ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 512, с. 96–101

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ОДНОЛИСТНОСТИ НА КЛАССЕ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА В СЕБЯ С ДВУМЯ ГРАНИЧНЫМИ НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ

© 2023 г. В. В. Горяйнов[1,*], О. С. Кудрявцева[2,3,], А. П. Солодов[2,***]**

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным
Поступило 30.03.2023 г.
После доработки 14.06.2023 г.
Принято к публикации 14.07.2023 г.

Изучается класс голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя граничными неподвижными точками, одна из которых является точкой Данжуа–Вольфа. Найдена оценка сверху области однолистности на классе таких функций в зависимости от значения угловой производной в отталкивающей граничной неподвижной точке.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, теорема Данжуа–Вольфа, угловая производная, область однолистности

DOI: 10.31857/S2686954323600192, **EDN:** SWBDPG

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы существования и определения размеров областей однолистности голоморфных отображений составляют важное направление геометрической теории функций и в различных постановках исследовались многими авторами. В данной работе мы сконцентрируем внимание на том, какое влияние на область однолистности ограниченного голоморфного отображения оказывают его неподвижные точки. Хорошо известен классический результат Ландау об области однолистности на классе голоморфных отображений f единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в себя, нормированных условиями $f(0) = 0$ и $|f'(0)| = \beta$, $\beta \in (0,1)$. Согласно теореме Ландау [1, 2] любая такая функция однолистна внутри круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \beta/(1 + \sqrt{1-\beta^2})\}$, причем оценка точная. Недавно было обнаружено [3], что наличие у голоморфного отображения двух неподвижных точек при определенных условиях влечет существование областей однолистности. Это обстоятельство мотивировало к исследованию геометрии указанных областей и поиску их точных размеров. Прежде чем сформулировать недавние результаты, а также результаты настоящей работы, полученные на пути решения обозначенной выше задачи, приведем необходимые сведения.

Пусть $\mathcal{B}$ – класс голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D}$ в себя. Если $f \in \mathcal{B}$ и $f(z) \not\equiv z$, то в силу леммы Шварца–Пика (см. [4]) функция f может иметь внутри круга $\mathbb{D}$ не более одной неподвижной точки. В общем случае функция $f \in \mathcal{B}$ может не иметь в круге $\mathbb{D}$ неподвижной точки. Тогда ее заменяет некоторая выделенная точка на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Теорема A (Данжуа, Вольф [5–8]). *Пусть $f \in \mathcal{B}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга $\mathbb{D}$ на себя. Тогда существует единственная точка q, $q \in \overline{\mathbb{D}}$, такая, что последовательность натуральных итераций $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n \geqslant 2$, функции $f = f^1$ сходятся к q локально равномерно в $\mathbb{D}$. Кроме того, если $q \in \mathbb{T}$, то существуют угловые пределы*

$$\angle\lim_{z\to q} f(z) = f(q),$$

$$\angle\lim_{z\to q} f'(z) = \angle\lim_{z\to q} \frac{f(z)-q}{z-q} = f'(q),$$

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[3] *Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия*
**E-mail: goryainov_vv@hotmail.com*
***E-mail: kudryavceva_os@mail.ru*
****E-mail: apsolodov@mail.ru*

причем $f(q) = q$ *и* $0 < f'(q) \leqslant 1$.

Точка q называется *точкой Данжуа–Вольфа* функции f. Если $q \in \mathbb{D}$, то в силу леммы Шварца–Пика выполняется неравенство $|f'(q)| \leqslant 1$. Таким образом, точка Данжуа–Вольфа q, $q \in \overline{\mathbb{D}}$, является *притягивающей* ($|f'(q)| < 1$) или *нейтральной* ($|f'(q)| = 1$) неподвижной точкой функции f.

Если функция $f \in \mathcal{B}$ с точкой Данжуа–Вольфа q, $q \in \overline{\mathbb{D}}$, имеет дополнительную неподвижную точку a, то она должна располагаться на единичной окружности $\mathbb{T}$ и ее неподвижность понимается в смысле углового предела. По теореме Жюлиа–Каратеодори (см. [9]) в граничной неподвижной точке a всегда существует угловой предел

$$\angle\lim_{z\to a}\frac{f(z)-a}{z-a} = \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|a-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}\frac{1-|z|^2}{|a-z|^2}. \qquad (1)$$

Более того, если этот предел конечен, то он является положительным числом и $f'(z)$ имеет тот же угловой предел при $z \to a$. В этом случае предел (1) называется *угловой производной* функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

Обозначим через $\mathcal{B}\{a\}$, $a \in \mathbb{T}$, класс функций f из $\mathcal{B}$, для которых точка a является граничной неподвижной точкой:

$$\mathcal{B}\{a\} = \{f \in \mathcal{B} : \angle\lim_{z\to a} f(z) = f(a) = a\}.$$

Для определенности положим $a = 1$. Для произвольного $\alpha > 1$ выделим в классе $\mathcal{B}\{1\}$ подкласс $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$, состоящий из функций, имеющих ограничение на значение угловой производной в неподвижной точке:

$$\mathcal{B}_\alpha\{1\} = \{f \in \mathcal{B}\{1\} : \angle\lim_{z\to 1} f'(z) = f'(1) = \alpha\}.$$

В [10] показано, что ни при каком $\alpha > 1$ на классе $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ нет непустых областей однолистности. Другими словами, класс $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ слишком обширен и для продвижения в задаче об области однолистности необходимо рассматривать более узкие классы. Наиболее естественное сужение класса $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$, $\alpha > 1$, – его подкласс, состоящий из функций, имеющих наряду с отталкивающей неподвижной точкой $z = 1$ притягивающую неподвижную точку q. В силу теоремы A притягивающая неподвижная точка обязательно существует (точка Данжуа–Вольфа), и дополнительное условие состоит лишь в фиксации ее расположения (внутри или на границе круга $\mathbb{D}$).

Задача об области однолистности в случае внутренней точки Данжуа–Вольфа исследовалась в [3, 10]. В [11] была найдена точная область однолистности при $\alpha \in (1, 4]$. А именно, любая функция f из класса $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ с внутренней точкой Данжуа–Вольфа q, $q \in \mathbb{D}$, однолистна в области

$$\mathcal{D}(\alpha, q) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{\left|((1+q)/(1-q))(1-2\mathrm{Re}z+|z|^2)-2i\mathrm{Im}z\right|}{1-|z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \right\}, \qquad (2)$$

причем ни в какой более широкой, чем $\mathcal{D}(\alpha, q)$, области указанное свойство уже не выполняется.

В данной работе мы рассмотрим случай, когда точка Данжуа–Вольфа является граничной. Не нарушая общности, будем считать, что это точка $q = -1$. Полученный класс обозначим следующим образом:

$$\mathcal{B}_\alpha[-1,1] = \mathcal{B}_\alpha\{1\} \cap \mathcal{B}[-1], \quad \alpha > 1.$$

(Здесь через $\mathcal{B}[-1]$ обозначен класс функций $f \in \mathcal{B}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q = -1$.) Существование областей однолистности при некоторых значениях α на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$ вытекает из результатов работы [12], в которой были найдены области однолистности на более широком классе $\mathcal{B}_\alpha\{-1,1\}$, состоящем из функций, имеющих ограничение на значение произведения угловых производных в двух граничных неподвижных точках:

$$\mathcal{B}\{-1,1\} = \mathcal{B}\{-1\} \cap \mathcal{B}\{1\},$$
$$\mathcal{B}_\alpha\{-1,1\} = \{f \in \mathcal{B}\{-1,1\} : f'(1)f'(-1) = \alpha\}.$$

Теорема B (Горяйнов [12]). *Пусть* $f \in \mathcal{B}_\alpha\{-1, 1\}$, $\alpha \in (1, 9)$. *Тогда* f *однолистна в области*

$$\mathcal{J}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \frac{1}{\cos y^*(\alpha)} \right\}, \qquad (3)$$

где $y^*(\alpha)$ *– единственный в интервале* $0 < y < \pi/2$ *корень уравнения*

$$\cos^2 y = (\alpha-1)\cos^3\frac{\pi-2y}{3}.$$

Для исследования области $\mathcal{J}(\alpha)$ полезно заметить, что $\cos y^*(\alpha) = (1+m(\alpha))^{-1/2}$, где

$$m(\alpha) = \frac{\alpha(9-\alpha)^2}{(\alpha-1)(9(K_1^2(\alpha)+K_2^2(\alpha))+3(\alpha-6)(K_1(\alpha)-K_2(\alpha))+\alpha^2+24\alpha-9)},$$

$$K_1(\alpha) = \sqrt[3]{2(\alpha+1)\sqrt{\alpha^2-1} + 2\alpha^2 - 14\alpha + 11},$$
$$K_2(\alpha) = \sqrt[3]{2(\alpha+1)\sqrt{\alpha^2-1} - 2\alpha^2 + 14\alpha - 11}.$$

Области $\mathcal{J}(\alpha)$ при каждом α, $\alpha \in (1,9)$, содержат вещественный диаметр и ограничены двумя дугами окружностей, проходящих через точки $z = \pm 1$.

Верхняя оценка области однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha\{-1,1\}$, $\alpha \in (1,9)$, найдена в [13]. А именно, показано, что при каждом s, $s \in (-1,1)$, функция

$$f_s(z) = \frac{a(s)z^3 + b(s)z^2 + c(s)z + d(s)}{d(s)z^3 + c(s)z^2 + b(s)z + a(s)},$$

где $a(s) = (1+\sqrt{\alpha})(s^2+1)$, $b(s) = -2(\sqrt{\alpha}+3)s$, $c(s) = (3-\sqrt{\alpha})(s^2+1)$, $d(s) = 2(\sqrt{\alpha}-1)s$, принадлежит классу $\mathcal{B}_\alpha\{-1,1\}$ и имеет нулевую производную в точках

$$z_{1,2}(s) = \frac{-2\sqrt[4]{\alpha} + p_1(\alpha) \pm i\,p_2(\alpha)s}{(-2\sqrt[4]{\alpha} + p_1(\alpha))s \pm i p_2(\alpha)},$$

где $p_1(\alpha) = \sqrt{(\sqrt{\alpha}-1)(3+\sqrt{\alpha})}$, $p_2(\alpha) = \sqrt{(\sqrt{\alpha}+1)(3-\sqrt{\alpha})}$. Кривые $z_1(s)$ и $z_2(s)$, $s \in (-1,1)$, представляют собой дуги окружностей – границу области

$$\mathcal{H}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \frac{2\sqrt[4]{\alpha}}{\sqrt{(3+\sqrt{\alpha})(\sqrt{\alpha}-1)}} \right\}. \quad (4)$$

Таким образом, за границу области $\mathcal{H}(\alpha)$ распространение области однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha\{-1,1\}$ невозможно.

Поскольку $f_s'(\pm 1) = \sqrt{\alpha}$, $\alpha \in (1,9)$, то обе неподвижные точки функции f_s являются отталкивающими. Это означает, что функция f_s не принадлежит классу $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$. Таким образом, верхняя оценка области однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha\{-1,1\}$ (см. (4)) ничего содержательного для класса $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$ не дает. Более того, до настоящего момента не было известно никаких оценок сверху области однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$. В данной работе впервые получена подобная оценка. Кроме того, мы предполагаем (и это будет объяснено далее), что найденная оценка есть точная область однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$.

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ОДНОЛИСТНОСТИ

Основной результат работы (теорема 1) опирается на следующее утверждение, имеющее, на наш взгляд, самостоятельное значение.

Лемма 1. *Пусть α, β – положительные числа, $z_0 \in \mathbb{D}$. Если некоторая функция $f \in \mathcal{B}\{-1,1\}$ удовлетворяет условиям $f'(-1) = \beta$, $f'(1) = \alpha$, $f'(z_0) = 0$, то какова бы ни была точка $\zeta \in \mathbb{D}$ такая, что*

$$\frac{|1-\zeta^2|}{1-|\zeta|^2} = \frac{|1-z_0^2|}{1-|z_0|^2}, \quad (5)$$

найдется функция $g \in \mathcal{B}\{-1,1\}$, удовлетворяющая условиям $g'(-1) = \beta$, $g'(1) = \alpha$, $g'(\zeta) = 0$.

Если в дополнение ко всем условиям функция f не имеет других неподвижных точек, то и функцию g можно выбрать так, чтобы она не имела других неподвижных точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для заданных чисел α, β и точки z_0 требуемая функция f найдена. При каждом $s \in (-1,1)$ рассмотрим функцию $T_s(z) = (z-s)/(1-sz)$, которая осуществляет дробно-линейное отображение круга $\mathbb{D}$ на себя и удовлетворяет условиям $T_s(1) = 1$, $T_s(-1) = -1$. Так как $f \in \mathcal{B}\{-1,1\}$, то функция $g_s = T_s^{-1} \circ f \circ T_s$ также принадлежит классу $\mathcal{B}\{-1,1\}$. Нетрудно проверить, что $g_s'(-1) = \beta$, $g_s'(1) = \alpha$. Кроме того, $g_s'(\zeta(s)) = 0$, где $\zeta(s) = T_s^{-1}(z_0)$.

Легко убедиться, что каждая точка кривой $\zeta(s)$, $s \in (-1,1)$, удовлетворяет соотношению (5). В силу непрерывности $\zeta(s)$ и того, что $\zeta(1-0) = 1$, $\zeta(-1+0) = -1$, данная кривая представляет собой одну из двух симметричных относительно вещественного диаметра дуг окружностей, из которых состоит множество точек, описываемых условием (5). Вторая дуга $\overline{\zeta(s)}$, $s \in (-1,1)$, состоит из нулей производных функций $h_s(z) = \overline{g_s(\overline{z})}$, каждая из которых принадлежит классу $\mathcal{B}\{-1,1\}$ и удовлетворяет условиям $h_s'(-1) = \beta$, $h_s'(1) = \alpha$.

Вторая часть леммы непосредственно следует из следующего факта: $a \in \overline{\mathbb{D}}$ – неподвижная точка функции g_s (функции h_s) тогда и только тогда, когда точка $T_s(a)$ (точка $\overline{T_s(a)}$) – неподвижная точка функции f. Лемма доказана. $\square$

Следующая теорема устанавливает, что точная область однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$, $\alpha > 1$, содержится в области

$$\mathcal{U}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\}. \quad (6)$$

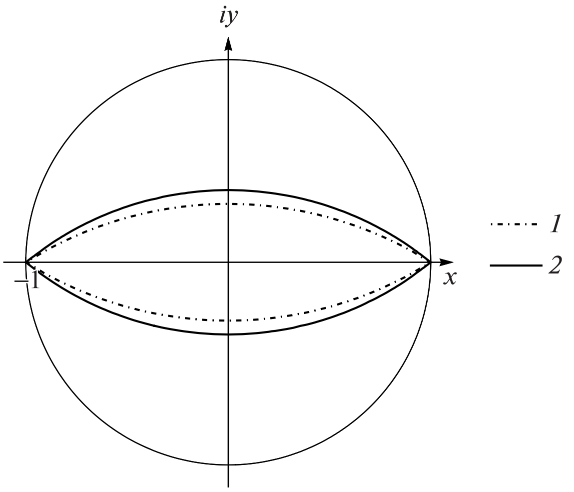

Рис. 1. Границы областей $\mathcal{J}(\alpha)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ при $\alpha = 2.5$.

Теорема 1. *При каждом* $\alpha > 1$ *какова бы ни была область* $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}(\alpha) \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}(\alpha)$, *найдется функция* $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1,1]$, *не однолистная* в *области* $\mathcal{V}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(\zeta) = \alpha^{-1}\left(\zeta + i(\alpha-1) + (\alpha-1)/(\zeta+i)\right)$. Эта функция отображает правую полуплоскость $\mathbb{H} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ в себя и имеет ровно две неподвижные точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$. Кроме того, производная функции h обращается в нуль в точке $\zeta_0 = \sqrt{\alpha-1} - i$.

Рассмотрим дробно-линейное преобразование $L(\zeta) = (\zeta-1)/(\zeta+1)$, отображающее полуплоскость $\mathbb{H}$ на круг $\mathbb{D}$, и составим композицию $f = L \circ h \circ L^{-1}$. Функция f отображает круг $\mathbb{D}$ в себя и имеет ровно две неподвижные точки $z = -1$ и $z = 1$, одна из которых в силу теоремы A является точкой Данжуа–Вольфа. Несложные вычисления показывают, что в неподвижных точках функция f имеет следующие значения угловых производных: $f'(-1) = 1$, $f'(1) = \alpha$. Тем самым точка $z = -1$ является точкой Данжуа–Вольфа и $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1,1]$. Производная функции f обращается в нуль в точке

$$z_0 = L(\zeta_0) = \frac{\sqrt{\alpha-1} - 1 - i}{\sqrt{\alpha-1} + 1 - i},$$

$$\text{причем} \quad \frac{|1 - z_0^2|}{1 - |z_0|^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Тем самым $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1,1]$ и на границе области $\mathcal{U}(\alpha)$ имеет нуль производной (точку z_0). Согласно лемме 1 существование такой функции влечет существование для произвольной точки $z \in \mathbb{D}$, лежащей на границе области $\mathcal{U}(\alpha)$, функции $g \in \mathcal{B}_\alpha[-1,1]$, производная которой обращается в нуль в этой точке.

Пусть теперь $\mathcal{V}$ – произвольная область такая, что $\mathcal{U}(\alpha) \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}\alpha)$. Тогда некоторая граничная точка области $\mathcal{U}(\alpha)$ находится внутри области $\mathcal{V}$. Как показано выше, найдется функция, принадлежащая классу $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$ и имеющая в этой точке нулевую производную. Следовательно, эта функция не однолистна в области $\mathcal{V}$. Теорема доказана. □

Интересно провести сравнение верхней и нижней оценок областей однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$. Оценку сверху дает только что доказанная теорема 1, оценка снизу вытекает из теоремы B и вложения $\mathcal{B}_\alpha[-1,1] \subset \mathcal{B}_\alpha\{-1,1\}$. Заметим, что области $\mathcal{J}(\alpha)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ (см. (3) и (6)) имеют одинаковую структуру (см. рис. 1) и отличаются только размером, что, на наш взгляд, не случайно. В контексте леммы 1 можно предположить, что структура точной области однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$ имеет такой же вид. Что касается сравнения размеров областей, то при α, близких к 1, зазор между нижней и верхней оценками невелик. Действительно, дуги, ограничивающие области $\mathcal{J}(\alpha)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$, образуют с вещественной осью в точках $z = \pm 1$ углы $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ соответственно, тангенсы которых имеют следующую асимптотику:

$$\operatorname{tg}\varphi_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} - \frac{19}{32}\sqrt{\alpha-1} + o(\alpha-1),\ \alpha \to 1+0,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}.$$

Таким образом, полученная двусторонняя оценка областей однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$ асимптотически точна при $\alpha \to 1+0$. Разумеется, при α, близких к 9, верхняя и нижняя оценки различаются уже очень сильно, так как при $\alpha \to 9-0$ область $\mathcal{J}(\alpha)$ стягивается в вещественный диаметр. При $\alpha \geqslant 9$ вообще никакой оценки снизу не известно. Тем не менее близость двусторонней оценки при $\alpha \to 1+0$ позволяет сформулировать гипотезу, что полученная в данной работе верхняя оценка и есть точная область однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1,1]$. Эта гипотеза косвенно подтверждается также тем, что область $\mathcal{U}(\alpha)$ в определенном смысле мало отличается от точной области однолистности $\mathcal{D}(\alpha, q)$ на классе функций $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ с внутренней неподвижной точкой q, расположенной вблизи точки $z = -1$ (см. (2)), что видно из рис. 2.

В заключение обобщим результат теоремы 1 на случай, когда точка Данжуа–Вольфа произвольно расположена на единичной окружности $\mathbb{T}$. Обозначим через $\mathcal{B}_\alpha[q,1]$ класс, состоящий из

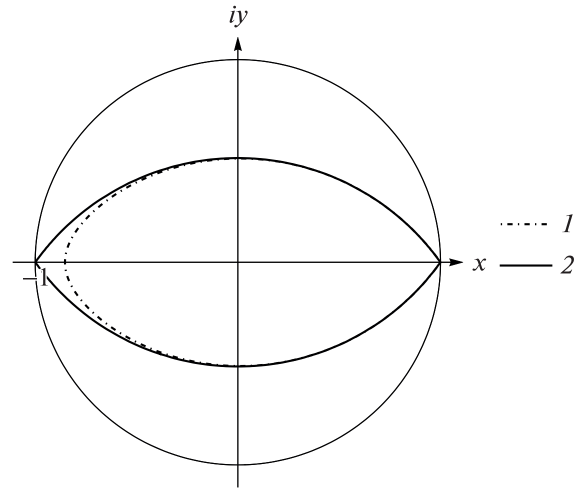

Рис. 2. Границы областей $\mathcal{D}(\alpha, q)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ при $\alpha = 1.5$, $q = -0.8$.

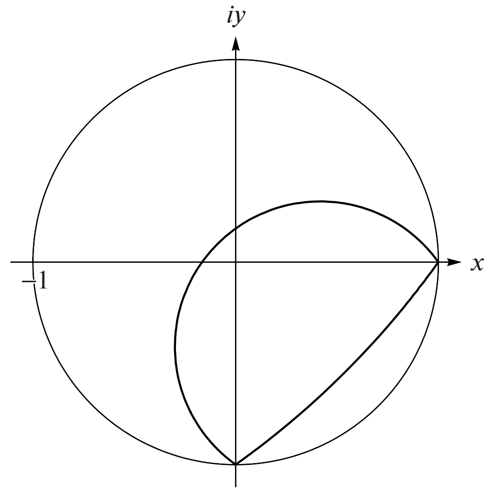

Рис. 3. Граница области $\mathcal{U}(\alpha, q)$ при $\alpha = 1.5$, $q = -i$.

функций $f \in \mathcal{B}_\alpha\{1\}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{T}\backslash\{1\}$. Покажем, что точная область однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[q,1]$ содержится в области

$$\mathcal{U}(\alpha, q) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{2}{|1-q|} \frac{|1-z||q-z|}{1-|z|^2} < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\}. \quad (7)$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 1$, $q \in \mathbb{T}\backslash\{1\}$. *Какова бы ни была область* $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}(\alpha, q) \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}(\alpha, q)$, *найдется функция* $f \in \mathcal{B}_\alpha[q,1]$, *не однолистная в области* $\mathcal{V}$.

Доказательство. Рассмотрим следующее дробно-линейное преобразование:

$$S_q(z) = \frac{(3q-1)z-(1+q)}{(1+q)z-(3-q)}.$$

Поскольку $|q| = 1$, $\operatorname{Re} q < 1$ и $|(1+q)/(3q-1)| = (1 + \operatorname{Re} q)/(5 - 3\operatorname{Re} q) < 1$, функция S_q отображает круг $\mathbb{D}$ на себя, при этом точка $z = 1$ остается на месте, а точка $z = -1$ переходит в точку $z = q$.

Как и при доказательстве теоремы 1 достаточно для каждой граничной точки области $\mathcal{U}(\alpha, q)$ (см. (7)) предъявить функцию из класса $\mathcal{B}_\alpha[q,1]$, производная которой обращается в нуль в этой точке.

Фиксируем точку $z \in \mathbb{D}$, лежащую на границе $\mathcal{U}(\alpha, q)$. Легко проверить, что имеет место равенство

$$\frac{|1-(S_q^{-1}(z))^2|}{1-|S_q^{-1}(z)|^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Следовательно, точка $S_q^{-1}(z)$ расположена на границе области $\mathcal{U}(\alpha)$ (см. (6)), и в силу теоремы 1 найдется функция $g \in \mathcal{B}_\alpha[-1,1]$, производная которой обращается в нуль в точке $S_q^{-1}(z)$. Тогда функция $S_q \circ g \circ S_q^{-1}$ принадлежит классу $\mathcal{B}_\alpha[q,1]$ и имеет нуль в точке z. Теорема доказана. □

На рис. 3 изображена граница области $\mathcal{U}(\alpha, q)$ (см. (7)) в случае $q = -i$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00131) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Landau E.* Der Picard–Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. 1926. V. 32. P. 467–474.
2. *Montel P.* Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes. Paris: Gauthier-Villars, 1933.
3. *Горяйнов В.В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 3. 54–71.
4. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
5. *Denjoy A.* Sur l'iteration des fonctions analytiques // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1926. V. 182. P. 255–257.
6. *Wolff J.* Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent à cette région // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1926. V. 182. P. 42–43.
7. *Wolff J.* Sur l'itération des fonctions bornées // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1926. V. 182. P. 200–201.
8. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М.: ГИТТЛ, 1957.
9. *Ahlfors L.V.* Conformal invariants: Topics in geometric function theory. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

10. *Кудрявцева О.С., Солодов А.П.* Двусторонние оценки областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 7. 120–144.
11. *Солодов А.П.* Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 5. 190–218.
12. *Горяйнов В.В.* Голоморфные отображения полосы в себя с ограниченным искажением на бесконечности // Тр. МИАН. 2017. Т. 298. 101–111.
13. *Кудрявцева О.С., Солодов А.П.* Асимптотически точная двусторонняя оценка областей однолистности голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 11. 96–117.

ESTIMATE FOR DOMAIN OF UNIVALENCE ON THE CLASS OF HOLOMORPHIC SELF-MAPS OF A DISC WITH TWO BOUNDARY FIXED POINTS

V. V. Goryainov[a], O. S. Kudryavtseva[b,c], and A. P. Solodov[b]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

[c] *Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation*

Holomorphic self-maps of the unit disc with two boundary fixed points, one of which is a Denjoy–Wolff point are investigated. An upper estimate for domain of univalence is obtained for functions in such class, which depends on the value of the angular derivative at the repulsive boundary fixed point.

Keywords: holomorphic map, fixed points, Denjoy–Wolff theorem, angular derivative, domain of univalence