр этого семейства;

(4) x, y — координаты на плоскости (на которой все это происходит), в которых пишутся *уравнения секущих*.

Могут ли компьютерные эксперименты помочь разобраться в формуле (1.3a)? Думаем, что да. Надо просто дать учащемуся возможность увидеть достаточно много семейств секущих — сначала готовых, а затем построенных собственноручно с помощью подходящих средств.

В примере ниже $f(x) = \sin x$, $x_0 = 1$, $h \in \left\{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{42}\right\}$.

Понимание определения производной

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.3b)$$

осложнено теми же факторами, что указывались при обсуждении формулы (1.3a), но к ним добавляется еще и определение *предела*. Заучивание “ ε – δ ” определения лежит за пределами мнемонических возможностей современного нематематика со средним образованием (см., впрочем, [21]). Однако упомянутое выше словосочетание *касательная — предельное положение секущих*, которому может быть придан абсолютно точный смысл, вместе с еще одним

производная — наклон касательной

вполне может быть воспринято при достаточном количестве иллюстраций с использованием КЭ. Например, приведенная выше картинка с несколькими секущими может быть дополнена касательной с уравнением

$$y = \sin 1 + (\cos 1)(x - 1),$$

в которое входят непопулярные, но легко вычисляемые $\sin 1 = 0.841470984\dots$ и $\cos 1 = 0.540302305\dots$. Как показывает опыт одного из авторов, после самостоятельного построения некоторого количества картинок такого рода самый далекий от математики человек (например — студент РГГУ,

⁶ Первый автор (ГБШ) — категорический противник традиционного обозначения $h = \Delta x$, обычно используемого вместе с “термином” *приращение аргумента*. И обозначение, и термин, хотя и имеют почтенную историю, лишены математического смысла. Мы следуем замечательному учебнику [22].

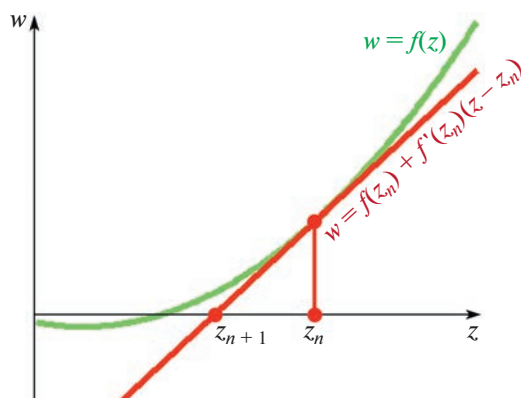


Рис. 15. Метод Ньютона.

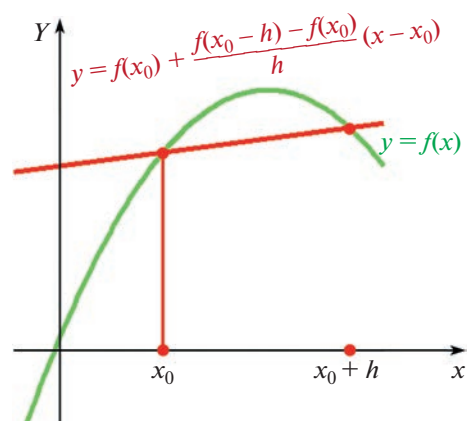


Рис. 16. Секущая.

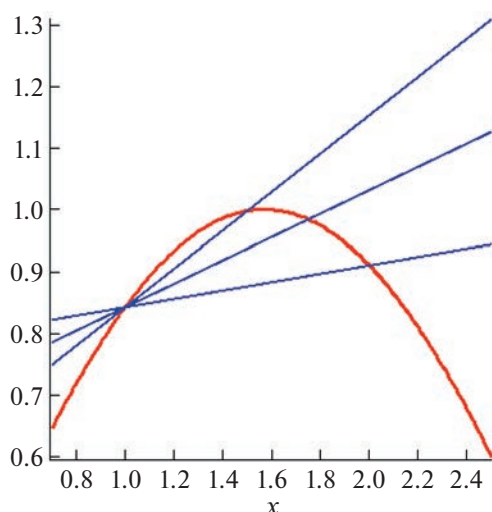


Рис. 17. Секущие.

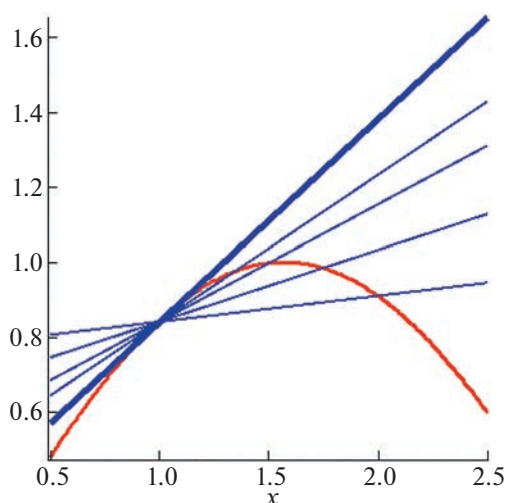


Рис. 18. Секущие и касательная.

лингвист или психолог) осваивает производные с не меньшей уверенностью, чем отрицательные числа.

Общее уравнение касательной, которое озо-
знается в результате намеченных рассмотрений:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1.3c)$$

(b) Ряды Тейлора. Этот раздел классического анализа, красивый, глубокий и имеющий огромное прикладное значение, отстоит далеко от действующих школьных программ.

Между тем, освоив проведение касательных, т.е. *линейные* приближения элементарных функций, естественно поставить вопрос об их приближениях *многочленами высших степеней*. Ответы были получены в XVIII веке и исключительно легко осваиваются с помощью КЭ.

В качестве бросающегося в глаза примера рассмотрим несколько приближений *синусоиды*, т.е. *графика* $y = \sin x$, отрезками ряда Тейлора

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$$

Демонстрируя эти приближения студентам-лингвистам, один из авторов обычно встречался с их желанием попробовать самим что-нибудь приблизить и несколько раз слышал вопрос *а почему нам в школе это не показывали?* Ответ упомянутому автору неизвестен.

Системы компьютерной алгебры выдают произвольное количество отрезков ряда Тейлора элементарных функций, и ответ обычно легко угадывается — особенно людьми, знакомыми с факториалами. Исключение составляют ряды Тейлора для тангенса

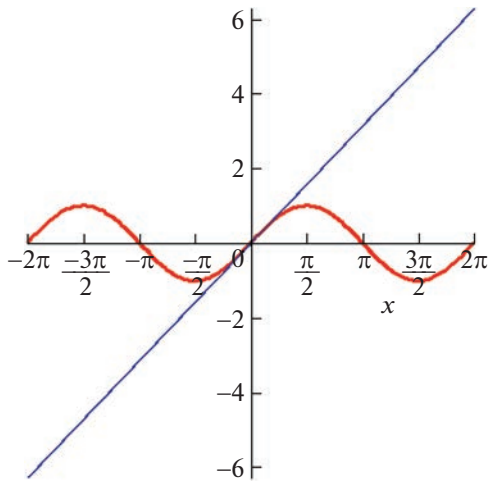


Рис. 19. Приближение синуса рядом Тейлора, степень 1.

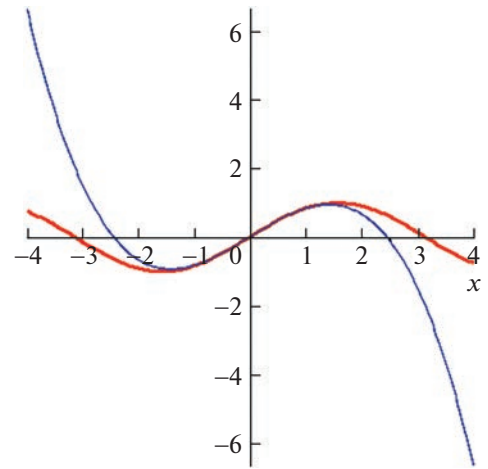


Рис. 20. Приближение синуса рядом Тейлора, степень 3.

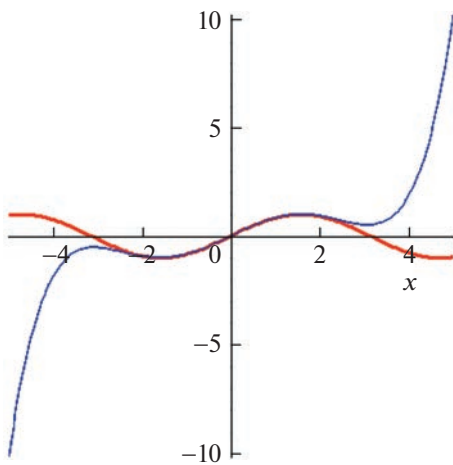


Рис. 21. Приближение синуса рядом Тейлора, степень 5.

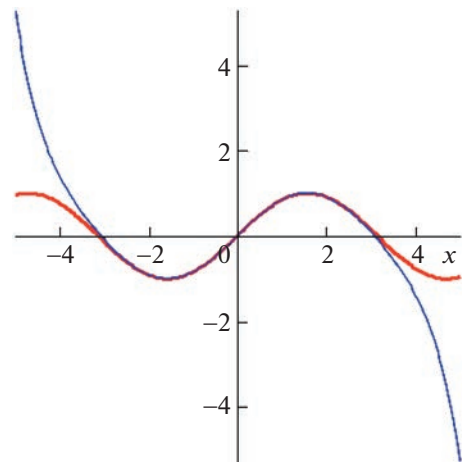


Рис. 22. Приближение синуса рядом Тейлора, степень 7.

$$x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382x^{11}}{155925} + \frac{21844x^{13}}{6081075} + \frac{929569x^{15}}{638512875} + \dots$$

и для секанса

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} + \frac{50521x^{10}}{3628800} + \frac{540553x^{12}}{95800320} + \frac{199360981x^{14}}{87178291200} + \dots$$

Эти загадочные числа связаны с вопросом, который мы лишь вскользь затронули выше при обсуждении графиков квадратичных и кубических многочленов — вопросом о количествах возможных *форм* графиков вещественных многочленов

произвольных степеней. О связи этих количеств с коэффициентами разложения в ряды Тейлора тангенса и секанса можно прочесть в [23].

Освоив несколько разложений известных функций в ряды Тейлора и проверив эти разложения графически и численно, компьютерный экспериментатор осознает продолжение формулы (1.3с)

$$y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \quad (1.3d)$$

как одну из неоспоримых вершин классического анализа.

(с) Некоторые интегралы. Мы скажем несколько слов лишь об *определенных* интегралах, поскольку развитие (довольно сложной) техники неопределенного интегрирования представляет

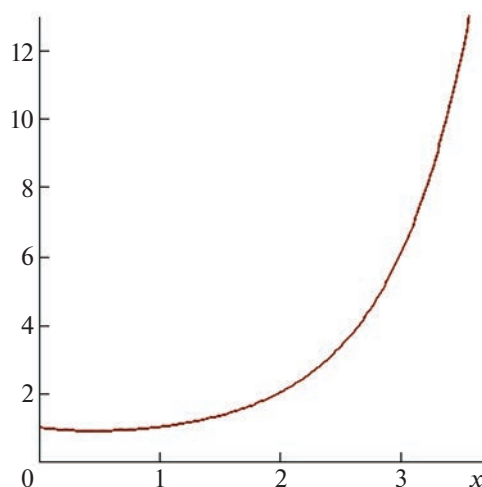


Рис. 23. График факториала.

ся рудиментом достаточно архаичной педагогики в эпоху, когда системы компьютерной алгебры дают ответ после одного нажатия кнопки. Эта точка зрения относится к обучению математике (будущих) нематематиков — которых, однако, необходимо научить понимать и проверять полученные с помощью компьютера ответы.

Первый нетривиальный (*трансцендентный*) интеграл — это

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3.141592\dots$$

Вместе с не вполне тривиальной интерпретацией этого интеграла как *площади единичного круга* полезно научить строго мыслящего студента воспринимать равенство

$$\pi := \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

как *определение* числа π . КЭ связаны с его приближенным вычислением.

Оставшиеся два определенных интеграла, которые будут упомянуты, не берутся в элементарных функциях. Для будущих математиков это — такой же важный результат о *невозможности*, как неразрешимость уравнений 5-й степени в радикалах и *неудваиваемость* куба с помощью циркуля и линейки; для всех остальных это — небольшое неудобство, которое никак не препятствует численному исследованию интегралов.

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1.772453851\dots$$

играет центральную роль в теории вероятностей. Приближенное равенство

$$1.772453851^2 \approx 3.141592654$$

ставит экспериментатора в тупик; видимо, лишь совет поработать с кратным интегралом

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

может прояснить равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi};$$

отдельно стоит вопрос о *строгом обосновании* этого равенства, доступном школьнику.

Другой интеграл, также важный для теории вероятностей, зависит от параметра x ; можно временно обозначить его

$$x? := \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

— легко проверить, что он сходится при $x \geq 0$. Однако при некоторых навыках интегрирования обнаруживается, что в случае $x \in \mathbb{N}$ этот интеграл все-таки берется, и оказывается, что

$$x? = x!$$

Теперь можно *экстраполировать* функцию

$$n \mapsto n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$

определив

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt.$$

Таблица 1

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	3	2	1.50000000000000000000000000000000
2	17	12	1.416666666666666666666666666667
3	99	70	1.41428571428571428571428571428571
4	577	408	1.41421568627450980392156862745098
5	3363	2378	1.41421362489486963835155592935240
6	19601	13860	1.41421356421356421356421356421356
7	114243	80782	1.41421356242727340249065385853284
8	665857	470832	1.41421356237468991062629557889013
9	3880899	2744210	1.41421356237314199715036385699345
10	22619537	15994428	1.41421356237309643083203725697474
11	131836323	93222358	1.41421356237309508948486370619374
12	768398401	543339720	1.41421356237309504999928957890286
13	4478554083	3166815962	1.41421356237309504883694280179329
14	26102926097	18457556052	1.41421356237309504880272650735873
15	152139002499	107578520350	1.41421356237309504880171927369328
16	886731088897	627013566048	1.41421356237309504880168962350253
17	5168247530883	3654502875938	1.41421356237309504880168875068241
18	30122754096401	21300003689580	1.41421356237309504880168872498898

MAPLE может построить график этой функции и вычислить

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = 0.8862269255\dots$$

Экспериментатор снова может обнаружить загадочное приближенное равенство

$$4(0.8862269255)^2 \approx 3.141592654,$$

но на этот раз авторы умеют объяснить точное равенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Таблица 2

n	z_n
1	2
2	1.50000000000000000000000000000000
3	1.416666666666666666666666666667
4	1.41421568627450980392156862745098
5	1.41421356237468991062629557889013
6	1.41421356237309504880168962350253
7	1.41421356237309504880168872420970

только с помощью теории *гамма-функции Эйлера*, для развития которой надо существенно использовать *теорию функций комплексной переменной*.

6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вразрез с доминирующими традициями мы считаем возможным преподавание теории вероятностей как раздела математики, а не ее прикладной области. Но в любом случае компьютерный эксперимент, безусловно, является естественной частью курса.

(а) Случайные числа. Стохастические КЭ, основанные на датчиках случайных чисел, соответствуют духу теории вероятностей. Однако полученные с их помощью результаты должны интерпретироваться как *гипотезы*, основанные на *случайных выборках*, и сопоставляться с точными результатами КЭ, основанными на *полных переборах*. Приведем два примера.

Вычисление π методом Монте-Карло. Здесь речь идет об оценке для натурального числа $r \in \mathbb{N}$ мощности множества

$$Q_r := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots, n\} \mid x^2 + y^2 \leq r^2\};$$

очевидно, но полезно строго доказать, что

$$\pi = 4 \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\#Q_r}{r^2},$$

Сходится эта последовательность очень медленно; здесь тоже полезно получить строгие оценки. Однако этот малоэффективный метод хорошо соответствует интуитивному представлению о числе π как площади единичного круга, а любопытный экспериментатор может заинтересоваться поиском более быстрых методов (включая упомянутый выше интеграл), которыми изобилует и классическая, и современная литература.

Применение метода Монте-Карло заключается в том, что точки квадрата $\{0, 1, 2, \dots, n\} \times$

$\times \{0, 1, 2, \dots, n\}$ перебираются не все подряд, а случайно. При удаче получаются лучшие результаты.

С какой вероятностью наугад взятая дробь сократима? Здесь с помощью прямого перебора тоже можно получить численные результаты аналогично предыдущему примеру, но для их *понимания* необходимо включить вероятностную интуицию.

$$[\text{Дробь } \frac{a}{b} \text{ сократима}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [[a \in 2\mathbb{Z}] \wedge [b \in 2\mathbb{Z}]] \vee [[a \in 3\mathbb{Z}] \wedge [b \in 3\mathbb{Z}]] \vee [[a \in 5\mathbb{Z}] \wedge [b \in 5\mathbb{Z}]] \vee \dots] \quad (1.4a)$$

(дизъюнкция счетного множества утверждений, параметризованных простыми числами).

Применяя к (1.4a) отрицание и пользуясь формулой де Моргана, получим

$$[\text{Дробь } \frac{a}{b} \text{ несократима}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{[[a \in 2\mathbb{Z}] \wedge [b \in 2\mathbb{Z}]] \vee [[a \in 3\mathbb{Z}] \wedge [b \in 3\mathbb{Z}]] \vee [[a \in 5\mathbb{Z}] \wedge [b \in 5\mathbb{Z}]] \vee \dots]} \quad (1.4b)$$

$$\Leftrightarrow \overline{[[a \in 2\mathbb{Z}] \wedge [b \in 2\mathbb{Z}]] \wedge [[a \in 3\mathbb{Z}] \wedge [b \in 3\mathbb{Z}]] \wedge [[a \in 5\mathbb{Z}] \wedge [b \in 5\mathbb{Z}]] \wedge \dots}$$

(конъюнкция счетного множества утверждений, параметризованных простыми числами).

Именно здесь включается вероятностная интуиция. Предположив, что вероятность P на множестве пар натуральных чисел имеет смысл (как *предел* вероятностей на конечном множестве дробей с ограниченными числителем и знаменателем) и что конъюнкты в (1.4b) *попарно независимы*, получим

$$\begin{aligned} P(\text{случайная дробь несократима}) &= \\ &= (1 - P([a \in 2\mathbb{Z}] \wedge [b \in 2\mathbb{Z}]))(1 - P([a \in 3\mathbb{Z}] \wedge [b \in 3\mathbb{Z}]))(1 - P([a \in 5\mathbb{Z}] \wedge [b \in 5\mathbb{Z}])) \dots \quad (1.4c) \\ &= \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2\right) \dots \end{aligned}$$

“Перевернув” формулу (1.4c) и воспользовавшись для каждого простого числа p формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \dots,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(\text{случайная дробь несократима})} &= \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) \times \dots \quad (1.4d) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) \dots \end{aligned}$$

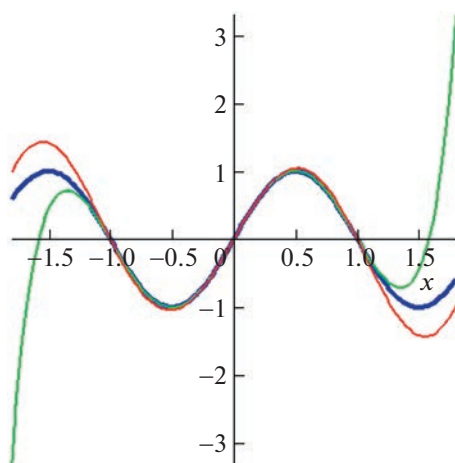
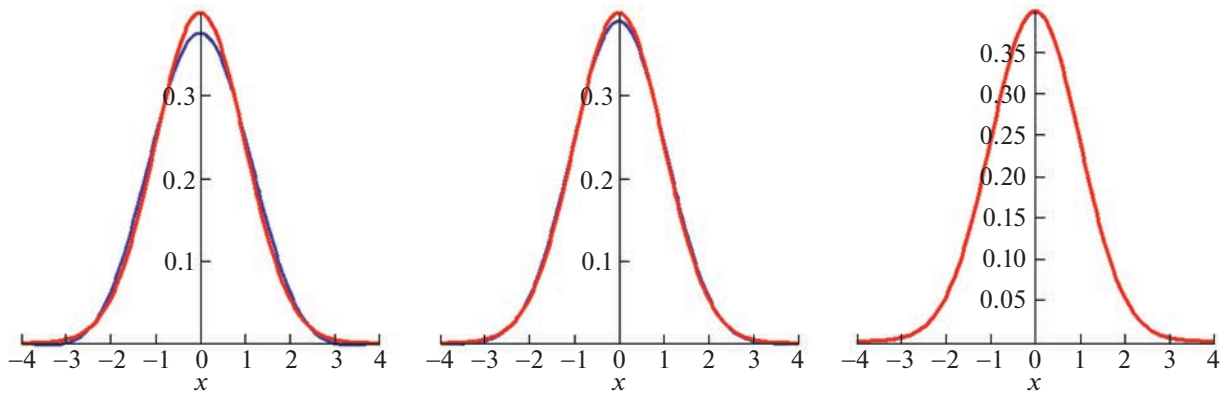


Рис. 24. Разложение синуса в сумму и в произведение.

Рис. 25. Приближения гауссианы при $n = 4, 10, 100$.

Согласно гениальной идее Эйлера, в правой части формулы (1.4d) можно раскрыть все скобки и согласно основной теореме арифметики получить ответ на рассматриваемый нами вопрос:

$$\frac{1}{P(\text{случайная дробь несократима})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (1.4e)$$

С помощью современных вычислительных средств уже можно получить ответ численно: поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1.645$, имеем

$$P(\text{случайная дробь несократима}) \approx \frac{1}{1.645} \approx 0.608.$$

Таким образом, случайная дробь несократима с вероятностью около 61% и, следовательно, сократима с вероятностью около 39%. Эти результаты теоретических рассуждений допускают КЭ-проверку с помощью датчиков случайных чисел.

Полученный результат можно было бы считать исчерпывающим, особенно с учетом того, что численный результат получен с традиционной для теории вероятностей точностью.

Однако по ходу дела мы столкнулись с замечательным числом: суммой обратных квадратов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Нельзя обойти молчанием классическую математику, связанную с этим числом, особенно учитывая огромные возможности КЭ при ее объяснении.

Вопрос о точном значении суммы обратных квадратов был поставлен в XVII веке учеником знаменитого Бонавентуры Кавальери, малоизвестным Пьетро Менголи, см. [24]. Он стал называться *Базельской задачей* по месту жительства семейства Бернулли, члены которого усердно занимались этим числом (см. [25]) — см. Ответ был получен лишь в XVIII веке, см. [26]. Эйлер применил тождество

$$\sin(\pi x) \equiv \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad (1.4f)$$

которое он понимал как равенство “многочленов бесконечной степени”, основанное на совпадении множеств их корней; в данном случае это множество целых чисел. Это тождество вместе с обсуждавшимся выше разложением синуса в ряд Тейлора — прекрасное поле для КЭ, графических и численных (см. рис. 24). Здесь, например, изображены три графика

$$y = \sin x,$$

$$y = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!} - \frac{(\pi x)^7}{7!} + \frac{(\pi x)^9}{9!},$$

$$y = \pi x (1 - x^2)(1 - x^2) \times \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{5^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{6^2}\right)$$

(параметры, разумеется, можно варьировать и улучшать). Применяя “теорему Виета” к вытекающему из (1.4f) тождеству

$$\sin(\pi x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\pi x)^{2n-1}}{(2n-1)!} \equiv \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad (1.4g)$$

— точнее, приравнявая коэффициенты в (1.4g) при x^3 — получим ответ к Базельской задаче:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1.4h)$$

Собирая вместе полученные результаты, отвечаем на исходный вопрос:

наугад взятая дробь сократима

с вероятностью $1 - \frac{6}{\pi^2} \approx 0.392072\dots$

(б) Испытания Бернулли. Наряду с эвристикой — на этот раз не КЭ, а реальным подбрасыванием монетки достаточно большое количество n раз⁷ —

предлагается рассмотреть точную математическую модель с пространством равновероятных исходов

$$\Omega = \{\text{орел, решка}\}^n$$

и случайной величиной (для согласования ее с теорией испытаний Бернулли удобно называть ее *успешностью*)

$$\xi = \text{усп}_n : \Omega \rightarrow \{0, \dots, n\} : (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \# \{i \mid \omega_i = \text{орел}\},$$

сопоставляющей серии испытаний количество выпавших в ней орлов.

Верхняя огибающая *гистограммы* этой случайной величины является “графиком” n -й строки *треугольника Паскаля*

$$k \mapsto \binom{n}{k},$$

и Центральная Предельная Теорема в ее простейшем виде утверждает, что *надлежащим образом масштабированная форма этого “графика” стабилизируется при $n \rightarrow \infty$* . Рассмотренная выше экстраполяция факториала позволяет говорить о графике определенной на отрезке $[0, n]$ настоящей функции

$$k \mapsto \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(альтернативой является КЭ-освоение *формулы Стирлинга*).

Теоретико-вероятностный аспект указанного эффекта стабилизации связан с *нормализацией* случайной величины ξ

$$N\xi := \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}},$$

где M и D — математическое ожидание и дисперсия. В рассматриваемом случае $\xi = \text{усп}_n$ имеем $M\xi = \frac{n}{2}$ и $D\xi = \frac{\sqrt{n}}{2}$, так что речь идет о преобразовании графика $z = \binom{n}{k}$ по формулам

$$x = \frac{k - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}, \quad y = \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{z}{2^n}.$$

Возникает график функции

⁷ Один из авторов (ГБШ) регулярно проводит этот эксперимент с $n = 100$, прося 10 студентов подбросить монетку по 10 раз.

$$y = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \binom{n}{\frac{\sqrt{n}}{2}x + \frac{n}{2}}$$

Согласно вышеупомянутой формуле Стирлинга

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

эти графики при $n \rightarrow \infty$ приближаются *гауссианой* (см. рис. 25).

Здесь изображены

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

при $n = 4, 10, 100$.

Как мы видим, приближения очень точны, а при $|x| > 3$ и $n \geq 10$ синяя и красная кривые практически неразличимы — в этом заключается *правило трех сигм*.

Если вернуться от аналитических и графических рассуждений к численным теоретико-вероятностным, то надо осознать упомянутый выше (в чуть-чуть другом масштабе) интеграл

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

как полную вероятность и освоить как графически, так и численно вероятности при $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$

$$P(k_1 \leq \text{усп}_n \leq k_2) \frac{1}{2^n} \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k_1 - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}}^{\frac{k_2 - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

проверяемые как с помощью КЭ, так и с помощью реальных экспериментов.

Полезно и возможно распространение полученных результатов как на испытания Бернулли с неравновероятными исходами, так на серии попарно независимых испытаний с большим количеством исходов.

7. КОМБИНАТОРИКА

Назовем две особенно традиционные темы.

(а) Числа Каталана. Их можно определять многими разными способами, и сама равносильность этих определений — хорошая математика, требующая КЭ; см. [27].

Одно из определений чисел Каталана:

$$c_n := \# \frac{n - \text{реберных плоских деревьев}}{\text{изотопия}}.$$

Соответствующая перечислительная задача поучительна и может быть решена с помощью КЭ. Так, составлять списки деревьев удобнее с использованием “Живой математики” или Геогембры.

Производящая функция

$$C(x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

может быть определена несколькими равносильными способами. Она элементарна, и КЭ позволяет проверить ее значения. Весьма перспективны различные обобщения чисел Каталана.

(b) Particio numerorum. Количество представлений натурального числа суммой меньших натуральных чисел (разложения кучки предметов на меньшие кучки...) может изучаться даже дошкольниками, но связано с весьма серьезной “взрослой” математикой. Введем стандартное обозначение

$$p(n) := \#\{(x_1, x_2, \dots) | x_i \in \mathbb{N}, x_1 \geq x_2 \geq \dots, n = x_1 + x_2 + \dots\}, \quad (2.1a)$$

составление полных списков разбиений при небольших n — нетривиальная перечислительная задача; как и в предыдущем проекте, составлять эти списки удобнее с использованием “Живой математики” или Геогембры. Составление полных списков $p(n)$ хотя бы при $n \leq 100$ — нетривиальная компьютерная задача.

Она эффективно решается с помощью *производящей функции* (Эйлера)

$$\mathcal{E}(x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n. \quad (2.1b)$$

Решающую роль играет разложение этой функции на множители

$$\mathcal{E}(x) := (1 + x^1 + x^{1+1} + \dots) \times (1 + x^2 + x^{2+2} + \dots)(1 + x^3 + x^{3+3} + \dots) \dots, \quad (2.1c)$$

из которого следует

$$\frac{1}{\mathcal{E}(x)} = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots (2.1d)$$

Раскрытие (бесконечного количества) скобок в правой части вручную весьма трудоемко, однако может быть легко реализовано КЭ, скажем, с помощью MAPLE. Результат, как и во времена Эйлера, поразителен: ряд “квадратично” разрежен! Точнее, устанавливается

$$\frac{1}{\mathcal{E}(x)} = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} \dots \quad (2.1e)$$

Не так легко угадывается закономерность в правой части равенства (2.1e), которая (по некоторым комбинаторным причинам) называется *пентагональной теоремой Эйлера* и гласит

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k x^{\frac{k(3k+1)}{2}}. \quad (2.1f)$$

Вторично переверачивая ряд (2.1f), можно весьма эффективно составлять списки значений $p(n)$.

Относительно КЭ с разбиениями см. [28]. Разреженность некоторых степеней левой части (2.1f) объяснена в [29].

8. ТОПОЛОГИЯ

Упомянем две действительно исследовательские (не только учебные) проблемы.

(a) Числа Харера-Загье. Речь о *случайных склейках* многоугольников. Обозначим $\varepsilon_g(n)$ количество ориентируемых *склеек* $2n$ -угольника (результатов попарного отождествления сторон, из которых нельзя вырезать лист Мебиуса). Перечисление таких склеек — хорошая компьютерная задача, которая может сопровождаться различными КЭ над *гауссовыми словами*.

Хорошо известна рекуррентия, с помощью которой можно строить таблицы чисел Харера-Загье:

$$\varepsilon_g(n) = \frac{4n-2}{n+1} \varepsilon_g(n-1) + \frac{(n-1)(2n-1)(2n-3)}{n+1} \varepsilon_{g-1}(n-2).$$

Эта рекуррентия важна для многих разделов взрослой математики, и известно несколько ее “взрослых” доказательств. Однако прозрачных доказательств, имеющих ясный комбинаторно-топологический смысл, по-видимому, на сегодняшний день не существует.

Скорее всего, какие-то фундаментальные структуры, лежащие в основе теории графов Γ на ориентируемых поверхностях S , дополнения к которым $S \setminus \Gamma$ гомеоморфны дискам (одно клеточных детских рисунков), современной науке неизвестны. КЭ, группирующие склейки каким-то осмысленным образом для прозрачного доказательства рекуррентии, могут помочь эти структуры обнаружить. Элементарное введение в теорию можно найти в [30].

(b) Гомотопические группы сфер. Уже более полувекла известны несколько загадочные, негомотопные тождественным отображения сфер

$$S^m \rightarrow S^n$$

при $m > n$. Они начинаются с комплексного и кватернионного расслоений Хопфа

$$S^3 \rightarrow S^2 \quad \text{и} \quad S^7 \rightarrow S^4.$$

Вряд ли начинающим математикам можно предложить навести порядок (т.е. *вычислить все гомотопические группы сфер*) в области многомерной топологии, в которой начиная с середины XX века работали крупнейшие математики.

Однако современные компьютерные технологии дают средства работы с многомерными объектами, которых не было 70 лет назад — например, КЭ с *кусочно-линейными* отображениями сфер, разбитых на маленькие кусочки (симплексы). Возможно, молодые математики, которые рано начнут думать над такого рода вопросами, разовьют в себе многомерную топологическую интуицию, которой не обладали предыдущие поколения.

Некоторые материалы можно найти, например, в работе [31].

9. ДИНАМИКА

В предлагаемых направлениях в последние десятилетия велась весьма интенсивная работа, прежде всего экспериментальная. Тем не менее открытые вопросы остаются, и дальнейшие КЭ желательны.

(а) Гипотеза Коллатца (“ $3n + 1$ -проблема”). Речь идет об итерациях отображения

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n \in 2\mathbb{N} \\ 3n + 1, & \text{если } n \in 2\mathbb{N} + 1. \end{cases}$$

Предполагается, что любая орбита выходит на цикл $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$, но за десятки лет никому доказать это не удалось. Прямое компьютерное исследование этой системы легко, и с него можно начинать. Дальнейшие КЭ, по-видимому, связаны со статистической обработкой данных: как распределяются длины орбит до выхода на основной цикл, как далеко может зайти случайно взятое число и т.п.

Занимаясь этим проектом, учащийся, по-видимому, должен узнать, что такое 2-адические числа, и понять аналогию рассматриваемого отображения с *палаточным* отображением. Возможно, полезно почитать [32]. Мы не считаем вероятным, что существенный прогресс здесь может быть достигнут в работе студентов, но простота задачи и возможность эксперимента, визуализации и т.д. — увлекательны.

(б) Итерации квадратичных отображений. Располагая возможностями современных компьютеров, стоит порисовать разнообразные множества Жюлиа и уникальное множество Мандельброта — просто чтобы ими полюбоваться.

Серьезный математический вопрос заключается в изучении *константы Фейгенбаума* (для

квадратичных отображений). Мы сегодня можем строго доказать ее существование — см. [33]. Однако мы даже не знаем, рациональна ли она, как тысячи лет не были уверены в иррациональности числа π .

По-видимому, одно из главных условий успешных размышлений о константе Фейгенбаума — не переставать удивляться явлению *универсальности*, которым она управляет.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Много лет преподавая математику с использованием компьютерных экспериментов, авторы могут попытаться сделать некоторые выводы, в частности потому, что один из них в те же годы интенсивно преподавал математику и более традиционным образом.

Бросающиеся в глаза свойства *разумного КЭ* — это *экономия усилий*, затрачиваемых на рутинные операции, и некоторая *несомненность* результатов при условии, что они многократно проверены, желательно разными людьми на разных компьютерах. Более существенна, разумеется, возможность получить результаты, вообще недоступные при ручных вычислениях, переборах и рисованиях.

Важный педагогический аспект КЭ заключается в том, что будущему математику недостаточно как угодно много раз получить результаты с помощью КЭ: для чувства *полного понимания* ему нужно что-то еще (вряд ли только формальное доказательство; скорее понимание картины мира, фрагмент которой был увиден с помощью КЭ). Видимо, на основании этого параметра можно судить о перспективах молодого человека профессионально заниматься математикой; во всяком случае, этот параметр не менее важен, чем способность быстро и правильно решать однотипные задачи.

Что касается перспектив КЭ в преподавании, авторы достаточно осторожны; многие суждения, высказанные в настоящей работе, носили довольно персональный характер. За последние десятилетия популярность КЭ в преподавании геометрии заметно возросла; не вполне ясно, будет ли этот процесс продолжаться (скорее да, чем нет) и как скоро КЭ начнет распространяться на другие разделы математики.

Абсолютно уверенно авторы на основе многолетнего опыта могут сказать, что преподаватели получают большое удовольствие в результате удачных КЭ и что это удовольствие обычно передается учащимся. Именно это удовольствие (а иногда — его отсутствие) — один из базовых параметров в отношениях человека с Математикой.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана РНФ, грант 22-11-00177 (А.Л. Семенов — введение и часть 1) и РФФИ, грант № 19-29-14234 РјРе (Г.Б. Шабат — часть 2 и заключение).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишняков Ю.С., Семенов А.Л., Шабат Г.Б. Работа математика как прообраз освоения математики учащимися. Роль эксперимента // Настоящий сборник.
2. Шабат Г.Б. “Живая Математика” и математический эксперимент // “Вопросы образования”. 2005. Вып. 4. С. 156–165.
3. Успенский В. Гуманитарное и математическое: преодоление барьера // Труды по нематематике, 2-е изд., испр. и доп. : В 5 кн. Кн. 2. 2014. С. 25–64. ISBN 978-5-94282-676-5.
4. Vavilov N. Reshaping the metaphor of proof // Phil. Trans. R. Soc. A. 2019 377: 20180279. URL: <https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0279>
5. Начала Евклида // Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при ред. уч. И.Н. Веселовского и М.Я. Выгодского. М.—Л., ГТТИ, 1949–1951.
6. Miller N. Euclid and His Twentieth Century Rivals: Diagrams in the Logic of Euclidean Geometry // Center for the Study of Language and Inf, 2007.
7. Гильберт Д. Основания геометрии // Пер. с нем. под ред. А.В. Васильева. Л., “Сеятель”, 1923.
8. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах // Серия «Библиотечка “Квант”», вып. 56. М., Наука, 1986.
9. Артин Э. Геометрическая алгебра. М., Наука, 1969.
10. Grothendieck A. Esquisse d’un Programme // Unpublished manuscript, (1984). Eng. transl. by P. Lochak and L. Schneps in Geometric Galois actions, vol. 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. 242. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. P. 5–48.
11. Firsov V., Semenov A. School Mathematics in Russia // “National Presentations: Russia”, 10-th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, 2004. URL: <https://alsemenov.com/work-achievements/international-congress#rec346136312>
12. Shabat G. Napoleon’s Theorem and its Generalizations, Found by Moscow High School Students // The talk on ICME10 (the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, 4–11 July, 2004, unpublished).
13. Макарова П.С., Тесля О.Ю., Шабат Г.Б. Обобщенные преобразования Наполеона // Материалы весенней научной сессии преподавателей каф. геометрии математического факультета МПГУ и каф. алгебры и геометрии факультета естественных наук университета им. Палацкого в Оломоуце. М., МПГУ, 2017. С. 35–41.
14. Aubel H. van Note concernant les Centres des Carrés Construits sur les Côtes d’un Polygone Quelconque // Nouv. Corresp. Math. 4, 1878. P. 40–44.
15. Бахман Ф., Шмидт Э. n-угольники // Сер.: Современная математика. Популярная серия. М.: Мир, 1973. 248 с.
16. Яглом И.М. Геометрические преобразования. Том 1. Движения и преобразования подобия // Сер. “Библиотека математического кружка”, вып. 7. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 144 с.
17. Дубровский В.Н. Интерактивные задания 74–78 в комплексе 1С:Урок. Библиотека интерактивных материалов. Математика. Виртуальные лаборатории по математике, 7–11 кл. Планиметрия. Дополнительные модели. Геометрические преобразования // URL: https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/planimetriya/dopolnitelnye_modeli/geometricheskie_preobrazovaniya
18. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках // Московский Центр Непрерывного Математического Образования, 2018.
19. Бугаенко В.О. Уравнения Пелля. М., МЦНМО, 2001.
20. Colebrooke H.T. Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhāscara. John Murray, London, 1817. Reprinted by Martin Sandig, Weisbaden, 1973.
21. Kreydlin G.E., Shabat G.B. Mathematical Theorems in Natural Languages // Advances in Mathematics Research. 2020. V. 28. P. 181–194.
22. Берс Л. Математический анализ // Пер. с англ. под ред. И.М. Яглома. М., “Высш. школа”, 1975.
23. Арнольд В.И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // УМН. 1992. 47:1(283). P. 3–45.
24. Mengoli P. Novae Quadraturae Arithmeticae seu de Additione Fractionum // Bologna, 1650.
25. Bernoulli J. Tractatus de seriebus infinitis // Basel, 1713.
26. Euler L. De Summis Serierum Reciprocarum // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae (1740), 7:123–134.
27. Шабат Г.Б. Несколько взглядов на числа Каталана // В сб. “Элементы математики в задачах” под ред. А.А. Заславского, А.Б. Скопенкова и М.Б. Скопенкова. М., МЦНМО, 2018.
28. Wilf H.S. Lectures on Integer Partitions // University of Pennsylvania, 2000.
29. Фукс Д.Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли // М.: Наука, 1984.
30. Шабат Г., Сгибнев А. Склейки многоугольников // Квант. 2011. № 3. С. 17–22.
31. Filakovsky M., Franek P., Wagner U., Zhechev S. Computing Simplicial Representatives of Homotopy Group Elements // Journal of Applied and Computational Topology. 2018. V. 2. P. 177–231.
32. Lagarias J.C., ed. The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem // American Mathematical Society, 2010.
33. Lanford III O. A Computer-assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. 6 (3). P. 427–434.

COMPUTER EXPERIMENT IN TEACHING MATHEMATICS

G. B. Shabat^{a,b,c} and Academician of the RAS A. L. Semenov^{d,e,f}^a *Russian State University for the Humanities, Moscow, Russian Federation*^b *Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russian Federation*^c *Independent Moscow University, Moscow, Russian Federation*^d *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*^e *Institute of Education, HSE University, Moscow, Russian Federation*^f *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*

Mathematical experiment has always been a key source for mathematical discovery. Over the past 50 years, thanks to digital technologies, its role in mathematical research has grown significantly. Digital technologies have opened up fundamentally new opportunities for experimentation in mathematics education, bringing the majority of students of mathematical education closer to mathematical research. Such an approximation is especially desirable in the modern world, where it becomes possible thanks to digital technologies. The article discusses the results of the work of the authors over the past decades on the application of a computer mathematical experiment at different levels of school and university education. Particular attention is paid to dynamic geometry environments. The possibilities of using computer algebra systems are also considered. The project of schoolchildren's work on generalizations of Napoleon's theorem is considered in detail.

Keywords: mathematical experiment in education, computer experiment, dynamic geometry, computer algebra systems, modernization of mathematical education, mathematical discoveries of schoolchildren, generalizations of Napoleon's theorems, van Aubel's theorem