

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ОБОБЩЕННЫМ УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО–ИОНКИНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. А. И. Кожанов^{1,2,*}

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым

Поступило 02.09.22 г.

После доработки 28.10.2022 г.

Принято к публикации 23.12.2022 г.

В работе изучается разрешимость нелокальных по пространственной переменной краевых задач для одномерных параболических уравнений, а также для некоторых уравнений соболевского типа. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений — именно, решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Ключевые слова: параболические уравнения, уравнения соболевского типа, нелокальные задачи, обобщенное условие Самарского–Ионкина, регулярные решения, существование, единственность

DOI: 10.31857/S2686954323700091, **EDN:** СТНУQW

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений — именно, задачи, в которых вместо обычных локальных (точечных) граничных условий задаются условия, связывающие значения решения и (или) его производных в граничных точках со значениями решения и (или) его производных в точках иных граничных или внутренних многообразий — исследуются с давних времен, причем как с математической точки зрения, так и с точки зрения математического моделирования. Современный этап в развитии теории таких задач начался, по-видимому, с работы А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [1], опубликованной в 1969 г. В этой работе был предложен новый подход к постановке нелокальных краевых задач; этот подход с тех пор активно используется многими авторами. Среди многочисленных работ, посвященных задаче Бицадзе–Самарского и близких к ней задачам, выделим сыгравшие особую роль работы [2–5]. В первой из них — работе Н.И. Ионкина [2], опубликованной в 1977 г. — изучалась нелокальная задача для одномерного параболического уравнения, возникающая при моделировании некоторых неклассических теп-

ловых процессов, и был предложен метод, основанный на разложении решения по специальной биортогональной системе функций, с помощью которого удалось доказать существование и в дальнейшем в работе [3] — устойчивость решений.

В 1980 г. была опубликована работа А.А. Самарского [4], в которой также для параболического уравнения с одной пространственной переменной была предложена постановка нелокальной краевой задачи, включающая в себя как постановку классических начально-краевых задач, так и задачу Н.И. Ионкина работ [2] и [3]. Исследованию разрешимости нелокальных задач с условиями А.А. Самарского посвящены работы Н. Лажетича, А.И. Кожанова, Л.С. Пулькиной и многих других.

Как сыгравшую особую роль, отметим также работу [5], принадлежащую Н.И. Юрчуку. В этой работе изучалась задача Н.И. Ионкина для одномерных параболических уравнений с переменными коэффициентами, метод исследования отличался от метода работ [2, 3], но ее разрешимость была установлена лишь в весовых пространствах.

Заметим также следующее. Как уже говорилось выше, работы Н.И. Ионкина [2, 3] появились во многом благодаря некоторым потребностям математического моделирования. Но впервые, по-видимому, на связь теории нелокальных краевых задач с задачами математического моделирования обратил внимание В.А. Стеклов еще в конце XIX века в работе [6] (см. также [7]), посвя-

¹ Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

*E-mail: kozhanov@math.nsc.ru

щенной изучению некоторых процессов теплопроводности.

Именно нелокальная задача Н.И. Ионкина, но в более общей постановке — с условием, которое можно назвать обобщенным условием Самарского—Ионкина — и будет основной целью настоящей работы. Более точно, будут изучаться некоторые нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского—Ионкина для параболических уравнений с переменными коэффициентами, а также для уравнений, которые в последнее время — см., например, [8–10] — называют уравнениями соболевского типа. Уточним, что метод исследования при этом будет отличаться как от метода работ [2, 3], так и от метода работы [5].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, переменных x и t . Далее, пусть $a(x)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$ и $\gamma(t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Нелокальная задача I: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}(a(x)u_x) + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \gamma(t)u(1, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (3)$$

Нелокальная задача II: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), а также условие

$$u_x(0, t) = \gamma(t)u_x(1, t), \quad u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Нелокальная задача III: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{tt} - u_{xxt} + b(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (5)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Нелокальная задача IV: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (5) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4) и (6).

В данных задачах условие (4) в случае $\gamma(t) \equiv 1$ есть условие Ионкина (в дифференциальной форме), и тем самым задачи II и IV можно назвать обобщением задачи Ионкина. Нелокальные задачи I и III имеют самостоятельное значение, но в

то же время ниже будет показано, что они тесно связаны с задачами II и IV.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ I И II

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$a(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad c(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C([0, T]),$$

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad a'(x) \leq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Тогда нелокальная задача I не может иметь в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ более одного решения.

Доказательство. Умножим уравнение (1) с нулевой правой частью на функцию xu и проинтегрируем по прямоугольнику $\Omega \times (0, t)$. Используя далее неравенство

$$\psi^2(1) \leq \delta^2 \int_{\Omega} x \psi'^2(x) dx + \left(2 + \frac{1}{\delta^2}\right) \int_{\Omega} x \psi^2(x) dx, \quad (7)$$

в котором $\psi(x) \in W_2^1(\Omega)$, δ есть произвольное положительное число, и применяя лемму Гронуолла, получим, что для решения $u(x, t)$ нелокальной задачи I в случае $f(x, t) \equiv 0$ при $t \in (0, T)$ выполняется равенство $u(0, t) = 0$. Другими словами, функция $u(x, t)$ будет решением однородной начально-краевой задачи со смешанными условиями для параболического уравнения второго порядка. Как хорошо известно [11], функция $u(x, t)$ будет тождественно нулевой в Q функцией. А это и означает требуемое.

Определим пространство V_0 :

$$V_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^{2,1}(Q), v_x(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)\}.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$a(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad c(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C([0, T]),$$

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad (xc_x(x, t))_x \leq 0$$

$$\text{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0, T], \quad a'(1) = 0.$$

Тогда нелокальная задача II не может иметь в пространстве V_0 более одного решения.

Доказательство. Если $u(x, t)$ есть решение из пространства V_0 нелокальной задачи II в случае $f(x, t) \equiv 0$, то для функции $v = u_x$ будет выполняться уравнение

$$v_t - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x)v) + c(x, t)v + c_x(x, t)u = 0.$$

Умножая это уравнение на функцию xv , интегрируя по прямоугольнику $\Omega \times (0, t)$, применяя неравенство (7) и лемму Гронуолла, получим $v(x, t) \equiv 0$ в Q . Отсюда и следует требуемое.

Теорема 3. Пусть выполняются условия

$$a(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad c(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0, T]),$$

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad a'(x) \leq 0, \quad c(x, t) \geq 0, \quad c_{xx}(x, t) \leq 0,$$

$$2c(x, t) - a''(x) \geq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0, T].$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача I имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью метода регуляризации. Именно, для положительных чисел ε и μ рассматривается задача: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$v_t - \frac{\partial}{\partial x} (a(x)v_x) + c(x, t)v + \varepsilon(v_{xxt} - \mu v_{tt}) = g(x, t) \quad (*)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$v_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Как для доказательства существования регулярного решения этой задачи, так и для организации предельного перехода необходимы априорные оценки. Эти оценки выводятся с помощью анализа равенств, полученных умножением уравнения (*) на функции $(T_0 - t)xv(x, t)$, $-x(T_0 - t)v_{tt}(x, t)$, $-v_{xx}(x, t)$, $v_t(x, t)$ и $\varepsilon v_{xxt}(x, t)$ ($T_0 > T$), с последующим интегрированием по прямоугольнику Q .

Теорема 4. Пусть выполняются условия

$$a(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad c(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0, T]),$$

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad c(x, t) \geq 0, \quad 2c(x, t) - a''(x) \geq 0,$$

$$(xc_x(x, t))_x \leq 0$$

при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $a'(1) = 0$.

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_x(x, t) \in L_2(Q)$, $f_{xt}(x, t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача II имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u_x(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью перехода к продифференцированному по переменной x уравнению (*).

4. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ III И IV

Определим пространства V_1 и V_2 :

$$V_1 = \{v(x, t): v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)),$$

$$v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\},$$

$$V_2 = \{v(x, t): v(x, t) \in V_1, \quad v_x(x, t) \in V_1\}.$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия

$$b(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad c(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C([0, T]).$$

Тогда нелокальная задача III не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.

Теорема 6. Пусть выполняются условия

$$b(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad c(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C([0, T]),$$

$$(xb_x(x, t))_x \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \bar{Q}.$$

Тогда нелокальная задача IV не может иметь в пространстве V_2 более одного решения.

Уравнение (5) на функциях из пространства V_1 можно записать в виде

$$u_t - u_{xx} + b(x, t)u = \int_0^t R(x, t, \tau)u(x, \tau)d\tau + f_1(x, t),$$

$$R(x, t, \tau) = e^{\int_0^{\tau} b(x, \tau)d\tau - \int_0^{\tau} b(x, \xi)d\xi} [b_\tau(x, \tau) - b^2(x, \tau) - c(x, \tau)], \quad (8)$$

$$f_1(x, t) = \int_0^t e^{\int_0^{\tau} b(x, \tau)d\tau - \int_0^{\tau} b(x, \xi)d\xi} f(x, \tau)d\tau.$$

Повторяя для уравнения (8) доказательство теорем 1 и 2, получим требуемое.

Используя представление (8), нетрудно установить и разрешимость нелокальных задач III и IV.

Теорема 7. Пусть выполняются условия

$$b(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad c(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0, T]),$$

$$b(x, t) \geq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \bar{Q}.$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача III имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_1 .

Теорема 8. Пусть выполняются условия

$$b(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad c(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0, T]),$$

$$b(x, t) \geq 0, \quad (xb_x(x, t))_x \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \bar{Q}.$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_x(x, t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача IV имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_2 .

Сделаем несколько заключительных замечаний:

1. Уравнения (1) и (5) имеют модельный вид. Представленные в работе результаты можно получить и в более общих ситуациях — например, функция a в уравнении (1) может зависеть и от переменной t , в уравнениях (1) и (5) могут присутствовать слагаемые с первой производной по переменной x , и т.д. Соответствующие условия разрешимости (существования и единственности) легко выводятся.

2. Краевые условия (3) и (4) также можно “пошевелить” – второе условие (3) можно заменить условием $u_x(1, t) + \alpha(t)u(1, t) = 0$, первое условие (4) можно заменить условием $u_x(0, t) + \beta(t)u(0, t) = \gamma(t)u_x(1, t)$.

3. Теоремы 1 и 2, 4 и 5 говорят о единственности регулярных решений соответствующих нелокальных задач для любой функции $\gamma(t)$. Вместе с тем для близкого к изученным уравнения

$$u_t - u_{xxt} + b(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = f \quad (9)$$

(называемого в некоторых источниках псевдопараболическим) это не так. В случае $b(x, t) \equiv c(x, t) \equiv 0$, $\gamma = \frac{1}{2}(e + e^{-1})$, $f(x, t) \equiv 0$ нелокальная задача I для уравнения (9) имеет ненулевое решение $u(x, t) = t(e^x + e^{-x})$, что и говорит о неединственности решений.

4. Краевые и начальные условия в нелокальных задачах можно задавать неоднородными. Суть полученных результатов от этого не изменится.

5. И последнее замечание: разрешимость нелокальных задач I и II для гиперболических уравнений второго порядка с одной пространственной переменной с произвольной функцией $\gamma(t)$ доказана в работе [12].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075–15–2022–282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
3. Ионкин Н.И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1279–1283.
4. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
5. Юрчук Н.И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2117–2126.
6. Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела. Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1897. Т. 5. № 3–4. С. 136–181.
7. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
8. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
9. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, the Netherlands: VSP, 2003.
10. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
12. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Математические заметки. 2011. Т. 90. Вып. 2. С. 254–268.

NONLOCAL PROBLEMS WITH GENERALIZED SAMARSKY-IONKIN CONDITION FOR SOME CLASSES OF NONSTATIONARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. I. Kozhanov^{a,b}

^a Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

^b Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

In this paper, we study the solvability of boundary value problems that are nonlocal with respect to the spatial variable for one-dimensional parabolic equations, as well as for some equations of the Sobolev type. Existence and uniqueness theorems are proved regular solutions – namely, solutions having all the derivatives generalized in the sense of S.L. Sobolev entering the corresponding equation.

Keywords: parabolic equations, Sobolev type equations, nonlocal problems, generalized Samarskii–Ionkin condition, regular solutions, existence, uniqueness