

ISSN 2686-7400

Том 519

Ноябрь–Декабрь 2024

ДОКЛАДЫ
РОССИЙСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУК.
ФИЗИКА,
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ



СОДЕРЖАНИЕ

Том 519, 2024

Мухсинджан Хуррамович Ашурев (к 75-летию со дня рождения)	3
ФИЗИКА	
Особенности ферромагнитного резонанса в тонких пленках, осажденных на полупроводящие подложки	
<i>Б. А. Беляев, В. В. Тюрнев, Г. В. Скоморохов, А. А. Горчаковский, И. В. Подшивалов</i>	5
Симметрии классической модели Гейзенберга	
<i>А. Б. Борисов, Д. В. Долгих</i>	13
Лазерная кавитация в трубке, погруженной в ограниченный объем, заполненный жидкостью	
<i>М. А. Гузев, Ю. В. Василевский, Е. П. Дац, И. А. Абушкин, Е. В. Хайдуков, В. М. Чудновский</i>	19
Парадоксальная зависимость аврорального километрового излучения от солнечной активности	
<i>В. И. Колпак, М. М. Могилевский, Д. В. Чугунин, А. А. Чернышов, И. Л. Моисеенко, М. О. Рязанцева</i>	26
Физический смысл и критические условия зажигания и самовоспламенения	
<i>А. А. Филиппов, Р. А. Филиппов-Кузнецов, А. А. Берлин</i>	30
<hr/>	
МЕХАНИКА	
Синтез оптимального быстродействия для обратного маятника с динамическим гасителем	
<i>И. М. Ананьевский</i>	35
Эффект усиления ударных волн в насыпных средах	
<i>А. Т. Ахметов, И. К. Гималтдинов, А. Ф. Мухаметзянов, Р. Ф. Гизатуллин</i>	41
Послойный анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек, ослабленных прямоугольными в плане вырезами	
<i>В. Н. Бакулин</i>	47
Экспериментальное подтверждение взаимообратности функций ползучести и релаксации в линейной теории вязкоупругости	
<i>Д. В. Георгиевский</i>	54
Математическая модель деградации многолетнемерзлых пород, содержащих скопления метастабильных газогидратов и свободного газа, под тепловым и солевым воздействием растворов	
<i>М. М. Рамазанов, Н. С. Булгакова, Л. И. Лобковский</i>	57
<hr/>	
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ	
Вклад текстуры и структуры в деформируемость листов сплава системы Al–Mg–Si	
<i>В. Н. Серебряный, А. С. Колянова, А. С. Гордеев</i>	67

CONTENTS

Volume 519, 2024

Mukhsindzhan Khyrramovich Ashurov (to His 75th Anniversary)	3
---	---

PHYSICS

Features of Ferromagnetic Resonance in Thin Films Deposited on Semiconductive Substrates <i>B. A. Belyaev, V. V. Tyurnev, G. V. Skomorokhov, A. A. Gorchakovskiy, I. V. Podshivalov</i>	5
Symmetries of the Classical Heisenberg Model <i>A. B. Borisov, D. V. Dolgikh</i>	13
Laser Cavitation in a Tube Immersed in a Confined Volume Filled with Liquid <i>M. A. Guzey, Y. V. Vassilevski, E. P. Dats, I. A. Abushkin, E. V. Khaydukov, V. M. Chudnovskii</i>	19
Paradoxical Dependence of Auroral Kilometric Radiation on Solar Activity <i>V. I. Kolpak, M. M. Mogilevsky, D. V. Chugunin, A. A. Chernyshov, I. L. Moiseenko, M. O. Riazantseva</i>	26
The Physical Meaning and Critical Conditions of Ignition and Self-Ignition <i>A. A. Filippov, R. A. Filippov-Kuznetsov, A. A. Berlin</i>	30

MECHANICS

Synthesis of Time-Optimal Control for a Inverted Pendulum with a Dynamic Absorber <i>I. M. Ananievski</i>	35
Effect of Amplification of Shock Waves in Bulk Media <i>A. T. Akhmetov, I. K. Gimaltdinov, A. F. Mukhametzyanov, R. F. Gizatullin</i>	41
Layer-by-Layer Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells Weakened by Rectangular Cutouts <i>V. N. Bakulin</i>	47
Experimental Confirmation of the Reciprocity of Creep and Relaxation Functions in the Linear Theory of Viscoelasticity <i>D. V. Georgievskii</i>	54
Mathematical Model of Degradation of Permafrost Rocks Containing Accumulations of Metastable Gas Hydrates and Free Gas under the Thermal and Saline Effects of Solutions <i>M. M. Ramazanov, N. S. Bulgakova, L. I. Lobkovsky</i>	57

TECHNICAL SCIENCES

Contribution of Texture and Structure to the Formability of Alloy Sheets of the Al–Mg–Si System <i>V. N. Serebryany, A. S. Kolyanova, A. S. Gordeev</i>	67
--	----

МУХСИНДЖАН ХУРРАМОВИЧ АШУРОВ (к 75-летию со дня рождения)



19 ноября 2024 г. исполняется 75 лет иностранныму члену Российской Академии наук, члену редколлегии нашего журнала Мухсинджану Хуррамовичу Ашуротову.

АШУРОВ Мухсинджан Хуррамович — академик Академии наук Республики Узбекистан, доктор физико-математических наук, профессор, известный ученый и организатор науки, производственник, внесший весомый вклад в развитие фундаментальной и прикладной физики лазеров.

М.Х. Ашурров родился 19 ноября 1949 г. в Самарканде. В 1966 г. стал студентом физического факультета Самаркандского государственного университета. В 1972 г. после службы в армии М.Х. Ашурров начал трудовую деятельность стажером-исследователем Института ядерной физики Академии наук Узбекистана. Двухгодичную стажировку проходил в Физическом институте Академии наук СССР в Москве в лаборатории колебаний, возглавляемой академиком А. М. Про-

хоровым, поступил в аспирантуру ФИАН. Его научным руководителем был академик В. В. Осико.

В аспирантуре М.Х. Ашурров опубликовал ряд теоретических и экспериментальных работ о поведении рабочих элементов из широко применяемых лазерных кристаллов со структурой граната, которые позволили правильно идентифицировать спектральный состав лазерного излучения в различных каналах генерации.

В 1978 г. после защиты в ФИАНе кандидатской диссертации М.Х. Ашурров вернулся в г. Ташкент в Институт ядерной физики и включился в работы по организации технологической базы по выращиванию монокристаллов. На тот момент не только в Узбекистане, но и в странах Центральной Азии такая работа не проводилась.

В 1989 г. на Ученом совете Института общей физики АН СССР М.Х. Ашурров защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Академик А. М. Прохоров

считал М. Х. Ашуррова своим учеником. Их тесное научное сотрудничество началось в 1972 г.

В 1995 г. М. Х. Ашурров был избран академиком Академии наук Республики Узбекистан по специальности “физика”.

Признанием научных заслуг М. Х. Ашуррова стало его избрание в 2022 г. первым среди узбекских ученых иностранным членом Российской Академии наук по специальности “физика, астрономия”.

С 1995 по 2005 г. он дважды избирался членом Олий Мажлиса (Парламента) Республики Узбекистан.

Академик М. Х. Ашурров – известный ученый в области физики твердого тела. Ему принадлежит ряд экспериментальных и теоретических работ, представляющих большой интерес для исследователей, работающих в области физики твердого тела, радиационной физики, спектроскопии лазерных кристаллов, синтеза монокристаллов. М. Х. Ашурров является автором более 250 научных работ, монографий и патентов на изобретения. Среди его учеников кандидаты и доктора наук.

Наиболее ярко талант академика М. Х. Ашуррова как ученого, умелого организатора науки и производственника раскрылся на посту генерального директора научно-производственное объединение “Фонон”, которым он руководил более 30 лет, до 2024 года. Именно в результате настойчивости М. Х. Ашуррова в начале 1991 г. на условиях самодоводства было создано НПО “Фонон”, которое специализировалось на практическом внедрении достижений науки в области выращивания оптических кристаллов, производстве из них разнообразных изделий, с целью поддержки науки за счет прибыли.

Академик М. Х. Ашурров на протяжении всей своей научной деятельности поддерживает тесные связи с учеными России, в особенности с Институтом общей физики имени А. М. Прохорова Российской академии наук, проводя совместные исследования в области физики лазеров. В последнее время в круг его интересов вошли совместные исследования с ИОФ РАН возможностей использования физических методов и технологий в сельском хозяйстве.

В результате неиссякаемой энергии, оптимизма, новаторства, веры в свои силы и знания Мухсинджан Хуррамович создал не только научную школу физиков, технологов, производственников, но и на деле показал, что выдвигаемые и развивающиеся ими идеи и предложения являются передовыми в современной науке, направлены на решение актуальных научно-производственных задач.

За большие заслуги академику М. Х. Ашуррову присуждено звание Деятель науки Республики Узбекистан. Он награжден многими орденами Узбекистана, а также медалью “300 лет Российской академии наук” (Россия).

В настоящее время академик М. Х. Ашурров является Председателем наблюдательного совета Самаркандского государственного университета, членом редколлегии ряда научных изданий, в том числе журнала “Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки”, председателем и членом ряда специализированных Ученых советов по присуждению ученых степеней докторов наук. Многократно входил и является членом программных комитетов ряда престижных международных конференций и т. д.

Он является не только высококвалифицированным специалистом в своей области науки, но и талантливым организатором научных исследований и производства, человеком большой эрудиции, кипучей энергии, глубокой порядочности, доброжелательности, отзывчивости и трудолюбия. Академик М. Х. Ашурров пользуется большим уважением среди своих коллег как в Узбекистане, так и за его пределами.

Свое 75-летие академик Ашурров Мухсинджан Хуррамович встречает в расцвете творческих сил. Как всегда, он полон энергии, новых идей, больших творческих замыслов, интересных научно-производственных планов.

Мы поздравляем Мухсинджана Хуррамовича Ашуррова с 75-летием и желаем ему здоровья и дальнейших успехов.

Редколлегия журнала

УДК 535.3

ОСОБЕННОСТИ ФЕРРОМАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ, ОСАЖДЕННЫХ НА ПОЛУПРОВОДЯЩИЕ ПОДЛОЖКИ

© 2024 г. Б. А. Беляев^{1,2,*}, В. В. Тюрнев³, Г. В. Скоморохов^{2,3}, А. А. Горчаковский³, И. В. Подшивалов^{2,3}

Представлено академиком РАН В. Ф. Шабановым 13.05.2024 г.

Поступило 13.05.2024 г.

После доработки 13.05.2024 г.

Принято к публикации 01.08.2024 г.

Исследовано поведение спектров ферромагнитного резонанса тонких магнитных пленок из пермаллоя $Fe_{30}Ni_{70}$ толщиной 50 нм в зависимости от проводимости кремниевой подложки толщиной 0.25 мм. Пленки получены вакуумным магнетронным напылением с использованием DC-магнетрона. Спектры снимались на сканирующем спектрометре ферромагнитного резонанса на частоте измерительной головки 3.123 ГГц с локальностью измерения $\sim 1.0 \text{ mm}^2$, определяемой площадью отверстия в измерительной головке. Обнаружено, что в определенном интервале проводимости подложки спектры, снятые в случае положения образца пленкой к измерительному отверстию, инвертируются, когда к измерительному отверстию обращена свободная сторона подложки. Результаты электродинамического анализа одномерной модели, отражающей условия проведенного эксперимента, качественно согласуются с результатами измерений.

Ключевые слова: слоистая структура металл-диэлектрик, полосно-пропускающий фильтр, комплексная диэлектрическая проницаемость

DOI: 10.31857/S2686740024060012, **EDN:** HWRDII

На протяжении многих лет тонкие магнитные пленки (ТМП) привлекают внимание исследователей не только своими уникальными свойствами [1–3], но и возможностью создания на их основе различных устройств СВЧ-электроники [4–6], а также чувствительных элементов для датчиков слабых магнитных полей [7–9]. Однако в настоящее время исследователи проявляют большой интерес к магнитным наночастицам, суспензии из которых показывают высокую перспективность их применения в биологии и медицине [10–14]. В частности, на основе магнитных наночастиц разрабатываются новые высокоеффективные средства визуализации, диагностики и терапии. Возбуждая ферромагнитный резонанс (ФМР) в наночастицах, можно реализовать избирательное дистанционное воздействие в локальных областях организма и обеспечить тем самым непосредственный терапевтический эффект,

например, гипертермию опухоли или высвобождение лекарственных препаратов в заданной области.

Важной особенностью возбуждения ФМР в наночастицах, находящихся в организме, является наличие проводимости в окружающей среде. Очевидно, что этот факт должен оказывать некоторое влияние не только на амплитуду, но и на форму резонансной кривой. Настоящая работа посвящена изучению поведения ФМР в тонкой магнитной пленке, осажденной на проводящую подложку, при изменении проводимости подложки в широких пределах.

ОБРАЗЦЫ И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Магнитные пленки толщиной 50 нм осаждались на кремневые подложки толщиной 0.25 мм производства компании “WRS materials”, обладающие p -типом проводимости за счет додирования бором. Проводимость подложек 700 См/м. Напыление проводилось на установке “ORION-40 ТМ” (Южная Корея) методом магнетронного распыления пермаллоевой мишени $Fe_{30}Ni_{70}$ производства компании “Kurt J. Lesker” с чистотой состава 99.95%. Как известно, такой пермаллой имеет высокую намагниченность насыщения и сравнительно узкую ширину линии ФМР. При напылении пленок давление газов аргона в камере установки составляло 1.8 мбар,

¹ Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

² Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

³ Институт физики им. Л. В. Киренского

Сибирского отделения Российской академии наук, ФИЦ КНЦ СО РАН, Красноярск, Россия

* E-mail: belyaev@iph.krasn.ru

а плотность тока магнетрона на мишени составляла 21 mA/cm^2 и обеспечивала скорость осаждения 2.34 \AA/s . Скорость осаждения определялась по результатам измерений толщины контрольных пленок с использованием рентгеноспектрального флуоресцентного анализа [15], позволяющего определять толщины образцов с точностью не хуже $\pm 1 \text{ nm}$. При этом толщина получаемых пленок рассчитывалась по времени осаждения.

Для создания одноосной магнитной анизотропии в образцах подложки размерами $12 \times 12 \text{ mm}$ размещались в специальной рамке, собранной из кобальт-самариевых магнитов в медной оправе, создающих однородное магнитное поле в плоскости пленок величиной $H_0 \sim 200 \text{ E}$. Это поле в области расположения подложек в ~ 30 раз превышает поле магнетрона, благодаря сравнительно большому расстоянию от мишени до подложек $\sim 150 \text{ mm}$. Важно отметить, что подложки во время напыления подогревались до 200°C , что обеспечивало не только высокую адгезию, но и минимальную ширину линии ферромагнитного резонанса в образцах.

Измерения проводились на сканирующем спектрометре [16, 17], в котором использовались новые измерительные головки [18], значительно увеличивающие его чувствительность. Локальность измерений определяется площадью отверстия в экране микрополоскового резонатора (МПР), равной 1.0 mm^2 . Разворотка планарного магнитного поля в спектрометре осуществлялась с помощью колец Гельмгольца, а спектры записывались на обратном ходе развертки, чтобы исключить гистерезисные явления, причем после каждого поворота образца производилось его намагничивание полем 300 E . Важно отметить, что направление поля развертки в экспериментах совпадало с направлением лабораторного поля (определенного в основном полем Земли), которое автоматически учитывалось при записи спектров. По зависимостям резонансного поля H_R , снятым от угла направления постоянного магнитного поля развертки θ_H , определялась эффективная намагниченность насыщения $M_{\text{эфф}}$, а также величина H_a и угол направления θ_a поля одноосной магнитной анизотропии измеряемого участка пленки. Для этого использовалась формула, связывающая поле H_R при фиксированной частоте f конкретной измерительной головки с магнитными характеристиками образца [19], исключив из нее ничтожно малое в исследуемых образцах поле однородной анизотропии:

$$\left(\frac{2\pi f}{\gamma}\right)^2 = [H_R \cos(\theta_H - \theta_M) + H_a \cos 2(\theta_a - \theta_M)] \times (1) \times [4\pi M_{\text{эфф}} + H_R \cos(\theta_H - \theta_M) + H_a \cos^2(\theta_a - \theta_M)],$$

где $\gamma = 1.7608 \times 10^7 \text{ Гц/Э}$ – гиromагнитное отношение, а равновесное направление θ_M эффективной

намагниченности насыщения пленки $M_{\text{эфф}}$ определяется с учетом уравнения

$$H_R \sin(\theta_H - \theta_M) + \frac{1}{2} H_a \sin(\theta_a - \theta_M) = 0, \quad (2)$$

полученного из условия минимума плотности свободной энергии пленки [19].

Для определения параметров магнитных пленок использовалась программа “FMR-extractor” [20], которая позволяет автоматически вычислять магнитные характеристики образцов по измеренным зависимостям $H_R(\theta_H)$, снятым на частоте f СВЧ-колебаний. Эксперименты проводились на измерительной головке с частотой генератора $f = 3.123 \text{ ГГц}$, что обеспечивало превышение в несколько раз резонансных полей ФМР поля анизотропии ТМП.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В эксперименте снимались угловые зависимости поля ФМР $H_R(\theta_H)$ с центрального участка образца. При этом образец располагался на медном столике либо магнитной пленкой вверх к измерительному отверстию СВЧ-головки, как это показано на рис. 1, либо пленкой вниз.

Сначала по измеренной с центрального участка образца угловой зависимости поля ФМР $H_R(\theta_H)$, используя описанную выше методику, были определены величины эффективной намагниченности насыщения $M_{\text{эфф}} = 1140 \text{ Гс}$, поля $H_a = 8.3 \text{ E}$ и угла направления $\theta_a = 90^\circ$ одноосной магнитной анизотропии, а также по ширине линии ФМР определялся коэффициент затухания прецессии намагниченности $\alpha = 0.0098$.

На рис. 2а представлены нормированные резонансные дифференциальные спектры поглощения $A(H_0)$ при возбуждении в пленке ФМР, снятые при ориентации магнитного поля развертки вдоль осей легкого 1 и трудного 2 намагничивания об-

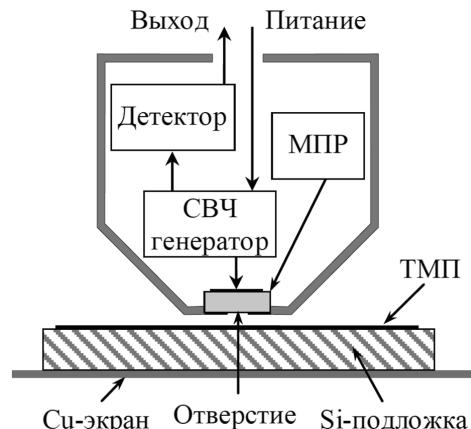


Рис. 1. Образец тонкой магнитной пленки на кремниевой подложке, расположенный на медном столике пленкой к головке сканирующего спектрометра ФМР, состоящей из СВЧ-генератора на микрополосковом резонаторе с измерительным отверстием и детектора.

разца. Как известно, амплитуда сигнала при удалении магнитной пленки от измерительного отверстия быстро падает. Именно поэтому для удобства сравнения приводим нормированные зависимости. Сплошными линиями изображены спектры при положении образца пленкой вверх к измерительному отверстию СВЧ-головки (см. рис. 1), а точками показаны спектры при перевернутом образце, когда к отверстию обращена свободная сторона подложки. Видно, что после переворачивания образца спектры инвертируются, а это говорит о том, что поглощение СВЧ-мощности ТМП, осажденной на проводящую подложку, при ФМР уменьшается. Этот факт хорошо иллюстрирует рис. 2б, где показаны нормированные интегральные кривые, построенные для снятых спектров, которые характеризуют изменение поглощения СВЧ-мощности образцом от магнитного поля.

Отметим, что в случае осаждения ТМП на диэлектрическую или кремневую подложку с низкой проводимостью, при переворачивании образца инверсия сигнала не наблюдается. Поэтому важно исследовать поведение резонансных кривых от проводимости подложки образца при его расположении магнитной пленкой вверх и вниз.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для объяснения природы наблюдаемого эффекта рассмотрим нормальное падение электромагнит-

ной волны на одномерную модель безграничной слоистой структуры, состоящей из плоскопараллельных слоев: медного экрана и магнитной пленки, осажденной подложку с заданной проводимостью. Рассчитаем поглощение рассматриваемой слоистой структурой плоской электромагнитной волны для двух случаев, либо когда с экраном контактирует магнитная пленка, а волна падает на свободную сторону подложки, либо когда с экраном контактирует свободная сторона подложки, а волна падает на ТМП. В таких одномерных моделях, учитывая тот факт, что через экран падающая мощность не проходит, а отражается от него, то поглощенная слоистой структурой мощность будет равна разности падающей и отраженной мощности.

Коэффициент отражения электромагнитной волны, падающей ортогонально на трехслойную планарную структуру, рассчитаем матричным методом. Для этого каждому слою структуры, а также всей многослойной структуре в целом сопоставим свой четырехполюсник, двумя портами которого являются обе стороны планарного объекта. Свойства каждого четырехполюсника будем описывать безразмерной нормированной ABCD-матрицей [21]:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которая устанавливает связь между напряженностями электрического поля E_1 и магнитного поля H_1 на первой стороне объекта с напряженностями электрического поля E_2 и магнитного поля H_2 на второй стороне. В случае, когда оба порта такого

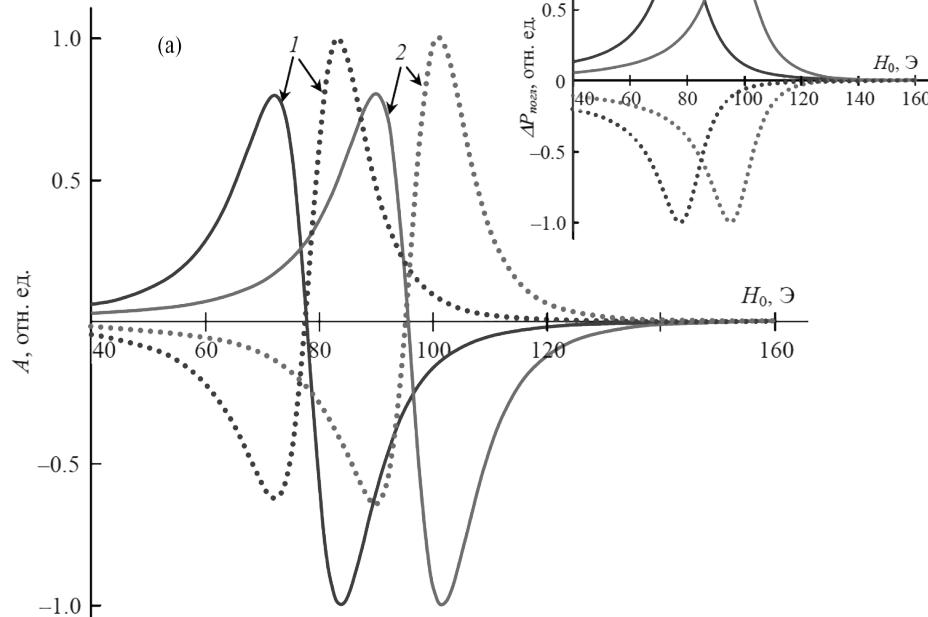


Рис. 2. Нормированные дифференциальные (а) и интегральные (б) спектры поглощения ФМР, снятые при направлении магнитного поля развертки вдоль оси легкого (1) и трудного (2) намагничивания. Сплошные линии – образец лежит пленкой вверх (рис. 1), точки – образец лежит пленкой вниз.

четырехполюсника нагружены на свободное пространство с характеристическим сопротивлением $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377$ Ом, эта связь выражается формулой [21]

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ Z_0 H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ Z_0 H_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Колебания электромагнитного поля будем описывать множителем $\exp(-i\omega t)$. В этом случае нормированная ABCD-матрица одного отдельного слоя выражается формулой [21]

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -i(Z/Z_0) \sin \theta \\ -i(Z_0/Z) \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $Z = \sqrt{\mu/\epsilon} Z_0$ — характеристическое сопротивление материала слоя, $\theta = kh$ — электрическая толщина слоя, a — волновое число в среде. Расчет k следует выполнять по формуле

$$k = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\mu} k_0, \quad (6)$$

где $k_0 = \omega/c$ волновое число в свободном пространстве. Заметим, что в случае $\operatorname{Re} \mu < 0$ в формуле (6) нельзя ϵ и μ группировать вместе под одним общим знаком квадратного корня. Иначе в ферромагнитном слое вместо поглощения мощности будет происходить ее генерация. ABCD-матрица многослойной структуры равна произведению матриц каждого слоя структуры в порядке расположения ее слоев. Например, для рассматриваемой трехслойной структуры $M_{123} = M_1 M_2 M_3$. Вычислив элементы нормированной ABCD-матрицы многослойной структуры, можно рассчитать отвечающие ей элементы матрицы рассеяния S по формулам [21]

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{A + B - C - D}{A + B + C + D}, & S_{12} &= \frac{2(AD - BC)}{A + B + C + D}, \\ S_{21} &= \frac{2}{A + B + C + D}, & S_{22} &= \frac{-A + B - C + D}{A + B + C + D}. \end{aligned} \quad (7)$$

Знание этих матричных элементов позволяет рассчитать коэффициенты отражения и прохождения СВЧ-мощности для обоих портов четырехполюсника. Будем считать, что третьим слоем рассматриваемой структуры является медный экран. Тогда коэффициент отражения падающей СВЧ-мощности выразится формулой

$$R = |S_{11}|^2, \quad (8)$$

а коэффициент поглощения — формулой

$$P_{abs} = 1 - |S_{11}|^2. \quad (9)$$

Относительные диэлектрическая ϵ_s и магнитная μ_s проницаемости полупроводникового слоя описываются параметрами

$$\epsilon_s = \epsilon'_s + i \frac{\sigma_s}{\epsilon_0 \omega}, \quad \mu_s = 1, \quad (10)$$

где действительная часть диэлектрической проницаемости кремния $\epsilon'_s = 16$, σ_s — проводимость полупроводника. Свойства ферромагнитного слоя будем описывать параметрами

$$\epsilon_m = 1 + i \frac{\sigma_m}{\epsilon_0 \omega}, \quad \mu_m = \mu_\perp, \quad (11)$$

где σ_m — проводимость магнитной пленки (для пермаллоя $\sigma_m = 5.88 \cdot 10^7$ См/м), μ_\perp — магнитная проницаемость, характеризующая распространение плоской линейно поляризованной волны в намагниченной ферромагнитной среде. Эта проницаемость в случае магнитоизотропной среды выражается формулой [22]

$$\mu_\perp = \frac{[\gamma(H_0 + 4\pi M_0) - i\alpha\omega]^2 - \omega^2}{[\gamma(H_0 - i\alpha\omega) [\gamma(H_0 + 4\pi M_0) - i\gamma\omega] - \omega^2]. \quad (12)$$

Здесь M_0 — намагниченность насыщения ферромагнетика, γ — гиromагнитное отношение, α — безразмерный параметр, учитывающий диссипацию энергии, H_0 — постоянное магнитное поле.

В случае среды с одноосной магнитной анизотропией, когда поле H_0 направлено вдоль оси легкого намагничивания, формула (12) принимает вид [22]

$$\mu_\perp = \frac{[\gamma(H_0 + 4\pi M_0 + H_a) - i\alpha\omega]^2 - \omega^2}{[\gamma(H_0 - H_a) - i\alpha\omega] [\gamma(H_0 + 4\pi M_0 + H_a) - i\alpha\omega] - \omega^2}, \quad (13)$$

где H_a — поле одноосной магнитной анизотропии.

Когда же постоянное магнитное поле H_0 направлено ортогонально к оси легкого намагничивания и превосходит по абсолютной величине поле анизотропии H_k , то формула (10) имеет вид [22]

$$\mu_\perp = \frac{[\gamma(H_0 + 4\pi M_0 - H_a) + i\alpha\omega] [\gamma(H_0 + 4\pi M_0 + H_a) - i\alpha\omega] - \omega^2}{[\gamma(H_0 - H_a) - i\alpha\omega] [\gamma(H_0 + 4\pi M_0 + H_a) - i\alpha\omega] - \omega^2}. \quad (14)$$

По формулам (9)–(12) на рис. 3 построены полевые зависимости коэффициента поглощения слоистой структуры, состоящей из медного экрана и изотропной магнитной пленки с намагниченностью насыщения $M_0 = 1140$ Гс толщиной $h_m = 50$ нм, нанесенной на кремневую подложку толщиной $h_s = 0.25$ мм с проводимостью σ , которая изменяется от 0 до 3000 См/м. На рис. 3а представлены зависимости для первого случая, когда электромагнитная волна с частотой $f = 3.123$ ГГц падает на магнитную пленку, а с экраном контактирует свободная сторона подложки. На рис. 3б показаны зависимости для второго случая, когда электромагнитная волна падает на свободную сторону подложки, а магнитная пленка обращена к экрану.

Видно, что в первом случае для любой проводимости подложки максимум поглощения наблюдается точно в поле ФМР. Однако во втором случае, как показывают исследования, максимум поглощения в области ФМР наблюдается только при “малых” $\sigma < 100$ См/м и “больших” $\sigma > 2000$ См/м проводимостях подложки. В интервале проводимостей примерно 500–1200 См/м происходит инверсия поглощения, проявляющаяся в том, что в области ферромагнитного резонанса в ТМП наблюдается не максимум, а минимум, т.е. уменьшение поглощения мощности структурой. Очевидно, что это связано с уве-

личением коэффициента отражения (формула (9)) в области ферромагнитного резонанса в ТМП. Заметим, что процесс инверсии $P_{\text{погл.}}(H_0)$ с ростом проводимости происходит постепенно, преобразуясь сначала почти в дифференциальные кривые при $\sigma = 250 \text{ См/м}$ и $\sigma = 1700 \text{ См/м}$ (см. рис. 3б).

Важно отметить, что при отражении волны от экрана вблизи его поверхности образуется пучность высокочастотного магнитного поля, амплитуда которого в два раза больше, чем у падающей волны. Поэтому при проводимости подложки $\sigma = 0$ амплитуда поглощения СВЧ-мощности магнитной пленкой почти в два раза больше во втором случае, когда пленка контактирует с экраном (рис. 3). Отметим также, что с ростом проводимости подложки амплитуда зависимостей $P_{\text{погл.}}(H_0)$ для первого случая, ко-

гда образец лежит пленкой вверх, монотонно растет, а для второго случая, когда образец лежит пленкой вниз, быстро падает. Так при $\sigma = 3000 \text{ См/м}$ в первом случае амплитуда составляет $\sim 1.3\%$, а во втором случае $\sim 0.012\%$. Это объясняется тем, что с ростом проводимости подложки в первом случае пучность высокочастотного поля монотонно приближается к пленке, а во втором случае растет коэффициент отражения от подложки.

Для сравнения на рис. 4 представлены нормированные полевые зависимости измеренных спектров ФМР при направлении магнитного поля развертки вдоль оси легкого (светлые маркеры) и трудного (темные маркеры) намагничивания. Линиями показаны результаты матричного электромагнитного расчета одномерной модели слоистой структуры при

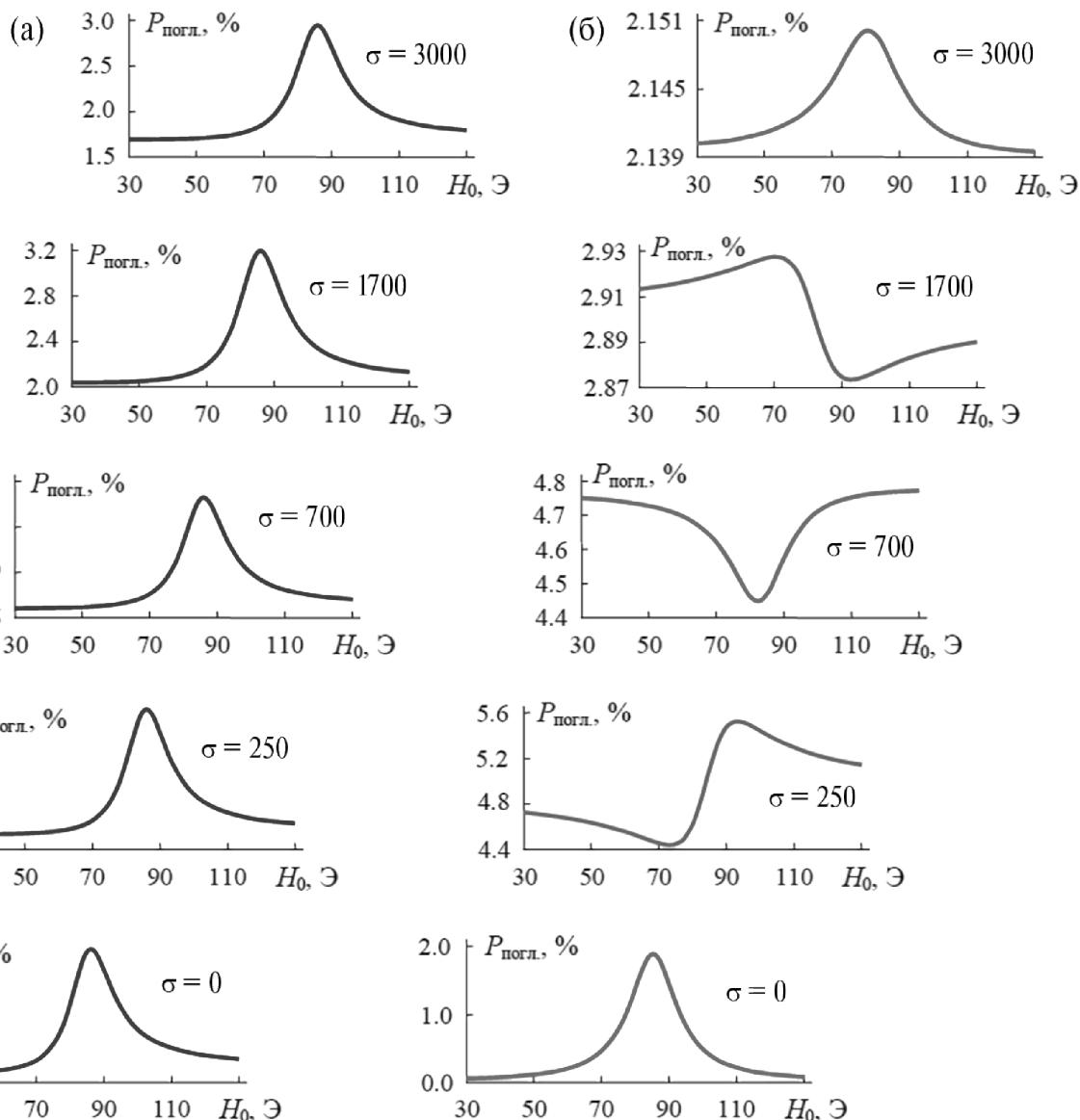


Рис. 3. Зависимости величины поглощения СВЧ-мощности образцом от магнитного поля для различных удельных проводимостей подложки σ в См/м при падении электромагнитной волны на образец со стороны магнитной пленки (а) и со стороны подложки (б).

проводимости подложки 700 См/м. Круглые маркеры соответствуют случаю, когда образец лежит пленкой вверх, треугольные маркеры — образец лежит пленкой вниз. Видно качественное согласие теории и эксперимента, однако для случая, когда образец лежит пленкой вниз, теория понижает резонансные поля примерно на 5 Э и на $\sim 25\%$ увеличивает ширину резонансных кривых.

Важно отметить, что в первом случае, когда образец лежит пленкой вверх, резонансное поле не зависит от проводимости подложки. Однако во втором случае, когда образец лежит пленкой вниз, поле ФМР существенно зависит от проводимости, и оно монотонно увеличивается с ростом σ . Так, при $\sigma = 600$ См/м поле ФМР во втором случае уже на 7% ниже, чем в первом случае, а при $\sigma = 950$ См/м эти поля совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на сканирующем спектрометре ферромагнитного резонанса, работающего на частоте $f = 3.123$ ГГц, исследованы спектры ФМР тонкой магнитной пленки, осажденной на кремневую подложку с проводимостью 700 См/м. Образец ТМП размещался на медном столике под отверстием измерительной головки спектрометра двумя способами, либо пленкой к измерительному отверстию, либо свободной стороной подложки к нему. Обнаруженная инверсия спектров поглощения при перевороте образца пленкой к медному экрану получила объяс-

нение электродинамическим анализом одномерной модели исследованной слоистой структуры. Модель представляет собой медную пластину с размещенной на ней тонкой магнитной пленкой на проводящей подложке, на которую падает плоская электромагнитная волна.

Проведенные исследования полевых зависимостей поглощения СВЧ-мощности от величины проводимости подложки показали, что инверсия спектров ФМР не наблюдается при “малых” $\sigma < 100$ См/м и “больших” $\sigma > 2000$ См/м проводимостях подложки. Получено качественное согласие расчета с результатами измерений полевых зависимостей поглощения СВЧ-мощности при возбуждении ФМР в магнитной пленке.

Наблюдаемые небольшие расхождения теории и эксперимента связаны с используемой в электродинамическом расчете одномерной модели. Действительно, в эксперименте источником электромагнитного излучения является небольшое (площадью 1 мм^2) отверстие в измерительной СВЧ-головке, которое намного меньше длины волны. Поэтому, как известно, амплитуда высокочастотного магнитного поля быстро уменьшается с расстоянием от измерительного отверстия. В рассматриваемой теоретической модели считалось, что на безграничную слоистую структуру падает плоская электромагнитная волна, затухание которой связано только со свойствами материалов слоистой структуры.

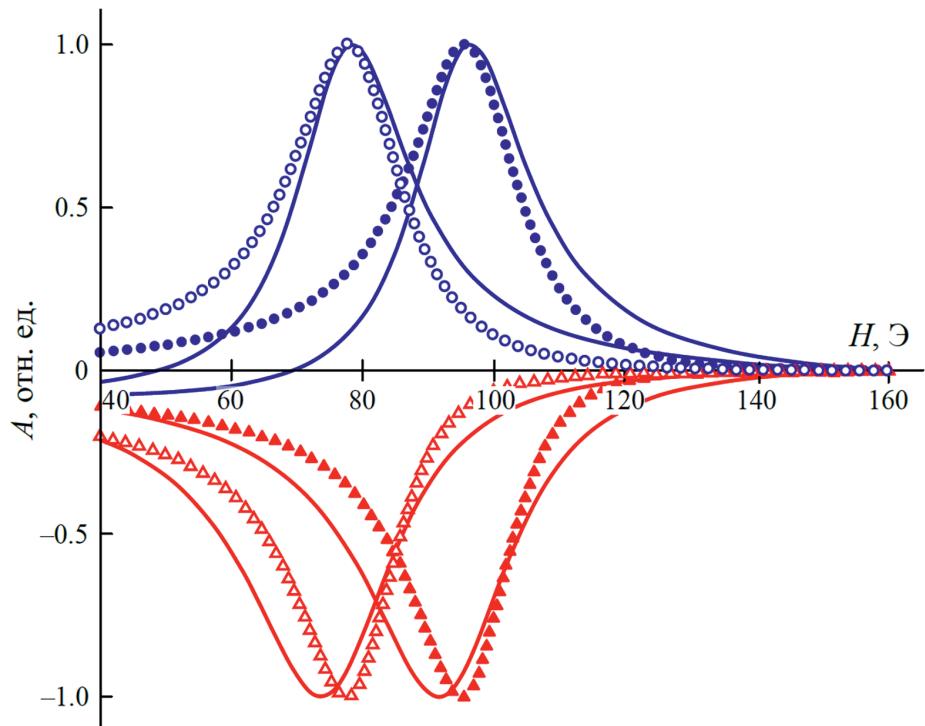


Рис. 4. Нормированные спектры ФМР, снятые при направлении магнитного поля развертки вдоль оси легкого (светлые маркеры) и трудного (темные маркеры) намагничивания. Круглые маркеры — образец лежит пленкой вверх (рис. 1), треугольные маркеры — образец лежит пленкой вниз. Линии — электродинамический расчет одномерной модели.

Хорошо известная способность магнитных частиц перемещаться в градиентных магнитных полях и разогреваться при возбуждении в них ферромагнитного резонанса позволили найти магнитным материалам новую область применения. В последние годы активно исследуются возможности использования магнитных наночастиц в медицине. Учитывая тот факт, что все органы обладают определенной проводимостью, результаты работы будут интересны физикам, разрабатывающим медицинские методики направленного перемещения магнитных наночастиц для доставки лекарств в определенные области организма и для локального разрушения злокачественных опухолей.

БЛАГОДАРНОСТИ

При проведении работ использовано оборудование Учебного центра коллективного прототипирования пассивной электроники антенно-фидерного тракта ФИЦ КНЦ СО РАН.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках научной тематики Госзадания Института физики им. Л. В. Киренского ФИЦ КНЦ СО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суху Р. Магнитные тонкие пленки. М.: Мир, 1967. 422 с.
2. Саланский Н.М., Ерухимов М.Ш. Физические свойства и применение магнитных пленок. Новосибирск: Наука, 1975. 219 с.
3. Barmak K., Coffey K. Metallic films for electronic, optical and magnetic applications: structure, processing and properties. Oxford: Woodhead Publ., 2014. 634 р.
4. Belyaev B.A., Afonin A.O., Uglymov A.V. et al. // Rev. Sci. Instrum. 2020. V. 91. 114705.
5. Lagarkov A.N., Rozanov K.N. // J. Magn. Magn. Mater. 2009. V. 321. 2082.
6. Camley R.E., Celinski Z., Fal T. et al. // J. Magn. Magn. Mater. 2009. V. 321. 2048.
7. Бабицкий А.Н., Беляев Б.А., Скоморохов Г.В. и др. // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. С. 36.
8. Бабицкий А.Н., Беляев Б.А., Боеv Н.М. и др. // ПТЭ. 2016. Т. 3. С. 96.
9. Melnikov G.Yu., Vazhenina I.G., Iskhakov R.S. et al. // Sensors. 2023. V. 23. 6165.
10. Shinkai M., Ito A. // Adv. Biochem. Engin. / Biotechnol. 2004. V. 91. 191.
11. Yang X., Shao G., Zhang Ya. et al. // Frontiers in Physiology. 2022. V. 13. 898426.
12. Guo T., Lin M., Huang J. et al. // J. Nanomaterials. 2018. ID 7805147. 8 р.
13. Barrera G., Allia P., Tiberto P. // Nanoscale Adv. 2023. V. 5. 4080.
14. Кокшарова Ю.А., Губинс С.П., Таранов И.В. и др. // РЭ. 2022. Т. 67. С. 99.
15. Haschke M., Flock J., Haller M. X-ray Fluorescence Spectroscopy for Laboratory Applications. Weinheim: Wiley-VCH, 2021. 464 р.
16. Беляев Б.А., Лексиков А.А., Макиевский И.Я. и др. // ПТЭ. 1997. Т. 3. С. 106.
17. Belyaev B.A., Izotov A.V., Leksikov A.A. // IEEE Sensors J. 2005. V. 5. 260.
18. Беляев Б.А., Боеv Н.М., Горчаковский А.А. и др. // ПТЭ. 2021. Т. 2. С. 107.
19. Беляев Б.А., Изотов А.В., Кипарисов С.Я. и др. // ФТТ. 2008. Т. 50. С. 650.
20. Изотов А.В., Беляев Б.А. Свид. о гос. рег. прогр. для ЭВМ № 2009616881. 2009.
21. Гупта К., Гардж Р., Чадха Р. Машинное проектирование СВЧ устройств. М.: Радио и связь, 1987.
22. Тюрнев В.В. Прямой вывод и уточнение обобщенных формул Кона–Маттея для коэффициентов связи резонаторов в фильтре сверхвысоких частот // РЭ. 2008. Т. 53. № 5. С. 858.

FEATURES OF FERROMAGNETIC RESONANCE IN THIN FILMS DEPOSITED ON SEMICONDUCTIVE SUBSTRATES

B. A. Belyaev^{a,b}, V. V. Tyurnev^c, G. V. Skomorokhov^{b,c}, A. A. Gorchakovskiy^c, I. V. Podshivalov^{b,c}

^a*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

^b*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*

^c*Kirensky Institute of Physics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS V. F. Shabanov

The behavior of the ferromagnetic resonance spectra of thin magnetic films made of permalloy $Fe_{30}Ni_{70}$ with a thickness of 50 nm was studied depending on the conductivity of a 0.25 mm thick silicon substrate. The films were obtained by vacuum magnetron sputtering using a DC magnetron. The spectra were taken on a scanning ferromagnetic resonance spectrometer at a frequency of 3.123 GHz with a measurement locality of $\sim 1.0 \text{ mm}^2$, determined by the area of the hole in the measuring head. It was found that in a certain range of substrate conductivity, the spectra taken when the sample was positioned with the film facing the measuring hole are inverted when the free side of the substrate faces the measuring hole. The results of the electrodynamic analysis of the one-dimensional model, reflecting the conditions of the experiment, are in qualitative agreement with the measurement results.

Keywords: Thin magnetic film, semiconductors substrate, complex permittivity, absorption coefficient

УДК 537.6

СИММЕТРИИ КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

© 2024 г. Член-корреспондент РАН А. Б. Борисов^{1,*}, Д. В. Долгих¹

Поступило 20.05.2024 г.

После доработки 20.05.2024 г.

Принято к публикации 05.08.2024 г.

Исследованы симметрии классической модели Гейзенберга. Показано, что такими симметриями являются группы конформных преобразований и вращений. Изучена инвариантность вихревых структур относительно группы вращений. Применение найденных преобразований группы вращений полей к уже найденным решениям модели Гейзенберга (таким как инстантоны, вихревые “мишени” и “спирали”) порождает другие структуры – также решения этой модели, свойства которых определяются исходными структурами.

Ключевые слова: модель Гейзенберга, ферромагнетик, вихрь, группы Ли

DOI: 10.31857/S2686740024060022, **EDN:** HWQVXR

К настоящему времени симметрийные методы эффективны при изучении многих теоретических моделей. Особый интерес представляют свойства уравнений относительно преобразований групп Ли, зависящих от зависимых и независимых переменных. Детальное обсуждение и применение симметрий к различным дифференциальным уравнениям изложено, например, в монографиях [1–4]. Несмотря на интенсивное изучение этих модельных уравнений в различных областях физики, в теории магнитных явлений исследованы только законы сохранения и вариационные свойства динамических уравнений классической модели Гейзенберга [5].

Цель этой работы – исследовать инвариантные свойства стационарных уравнений классической модели Гейзенберга в плоскости. В континуальном приближении статические магнитные структуры определяются минимизацией энергии

$$E = \iint E_0 dx dy$$

с плотностью

$$E_0 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} J (\nabla n_i) (\nabla n_i) \quad (1)$$

в безразмерных переменных. Модель Гейзенберга (1) для классических спинов часто называется $O(3)$ -моделью в трехмерном пространстве. Она имеет многочисленные приложения в теории поля и физике жидких кристаллов [5].

¹ Институт физики металлов имени М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

* E-mail: borisov@imp.uran.ru

Для описания структур удобно воспользоваться следующей параметризацией единичного вектора \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = (\cos \Phi \sin \theta, \sin \Phi \sin \theta, \cos \theta), \quad (2)$$

где Φ, θ – сферические координаты. Тогда уравнения модели (1) записываются в простом виде:

$$\Delta \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta (\nabla \Phi)^2 = 0, \quad (3)$$

$$2 \cos \theta (\nabla \theta \cdot \nabla \Phi) + \sin \theta \Delta \Phi = 0. \quad (4)$$

Вихревые распределения параметра порядка (вихри) широко используются в физике конденсированных сред. В теории магнетизма к таким структурам относятся плоские вихри (мероны), инстантоны [6, 7] и скирмионы в несоизмеримых двумерных магнетиках, предсказанные много лет назад. Помимо академического интереса такие структуры важны для спинтронной промышленности, где они рассматриваются как перспективные объекты переноса и хранения информации.

В этой работе мы исследуем инвариантность магнитных структур-точных решений (3), (4), в частности вихревых структур. В первом разделе мы с помощью инфинитезимальных преобразований находим группы симметрий искомых уравнений. Они состоят из группы конформной группы и группы вращений. Во втором разделе мы изучаем преобразование вихревых структур поля Φ , зависящих от параметра $a \in R$. Это позволяет по известным решениям построить новые. Выясняется, что для инстантональных структур преобразованное поле $\tilde{\Phi}$ помимо начального состояния – вихря – включает антивихрь и бесконечное число вихрей и антивихрей для магнитной мишени и спирали.

1. ГРУППА СИММЕТРИИ МОДЕЛИ

Найдем группу симметрии уравнений (3), (4), т.е. обратимые локальные преобразования переменных θ, Φ, x_1, x_2 к новым переменным $\bar{\theta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{\Phi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{x}_1, \bar{x}_2$:

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= \bar{\theta}(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{\Phi} &= \bar{\Phi}(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{x}_1 &= \bar{x}_1(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_2(\theta, \Phi, x_1, x_2, a),\end{aligned}\quad (5)$$

с групповыми свойствами, при которых уравнения (3), (4) сохраняют свой вид в новых независимых переменных \bar{x}_1, \bar{x}_2 :

$$\begin{aligned}\Delta \bar{\theta} - \frac{1}{2} \sin 2\bar{\theta} (\nabla \bar{\Phi})^2 &= 0, \\ 2 \cos \bar{\theta} (\nabla \bar{\theta} \cdot \nabla \bar{\Phi}) + \sin \bar{\theta} \Delta \bar{\Phi} &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь $a \in R$ – параметр. Построение группы симметрии эквивалентно определению инфинитезимальных преобразований (5) с параметром $a \ll 1$:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \theta + aB_1(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{x}_2 &= \theta + aB_2(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{\theta} &= \theta + aB_3(\theta, \Phi, x_1, x_2, a), \\ \bar{\Phi} &= \Phi + aB_4(\theta, \Phi, x_1, x_2, a).\end{aligned}\quad (7)$$

Подстановка (7) в (6) позволяет найти функции B_i ($i = 1 \dots 4$) в следующем виде:

$$\begin{aligned}B_i(\theta, \Phi, x_1, x_2, a) &= B_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2), \\ \partial_{x_2} B_1 &= -\partial_{x_1} B_2, \quad \partial_{x_1} B_1 = \partial_{x_2} B_2, \\ B_i(\theta, \Phi, x_1, x_2, a) &= B_i(\theta, \Phi) \quad (i = 3, 4), \\ B_3 &= a_1 \cos \Phi + a_2 \sin \Phi, \\ B_4 &= a_3 + \operatorname{ctg} \theta (a_2 \cos \Phi - a_1 \sin \Phi).\end{aligned}\quad (8)$$

В итоге преобразования переменных x_1, x_2 , не зависящие от полей θ, Φ , и есть инфинитезимальные конформные преобразования:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= z + aF(z), \quad \bar{z}^* = z^* + a(F(z))^*, \\ (z &= x_1 + ix_2, \quad z^* = x_1 - ix_2),\end{aligned}$$

где $F(z)$ – произвольная функция. Преобразования (7) полей θ, Φ характеризуются генератором

$$G = B_3 \partial_\theta + B_4 \partial_\Phi \quad (9)$$

с тремя независимыми параметрами a_i ($i = 1, 2, 3$). Поэтому инфинитезимальные симметрии образуют трехмерную алгебру Ли с линейной оболочкой, состоящей из трех линейно независимых операторов M_i ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}M_1 &= \operatorname{ctg} \theta \sin \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \Phi \frac{\partial}{\partial \Phi}, \\ M_2 &= \operatorname{ctg} \theta \cos \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \Phi \frac{\partial}{\partial \Phi}, \\ M_3 &= \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (10)$$

с коммутационными соотношениями

$$[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk} M_k. \quad (11)$$

В итоге группа симметрии для полей θ, Φ – это группа вращений. Преобразование, соответствующее генератору M_1 , находится прямым интегрированием уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\theta}(a)}{\partial a} &= B_3(\bar{\theta}, \bar{\Phi}, a), \\ \frac{\partial \bar{\Phi}(a)}{\partial a} &= B_4(\bar{\theta}, \bar{\Phi}, a),\end{aligned}\quad (12)$$

с постоянными $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0$ и начальными условиями

$$\bar{\theta}(a = 0) = \theta, \quad \bar{\Phi}(a = 0) = \Phi.$$

В итоге мы получаем новые решения

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= \operatorname{arctg}(\sin a \operatorname{ctg} \theta \sec \Phi + \cos a \operatorname{tg} \Phi), \\ \cos \bar{\theta} &= \cos \Phi \sin \theta (\cos a \operatorname{ctg} \theta \sec \Phi - \sin a \operatorname{tg} \Phi),\end{aligned}\quad (13)$$

которые, как нетрудно проверить, удовлетворяют уравнениям (5).

2. СИММЕТРИИ СТРУКТУР МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Формулы (12), (13) позволяют исследовать симметрии вихревых структур-точных решений модели (3), (4), наиболее популярными среди которых являются инстантоны. Широкий класс таких структур был найден в фундаментальной работе [8]. Авторы показали, что многие инстантоны описываются простой формулой

$$w = \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \exp[i\Phi] = F[z], \quad (14)$$

где $F(z)$ – рациональная функция, $z = x_1 + ix_2$. Положим $F(z) = z^Q$ ($Q \in Z$). Тогда в полярной системе координат

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} r^{-Q}, \quad \Phi = Q\phi. \quad (15)$$

Поле Φ обладает вихревой структурой. Оно сингулярно в начале координат: $\partial_x \Phi \rightarrow \infty, \partial_y \Phi \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$ и неоднозначно при обходе по замкнутому контуру, окружающему начало координат, против часовой стрелки:

$$\oint d\Phi = Q. \quad (16)$$

Обсудим случай $Q = 1$, когда структура (15) имеет топологический заряд

$$q = \iint \sin \theta (\partial_x \theta \partial_y \Phi - \partial_y \theta \partial_x \Phi), \quad (17)$$

равный -1 (антиинстантон). Исследуем вихревую структуру поля $\bar{\Phi}$ (12). Можно показать, что топологический заряд и плотность энергии инвариантны при преобразованиях (12), (13). Поэтому энергия полей $\bar{\theta}, \bar{\Phi}$ конечна несмотря на асимптотическое поведение $\cos \bar{\theta} \rightarrow \cos a$ ($r \rightarrow \infty$). Кроме того, величина \bar{w} имеет простое выражение в терминах z :

$$\bar{w} = \operatorname{ctg} \frac{\bar{\theta}}{2} \exp \bar{\Phi} = \frac{z - i \operatorname{tg} a/2}{1 - i \operatorname{tg} a/2}. \quad (18)$$

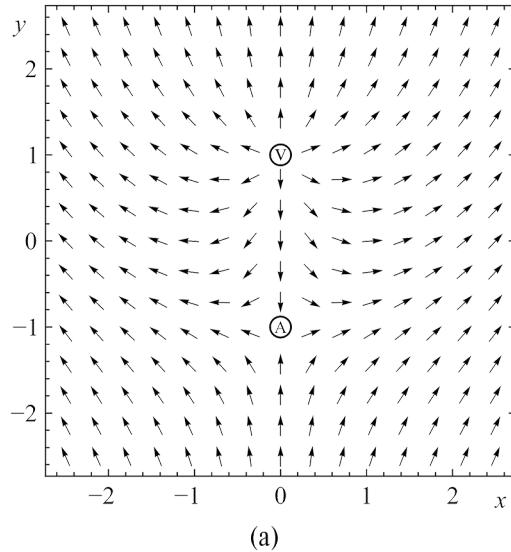
Вихревая структура поля $\bar{\Phi}$ имеет неожиданный характер: помимо вихря V типа (15) с $Q = 1$ в орбите преобразования существует еще одна вихревая структура с $Q = -1$ — антивихрь A (см. рис. 1, 2). После детальных вычислений можно показать, что зависимость центра вихря от параметра a имеет вид

$$x = 0, \quad y = \operatorname{tg} \frac{a}{2}, \quad (19)$$

и

$$x = 0, \quad y = -\operatorname{ctg} \frac{a}{2} \quad (20)$$

для антивихря. При $a = 0$ вихрь с $Q = 1$ (V) находится в начале координат, другой вихрь с $Q = -1$ (A) находится в $y = -\infty$. Далее с ростом значения параметра a центр V смещается вдоль оси Oy и достигает $y = \infty$ при $a = \pi$, переходит в $y = -\infty$ и при $a = 2\pi$ достигает начального состояния $(x, y) = (0, 0)$. Центр A достигает начала координат при $a = \pi$ и $y = \infty$ при $a = 2\pi$. Зависимость расположения вихревых струк-



(a)

тур (12), (13), (15) от параметра $a \in [0; 2\pi]$ наглядно представлена в видеофильме [9].

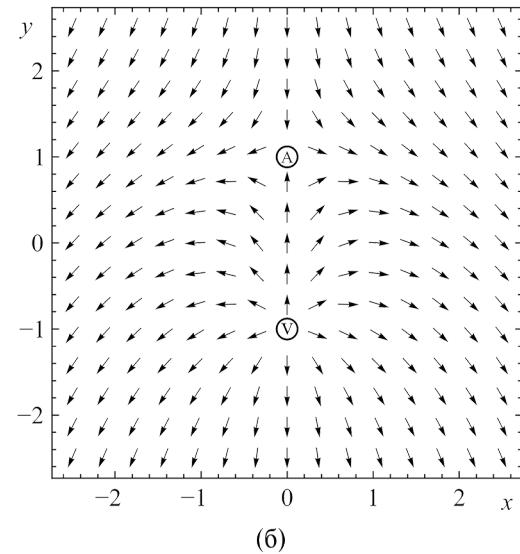
Помимо инстантона точными решениями уравнений (3), (4) являются магнитные “мишени” и “спирали” [10, 11]. Магнитной мишени (рис. 3) соответствует система концентрических по переменной $\ln r$ кольцевых доменов, которая является бесконечной полосовой доменной структурой по переменной Θ :

$$\cos \theta = \operatorname{sn} \left[\frac{Q}{k^2} \ln r, k \right], \quad (21)$$

где $\operatorname{sn}[u, k]$ — эллиптическая функция Якоби с модулем k [12], и вихревой структурой поля Φ :

$$\Phi = Q\varphi. \quad (22)$$

Положим $Q = 1$. Поле $\bar{\Phi}$ имеет более сложный, чем для инстантона, вид (см. рис. 4). Помимо первоначального вихря (22) в начале координат, она включает отдельную группу из восьми бесконечных вихревых структур с координатами $x = 0$,



(b)

Рис. 1. Положение вихря (V) и антивихря (A) поля $Z = (\cos \Phi, \sin \Phi)$ при $a = \pi/2$ (а) и $a = 3\pi/2$ (б).

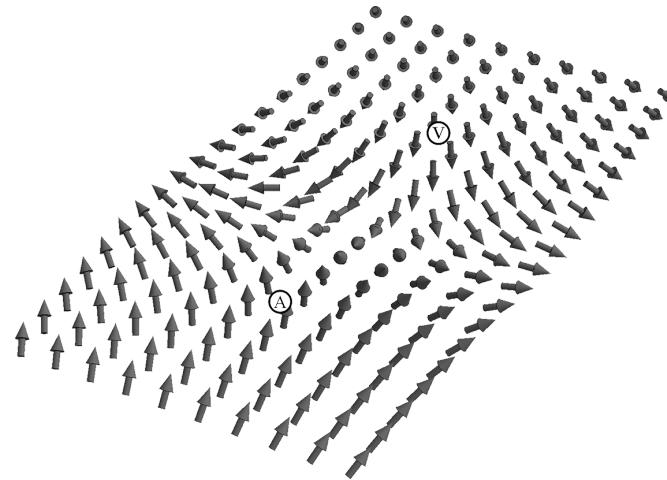


Рис. 2. Поле n (12), (13), (15) в окрестности центров вихревых структур при $a = \pi/2$.

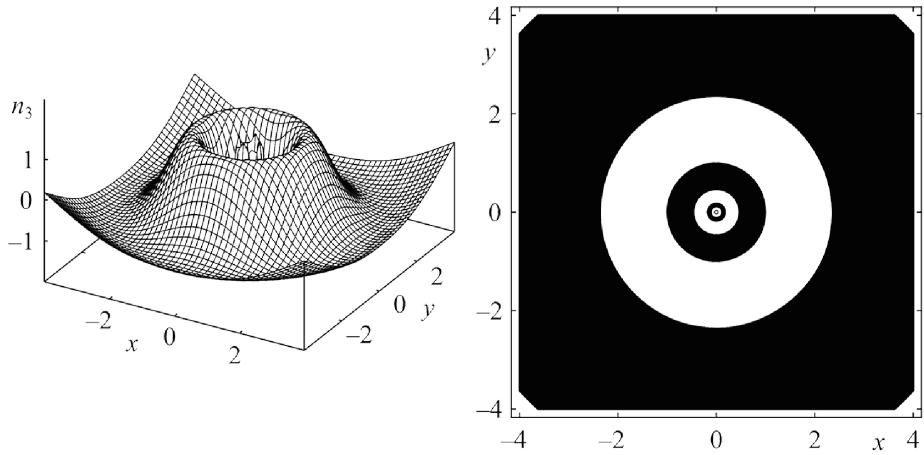


Рис. 3. Структура ядра (поверхность $n_3 = n_3(x, y)$), соответствующая магнитной мишени ($Q = 1, k^2 = 1/2$). Справа изображены области на плоскости (x, y) с положительными (белый цвет) и отрицательными (черный цвет) значениями компоненты поля n_3 .

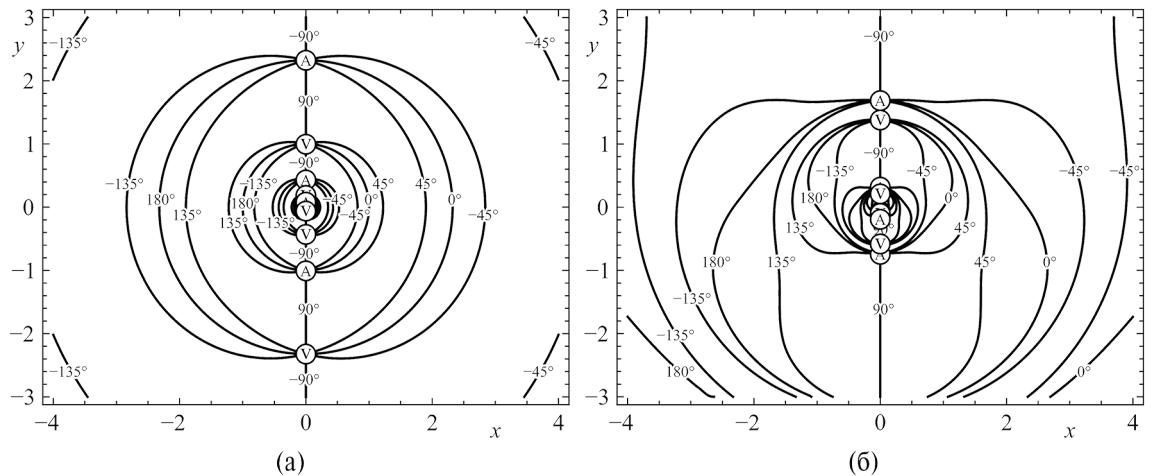


Рис. 4. Структура поля $\bar{\Phi}$ (12), (13), (21), (22) в виде линий уровня как совокупность вихрей V и антивихрей A , расположенных на оси Oy , при $a = \pi/2$ (а) и $a = 8\pi/9$ (б), $k^2 = 1/2$.

$y = r \sin[s\pi/2]$ ($s = \pm 1$). Для $s = 1$

$$r = \exp \left[-k^2 F \left(a - \frac{3\pi}{2}, k \right) + 4m_1 4k^2 K(k) \right], \quad (23)$$

$(m_1 \in Z, 0 < a < \pi)$,

$$r = \exp \left[-k^2 F \left(a - \frac{5\pi}{2}, k \right) + 4m_2 4k^2 K(k) \right], \quad (24)$$

$(m_2 \in Z, \pi < a < 2\pi)$,

$$r = \exp \left[k^2 F \left(a - \frac{\pi}{2}, k \right) + 4m_3 4k^2 K(k) \right], \quad (25)$$

$(m_3 \in Z, 0 < a < \pi)$,

$$r = \exp \left[k^2 F \left(a - \frac{3\pi}{2}, k \right) + 4m_4 4k^2 K(k) \right], \quad (26)$$

$(m_4 \in Z, \pi < a < 2\pi)$,

и для $s = -1$

$$r = \exp \left[k^2 F \left(a - \frac{\pi}{2}, k \right) + 4m_5 4k^2 K(k) \right], \quad (27)$$

$(m_5 \in Z, \pi < a < 2\pi)$,

$$r = \exp \left[-k^2 F \left(a - \frac{\pi}{2}, k \right) + 4m_6 4k^2 K(k) \right], \quad (28)$$

$(m_6 \in Z, 0 < a < \pi)$,

$$r = \exp \left[-k^2 F \left(a - \frac{3\pi}{2}, k \right) + 4m_7 4k^2 K(k) \right], \quad (29)$$

$(m_7 \in Z, \pi < a < 2\pi)$,

$$r = \exp \left[-k^2 F \left(a - \frac{\pi}{2}, k \right) + 4m_8 4k^2 K(k) \right], \quad (30)$$

$(m_8 \in Z, 0 < a < \pi)$.

Здесь $F[u, k]$ и $K(k)$ – неполный и полный эллиптические интегралы первого рода с модулем k [12]. Слагаемые $m_i k^2 K(k)$ ($i = 1, \dots, 8$) в (23)–(30) связаны с периодом $4K(k)$ эллиптической функции $sn[u, k]$ в (21). При этом величина $\ln r$ в заданном интервале меняется на $2K(k)$ или на $4K(k)$. Отметим, что выражения (23)–(30) определяют бесконечное количество вихрей/антивихрей на оси Oy , так как $m_i \in Z$. На рис. 5 приведен вид ядра (21), трансформированного преобразованием (12), (13), для различных значений параметра a . С более подробной зависимо-

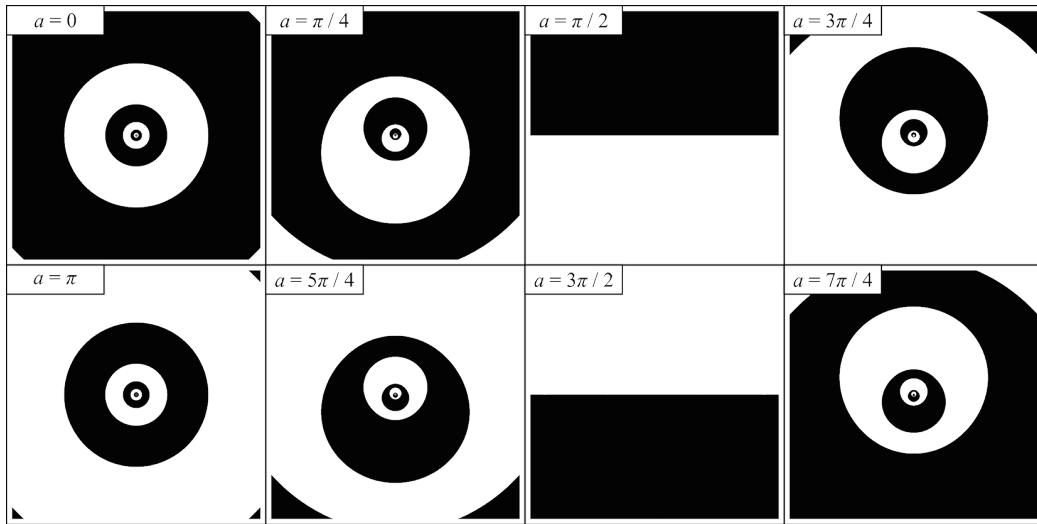


Рис. 5. Преобразованная “мишень” (21), (22), $k^2 = 1/2$ на плоскости xOy при некоторых значениях параметра a , $(x, y) \in [-4; 4] \times [-4; 4]$. Области белого цвета — положительные значения поля n_3 , области черного цвета — отрицательные значения.

стью компонента n_3 поля n от параметра $a \in [0; 2\pi]$ можно ознакомиться в видеофильме [13].

Когда $k \rightarrow 1$, уравнение “мишени” (21) переходит в инстантон (15). При этом траектории центров вихревых структур (25), (26) и (29), (30) при $m_i = 0$ переходят в траектории центров инстантонов (19), (20). Остальные же центры вихревых структур (23), (24), (27), (28) и (25), (26), (29), (30) при $m_i \neq 0$ в этом пределе стремятся к $y = \pm\infty$ или началу координат.

Преобразование (12), (13) можно применить также и к N -заходной магнитной “спирали”

$$\cos \theta = \operatorname{sn} \left[\frac{Q}{k^2} \ln r - \frac{2K(k)}{\pi} N \varphi, k \right], \quad (31)$$

Для простоты возьмем $Q = N = 1$. На рис. 6 приведено несколько состояний компонента n_3 (31), трансформированного преобразованием (12), (13), для различных значений параметра a .

Центры восьми бесконечных вихревых структур поля $\bar{\Phi}$ (12), (31), (32) расположены на логарифмических спиралах

$$\varphi = \frac{\pi}{2} s - \frac{2k^2 K(k)}{\pi} \ln r \quad (s = \pm 1),$$

где r определяется уравнением

$$\cos \theta = \sin \left[-s K(k) + \frac{\pi^2 + 4k^2 K^2(k) \ln r}{\pi k^2}, k \right]$$

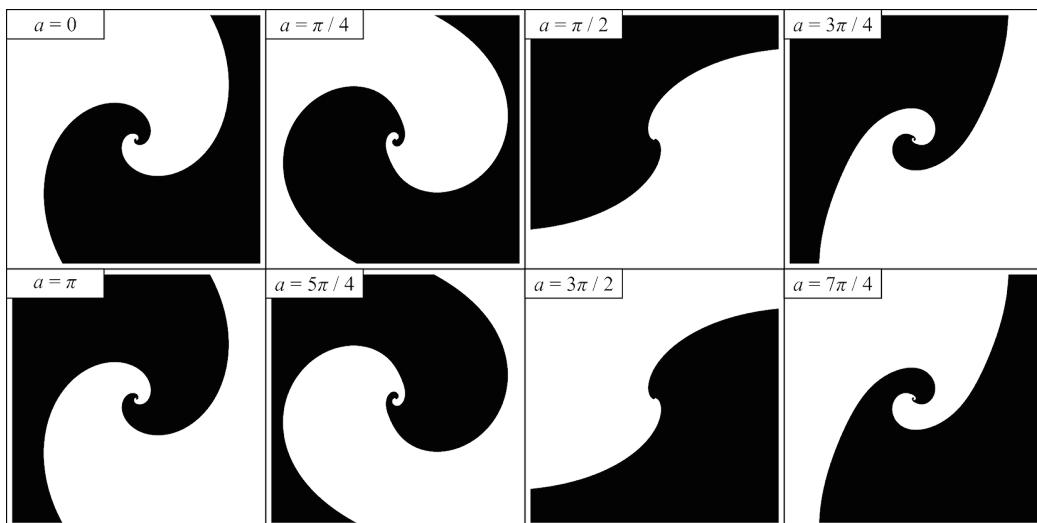


Рис. 6. Преобразованная “спираль” (31), (32) на плоскости при некоторых значениях параметра a , $Q = 1$, $N = 1$, $k^2 = 1/2$, $(x, y) \in [-4; 4] \times [-4; 4]$. Области белого цвета — положительные значения поля n_3 , области черного цвета — отрицательные значения.

и

$$\Theta = -a + \pi t, \quad t = 1, 2 \quad \text{для } s = 1,$$

$$\Theta = a + \pi t, \quad t = -1, 0 \quad \text{для } s = -1.$$

Зависимость центров вихревых структур и областей спирали на плоскости xOy с положительными и отрицательными значениями поля n_3 от параметра a представлены в видеофильме [14].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема “Квант”, номер г.р. 122021000038-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
2. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
4. Egorov R.F., Bostrem I.G., Ovchinnikov A.S. The variational symmetries and conservation laws in classical theory of Heisenberg (anti) ferromagnetic // Phys. Lett. A. 2002. V. 292. N. 6. P. 325–334. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(01\)00813-1](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(01)00813-1)
5. Курик М.В., Лаврентович О.Д. Дефекты в жидких кристаллах: гомотопическая теория и экспериментальные исследования // УФН. 1988. 154. № 3. С. 381–431. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0154.198803b.0381>
6. Борисов А.Б., Киселев В.В. Двумерные и трехмерные топологические дефекты, солитоны и текстуры в магнетиках. Т. 2. Топологические солитоны, двумерные и трехмерные “узоры”. М.: Физматлит, 2022. 456 с.
7. Kosevich A.M., Ivanov B.A., Kovalev A.S. Magnetic Solitons // Phys. Rep. 1990. V. 194. N. 3–4. P. 117–238. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(90\)90130-T](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90130-T)
8. Белавин А.А., Поляков А.М. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22. № 10. С. 500–506.
9. Зависимость расположения вихревых структур на плоскости от параметра для трансформированного инстантона, видеофильм. <https://youtu.be/watch?v=pfmQ7lozw9I>
10. Борисов А.Б. Спиральные вихри в ферромагнетиках // ДАН. 2001. Т. 379. № 3. С. 319–321.
11. Борисов А.Б. Спиральные вихри в ферромагнетике // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. № 5. С. 279–282.
12. Byrd P.F., Friedman M.D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. N.Y., Heidelberg, B.: Springer-Verlag, 1971. 358 p.
13. Зависимость компонента n_3 трансформированной “мишени” от параметра a , видеофильм. <https://youtu.be/watch?v=cR-2KQnnd20>
14. Зависимость компонента n_3 трансформированной “спирали” от параметра a , видеофильм. <https://youtu.be/watch?v=jXwVPLacug0>

SYMMETRIES OF THE CLASSICAL HEISENBERG MODEL

Corresponding Member of the RAS A. B. Borisov^a, D. V. Dolgikh^a

^a M. N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia

The symmetries of the classical Heisenberg model are examined. It is shown that such symmetries are groups of conformal transformations and rotations. The invariance of vortex structures with respect to a group of rotations is studied. The application of the found transformations of the group of field rotations to the already known solutions of the Heisenberg model (such as instantons, vortex “targets” and “spirals”) generates other structures, which are also solutions of this model, with the properties being determined by the original structures.

Keywords: Heisenberg model, ferromagnet, vortex, Lee groups

УДК 532.528

ЛАЗЕРНАЯ КАВИТАЦИЯ В ТРУБКЕ, ПОГРУЖЕННОЙ В ОГРАНИЧЕННЫЙ ОБЪЕМ, ЗАПОЛНЕННЫЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2024 г. Академик РАН М. А. Гузев¹, член-корреспондент РАН Ю. В. Василевский², Е. П. Дац^{1,*}, И. А. Абушкин¹, Е. В. Хайдуков³, В. М. Чудновский¹

Поступило 28.06.2024 г.

После доработки 28.06.2024 г.

Принято к публикации 09.09.2024 г.

Исследуются расширение и схлопывание кавитационного пузырька при лазерном нагреве и вскипании воды недогретой до температуры насыщения в окрестности кончика оптоволокна (лазерного нагревательного элемента), установленного в заполненную водой стеклянную трубку, погруженную в ограниченный объем, заполненный жидкостью. Установлено, что вытекающие и втекающие потоки разогретой жидкости в трубке, возникающие при росте и схлопывании кавитационного парового пузырька, приводят к интенсивным горизонтальным потокам жидкости в зазоре между дном кюветы и нижним торцом трубы. Показано, что в начальные моменты ускоренного роста и, особенно, в момент коллапса парового пузырька вблизи дна кюветы под нижним торцом трубы возникают мощные импульсы давления, способные эффективно влиять на поверхность дна кюветы, тогда как при схлопывании пузырька потоки жидкости устремлены в обратном направлении в трубку. Обнаруженные эффекты могут быть использованы для эффективной селективной очистки поверхности.

Ключевые слова: лазер, кавитация, численное моделирование, двухфазная среда

DOI: 10.31857/S2686740024060037, EDN: HWLIIU

Кавитация (явление разрыва капельной жидкости [1] может возникать как в условиях понижения давления ниже давления насыщения в жидкости при постоянной температуре, так и при повышении температуры выше температуры насыщения при постоянном давлении. В обоих случаях жидкость вскипает. Лазерная (лазероиндуцированная) кавитация — это паровая кавитация, образующаяся при быстром лазерном нагреве и вскипании жидкости, находящейся в относительно “холодном” окружении, недогретом до температуры насыщения (кипение с недогревом) [2, 3]. При этом возникающий при вскипании паровой пузырек сначала быстро увеличивается до некоторого максимального объема, а затем, вследствие контакта с “холодным” (недогретым) окружением, ускоренно схлопывается, что определяет его как кавитационный [2, 3]. Инициировать кавитацию можно используя как импульсное [4–10], так и непрерывное [2, 3, 11–14] лазерное излучение.

¹ Институт прикладной математики
Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Владивосток, Россия

² Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука
Российской академии наук, Москва, Россия

³ Национальный исследовательский центр
“Курчатовский институт” Российской академии наук,
Москва, Россия
* E-mail: datsep@gmail.com

В данной работе рассматривается кавитация, возникающая при нагреве жидкости в окрестности кончика оптоволокна, погруженного в воду, по которому распространяется непрерывное лазерное излучение. Если излучение эффективно поглощается водой, кварцевый цилиндрический кончик оптоволокна малого диаметра (0.1–1 мм) будет являться сосредоточенным нагревательным элементом лазерного нагревательного прибора, создающий большой тепловой поток при выходе излучения в жидкость [2, 3, 12, 13]. Жидкость быстро нагреется до температуры кипения и на торце оптоволокна образуется пузырек, который при схлопывании теряет сферичность, что в свободном пространстве приводит к генерации кумулятивных затопленных струй, направленных к торцу и от торца оптоволокна вглубь жидкости [2, 3].

Совершенно иная ситуация возникает, когда оптоволокно размещено в трубке [12, 15]. В таком случае на стадии роста пузырька жидкость будет выталкиваться из трубы, а на стадии схлопывания будет втекать (всасываться) в трубку. Эти свойства могут иметь большое практическое применение в технике и медицине, в связи с чем особенный интерес представляет исследование инициированных динамикой лазероиндуцированного кавитационного пузырька потоков жидкости не только в трубке, но и в ограниченной области за ее пределами.

Цель исследования — показать, что лазерная кавитация в трубке, погруженной в ограниченный объем, заполненный жидкостью, способна приводить к очистке, санации поверхностей, а также одновременному удалению продуктов очистки за пределы полости.

Численное моделирование реализовано в коммерческом пакете Ansys Fluent 2021 с использованием метода “Volume of Fluid”, в котором рассматривается двухфазная среда “вода–пар”. В рамках данного метода для плотности ρ , теплопроводности λ , вязкости μ и теплоемкости c_p принимаются зависимости:

$$\begin{aligned}\rho &= \alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l; & \lambda &= \alpha_g \lambda_g + \alpha_l \lambda_l; \\ \mu &= \alpha_g \mu_g + \alpha_l \mu_l; & c_p &= \alpha_g c_{pg} + \alpha_l c_{pl},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\alpha_g + \alpha_l = 1$ — объемные доли газовой и жидкой фазы в заданной точке пространства.

Для двухфазной среды решается система уравнений Навье–Стокса и теплопроводности:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\mathbf{U} + \mathbf{U}^T)] + \mathbf{F}_V, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \rho c_p T) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - L \dot{m}_g. \quad (3)$$

В качестве механизма межфазного массообмена используется модель испарения–конденсации Ли [3], в которой скорость парообразования и конденсации пропорциональны разнице между текущей температурой и температурой насыщения:

$$\begin{aligned}\dot{m}_g &= -\dot{m}_l = \gamma_g \alpha_l \rho_l \left(\frac{T - T_{sat}}{T_{sat}} \right), & T > T_{sat}, \\ \dot{m}_l &= -\dot{m}_g = \gamma_l \alpha_g \rho_g \left(\frac{T_{sat} - T}{T_{sat}} \right), & T < T_{sat},\end{aligned}\quad (4)$$

где γ_g, γ_l — коэффициенты, определяемые из экспериментальных данных, L — скрытая теплота парообразования, \mathbf{F}_V — силы поверхностного натяжения.

Схема расчетной области представлена на рис. 1. Оптоволокно (3) установлено в трубку (2), которая установлена в объем, ограниченный поверхностями (1), заполненный водой (4). Расчет выполнен в осесимметричной двумерной постановке с использованием равномерной квадратной сетки со стороной элемента 6.25 мкм. Начало координат соответствует центру торца оптоволокна. Ось симметрии обозначена красной пунктирной линией. На границах 1, 2, 3 заданы стандартные условия прилипания (вектор скорости двухфазной среды равен нулю) и нулевого теплового потока. Параметры моделирования выбирались таким образом, чтобы динамика межфазной границы в численном расчете соответствовала динамике роста/схлопывания пузырька в эксперименте [12]. В начальный момент времени на торце оптоволокна задан паровой пузырек с радиусом 30 мкм, температурой 430 К и давлением 6 атм [13]. Вокруг

пузырька задан сферический слой перегретой жидкости толщиной 600 мкм, температура которого линейно уменьшается от 433 до 300 К в направлении от границы раздела фаз. Остальной объем расчетной области в начальный момент времени заполнен жидкой фазой с температурой 300 К и имеющей теплофизические свойства воды. Сходимость численного решения проверялась на сетках с размером квадратного элемента 2, 4 и 8 мкм. В качестве измеряемой величины выбиралась зависимость изменения объема паровой фазы в процессе моделирования. Было установлено, что для сеток с размерами 4 и 8 мкм максимальное различие в объеме составляет 9%, а время достижения максимального объема отличается на 22%. При этом для сеток с размерами 2 и 4 мкм различие в максимальном объеме паровой фазы составляет менее 1%, а время достижения максимального объема различается менее чем на 4%. Далее использовалась сетка с размером элемента 4 мкм, как наиболее оптимальная с точки зрения корректности численного результата и скорости расчета при различных параметрах моделирования.

На рис. 2 показаны кадры численного моделирования процесса роста и схлопывания в динамике парового пузырька в окрестности кончика оптоволокна, выполненные для расчетной области рис. 1, где $h1 = 0.3$ мм, $h2 = 0.5$ мм. Первые два кадра ($t = 0.05$ мс и $t = 0.3$ мс) показывают фрагменты ро-

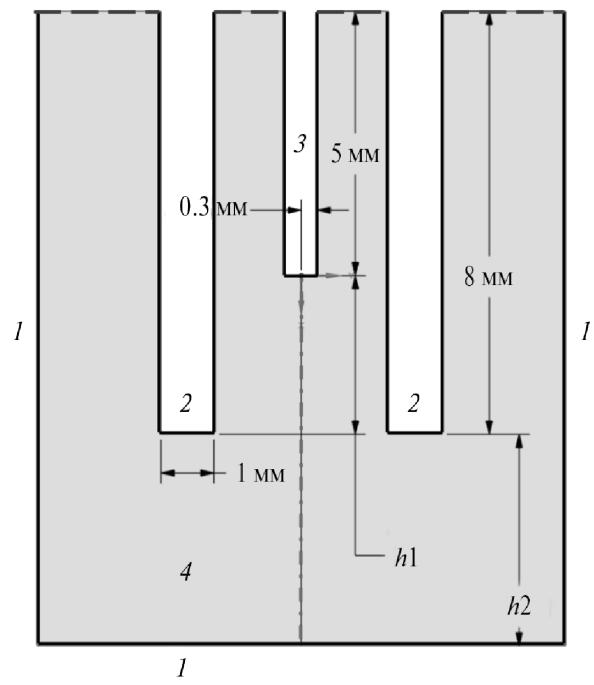


Рис. 1. Схема расчетной области. Оптоволокно 3 установлено в трубку 2, которая установлена в объем, ограниченный поверхностями 1, заполненный водой 4. Варьируемые параметры — $h1$ и $h2$. На верхней границе расчетной области (синяя пунктирная линия) задано атмосферное давление. Внутренний диаметр трубки 3.3 мм, диаметр расчетной области 10 мм.

ста парового пузырька, который к моменту $t = 0.3$ мс достигает максимального размера. Рост пузырька порождает потоки, выталкивающие жидкость из трубы (направленные вверх и вниз в трубке), горизонтальные потоки в зазоре между дном кюветы и нижним кончиком трубы и потоки, направленные к свободной поверхности вверх за пределами трубы. Из рис. 2 следует, что при росте пузырька к моменту времени $t = 0.05$ мс скорость потока в зазоре между дном кюветы и нижним торцом трубы достигает 2–2.5 м/с, тогда как к моменту достижения пузырьком максимального размера эта скорость уменьшается пропорционально уменьшению скорости роста пузырька до 1–1.5 м/с. Отметим, что эта скорость значительно превосходит скорость движения воды за пределами трубы.

Следующие три кадра ($t = 0.5$ мс, 0.57 мс, 0.68 мс) охватывают период схлопывания парового пузырька. В этот период картина меняется на

противоположную — потоки воды устремляются к пузырьку. Пузырек начинает втягивать жидкость в трубку вплоть до момента коллапса, когда он достигает минимальных размеров ($t = 0.68$ мс). В период схлопывания горизонтальная скорость потока воды в зазоре между дном кюветы и нижней гранью трубы в моменты времени $t = 0.5$ мс, 0.57 мс достигает 3 м/с. В отличие от периода роста, в период схлопывания пузырька горизонтальные потоки направлены в сторону оси симметрии расчетной области. На кадрах $t = 0.5$ мс, 0.57 мс видно, что на нижнем полюсе пузырька и в области торца оптоволокна формируются зоны повышенной скорости движения воды, где скорость достигает 6 м/с и более. Здесь формируются струи, одна из которых (аксиальная) устремлена снизу к торцу оптоволокна, другая (радиальная) сверху к центру пузырька [12]. К моменту коллапса скорость движения воды вблизи торца оптоволокна достигает

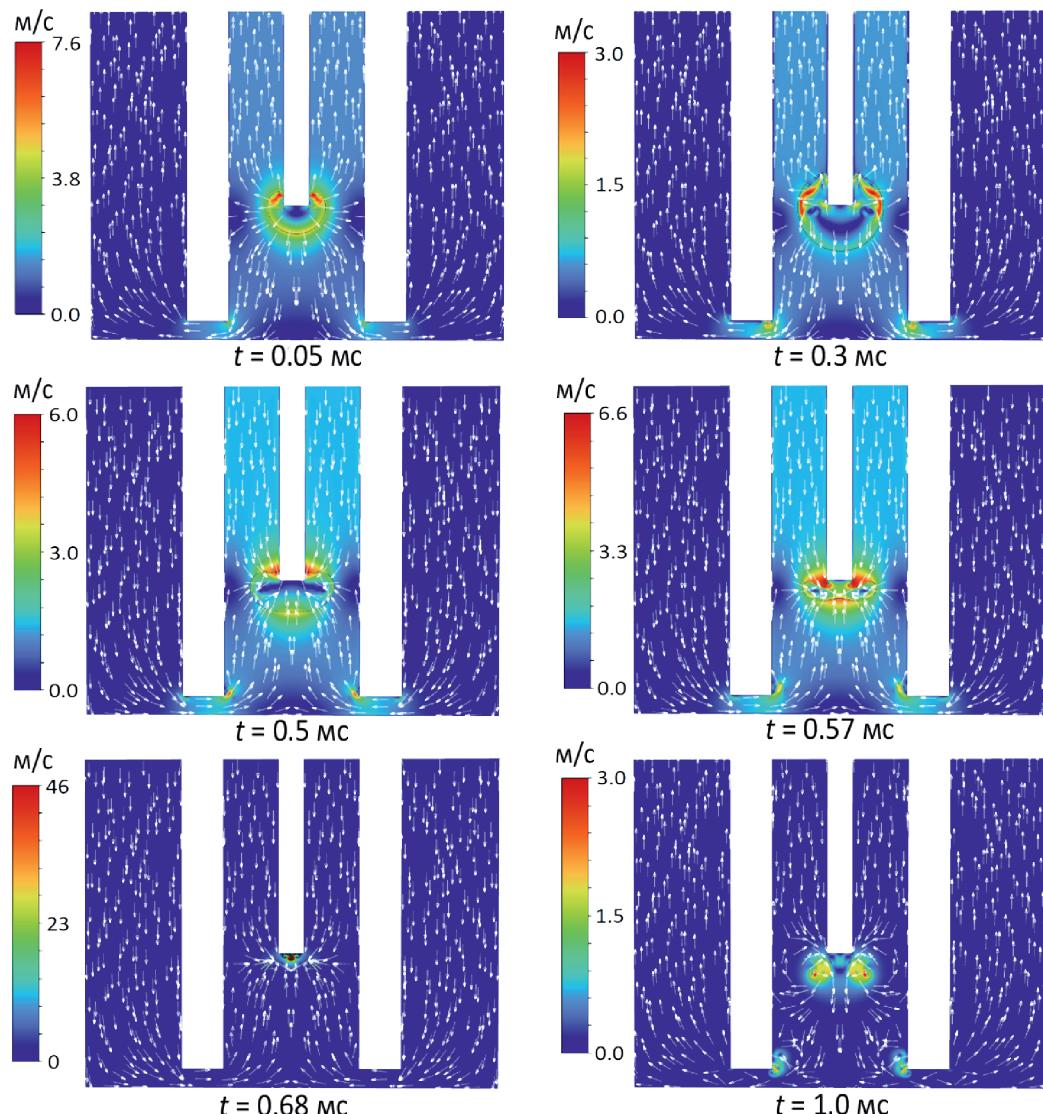


Рис. 2. Динамика паровой фазы кавитационного пузырька и потоков жидкости в расчетной области рис. 1. Паровая фаза обозначена черной контурной линией.

46 м/с и более. В этот момент аксиальная струя сталкивается с торцом оптоволокна, что в итоге приводит к перестройке направления движения потоков жидкости с образованием торOIDальных вихревых структур — “отскоков” [14] (кадр $t = 1$ мс).

В качестве оценки воздействия процесса лазерной кавитации в трубке на стенки кюветы выбрана область с максимальным изменением давления вблизи стенок: давление рассчитано для горизонтальной площадки диаметром 0.2 мм с центром на оси симметрии на расстоянии 0.05 мм от нижней границы кюветы для различных параметров $h1$ и $h2$. На рис. 3 показаны результаты такого расчета. Из рис. 3 следует, что к моменту начала роста пузырька на дне сосуда (куветы) в проекции торца оптоволокна в момент ускоренного роста пузырька возникает скачок давления, который в зависимости от параметров $h1$, $h2$ может превосходить 2 атм, а в момент коллапса давление достигает 13 атм. Отметим, что скачки давления очень кратковременны — в начале ускоренного роста пузырька ~ 30 мкс, а при коллапсе ~ 4 мкс. Отсюда можно предположить, что это давление создают ударные волны, которые могут возникать в период ускоренного роста и, особенно, при коллапсе кавитационного пузырька.

Через 0.1 мс после начала роста пузырька давление на дне кюветы становится равным атмосферному и далее уменьшается на 0.25 атм до 0.75 атм в максимуме через 0.3 мс (см. врезку на рис. 3). Согласно рис. 2 этот момент соответствует достижению

пузырьком максимального объема. Можно предположить, что скачок давления, вызванный ускоренным ростом пузырька, инициирует ускоренное движение жидкости из трубы к нижней границе кюветы, что в итоге приводит к радиальному растеканию жидкости вдоль дна и, как следствие, после скачка к уменьшению давления. Растекание жидкости вдоль поверхности длится вплоть до остановки роста пузырька, а далее начинается его схлопывание и обратный процесс всасывания воды в трубку. Разница в 0.25 атм приведет к тому, что в период схлопывания пузырька вода у дна кюветы под давлением $\rho = 0.25$ атм будет двигаться от дна кюветы со средней скоростью $U = (P/\rho)^{1/2} = 5$ м/с в трубку (всасываться), плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³. Это значение, полученное численно, близко к экспериментальному — 4 м/с [12]. Наблюдаемые на рис. 3 пики давления, следующие за основным, возникают в результате вторичного вскипания жидкости — “отскоков” [13].

На рис. 4 показаны результаты эксперимента, выполненного с трубкой, размещенной в кювете, дно которой выполнено из листа бумаги, подверженного деформации (изгибу). Кювета и трубка заполнены водой. В трубке находится оптоволокно, кончик которого погружен в воду. По оптоволокну распространяется лазерное излучение мощностью 7 Вт с длиной волны 1.47 мкм, которое эффективно поглощается в воде с коэффициентом 25 см⁻¹. Под действием излучения вода нагревается и вскипает.

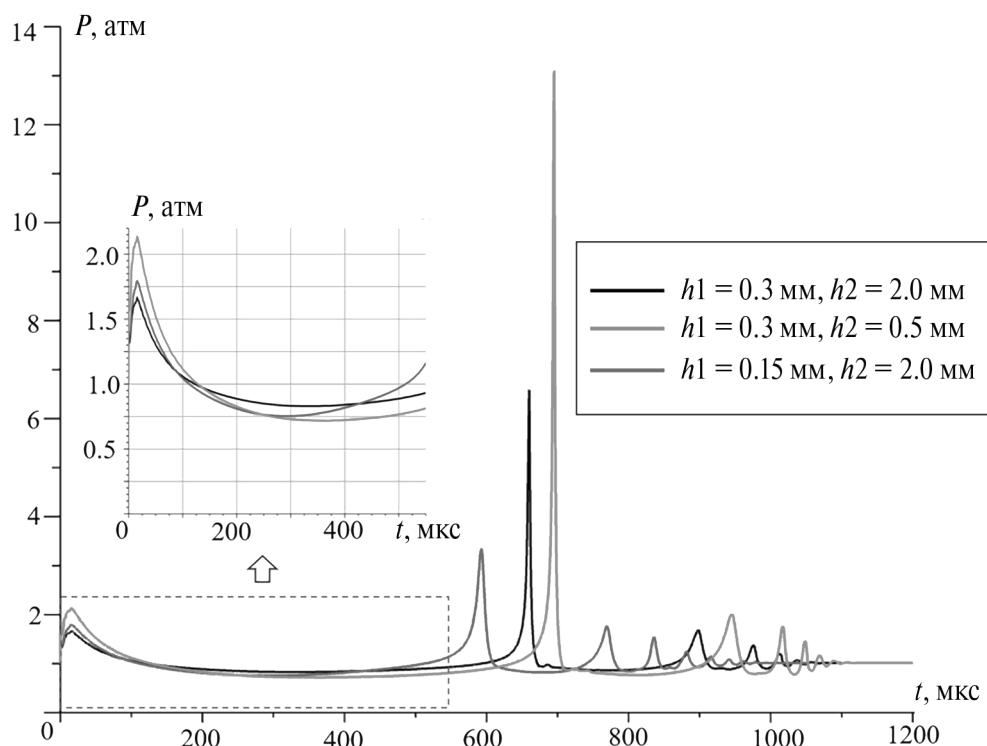


Рис. 3. Среднее давление на горизонтальной площадке радиусом 200 мкм (рис. 1), на расстоянии 50 мкм от нижней границы расчетной области.

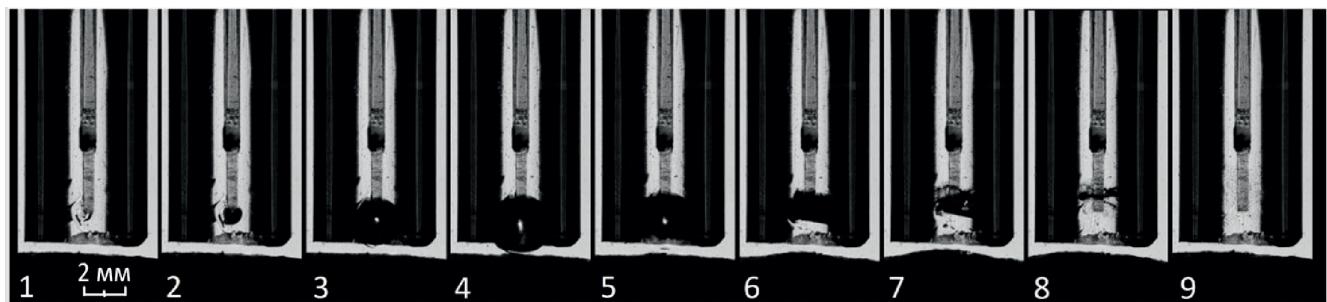


Рис. 4. Кадры роста и схлопывания парового пузырька в окрестности кончика оптоволокна, размещенного в стеклянной трубке, кончик которой находится на расстоянии 0.5 мм от дна кюветы (лист бумаги).

На рис. 4 показаны кадры роста и схлопывания парового пузырька на торце оптоволокна с диаметром по кварцу 0.6 мм, расположенным в центре стеклянной трубы с внутренним диаметром 3 мм, толщиной стенок 1 мм. Съемка производилась скоростной камерой FASTCAM SA-Z со скоростью 50400 кадров в секунду. Расстояние от торца оптоволокна до дна кюветы (листа бумаги) 0.5 мм. Температура воды в кювете 300 К.

На рис. 4 отчетливо видно, что лист бумаги в период схлопывания пузырька (кадры 5–8) выгибается в сторону трубы и далее возвращается в исходное состояние при завершении схлопывания пузырька. Изгиб листа бумаги возникает в результате рассмотренного выше падения давления в жидкости над дном кюветы ниже атмосферного. Максимум в изгибе листа бумаги составляет 0.6 мм, который достигается за время $t \sim 1.1 \cdot 10^{-4}$ с. Таким образом, скорость движения изгиба листа бумаги вверх $U \sim 5.5$ м/с, откуда гидродинамическое давление в жидкости, всасывающейся в трубку $P = \rho U^2 \sim 0.3$ атм. Эта оценка очень близка к рассчитан-

ному давлению на рис. 3 для случая $h_1 = 0.3$ мм и $h_2 = 0.5$ мм (0.25 атм).

Сказанное выше позволяет использовать явление лазерной кавитации в трубке, размещенной в кювете, заполненной жидкостью для эффективной селективной очистки поверхности кюветы и одновременным удалением продуктов очистки из полости через трубку. При перемещении нижнего кончика трубы на расстоянии 0.5–1 мм от поверхности, которую следует очистить, скорость потока в зазоре между поверхностью и нижней гранью стенок трубы достигает 2–3 м/с, что позволяет эффективно сбивать частицы, предназначенные к очистке в поток, всасывающейся под давлением порядка 0.25 атм в трубку жидкости. Подобный метод очистки можно применить для лечения гнойных и хронических ран, где проблема удаления воспалительного агента стоит очень остро. На рис. 5 показана схема подобно манипуляции, где физиологический раствор (водный раствор 0.9% NaCl) вводится непосредственно в рану и трубку.

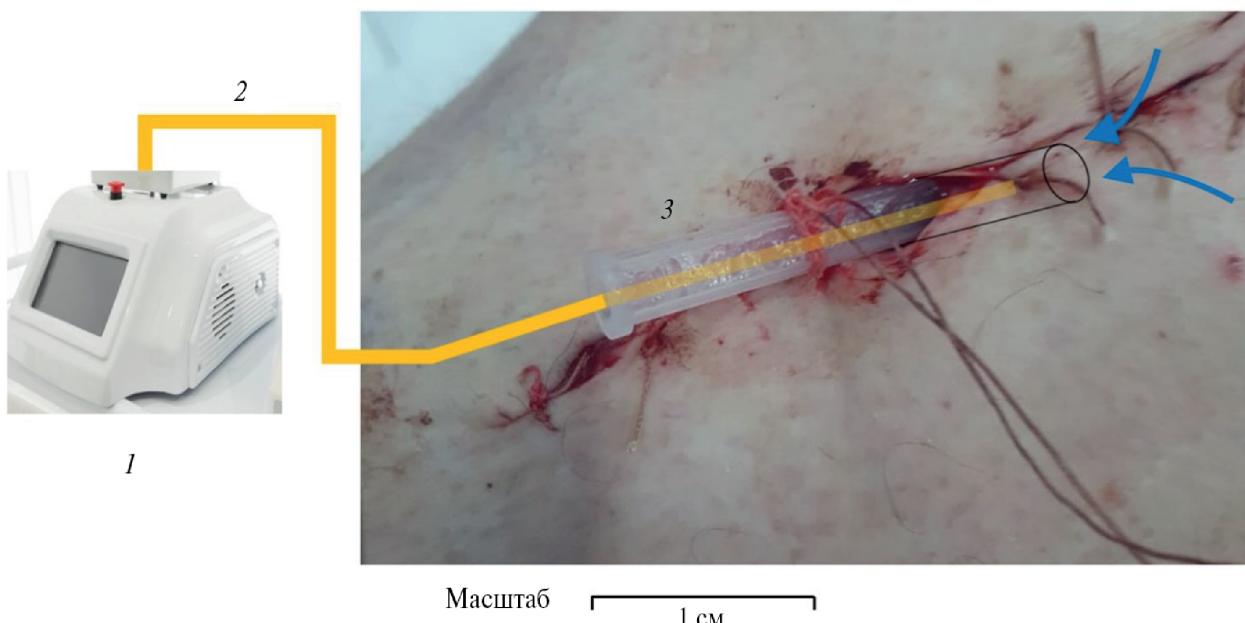


Рис. 5. Схема очистки гнойной раны с использованием явления лазерной кавитации в трубке, размещенной в полости, заполненной физиологическим раствором. 1 – медицинский лазер, 2 – оптоволокно, 3 – трубка с вставленным оптоволокном.

Отметим также, что скачки давления вблизи обрабатываемой поверхности могут быть использованы для селективного упрочнения материала, либо разрушения подлежащих структур, например, стенок капилляров, с целью извлечения содержащегося в них материала. В более крупных масштабах полученные результаты могут быть использованы в промышленности для добычи жидких и газообразных ископаемых.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа проведена при финансовой поддержке Российского научного фонда (№ 22-19-00189).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский В.В. Кавитация. Л.: Судостроение, 1977. 248 с.
2. Chudnovskii V.M., Levin A.A., Yusupov V.I., Guzev M.A., Chernov A.A. The formation of a cumulative jet during the collapse of a vapor bubble in a subcooled liquid formed as a result of laser heating // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2020. N 150. P. 119286.
3. Fursenko R.V., Chudnovskii V.M., Minaev S.S., Okajima J. Mechanism of high velocity jet formation after a gas bubble collapse near the micro fiber immersed in a liquid // International J. Heat and Mass Transfer. 2020. 163. 120420
4. Zhong X., Eshraghi J., Vlachos P., Dabiri S., Ardekani A.M. A model for a laser-induced cavitation bubble // Intern. J. Multiphase Flow. 2020. V. 132. 103433. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103433>
5. Ohl C.-D., Arora M., Dijkink R., Janve V., Lohse D. Surface cleaning from laser-induced cavitation bubbles // Appl. Phys. Lett. 2006. V. 89. 074102.
6. Robles V., Gutierrez-Herrera E., Devia-Cruz L.F., Banks D., Camacho-Lopez S., Aguilar G. Soft material perforation via double-bubble laser-induced cavitation microjets // Phys. Fluids. 2020. V. 32. 042005. <https://doi.org/10.1063/5.0007164>
7. George S.D., Chidangil S., Mathur D. Minireview: Laser-induced formation of microbubbles – biomedical implications // Langmuir. 2019. V. 35. 010139.
8. Yu J.X., Wang X.Y., Hu J.S., Shen J.W., Zhang X.Q., Zheng X.X., Zhang Y.N., Yao Z. Laser-induced cavitation bubble near boundaries // J. Hydrodynamics. 2023. V. 35. P. 858–875. <https://doi.org/10.1007/s42241-023-0074-3>
9. Wang D., Bi Y. Investigation of the influence of different liquid temperatures on the dynamics of long-pulse laser-induced cavitation bubbles // AIP Advances. 2024. 14. <https://doi.org/10.1063/5.0185608>
10. Horvat Darja, Orthaber Uroš, Schillec Jörg, Hartwig Lars, Löschner Udo, Vrecko Andrej, Petkovšek Rok. Laser-induced bubble dynamics inside and near a gap between a rigid boundary and an elastic membrane // Intern. J. Multiphase Flow. 2018. V. 100. P. 119–126. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.12.010>
11. Schoppink J., Alvarez-Chavez J., Fernandez Rivas D. Laser beam properties and microfluidic confinement control thermocavitation // Appl. Phys. Letters. 2024. V. 124. <https://doi.org/10.1063/5.0186998>
12. Чудновский В.М., Гузев М.А., Дац Е.П., Кулик А.В. Эффект ускоренного всасывания жидкости в трубке при лазерной кавитации на лазерном нагревательном элементе // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 513. С. 41–47. <https://doi.org/10.31857/s2686740023060056>
13. Dats E.P., Kulik A.V., Guzev M.A., Chudnovskii V.M. Cavitation at the end of an optical fiber during laser heating of water in a narrow slit // Technical Physics Letters. 2023. N 49. P. 73–76.
14. Чернов А.А., Гузев М.А., Пильник А.А., Адамова Т.П., Левин А.А., Чудновский В.М. Влияние вторичного вскипания на динамику струи, формирующейся при коллапсе парового пузырька, индуцированного лазерным нагревом жидкости // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 501. С. 54–58.
15. Wang Shi-Ping, Wang Qianxi, Zhang A-Man. Eleanor Stride. Experimental observations of the behaviour of a bubble inside a circular rigid tube // Intern. J. Multiphase Flow. 2019. V. 121. 103096. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.103096>

LASER CAVITATION IN A TUBE IMMERSED IN A CONFINED VOLUME FILLED WITH LIQUID

Academician of the RAS M. A. Guzev^a, Corresponding Member of the RAS Y. V. Vassilevski^b, E. P. Dats^a,
I. A. Abushkin^a, E. V. Khaydukov^c, V. M. Chudnovskii^a

^a*Institute of Applied Mathematics Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia*

^b*G. I. Marchuk Institute of Computational Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c*National Research Center “Kurchatov Institute” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The expansion and collapse of a cavitation bubble during laser heating and boiling of water underheated to saturation temperature in the vicinity of the tip of an optical fiber (laser heating element) installed in a glass tube filled with water and immersed in a limited volume filled with liquid are studied. It is established that the outgoing and incoming flows of heated liquid in the tube, arising from the growth and collapse of cavitation vapor bubble, lead to intense horizontal liquid flows in the gap between the bottom of the cuvette and the bottom end of the tube. It is shown that at the initial moments of accelerated growth and, especially, at the moment of vapor bubble collapse near the bottom of the cuvette under the bottom end of the tube there are powerful pressure pulses that can effectively affect the surface of the bottom of the cuvette, while at bubble collapse liquid flows are directed in the opposite direction into the tube. The discovered effects can be used for effective selective surface cleaning.

Keywords: lasers, cavitation, numerical simulation

ПАРАДОКСАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ АВРОРАЛЬНОГО КИЛОМЕТРОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

© 2024 г. В. И. Колпак^{1,2,*}, М. М. Могилевский¹, Д. В. Чугунин¹, А. А. Чернышов¹, И. Л. Моисеенко¹, М. О. Рязанцева¹

Представлено академиком РАН Л. М. Зелёным 26.06.2024 г.

Поступило 27.06.2024 г.

После доработки 27.06.2024 г.

Принято к публикации 07.08.2024 г.

Представлены результаты статистической обработки измерений аврорального километрового радиоизлучения, зарегистрированного на спутнике WIND вблизи точки либрации L1. Показано, что частота регистрации аврорального километрового радиоизлучения изменяется в противофазе с вариациями солнечной активности. Сделано предположение, что такое изменение частоты регистрации аврорального километрового радиоизлучения связано с особенностью распространения радиоизлучения в неоднородной плазме солнечного ветра.

Ключевые слова: авроральное километровое радиоизлучение, солнечный ветер, плазменные неоднородности, распространение радиоволн

DOI: 10.31857/S2686740024060043, **EDN:** HWANLH

Авроральное километровое радиоизлучение (АКР) получило название по расположению источника и характерной длине волн [1–3]. Источником энергии АКР являются потоки сверхтепловых электронов (1–10 кэВ), инжектируемых из хвоста магнитосферы Земли во внутренние области во время геомагнитных возмущений. Механизмом генерации АКР является циклотронная мазерная неустойчивость (ЦМН) [4–6], развивающаяся в областях с пониженной плотностью плазмы (кавернах Кальверта) [7, 8], когда выполняется условие

$$f_{pe} < f_{Be},$$

где $f_{pe} = (4\pi 2N/m)^{1/2}$ — плазменная электронная частота; e — заряд электрона; N — плотность плазмы, m — масса электрона; $f_{Be} = Be/mc$ — гирочастота электронов, B — магнитное поле, c — постоянная скорости света. При развитии ЦМН все частицы плазмы резонансно передают энергию электромагнитному излучению, что приводит к большому КПД передачи энергии от частиц к волнам и, как следствие этого, высокой интенсивности АКР. При сильных геомагнитных возмущениях до 10% энергии частиц переходит в электромагнитное из-

лучение и интегральная интенсивность АКР может достигать 10^7 – 10^9 Вт. Диаграмму направленности АКР формируют каверны Кальверта, вытягивая излучение вдоль магнитного поля от Земли. Типичные значения раскрытия конуса излучения составляет 25–35 градусов от направления магнитного поля в источнике излучения [9], а частотный диапазон самого аврорального километрового радиоизлучения составляет 30–900 кГц. По этой причине регистрация АКР возможна лишь приемниками, установленными на борту космических аппаратов.

Полученные на сегодняшний день данные о свойствах АКР и о характере распространения этого излучения в различных плазменных средах позволяют использовать его для диагностики свойства плазмы, в которой происходит распространение данного излучения [8, 10–12]. Мы использовали результаты измерений электромагнитного поля в диапазоне частот 4–1000 кГц, выполненных на борту спутника WIND [13], для исследования некоторых свойств солнечного ветра. Спутник WIND был запущен 1 ноября 1994 г. и на первом этапе его миссии измерения проводились на орбите Земли в рамках программы координированных измерений ISTP (International Solar Terrestrial Physics) совместно со спутниками POLAR, GEOTAIL, Интербол-1 и Интербол-2. С июня 2004 г. спутник WIND был переведен в область точки Лагранжа L1 на расстояние порядка ~ 200 Re, где измерения проводятся по настоящее время.

¹ Институт космических исследований

Российской академии наук, Москва, Россия

² Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Путикова

Российской академии наук, Троицк, Москва, Россия

* E-mail: lera.kolpak@yandex.ru

Для наших исследований излучения и свойств плазмы в солнечном ветре мы выбрали интервал с июня 2004 по август 2020 г. 16-летние однородные измерения позволяют провести статистический анализ распространения АКР при различных уровнях солнечной активности, а также выявить зависимость частоты появления АКР от солнечной активности.

Пример электрических сигналов, зарегистрированных на спутнике WIND, приведен на рис. 1.

На рис. 1 приведен пример электрических сигналов, зарегистрированных на борту спутника WIND в момент активности аврорального километрового радиоизлучения. На приведенном интервале вместе с появлением АКР (верхняя панель) происходит заметное изменение частоты верхнего гибридного резонанса, $f_{UH} = (f_{pe}^2 - f_{Be}^2)^{1/2}$, с 30 до 60 кГц. Поскольку в солнечном ветре выполняется условие $f_{pe} \gg f_{Be}$, то в первом приближении можно считать, что вариации f_{UH} связаны с изменением плотности плазмы. Следовательно, в период наблюдений плотность плазмы изменялась от 10 до 40 частиц/см³. В интервале времени ~ 10 –20 UT было зарегистрировано АКР, всплески которого наблюдаются в диапазоне частот 100–400 кГц в нижнем и среднем диапазонах. 13 января 2018 г. АКР было зарегистрировано при повышении плотности плазмы, т.е. при попадании в плазменный канал, условия для формирования которого возникают лишь при определенных условиях.

Для выявления закономерностей изменения АКР в солнечном ветре было посчитано количество дней в месяц, в которые наблюдались излучения. Частота появления АКР сопоставлялась с солнечной активностью — числами Вольфа (ЧВ). На рис. 2 приведены усредненные значения чисел Вольфа и частота регистрации АКР за период с июня 2004 по июль 2020 г. Интервал наблюдений превышает среднюю длительность цикла солнечной активности, что позволяет отследить квазипериодичность измене-

ния чисел Вольфа. Вертикальными пунктирными линиями отмечены минимумы, приходящиеся на февраль 2008 и сентябрь 2019 г., и максимум солнечной активности, приходящийся на сентябрь 2013 г.

График изменения частоты регистрации АКР (нижний график на рис. 2) находится в противофазе с изменениями чисел Вольфа. Такая зависимость частоты регистрации АКР от солнечной активности является неожиданной, поскольку еще в первых работах по АКР было замечено, что появление АКР зависит от геомагнитной активности [1–3] — частота регистрации и интенсивность АКР в магнитосфере Земли наблюдаются чаще при возрастании геомагнитных возмущений. Общепринятый механизм генерации АКР объясняет эту зависимость [4, 5] — поскольку источником энергии АКР являются сверхтепловые частицы, инжектируемые из хвоста магнитосферы во внутренние области, то появление потоков таких частиц связано с геомагнитными возмущениями. Для интерпретации парадоксальной зависимости частоты регистрации АКР (рис. 2) логично предположить, что наблюдаемая зависимость частоты регистрации АКР от солнечной активности связана не с генерацией АКР в магнитосфере Земли, а с особенностями распространения АКР в солнечном ветре.

В работах [8, 10] на основе измерений в магнитосфере Земли было показано, что АКР может захватываться в плазменные каналы — вытянутые вдоль магнитного поля неоднородности плазмы. И такой захват может происходить даже при условии, когда частота излучения больше плазменной частоты. Для этого необходимо выполнение определенного соотношения между направлением оси канала и углом распространения излучения [10]. Роль таких каналов в солнечном ветре могут играть неоднородности плотности плазмы — так называемая “лапша Застенкера” [14]. Эти неоднородности плотности солнечного ветра в спокойных условиях более протяженные, чем в возмущенных условиях, что позволяет “длинным” каналам переносить АКР из магнито-

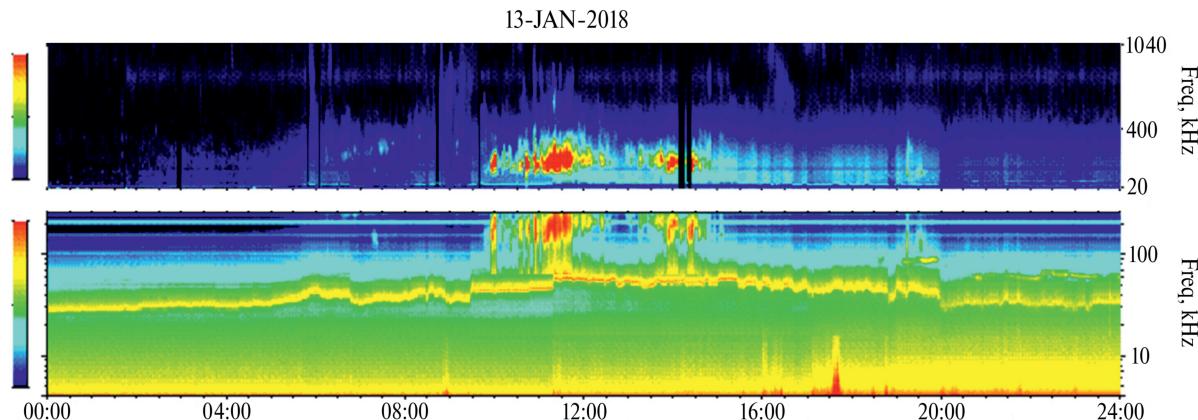


Рис. 1. Спектрограмма электрической компоненты поля, зарегистрированной на спутнике WIND 13 января 2018 г. в диапазонах частот: 4–245 кГц (нижняя панель), 20–1040 кГц (верхняя панель).

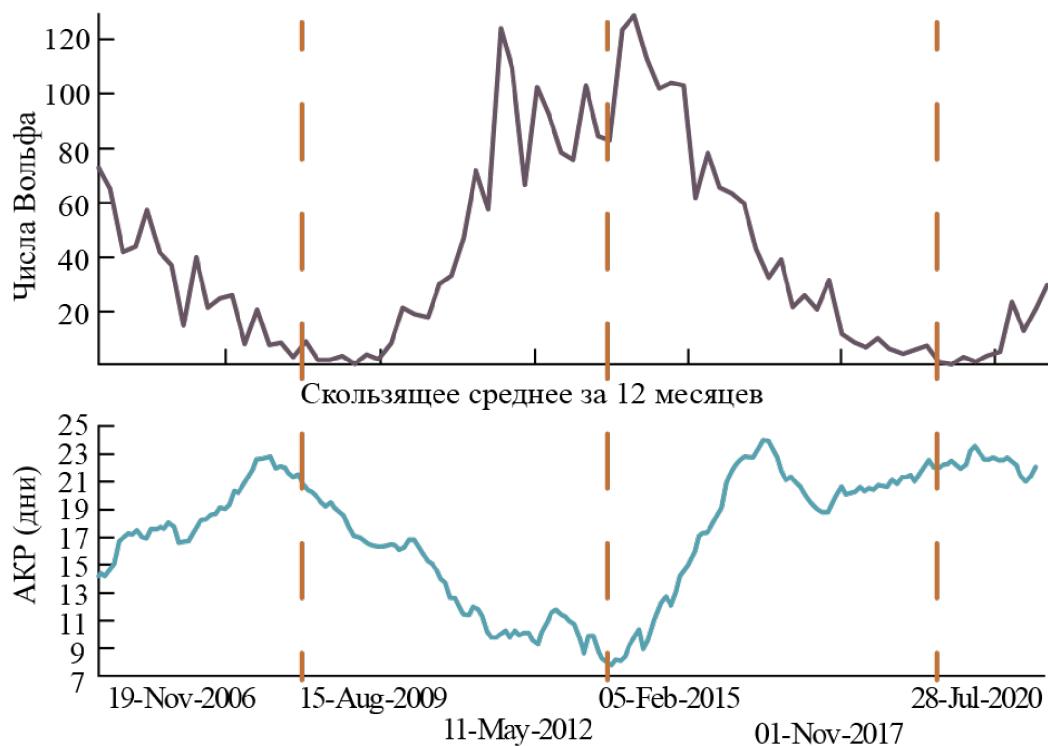


Рис. 2. Усредненные значения чисел Вольфа (верхняя панель), частота появления AKP – среднее значение количества “активных” дней в месяц (нижняя панель).

сферы Земли к спутнику WIND (1.5 млн км) в спокойных условиях (рис. 3). В возмущенных условиях источники инжекции плазмы меняются быстрее, что приводит к формированию мелкомасштабных неоднородностей, которые приводят к рассеянию сигнала и препятствуют переносу AKP до орбиты спутника WIND. На рис. 3 приведена предполагаемая схема распространения AKP в двух случаях – при спокойном Солнце и при возмущенных условиях. В спокойных условиях в солнечном ветре формируются достаточно длинные плазменные каналы, ко-

торые способствуют переносу излучения – такой канал изображен пунктирными линиями. В возмущенных условиях образуются множественные и нерегулярные неоднородности плазмы, которые приводят к рассеянию излучения – представлены на рис. 3 закрашенными фигурами, ограниченными сплошными кривыми.

Отметим, что предположение о различных условиях распространения AKP в солнечном ветре при спокойных и возмущенных условиях требует дальнейших исследований.

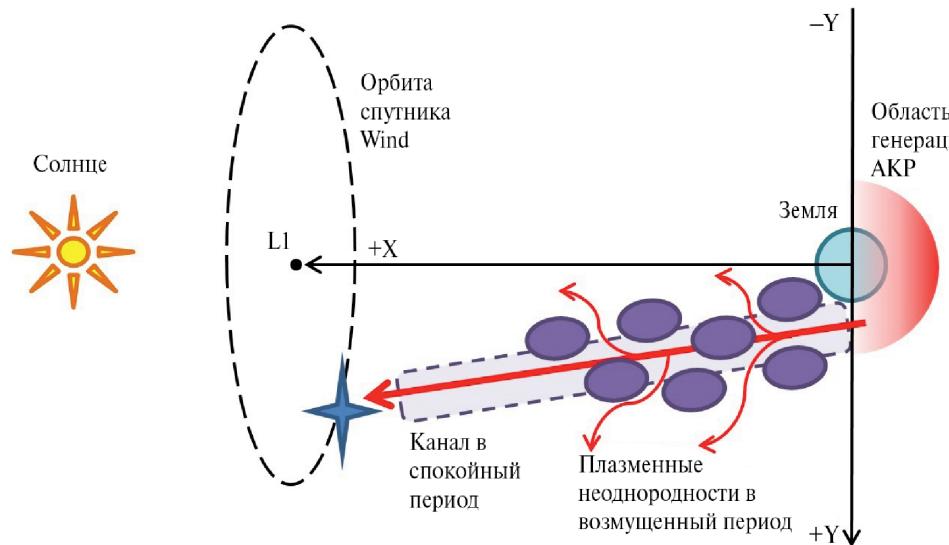


Рис. 3. Схематическое пояснение различных условий распространения AKP в спокойных и возмущенных условиях.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы приносят свою благодарность создателям спутника WIND. Длительный ряд однородных измерений электрической компоненты поля, зарегистрированный на спутнике, доступен на сайте [15]. Данные солнечной активности, использованные в работе, взяты из базы данных OMNI [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенедиктов Е.А., Гетманцев Г.Г., Митяков Н.А. и др. Результаты измерений интенсивности радиоизлучения на частотах 725 и 1525 кГц при помощи аппаратуры, установленной на спутнике “ЭЛЕКТРОН-2” // Иссл. космического пространства / под ред. Скудрина Г.А. М.: Наука, 1965. 581 с.
2. Gurnett D.A. The Earth as a radio source: Terrestrial kilometric radiation // J. Geophys. Res. 1974. V. 79. N 28. P. 4227.
3. Kurth W.S., Baumback M.M., Gurnett D.A. Direction finding measurements of auroral kilometric radiation // J. Geophys. Res. 1975. V. 80. P. 2764.
4. Wu C.S., Lee L.C. A theory of the terrestrial kilometric radiation // Astrophys. J. 1979. V. 230. P. 621.
5. Louarn P., Le Quéau D. Generation of the auroral kilo-metric radiation in plasma cavities-II. The cyclotron maser instability in small size sources // Planet. Space Sci. 1996. V. 44. № 3. P. 211.
6. Baumjohann W., Treumann R.A. Auroral kilometric radiation – The electron cyclotron maser paradigm // Front. Astron. Space Sci. 2022. V. 9.
7. Benson R.F., Calvert W. ISIS-1 observations of the source of AKR // Geophys. Res. Lett. 1979. V. 6. P. 479.
8. Calvert W. Ducted Auroral Kilometric Radiation // Geophys. Res. Letters. 1982. V. 9. N 1. P. 56–59.
9. Могилевский М.М., Романцова Т.В., Ханаи Я. и др. Об источнике аврорального километрового излучения // Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 86. Вып. 11. С. 819–821.
10. Могилевский М.М., Чугунин Д.В., Чернышов А.А. и др. Канализование аврорального километрового радиоизлучения при геомагнитных возмущениях // Письма в ЖЭТФ. 2022. Т. 115. № 10. С. 636–641.
11. Zhang S., Yin Q., Yang H., et al. Direct observation of L-X mode of auroral kilometric radiation in the lower latitude magnetosphere by the Arase satellite // Geophys. Res. Lett. 2024. V. 51. N 5.
12. Чернышов А.А., Чугунин Д.В., Могилевский М.М. Авроральное километровое радиоизлучение как средство диагностики свойств магнитосферы // Письма в ЖЭТФ. 2022. Т. 115. № 1. С. 28–34.
13. Колпак В.И., Могилевский М.М., Чугунин Д.В. и др. Перенос аврорального километрового радиоизлучения посредством каналов с пониженной плотностью на границе плазмосферы // Солнечно-земная физика. 2024. Т. 10. № 1. С. 21–30.
14. Застенкер Г.Н., Шафранкова Я., Немечек З. и др. Быстрые измерения параметров солнечного ветра с помощью прибора БМСВ // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 2. С. 88–99.
15. https://cdaweb.gsfc.nasa.gov/pub/data/wind/waves/wav_h1/
16. <https://cdaweb.gsfc.nasa.gov/cgi-bin/eval2.cgi>

PARADOXICAL DEPENDENCE OF AURORAL KILOMETRIC RADIATION ON SOLAR ACTIVITY

V. I. Kolpak^{a,b}, M. M. Mogilevsky^a, D. V. Chugunin^a, A. A. Chernyshov^a, I. L. Moiseenko^a, M. O. Riazantseva^a

Presented by Academician of the RAS L. M. Zeleny

^aSpace Research Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^bPushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere, and Radio Wave Propagation, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, Russia

The results of statistical processing of measurements of auroral kilometric radiation detected on the WIND satellite near the libration point L1 are presented. It is shown that the frequency of auroral kilometric radiation registration varies in antiphase with variations in solar activity. It is hypothesized that such a change in the detection frequency of auroral kilometer radio emissions is related to the characteristics of radio wave propagation in the inhomogeneous plasma of the solar wind.

Keywords: auroral kilometric radiation, solar wind, plasma inhomogeneities, propagation of radio waves

УДК 69:614.8

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ И КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ЗАЖИГАНИЯ И САМОВОСПЛАМЕНЕНИЯ

© 2024 г. А. А. Филиппов^{1,*}, Р. А. Филиппов-Кузнецов¹, академик РАН А. А. Берлин¹

Поступило 05.03.2024 г.

После доработки 05.03.2024 г.

Принято к публикации 11.06.2024 г.

Рассчитан профиль температуры самовоспламенения в плоском сосуде с разными температурами стен и показана невозможность предельного перехода к зажиганию. Самовоспламенение и зажигание – разные физические явления. Самовоспламенение идет в объеме горючего без участия внешнего источника тепла, а зажигание идет в узком слое горючего у накаленной поверхности при большом потоке тепла от нее. Точка перегиба, являющаяся точкой бифуркации, возникает в первоначальный момент зарождения очага зажигания в нестационарном профиле температуры. Физический смысл критических условий самовоспламенения и зажигания – нарушение баланса тепла в месте теплового взрыва. Критические условия являются поверхностями бифуркации, разделяющими зоны “жизни” и “смерти” горючих систем. В первой они существуют, а во вторую не могут попасть, выгорая на границе.

Ключевые слова: теория и критические условия зажигания и самовоспламенения, точки бифуркации и невозврата

DOI: 10.31857/S2686740024060053, EDN: HVZSPO

Тепловой взрыв активно изучался в XX в. [1–9], но к 1980 г. основные решения были изложены в монографиях [10, 11], где были даны условия самовоспламенения горючего в простых симметричных сосудах с одинаковыми температурами стен, а условие зажигания было получено как предельный случай самовоспламенения в плоском сосуде с разными температурами стенок. Но в работах [16, 17] было обнаружено новое явление – самовоспламенение полупространства горючего плоской накаленной стенкой, которое ранее, в статьях [3, 10, 11], принимали за зажигания. Также было получено новое условие зажигания [12–15], подтвержденное независимым экспериментом [18]. Поэтому возникли противоречия в понимании основ теории теплового взрыва. В этом сообщении покажем: “Что есть зажигание и чем оно отличается от самовоспламенения горючего?” Покажем также, что за исторически возникшими терминами “локальное поджигание”, “очаговое воспламенение” и “поджигание” не стоят самостоятельные физические явления, поэтому они не только излишние, но и затрудняют понимание основ теории теплового взрыва.

Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности

$$cQ \frac{dT}{dt} + \lambda \Delta T = -QkW(T), \quad (1)$$

где c , Q и λ – теплоемкость, плотность и теплопроводность горючего, Δ – оператор Лапласа, k , Q и $W(T)$ – предэкспонент, тепловой эффект и скорость химической реакции.

Решение уравнения (1) дает подробную информацию о распределении температуры в горючем. Но в работах [10, 11] показано, что существует предельный стационарный профиль температуры, при котором малое изменение любого параметра горючей системы может привести к взрыву. Поэтому будем изучать стационарное уравнение теплопроводности (1)

$$\lambda \Delta T = -QkW(T). \quad (2)$$

Решения уравнения (2) представляют собой множество профилей температуры в горючем, но для обнаружения предельного профиля необходимо найти в решениях особые точки (фокус, седло, точка перегиба и др.), появление которых приводит к тепловому взрыву в горючем. В работе [10] показано, что при тепловом взрыве скорость химической реакции зависит от температуры по закону Аррениуса $W(T) = k \exp(-E/RT)$. А при условиях $E > 20\,000$ ккал/моль, $RT_s/E \ll 1$ будет справедливо

¹ Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н. Н. Семенова Российской академии наук, Москва, Россия

* E-mail: 7987961@mail.ru

разложение Франк-Каменецкого:

$$\exp(-E/RT) \approx \exp(-E/RT_s) \exp(-E(T-T_s)/RT_s^2), \quad (3)$$

где E – энергия активации химической реакции, T_s – температура накаленной поверхности.

1. САМОВОСПЛАМЕНЕНИЕ В ПЛОСКОМ СОСУДЕ С РАЗНЫМИ ТЕМПЕРАТУРАМИ СТЕН

Решения уравнения (2) в аналитическом виде существуют только в телах правильной формы (бесконечный плоскопараллельный сосуд, цилиндр, сфера) [2, 4, 10, 11], при условии (3), отсутствии выгорания химических реагентов, кондуктивном способе передачи тепла и при постоянстве k и λ в горючем. Полагали симметричность профиля температуры относительно центра сосуда ($dT/dr = 0$), от которого отсчитывали координату по нормали к плоскости или к оси симметрии. Также считали постоянной температуру внутренней стенки сосуда, что возможно при ее бесконечной теплопроводности и теплопроводности. Далее будем рассматривать уравнение (2) в плоском сосуде, где сделаем замену переменных:

$$\Theta = (T - T_s)E/RT_s^2, \quad \xi = r/\ell, \quad (4)$$

где

$$\ell = \left[\exp\left(\frac{E}{RT_s}\right) 2\lambda RT_s^2/kQE \right]^{1/2}$$

есть характерный размер.

В новых переменных (4) уравнение (2) и граничные условия принимают вид [10, 11]

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} = -2 \exp \Theta, \quad \Theta \Big|_{\xi=\xi_s} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0. \quad (5)$$

В работе [4] изучали самовоспламенение между двумя параллельными плоскостями одной температуры. Разложив температуру около максимального значения в центре сосуда и введя переменную $z = \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}$, уравнение (5) примет вид

$$z \frac{\partial z}{\partial \Theta} = -2 \exp \Theta. \quad (6)$$

Так как при $\xi = 0, \Theta = 0$ и $\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0$, из уравнения (6) получим

$$\Theta = -2 \ln \operatorname{ch} \xi. \quad (7)$$

Поскольку решение (7) не содержит температуры стенок сосуда и их расположение, а только значение максимальной температуры, то решение описывает самовоспламенение в сосуде любой ширины L и с разными температурами стенок T_1 и T_2 . Следуя логике работ [10, 11], заметим, что существуют два профиля, где максимум температуры лежит внутри сосуда и вне его, но самовоспламенение возможно только в первом случае. Обозначим расстояние от

максимума температуры к стенкам сосуда (ξ_1 и ξ_2) и получим систему уравнений:

$$\xi_1 + \xi_2 = L/\ell, \quad \Theta_1 = -2 \ln \operatorname{ch} \xi_1, \quad \Theta_2 = -2 \ln \operatorname{ch} \xi_2. \quad (8)$$

Параметры ξ_1 и ξ_2 можно найти численными расчетами, но при $L \ll \ell$, $\Theta_1 \ll 1$ и $\Theta_2 \ll 1$ их можно представить в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \xi_1 &\approx \left[(T_s - T_1) E/RT_s^2 \right]^{0.5}, \\ \xi_2 &\approx L/\ell - \left[(T_s - T_1) E/RT_s^2 \right]^{0.5}. \end{aligned} \quad (9)$$

Откуда, используя уравнения (8), найдем ξ_1 и ξ_2 , а также максимум температуры в сосуде и предвзрывной разогрев [10, 11, 16] относительно температур T_1 и T_2 .

Из уравнения (7) получим $\partial \Theta / \partial \xi = -2 \operatorname{th} \xi$. Если одна стенка сосуда расположена в месте максимальной температуры, а вторая (холодная) стенка находится на расстоянии L от нее, то при самовоспламенении профиль температуры имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= 0, \quad \xi_1 = L/\ell, \\ \Theta_1 &= -2 \ln \operatorname{ch} \xi_1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\infty} = -2 \operatorname{th} \xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Если постепенно перемещать вторую стену в холодную зону (в бесконечность) от максимальной температуры, то выражение (10) будет асимптотически стремиться к условию

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\infty} = -2. \quad (11)$$

При перемещении стенки в холодную зону в профиле температуры не возникает особых точек, поэтому условие (11) описывает процесс самовоспламенения, а не зажигания, как думали в работах [3, 4, 10, 11]. Конечно, ситуация похожа на зажигание – тепловой взрыв идет у накаленной поверхности, но в объеме горючего и при нулевом потоке тепла к нему. Легко заметить: условия (11) являются предельным случаем самовоспламенения полупространства горючего плоской накаленной стенкой. В неограниченном теле не может существовать любой, отличный от нуля, стационарный поток тепла, поэтому условие (11) справедливо только в квазистационарном случае, при характерном времени прогрева горючего много меньше характерного времени химической реакции в нем.

2. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ И КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ЗАЖИГАНИЯ НАКАЛЕННЫМИ ТЕЛАМИ

Критические условия самовоспламенения хорошо известны и изучены, а условие “зажигания” находили как предельный случай самовоспламенения в плоском сосуде с разными температурами стенок [5, 6], но, как показано выше и в работах [15–17],

это решение относится не к зажиганию, а к самовоспламенению бесконечной полуплоскости горючего накаленной поверхностью. Поэтому появление верного критерия зажигания было неизбежно, что и произошло много лет позднее в работах [12–15].

Рассмотрим уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = -Qk \exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right). \quad (12)$$

В работе [12], полагая постоянство градиента температуры в зоне химической реакции, впервые был вычислен критерий зажигания (29), но обоснованность сделанных допущений вызывала сомнения. Позднее в работе [13], используя идеи теории катастроф [19], А. А. Филиппов предположил, что точка перегиба $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0\right)$ в уравнении (12) является точкой бифуркации, и получил новое условие зажигания прямо из уравнения (12):

$$\Lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -rQk \exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right). \quad (13)$$

Покажем физический смысл точки перегиба. До зажигания ситуация около цилиндра стационарна, но при зажигании тепловыделение химической реакции меняет профиль температуры с выпуклого на вогнутый — возникает точка перегиба $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0\right)$ [13]. То есть в момент зажигания теплоотвод из зоны химической реакции уменьшается, а выделение тепла в ней, наоборот, растет экспоненциально:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{Qk}{c\varphi}\right) \exp\left[\frac{E(T - T_s)}{RT_s}\right]$$

в зоне химической реакции идет накопление тепла [10], а стационарный профиль температуры неминуемо теряет устойчивость. Таким образом, точка перегиба является точкой неустойчивости и бифуркации, а условие (13) является критическим условием зажигания. Точка перегиба не была найдена при изучении самовоспламенения в работах [2, 10, 11], т.е. она не возникает в стационарном профиле температуры, а появляется в первоначальный момент зарождения очага зажигания в нестационарном профиле температуры. На основании результатов работы [15] было обнаружено: в эксперименте [18] зажигание происходило при слабом тепловыделении химической реакции (около 2 Вт/см³) в узком слое (около 0.005 см) у накаленной поверхности цилиндра, что соответствует реальности.

Рассмотрим тепловыделение химической реакции (H) около поверхности цилиндра в зоне

шириной X :

$$H = -\lambda 2\pi(r_s + X) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_s+X} + \lambda 2\pi r_s \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_s} = 2\pi r_s X Qk \exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right). \quad (14)$$

Так как в момент зажигания профиль температуры в зоне реакции проходит точку перегиба, становясь практически прямым, то производные температуры на разных границах зоны реакции приблизительно равны между собой, поэтому выражение (14) примет вид

$$H = -\lambda 2\pi X \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_s} = 2\pi r_s X Qk \exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right). \quad (15)$$

Уравнение энергетического баланса (14) всегда верно, а условие зажигания (13) вытекает из (15) при возникновении точки перегиба в профиле температуры, что не может быть волей случая — закон сохранения энергии “не играет в кости”. То есть условие (13) реально существует и всегда вытекает из закона сохранения энергии, если в горючем у поверхности накаленного цилиндра возникнет точка перегиба.

Для полного понимания явления зажигания рассмотрим решение стационарного уравнения теплопроводности (12) при наличии теплового потока у накаленной поверхности в момент зажигания, что впервые было сделано в работах [12, 15]:

$$T \Big|_{r=r_s} = T, \quad r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_s} = -q, \quad (16)$$

где r_s — радиус цилиндра.

Сделаем замену переменных (4), в которых система уравнений (12), (16) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = -2 \exp \Theta, \quad (17)$$

$$\Theta \Big|_{\xi=\xi_s} = 0, \quad -\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi_s} = M. \quad (18)$$

Сделаем замену переменных (11):

$$\nu = \Theta + 2 \ln \xi / \xi_s, \quad \eta = \xi \ln \xi / \xi_s. \quad (19)$$

В новых переменных, используя правило дифференцирования $\frac{\partial \nu}{\partial \eta} = \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta}$, система уравнений (17), (18) примет вид

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2} + 2 \exp \nu = 0, \quad (20)$$

$$\nu \Big|_{\eta=0} = 0, \quad -\frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} = M + 2 / \xi_s = P. \quad (21)$$

Решение уравнения (20), согласно [11], имеет вид

$$\exp \nu = \operatorname{ch}^2 C / \operatorname{ch}^2 (C - \eta \operatorname{ch} C), \quad (22)$$

где C – константа интегрирования, ch – гиперболический косинус.

Прологарифмируем, а затем продифференцируем выражение (22):

$$\nu = 2 \ln \operatorname{ch} C - 2 \ln \operatorname{ch} (C - \eta \operatorname{ch} C), \quad (23)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \eta} = 2 \operatorname{ch} C \operatorname{th} (C - \eta \operatorname{ch} C). \quad (24)$$

Используя выражение $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$, (22), а также учитывая выражение (21) при $\eta = 0$, найдем константу интегрирования:

$$C = \operatorname{arsh}(P/2). \quad (25)$$

Используя выражение (24) и формулу $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, выражение (25) для теплоотвода в холодную зону ($\eta = \infty$) примет вид

$$-\frac{\partial \nu}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\infty} = P \left(1 + 4/P^2\right)^{0.5}. \quad (26)$$

В работе [15] показано, что выражение (26) в предельных случаях отвечает разным явлениям: при $P \gg 1$ – зажиганию, а при $P \ll 1$ – самовоспламенению полупространства горючего накаленным цилиндром.

Средний теплоотвод от цилиндра в потоке газа в размерном виде равен [20, 21]:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\alpha (T_s - T_o) / \lambda = -\operatorname{Nu} (T_s - T_o) / d, \quad (27)$$

где $\alpha = \lambda \operatorname{Nu} / d$ – средний коэффициент теплопередачи, d – диаметр цилиндра; Nu – число Нуссельта, выводимое из эмпирической кривой от значения числа Рейнольдса ($\operatorname{Re} = \nu d / \varepsilon$), где ε – динамическая вязкость при температуре $T_f = (T_s + T_o) / 2$.

Локальный коэффициент теплопередачи $\alpha_s(\varphi) = b(\varphi)\alpha$ в конкретной точке поверхности цилиндра зависит от угла φ , отсчитываемого от лобовой точки натекания потока. В эксперименте [18] $\alpha_s(\varphi)$ достигает минимума в точке отрыва потока около $\varphi \approx 100^\circ$ [20, 21], где $b(\varphi) \approx 0.5$ (на фотографиях видно, что очаг зажигания возникает именно в этом месте). То есть теплоотвод от цилиндра в газовую fazu в месте зажигания определяется выражением

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -b(\varphi) \operatorname{Nu} (T_s - T_o) / d \approx \operatorname{Nu} (T_s - T_o) / 2d. \quad (28)$$

Таким образом, условие зажигания (13) при обтекании цилиндра поперечным потоком горючего газа приняло вид

$$2b(\varphi) \frac{\lambda \operatorname{Nu}}{d^2} (T_s - T_o) = Qk \exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right). \quad (29)$$

В работе [15], используя сложное условие (29), в логарифмических координатах было обсчитано 37 независимых экспериментальных измерений С. Кумагай [18], при большом изменении измеряемых параметров, которые точно легли на прямую линию (ошибка менее 2%), что убедительно доказало справедливость теории [12–15]. Это позволило точно высчитать реальные значения: энергии активации, предэкспонента, ширины зоны химической реакции () и характерного размера ('). В работе также было обнаружено: при больших потоках тепла (P) от накаленного тела к горючему идет зажигание, но по мере уменьшения P характер теплового взрыва меняется к объемному самовоспламенению, при $P \ll 1$ (11). Дело в том, что с уменьшением P расстет ширина зоны химической реакции по отношению к радиусу цилиндра, а точность условия зажигания (29) падает.

Зажигание в горючем может произойти под воздействием электромагнитного излучения, ударной волны и в горячем потоке инертного газа. Условие (29) можно использовать при зажигании горючего цилиндра в поперечном потоке горячего инертного газа при граничных условиях, поменявших знак, но в квазистационарном режиме, при времени прогрева горючего многое больше характерного времени химической реакции.

Самовоспламенение и зажигание – разные физические явления. Самовоспламенение идет в объеме горючего без участия внешнего источника тепла, а зажигание идет в узком слое горючего у накаленной поверхности при большом потоке тепла от нее в этот слой.

Физический смысл условий самовоспламенения и зажигания связан с нарушением баланса тепла в объеме и в узком слое горючего, соответственно, что приводит к тепловому взрыву. Критические условия самовоспламенения и зажигания являются многомерными поверхностями бифуркации, разделяющими зоны “жизни” и “смерти” горючих систем – в первой они существуют, а во второй не могут по-пасть, выгорая на границе. Изменение параметров горючей системы или использование антипиренов сдвигает границу бифуркации. Тепловой взрыв горючего при большом потоке тепла от внешнего источника к горючему идет как выраженный процесс зажигания. При уменьшении потока тепла характер теплового взрыва медленно меняется от зажигания горючего в тонком слое к его объемному самовоспламенению, а при нулевом потоке тепла имеем выраженное самовоспламенение. Исторически сложившиеся определения – “локальное поджигание”, “поджигание” и “очаговое воспламенение” излишни, так как за ними не стоят самостоятельные физические явления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Семенов Н.Н. Цепные реакции. Л.: ОНТИ, 1934. 110 с.
- Франк–Каменецкий Д.А. // ДАН СССР. 1938. Т. 18. С. 411.
- Зельдович Я.Б. Теория зажигания накаленной поверхностью // ЖЭТФ. 1939. Т. 9. № 12. С. 1530–1534.
- Баренблатт Г.И. Параграф 15 в статье И.М. Гельфанда. Задачи теории квазилинейных уравнений // УМН. 1959. Т. 154. № 4. С. 787–790.
- Соколик А.С. Самовоспламенение, пламя и детонация в газах. М.: Изд-во АН СССР. 1960.
- Зельдович Я.Б. К теории зажигания. Доклады АН СССР. 1963, Т. 150, № 2. С. 283.
- Мержанов А.Г., Аверсон А.Е. Современное состояние тепловой теории зажигания. Препринт. Черноголовка. 1970.
- Аверсон А.Е. Теория зажигания. Препринт. Минск. 1977.
- Вилюнов В.И. Теория зажигания конденсированных веществ. Новосибирск: Наука. 1984.
- Франк–Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. 2-е изд. М.: Наука, 1967.
- Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
- Филиппов А.А. К вопросу поджигания полимерных материалов накаленными телами. Межвузовский сборник научных трудов по химии и технологии элементоорганических полупродуктов и полимеров. Волгоград, 1984.
- Philipov A.A., Khalturinskiy N.A. To the theory of ignition by a hot surface: critical conditions for occurrence of explosive and avalanche-like processes / Zeldovic memorial. 2015. V. 2.
- Филиппов А.А., Берлин А.А. К теории зажигания накаленной поверхностью // Горение и взрыв. 2021. Т. 14. № 2.
- Филиппов А.А., Берлин А.А. Математическая теория зажигания накаленной поверхностью // Доклады РАН. Физика. Технические науки. 2022. Т. 503. С. 24–30.
- Филиппов А.А., Берлин А.А. Критические условия самовоспламенения в точках бифуркации. Доклады РАН. Физика. Технические науки. 2023. Т. 510. С. 34–37.
- Филиппов А.А. Критика “Теории зажигания накаленной поверхностью” Я.Б. Зельдовича. Самовоспламенение бесконечного горючего накаленным телом // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 512. С. 40–43.
- Кумагаи С. Горение. М.: ИЛ, 1979.
- Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
- Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. М.: ИЛ, 1958.

THE PHYSICAL MEANING AND CRITICAL CONDITIONS OF IGNITION AND SELF-IGNITION

A. A. Filippov^a, R. A. Filippov-Kuznetsov^a, Academician of the RAS A. A. Berlin^a

^a*N. N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

The profile of the self-ignition temperature in a flat vessel with different wall temperatures is calculated and the impossibility of a limiting transition to ignition is shown. Self-ignition and ignition are different physical phenomena. Self-ignition occurs in the volume of fuel without the participation of an external heat source, since ignition occurs in a narrow layer of fuel near an incandescent surface with a large heat flow from it. The inflection point, which is the bifurcation point, occurs at the initial moment of ignition of the ignition source in a non-stationary temperature profile. The physical meaning of the critical conditions of self-ignition and ignition is a violation of the heat balance at the site of a thermal explosion. Critical conditions are bifurcation surfaces separating the zones of “life” and “death” of combustible systems. They exist in the first, but they cannot get into the second, burning out at the border.

Keywords: theory and critical conditions of ignition and self-ignition, bifurcation and non-return points

УДК 62-50

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА С ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ

© 2024 г. И. М. Ананьевский^{1,*}

Представлено академиком РАН Ф. Л. Черноуско 02.07.2024 г.

Поступило 03.07.2024 г.

После доработки 03.07.2024 г.

Принято к публикации 11.08.2024 г.

Рассматривается линейная система четвертого порядка, которая описывает динамику линеаризованного обратного маятника, управляемого с помощью активного динамического гасителя. Управляющей переменной служит ограниченная по модулю сила взаимодействия маятника и подвижной массы гасителя. С использованием принципа максимума Понтрягина решена задача синтеза оптимального управления, приводящего систему в состояние покоя за минимальное время.

Ключевые слова: линейная управляемая система, обратный маятник, динамический гаситель, оптимальное быстродействие, принцип максимума

DOI: 10.31857/S2686740024060065, EDN: HVZKXZ

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о стабилизации в вертикальном положении жесткого стержня с закрепленным на верхнем конце грузом (перевернутый маятник) с помощью активного динамического гасителя, подвижная масса которого поступательно перемещается вдоль горизонтальной прямой. Управляющей величиной служит сила взаимодействия груза и массы гасителя. Отклонения стержня от вертикального состояния предполагаются малыми, поэтому динамика системы изучается в линейном приближении. Требуется за минимальное время привести стержень в вертикальное состояние и остановить массу гасителя в заданном положении.

Перевернутый маятник представляет собой классический пример неустойчивой механической системы. Задачи управления движением неустойчивых объектов изучались в [1–3], где, в частности, даны решения некоторых задач оптимального быстродействия управления. Задача оптимального быстродействия, аналогичная рассматриваемой ниже, изучалась в [4] для обычного линейного маятника. Методы управления, обеспечивающие остановку колебаний маятника с помощью активного динамического гасителя без минимизации времени движения, предложены в [5, 6]. Ниже развит подход, основанный на принципе максимума Понтря-

гина [7–9] и методике, предложенной А. А. Фельдбаумом [9], этот подход позволяет для некоторого класса механических систем сводить задачу оптимального управления к аналогичной задаче для системы меньшей размерности.

Эквивалентной моделью рассматриваемой конструкции может служить следующая двухмассовая механическая система. Две точечных массы m_1 и m_2 перемещаются вдоль горизонтальной прямой. Первая масса соединена с неподвижным основанием пружиной отрицательной жесткости $k < 0$. Вторая масса соединена с первой посредством привода, который генерирует силу u_0 . Уравнения движения такой системы имеют вид

$$m_1 \ddot{\xi}_1 + k \xi_1 = -u_0, \quad m_2 \ddot{\xi}_2 = u_0, \quad (1)$$

где ξ_i — координата i -й массы на прямой, $i = 1, 2$, $k < 0$. На управляющую силу наложено ограничение

$$|u_0| \leq U, \quad U > 0. \quad (2)$$

В безразмерных переменных уравнения (1) могут быть записаны в форме

$$\dot{x} = -x - u, \quad \dot{y} = -y - u, \quad \dot{v} = u, \quad \dot{z} = v. \quad (3)$$

Ограничение (2) примет вид

$$|u| \leq 1. \quad (4)$$

С помощью критерия Калмана [10] нетрудно убедиться, что система (3) вполне управляема. Исходная задача теперь формулируется следующим образом.

¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия
* E-mail: anan@ipmnet.ru

Задача 1. Найти управление в форме обратной связи, т.е. как функцию $u(x, y, v, z)$, которое удовлетворяет условию (4) и обеспечивает приведение системы (3) в начало координат за минимальное время.

Согласно принципу максимума для любого начального состояния оптимальное управление представляет собой кусочно-постоянную функцию времени, принимающую значения 1 и -1. В дальнейшем будем называть траектории движения системы с управлением $u = 1$ положительными, а с управлением $u = -1$ – отрицательными. Преобразование центральной симметрии относительно начала координат, что соответствует одновременной смене знака u всех фазовых переменных x, y, v, z и управления u , переводит положительные траектории в отрицательные и наоборот.

Собственные числа системы (3) равны $-1, 1, 0, 0$. Известно [7], что для системы порядка n , все собственные числа которой вещественны, оптимальное по быстродействию управление имеет не более $n - 1$ переключений. Следовательно, в сформулированной задаче оптимальное управление имеет не более 3 переключений. Предложенное ниже решение состоит в указании областей фазового пространства, где управление принимает значение +1, где -1, а также в описании множеств, на которых происходит переключение управления.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОДСИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Найдем сначала оптимальное по быстродействию управление $u(x, y)$, удовлетворяющее условию (4) и приводящее в начало координат систему второго порядка

$$\dot{x} = -x - u, \quad \dot{y} = y - u, \quad (5)$$

содержащую только два первых уравнения (3). Данная система неустойчива по переменной y , так как соответствующее y собственное число равно 1. Следовательно, при ограничении (4) множество начальных состояний, из которых возможно приведение системы в начало координат, представляет собой полосу $G = \{(x, y) \in R^2: |y| < 1\}$.

Собственные числа системы (5) вещественны, поэтому оптимальное управление имеет одно переключение, принимает значения 1 и -1, а приведение системы в начало координат состоит из двух этапов: на первом этапе $u = -1$, а на втором $u = 1$ (первый сценарий), либо наоборот, сначала $u = 1$, затем $u = -1$ (второй сценарий). Преобразование центральной симметрии относительно начала координат переводит один сценарий движения в другой.

Решения системы (3) имеют вид

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + 1, & y(t) &= c_2 e^t - 1, & \text{если } u = -1; \\ x(t) &= c_1 e^{-t} - 1, & y(t) &= c_2 e^t + 1, & \text{если } u = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Отрицательные траектории, вдоль которых система (5) приходит в начало координат, лежат на кривой Γ_-^1 , заданной уравнением

$$x = \frac{y}{1 + y}, \quad y < 0,$$

а положительные траектории, идущие в начало координат, лежат на кривой Γ_+^1 , заданной уравнением

$$x = \frac{y}{1 - y}, \quad y > 0.$$

Вместе эти кривые составляют кривую $\Gamma^1 = \Gamma_-^1 \cup \Gamma_+^1$, на которой происходит переключение управления.

Рассмотрим первый сценарий оптимального движения, при котором сначала система (5) с управлением $u = -1$ приходит на кривую Γ_+^1 , а затем вдоль этой кривой под действием управления $u = 1$ – в начало координат. Множество начальных состояний (x_0, y_0) для такого движения составляет область G_- , заключенную между прямой $y = -1$ и кривой Γ^1 .

Пусть в момент времени $t_3 > 0$ отрицательное решение системы (5) с начальным состоянием $(x_0, y_0) \in G_-$ попадает на кривую Γ_+^1 в точке $x_1 = x(t_3)$, $y_1 = y(t_3)$. Зададим в области G_- функции C_- и D_- :

$$\begin{aligned} C_-(x, y) &= (x - 1)(y + 1), \\ D_-(x, y) &= (C_-(x, y) + 1)(C_-(x, y) + 9). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) следует, что рассматриваемое решение проходит по гиперболе $(x - 1)(y + 1) = C_-(x_0, y_0)$, поэтому

$$x_1 = \frac{y_1}{1 - y_1}, \quad (x_1 - 1)(y_1 + 1) = C_-(x_0, y_0).$$

Отсюда вытекает, что

$$y_1 = \frac{-(C_-(x_0, y_0) + 1) + \sqrt{D_-(x_0, y_0)}}{4} > 0,$$

а время движения из точки (x_0, y_0) до кривой переключений Γ^1 как функция переменных x_0, y_0 задается выражением

$$t_3(x_0, y_0) = \ln \frac{3 - C_-(x_0, y_0) + \sqrt{D_-(x_0, y_0)}}{4(1 + y_0)}. \quad (8)$$

В момент прихода траектории на кривую Γ^1 происходит переключение управления на $u = 1$. Время движения вдоль кривой Γ^1 до начала координат как функция переменных x_0, y_0 вычисляется так:

$$t_4(x_0, y_0) = \ln \frac{C_-(x_0, y_0) + 5 + \sqrt{D_-(x_0, y_0)}}{4}. \quad (9)$$

Если же начальное состояние (x_0, y_0) лежит в области G_+ , заключенной между прямой $y = 1$ и кривой Γ^1 , то применяется второй сценарий. В этом случае время движения t_3 до кривой Γ^1 и время движения t_4 вдоль этой кривой до начала координат

задаются выражениями

$$t_3 = \ln \frac{3 - C_+(x_0, y_0) + \sqrt{D_+(x_0, y_0)}}{4(1 - y_0)},$$

$$t_4 = \ln \frac{C_+(x_0, y_0) + 5 + \sqrt{D_+(x_0, y_0)}}{4}.$$

Здесь

$$C_+(x, y) = (x + 1)(y - 1),$$

$$D_+(x, y) = (C_+(x, y) + 1)(C_+(x, y) + 9),$$

$$(x, y) \in G_+.$$

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОДСИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим теперь задачу быстродействия для системы, состоящей из первых трех уравнений (3):

$$\dot{x} = -x - u, \quad \dot{y} = y - u, \quad \dot{v} = u. \quad (10)$$

Оптимальное управление для данной системы имеет не более двух переключений и состоит из трех этапов: на первом этапе $u = 1$, на втором $u = -1$, на третьем $u = 1$ (первый сценарий), или сначала $u = -1$, затем $u = 1$, а на заключительном этапе снова $u = -1$ (второй сценарий).

Решение системы (10) имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + 1, & y(t) &= c_2 e^t - 1, \\ v(t) &= -t + c_3, & \text{если } u = -1; \\ x(t) &= c_1 e^{-t} - 1, & y(t) &= c_2 e^t + 1, \\ v(t) &= t + c_3, & \text{если } u = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку первые два уравнения у систем (3) и (10) совпадают, то совпадают и выражения для переменных $x(t)$, $y(t)$ в (6) и (11), т.е. траектории движения системы (3) представляют собой проекции на плоскость $v = 0$ траекторий системы (10).

Опишем оптимальное движение системы при первом сценарии управления. На третьем, заключительном, этапе система (10) приходит в начало координат под действием управления $u = 1$ вдоль кривой Γ_+^2 , которая задается уравнениями

$$x = \frac{y}{1 - y}, \quad v = \ln(1 - y), \quad y \geq 0. \quad (12)$$

Кривая Γ_+^2 представляет собой проекцию кривой Γ_+^1 на плоскость $v = 0$.

На втором этапе система движется под действием управления $u = -1$ вдоль поверхности S_-^1 до кривой Γ_+^2 . Эта поверхность образована семейством полутраекторий системы (10) с управлением $u = -1$, оканчивающихся на кривой Γ_+^2 , и задается в параметрической форме соотношениями

$$\begin{aligned} x(t_3, t_4) &= e^{t_3+t_4} - 2e^{t_3} + 1, \\ y(t_3, t_4) &= -e^{-(t_3+t_4)} + 2e^{-t_3} - 1, \\ v(t_3, t_4) &= t_3 - t_4, \quad t_3 > 0, \quad t_4 \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь t_3 – время движения на втором этапе, т.е. из точки $(x(t_3, t_4), y(t_3, t_4), v(t_3, t_4)) \in S_-^1$ до кривой Γ_+^2 , а t_4 – время движения вдоль кривой Γ_+^2 до нуля на третьем этапе. Эти времена равны временам движения системы (5) на первом и втором этапах соответственно и вычисляются по формулам (8) и (9), в которых $x_0 = x(t_3, t_4)$, $y_0 = y(t_3, t_4)$.

В декартовых координатах поверхность S_-^1 представляет собой график функции

$$f_-(x, y) = \ln \frac{3 - C_- + \sqrt{D_-}}{(C_- + 5 + \sqrt{D_-})(y + 1)}, \quad (x, y) \in G_- \cup \Gamma_-^2, \quad (14)$$

величины $C_-(x, y)$ и $D_-(x, y)$ задаются выражениями (7).

При втором сценарии управления на третьем этапе, где $u = -1$, траектории системы (10) приходят в начало координат вдоль кривой Γ_-^2 , которая симметрична кривой Γ_+^2 относительно нуля и задается уравнением

$$x = \frac{y}{1 + y}, \quad z = -\ln(1 + y), \quad y \leq 0.$$

С учетом симметрии поверхность S_+^1 , вдоль которой система (10) при $u = 1$ движется на втором этапе при втором сценарии управления, может быть описана как график функции

$$f_+(x, y) = -f_-(-x, -y), \quad (x, y) \in G_+ \cup \Gamma_+^2.$$

Поверхности S_-^1 и S_+^1 “склеиваются” на кривой $\Gamma^2 = \Gamma_+^2 \cup \Gamma_-^2$ и образуют поверхность $S^1 = S_-^1 \cup S_+^1$, которая представляет собой график непрерывной функции f , заданной на множестве G соотношениями:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_-(x, y), & \text{если } (x, y) \in G_- \cup \gamma_-; \\ f_+(x, y), & \text{если } (x, y) \in G_+ \cup \gamma_+. \end{cases}$$

Поверхность S^1 в декартовых координатах описывается уравнением

$$v = f(x, y) \quad (15)$$

и разбивает область допустимых начальных состояний

$$Q = G \times R^1 = \{(x, y, v): -\infty < x, v < \infty, |y| < 1\}$$

на две подобласти, одна из которых лежит выше S^1 , обозначим ее через Q_+ , а другая – ниже, обозначим ее через Q_- .

В [11] установлено, что положительные траектории пересекают поверхность S^1 сверху вниз, т.е. из области Q_+ в область Q_- , а отрицательные – снизу вверх. Там же сформулирован следующий алгоритм оптимального по быстродействию приведения системы (10) в начало координат: если $v > f(x, y)$, т.е. начальное состояние (x, y, v) лежит выше поверхности переключений S^1 , то на первом этапе следует

выбирать $u = 1$; если $v < f(x, y)$, т.е. начальное состояние лежит ниже поверхности S^1 , то на первом этапе должно быть $u = -1$. В случае, если начальное состояние лежит на поверхности S^1 , т.е. $v = f(x, y)$, первый этап отсутствует. Когда траектория системы попадет на поверхность S^1 , управление меняет знак и движение продолжается по этой поверхности до достижения траекторией кривой переключений Γ^2 . Здесь управление вновь меняет знак, и система приходит в начало координат вдоль кривой Γ^2 .

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

Оптимальное движение для системы (3) состоит из четырех этапов. Рассмотрим подробнее один из двух возможных сценариев управления, а именно тот, при котором на первом и третьем этапах $u = -1$, а на втором и четвертом $u = 1$. Здесь, как и выше, преобразование центральной симметрии относительно начала координат переводит один сценарий управления в другой. Через t_i обозначим время движения на i -м этапе, $i = 2, 3, 4$.

Поскольку первые три уравнения систем (3) и (10) совпадают, то текущие координаты x, y, v решений обеих систем задаются выражениями (11). Следовательно, траектории движения системы (10) представляют собой проекции на подпространство $z = 0$ траекторий системы (3). Поведение координаты z решения системы (3) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} z(t) &= c_4 z + c_3 v t - t^2/2, & \text{если } u = -1; \\ z(t) &= c_4 z + c_3 v t + t^2/2, & \text{если } u = 1. \end{aligned}$$

Описание оптимального движения начнем с последнего, четвертого, этапа. На этом этапе система (10) приходит в начало координат по положительной траектории, которая лежит на кривой Γ_+^3 , задаваемой уравнениями

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad v = \ln(1-y), \quad z = \ln^2(1-y), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (16)$$

Сравнивая (12) и (16), можем заключить, что кривая Γ_+^2 представляет собой проекцию кривой Γ_+^3 на подпространство $z = 0$.

Оптимальное управление на четвертом этапе для полной системы совпадает с управлением на последнем этапе для рассмотренных выше подсистем второго и третьего порядка, оптимальная траектория проецируется на соответствующие траектории этих подсистем, а время движения всех систем на последнем этапе одинаково и равно t_4 .

На третьем этапе система движется по отрицательной траектории вдоль двумерной поверхности S^2 до кривой Γ_+^3 в течение времени t_3 . Эта поверхность образована семейством полутраекторий системы (3) с управлением $u = -1$, оканчивающихся

на кривой Γ_+^2 , и задается в параметрической форме так:

$$\begin{aligned} x(t_3, t_4) &= e^{t_3+t_4} - 2e^{t_3} + 1, \\ x(t_3, t_4) &= -e^{-(t_3+t_4)} + 2e^{-t_3} - 1, \\ v(t_3, t_4) &= t_3 - t_4, \\ z(t_3, t_4) &= \frac{t_4^2}{2} + t_4 t_3 - \frac{t_3^2}{2}, \quad t_4 > 0, \quad t_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь первые три соотношения совпадают с соотношениями (13), поэтому поверхность S_-^1 представляет собой проекцию поверхности S_-^2 на подпространство $z = 0$. Кроме того, оптимальная траектория полной системы на этом предпоследнем этапе проецируется на соответствующие оптимальные траектории на предпоследних этапах рассмотренных выше подсистем, а управления и времена движения совпадают.

Для описания поверхности S_-^2 в декартовых координатах необходимо к уравнению (15) добавить выражение для координаты z , подставив в последнее соотношение (17) следующие значения величин t_3 и t_4 :

$$\begin{aligned} t_3 &= \ln \frac{3 - C_-(x, y) + \sqrt{D_-(x, y)}}{4(y+1)}, \\ t_4 &= \ln \frac{C_-(x, y) + 5 + \sqrt{D_-(x, y)}}{4}. \end{aligned}$$

На втором этапе оптимальное движение происходит по положительной траектории вдоль трехмерного многообразия M_+ до поверхности S_-^2 в течении времени t_2 . Многообразие M_+ образовано семейством полутраекторий системы (3) с управлением $u = 1$, оканчивающихся на поверхности S_-^2 , и задается в параметрической форме соотношениями:

$$\begin{aligned} x(t_2, t_3, t_4) &= e^{t_2+t_3+t_4} - 2e^{t_2+t_3} + 2e^{t_2} - 1, \\ y(t_2, t_3, t_4) &= -e^{-(t_2+t_3+t_4)} + 2e^{-(t_2+t_3)} - 2e^{-t_2} + 1, \\ v(t_2, t_3, t_4) &= -t_4 + t_3 - t_2, \\ z(t_2, t_3, t_4) &= \frac{(t_4+t_2)^2}{2} - \frac{t_3^2}{2} + (t_4-t_2)t_3, \\ t_4 > 0, \quad t_2, t_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пусть $(x, y, v, z) \in M_+$ — точка, в которой траектория впервые попадает на многообразие M_+ , проходит первое переключение управления и начинается второй этап. Время движения на втором этапе t_2 как функция переменных x, y, v равняется единственному положительному корню уравнения

$$v + t_2 = f_-((x+1)e^{-t_2} - 1, (y-1)e^{t_2} + 1), \quad (18)$$

функция f_- определена в (14). Времена движения на третьем и четвертом этапах t_3 и t_4 как функции

переменных x, y, v вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} t_3 &= \ln \frac{3 - P(x, y) + \sqrt{Q(x, y)}}{4((y-1)e^{t_2} + 2)}, \\ t_4 &= \ln \frac{P(x, y) + 5 + \sqrt{Q(x, y)}}{4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P(x, y) &= C_-((x+1)e^{-t_2} - 1, (y-1)e^{t_2} + 1), \\ Q(x, y) &= (P(x, y) + 1)(P(x, y) + 9). \end{aligned}$$

Многообразие M_+ описывается уравнением $z = F_+(x, y, v)$ и представляет собой график функции $F_+(x, y, v)$, заданной в области Q_+ с помощью выражения

$$F_+(x, y, v) = \frac{(t_4 + t_2)^2}{2} - \frac{t_3^2}{2} + (t_4 - t_2)t_3,$$

в которое нужно подставить значения t_2, t_3 и t_4 , вычисленные с помощью соотношений (18), (19).

При втором сценарии переключение управления происходит на множествах M_- , S_+^2 и Γ_-^3 , которые симметричны относительно начала координат множествам M_+ , S_-^2 и Γ_+^3 соответственно. Многообразие M_- , вдоль которого система (3) при $u = -1$ движется на втором этапе при втором сценарии управления, может быть описано как график функции

$$F_-(x, y, v) = -F_+(-x, -y, -v), \quad (x, y, v) \in Q_-.$$

Многообразия M_- и M_+ “склеиваются” на поверхности $S^2 = S_+^2 \cup S_-^2$ и образуют многообразие $M = M_- \cup M_+$, которое представляет собой график непрерывной функции F , заданной на множестве Q формулой

$$F(x, y, v) = \begin{cases} F_-(x, y, v), & \text{если } (x, y, v) \in Q_- \cup S_-; \\ F_+(x, y, v), & \text{если } (x, y, v) \in Q_+ \cup S_+. \end{cases}$$

Многообразие M разбивает область допустимых начальных состояний

$$H = \{(x, y, v, z) : -\infty < x, v, z < \infty, |y| < 1\}$$

на две подобласти, одна из которых, обозначим ее через H_+ , лежит выше M , т.е. там выполнено неравенство $z > F(x, y, v)$, а другая, которую обозначим через H_- , лежит ниже M , там $z < F(x, y, v)$.

Утверждение 1. *Отрицательные траектории системы (3) пересекают многообразие M на участке M_+ сверху вниз, т.е. из области H_+ в область H_- , а положительные – на участке M_- снизу вверх, т.е. из области H_- в область H_+ .*

Доказательство этого утверждения основано на том, что скалярное произведение нормали к многообразию M и векторного поля системы (3) на участке M_+ отрицательно, а на участке M_- положительно.

Сформулируем теперь алгоритм оптимального по быстродействию управления полной системой.

Если точка (x, y, v, z) не лежит на многообразии M , то

$$u(x, y, v, z) = \begin{cases} -1, & \text{если } z > F(x, y, v); \\ 1, & \text{если } z < F(x, y, v). \end{cases}$$

Оптимальное движение из этой точки состоит из четырех этапов. Первый этап заканчивается, когда траектория достигнет многообразия M , здесь происходит первое переключение управления. На втором этапе движение продолжается по многообразию M .

Если (x, y, v, z) лежит на многообразии M , но не принадлежит поверхности S^2 , то

$$u(x, y, v, z) = \begin{cases} -1, & \text{если } v > f(x, y); \\ 1, & \text{если } v < f(x, y). \end{cases}$$

В этом случае первый этап отсутствует, а оптимальное движение состоит из трех этапов. Второй этап заканчивается, когда траектория достигнет поверхности S^2 . Здесь происходит переключение управления, дальнейшее движение продолжается вдоль поверхности S^2 .

Если (x, y, v, z) лежит на поверхности S^2 , но не принадлежит кривой Γ^3 , то

$$u(x, y, v, z) = \begin{cases} -1, & \text{если } x > \frac{y}{1 - |y|}; \\ 1, & \text{если } v < \frac{y}{1 - |y|}. \end{cases}$$

В этом случае оптимальное движение состоит только из третьего и четвертого этапов и третий этап заканчивается, когда траектория достигнет кривой Γ^3 . На кривой Γ^3 управление задается так:

$$u(x, y, v, z) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Отсюда система достигает начала координат за один этап без переключения управления.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Госзадания 124012500443-0 в ИПМех РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2014. 229 с.
- Лавровский Э.К. О быстродействии в задаче управления вертикальным положением маятника с помощью перемещения его основания // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 42–51.
- Решимин С.А., Черноусько Ф.Л. Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 3. С. 51–62.

4. Черноуско Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
5. Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 396 p.
6. Ананьевский И.М. Управление линейной системой четвертого порядка при смешанных ограничениях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып 6. С. 901–908.
7. Понtryагин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
8. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во мхмата МГУ, 2004. 168 с.
9. Фельдбаум А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // Автомат. и телемех. 1955. Т. 16. № 2. С. 129–149.
10. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. Topics in Mathematical System Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1969. 358 р.
11. Ананьевский И.М., Дунаев И.А. Наискорейшее успокоение линейного обратного маятника с помощью динамического гасителя // Изв. РАН. ТиСУ. 2024. № 3. С. 11–25.

SYNTHESIS OF TIME-OPTIMAL CONTROL FOR A INVERTED PENDULUM WITH A DYNAMIC ABSORBER

I. M. Ananievski^a

^aIshlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS F. L. Chernousko

We consider a fourth-order linear system that describes the dynamics of a linearized inverted pendulum controlled by an active dynamic absorber. The control variable is the force of interaction between the pendulum and the moving mass of the absorber, limited in magnitude. Using Pontryagin's maximum principle, the problem of synthesizing an optimal control that brings the system to a state of rest in a minimum time is solved.

Keywords: linear controlled system, inverted pendulum, active dynamic absorber, time-optimal control, maximum principle

УДК 62-50

ЭФФЕКТ УСИЛЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В НАСЫПНЫХ СРЕДАХ

© 2024 г. А. Т. Ахметов^{1,*}, И. К. Гималтдинов^{2,***}, А. Ф. Мухаметзянов², Р. Ф. Гизатулин¹

Представлено академиком РАН Р. И. Нигматулиным 10.05.2024 г.

Поступило 15.05.2024 г.

После доработки 05.08.2024 г.

Принято к публикации 06.08.2024 г.

Общеизвестно, что ударные волны в песчаных средах поглощаются, т.е. по мере прохождения в насыпной среде их амплитуда снижается, но оказалось, что возможны условия, приводящие к усилению ударных волн по мере прохождения внутрь слоя песка. Эти условия можно создать предварительным воздействием на песок ударно-волнового импульса, они могут быть реализованы в ударной трубе, оснащенной секцией насыпных сред. Ударная волна многократно переотражается от поверхностей изучаемой пористой среды и верхнего торца трубы. Амплитуда и форма переотраженной волны несущественно отличаются от основного импульса. В то же время амплитуда переотраженной волны, распространяющейся в песке непосредственно после воздействия (13 мс) основного импульса, увеличивается более чем три раза по сравнению с амплитудой основного импульса на этой глубине. По сравнению со своей величиной у поверхности песка амплитуда в толще песка становится выше почти вдвое. Максимальное усиление амплитуды переотраженной волны в насыпной среде возрастает с увеличением слоя, через который проходит импульс до некоторой глубины, дальше начинает уменьшаться.

Ключевые слова: песчаная насыпка, ударная труба, ударно-волновой импульс, основной импульс, зондирующий импульс, пик давления, слой насыпной среды

DOI: 10.31857/S2686740024060076, **EDN:** HVZDMN

Основной акустической особенностью насыпных песчаных сред является низкая скорость звука [1]. Их уплотнение приводит к некоторому увеличению скорости [2–4], а консолидация (песчаник, цементация газогидратом) — к многократному возрастанию скорости акустических волн [6, 5, 7].

В ударной трубе, оснащенной секцией насыпных сред, волна многократно переотражается от поверхности изучаемой пористой среды и верхнего торца трубы. Использование переотраженных импульсов для изучения изменений в среде, произошедших под воздействием ударной волны, как зондирующих импульсов, было использовано в работах [8, 9]. При изучении распространения ударного импульса в насыпных средах было выявлено образование пиков при прохождении зондирующе-

го (переотраженного) импульса. Переотраженную волну можно рассматривать как зондирующий импульс, который падает на поверхность насыпной среды непосредственно после воздействия ударно-волнового импульса (основного импульса), в нашем случае промежуток времени порядка 13 мс. Было высказано предположение, что образование пика связано с разрыхлением слоя песка при воздействии ударного импульса и дальнейшего взаимодействия этого измененного слоя с падающим зондирующим импульсом. Для выявления роли величины слоя проведена серия экспериментов с уплотненным песком, слой которого дискретно увеличивался от 0 до 18.5 см.

Изучение процессов, происходящих в насыпных средах, производилось на ударной трубе с пьезоэлектрическими акустическими датчиками типа ЛХ 610 с частотным диапазоном 3–10 000 Гц, диапазоном измеряемых пульсаций 5–500 кПа и системой регистрации (усилитель заряда LE-41 с АЦП E14-440) на базе L-CARD, сопряженной с компьютером. Напряжение, соответствующее импульсам давления в камере низкого давления (КНД) и показаниям тензометрического датчика, который регистрирует уровень давления разрыва диафрагмы в камере

¹ Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

² Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

* E-mail: alfir@anrb.ru

** E-mail: iljas_g@mail.ru

*** E-mail: tuarya@yandex.ru

**** E-mail: giz-renat@yandex.ru

высокого давления (КВД), записывается в памяти компьютера. Расположение датчиков в ударной трубе и в секции насыпных сред (СНС) приведены на рис. 1. Чувствительная часть датчиков давления, диаметром 1.5 см, закреплена заподлицо с внутренней стенкой ударной трубы. Исследуемая среда представляла собой насыпку из песчинок, размеры которых находятся в диапазоне от 160 до 650 мкм, среднегарифмический размер 390 мкм [1].

Нагнетание воздуха в КВД приводит к разрыву диафрагмы из промасленной бумаги, разделяющей камеры высокого и низкого давлений. После разрыва диафрагмы в трубе формируется основная ударная волна, длительность импульса которой определяется длиной КВД.

В ударной трубе, оснащенной СНС, волна многократно переотражается от поверхности изучаемой насыпной среды и верхнего торца КВД. Переотраженные волны можно использовать для изучения изменений в среде, произошедших под воздействием основной ударной волны, т.е. как зондирующие импульсы. Следует отметить, что ударное нагружение, действующее на песчаную насыпку после разрыва диафрагмы, является многократным (рис. 1, датчики D0–D3), амплитуда волны заметно снижается за 10 переотражений (датчик D0), что означает, что насыпная среда “утаптывается” последовательно уменьшающимися импульсами давления, формирующимиися после разрыва диафрагмы. Однако зондирующий импульс, проходящий через 13 мс после основного, кардинально изменяет свою амплитуду и форму (датчик D1), что обусловлено изменением структуры насыпной среды (слой 2 см) во время воздействия основного импульса. При повторном нагружении, после замены диафрагмы, (около двух минут) волновая картина на всех датчиках идентична: все импульсы проходят как и в первый раз, никаких последствий от предыдущих воздействий не обнаруживаются.

Это означает, что распространение волн происходит в области упругой деформации песка.

Перед выполнением эксперимента насыпная среда уплотнялась методом утруски, проведение 6 экспериментов с заменой диафрагм не изменило уровень насыпки. Чтобы более четко представлять формирующийся у поверхности песка импульс, датчик D1 был расположен непосредственно над поверхностью песка, рис. 2 (между поверхностью песка и центром датчика 0.75 см). Огибающая основного импульса p_0 (D0) практически не искажается (импульс p'_0 , D1), его амплитуда удваивается за счет сложения падающей и отраженной от поверхности насыпной среды волн. При отражении появляется высокочастотный дребезг. Зондирующий импульс p_1 (D0) у поверхности также почти удваивается (импульс p'_1 , D1). По сравнению с основным импульсом задний фронт растягивается. Амплитуда переотраженного импульса p_1 на 29% ниже амплитуды основного p_0 , аналогичное соотношение у поверхности песка для амплитуд зондирующего p'_1 и основного p'_0 импульсов 33%.

При насыпке песка с его утруской до верхнего края датчика воздействие основного импульса изменяет структуру слоя ($H = 0.75$ см) таким образом, что при распространении зондирующего импульса формируется пик на его заднем фронте. Аналогичным образом проводилось последовательное увеличение слоя насыпки на 1 см, пока толщина слоя над центром датчика D1 не достигла 7 см. Слои от 10 см до 13.5 см рассматривались относительно центра датчика D2.

Увеличение слоя насыпной среды приводит к постепенному смещению пика к переднему фронту импульса и росту его амплитуды. Максимальное значение достигается при величине слоя 8–9 см, дальнейшее увеличение слоя приводит к постепенному уменьшению амплитуды пика.

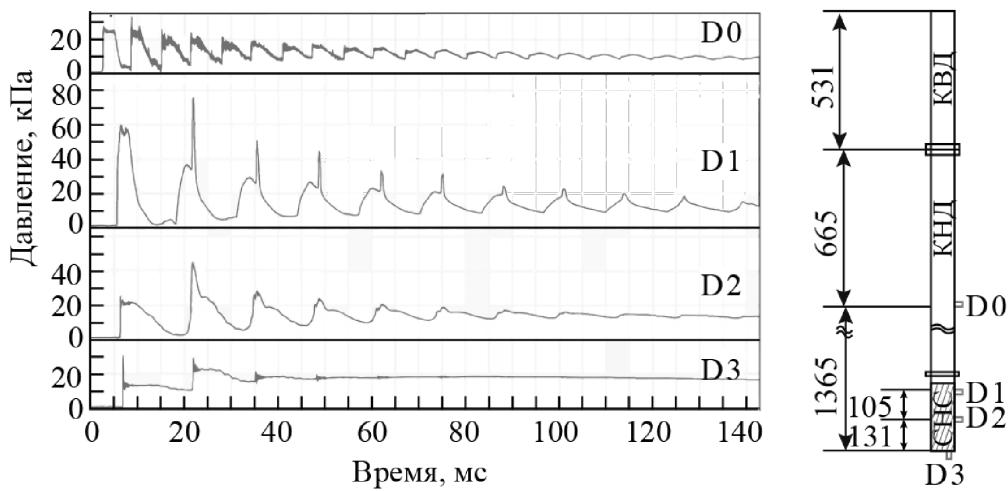


Рис. 1. Эпюры многократно переотражающегося импульса давления в ударной трубе, оснащенной СНС и пьезоэлектрическими датчиками D0–D3.

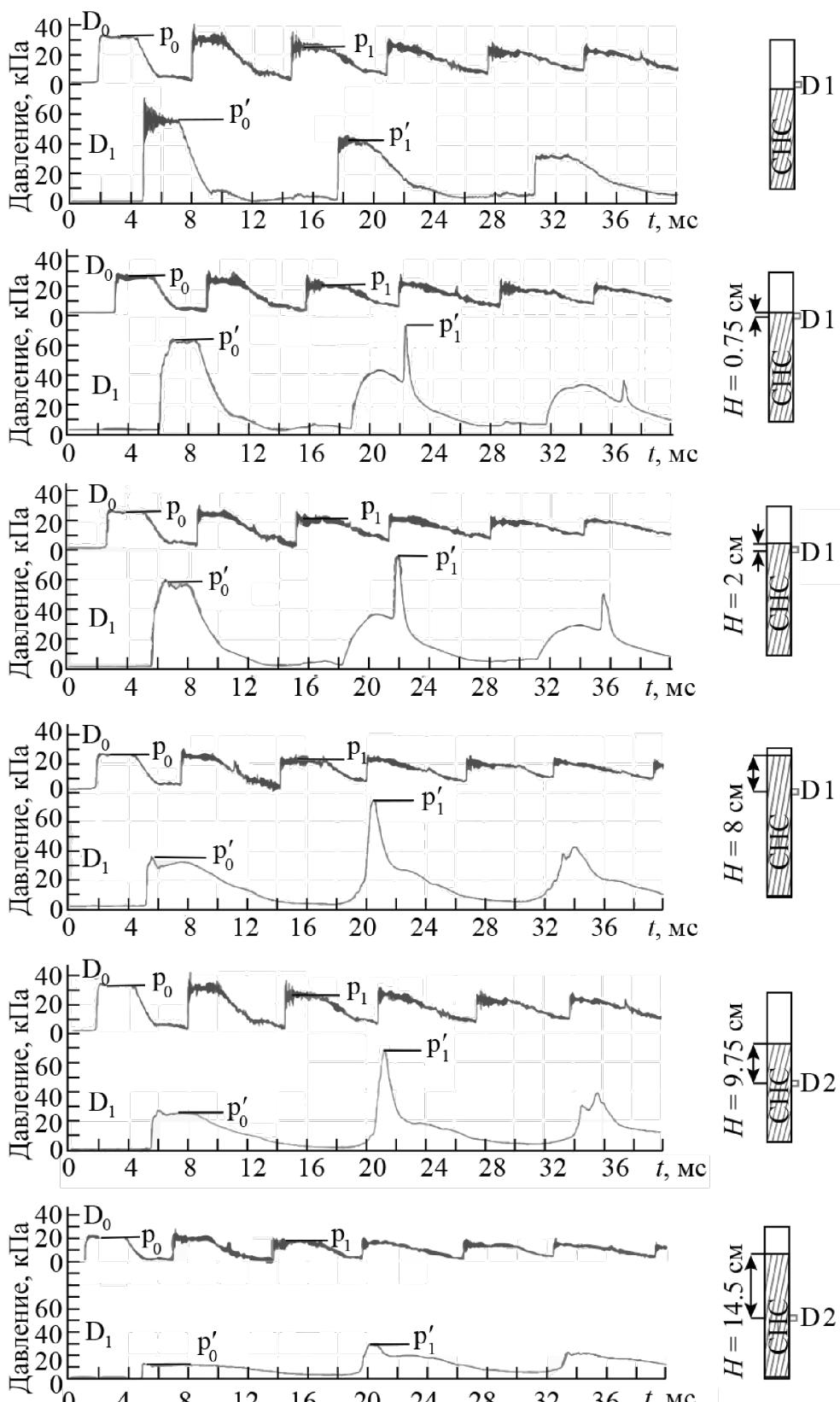


Рис. 2. Эпюры ударных импульсов на датчиках D0, D1, D2 по мере увеличения слоя песчаной насыпки. Справа приведено схематичное расположение слоя песка относительно датчиков.

Поскольку амплитуды основного и зондирующе-го импульсов у поверхности насыпной среды отли-

чаются на треть, для их количественного сравнения с изменением амплитуд основного и зондирующего

импульсов от величины проходимого слоя мы нормировали амплитуды давления на датчиках D1 и D2 к значению амплитуд соответствующих импульсов на датчике D0:

$$K = \frac{p'_1}{p_1} / \frac{p'_0}{p_0}$$

есть коэффициент усиления, обусловленного структуризацией песка при прохождении основного импульса. Зависимость коэффициента усиления от величины слоя приведена на рис. 3. Экспериментальные точки достаточно хорошо аппроксимируются квадратичной функцией, максимум которой лежит в диапазоне 8.0–12 см, нормированная амплитуда зондирующего импульса в 3.5 раза превышает нормированную амплитуду основного импульса. Амплитуда зондирующего импульса возрастает вдвое по сравнению с ее значением у поверхности песка.

Чтобы иметь представление об упругих свойствах насыпной среды, проводились измерения скоростей распространения основного ударно-волнового импульса в верхней части СНС, между датчиками D1, D2 (V_1); в нижней части между D2, D3 (V_2); также определялась средняя скорость между D1 и D3 (V_3), рис. 4. Погрешность метода измерения скорости связана с измерением расстояния между датчиками и временными координатами переднего фронта импульсов на соответствующих датчиках, она составляла не более 1%. Общая погрешность во многом определяется случайными параметрами: наиболее значительное отклонение – давление разрыва диафрагмы 69 ± 13 кПа (18%) при определении погрешности усредненных параметров, погрешностью определения пористости 0.39 ± 0.005 . Скорость ударных импульсов в воздухе 374 ± 6 м/с (2%). Скорость ударных волн определяется амплитудой разрыва диафрагмы: при разбросе амплитуды разрыва диафрагмы 18%, разброс в скоростях 2%.

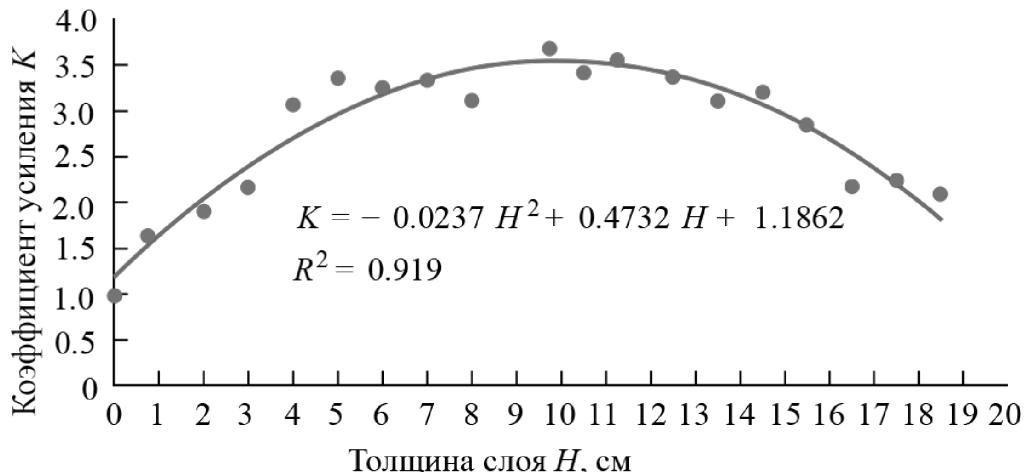


Рис. 3. Зависимость отношений нормированных амплитуд давления зондирующего импульса к основному (K) от толщины слоя песка (H).

Для уплотнения песчаной насыпки использовался метод утруски (интенсивные удары по стенкам СНС) и умеренной трамбовки. По мере увеличения уровня насыпной среды скорость основного ударно-волнового импульса, как в нижней части (V_2), так и в верхней (V_1), постепенно растет (рис. 4), это свидетельствует о возрастании упругости насыпной среды за счет многократных утрусков перед каждым экспериментом, которые производились при открытой СНС. По мере увеличения уровня насыпанного песка повышается роль нескольких больших амплитуд вибрации стенок трубы у открытого торца цилиндра, что привело к большему уплотнению песка в верхней части и отразилось на величине скорости на последних трех точках V_1 . Скорость в нижней части СНС постепенно возрастала, что, по всей видимости, обусловлено уплотнением нижних слоев за счет прохождения мелких песчинок с верхних слоев в нижние при каждой вибрационной утруске.

Для объяснения причины усиления ударных волн и формирования пиков давления при прохождении зондирующих импульсов было высказано предположение, что после воздействия основного импульса происходит разрыхление слоя песка. Зондирующий импульс, проходя через этот разрыхленный слой [9], ускоряет песчинки, они добавляют свои импульсы к количеству движения прошедшего ударно-волнового импульса, это приводит к формированию пика. При этом надо учесть, что рыхлый слой песка хуже отражает и, соответственно, пропускает большую долю интенсивности импульса по сравнению с утрамбованым, т.е. происходит не только формирование пика импульса, но и лучшее прохождение энергии волнами после разрыхления песка.

Обозначим через R_1 и R_2 соответствующие волновые сопротивления воздуха и гетерогенной среды:

$$R_1 = \rho_1 C_1, \quad R_2 = \rho_2 C_2.$$

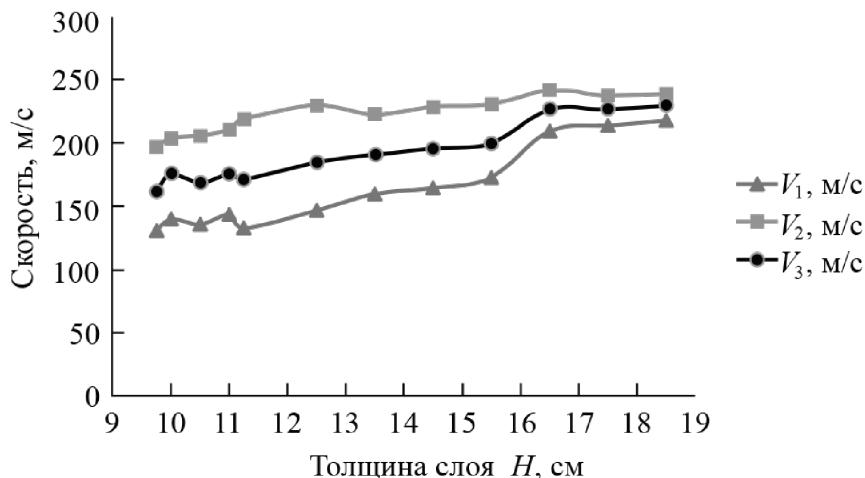


Рис. 4. Зависимость скорости основного ударного импульса от толщины слоя песка над датчиком.

Коэффициенты отражения и прохождения звуковой волны по интенсивности имеют вид [10, 11]

$$r_J = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^2, \quad t_J = \frac{4R_1 R_2}{(R_2 + R_1)^2}.$$

Волновое сопротивление рыхлого песка обозначим R'_2 , в этом случае коэффициенты отражения r'_J и прохождения t'_J по интенсивности имеют вид

$$r'_J = \left(\frac{R'_2 - R_1}{R'_2 + R_1} \right)^2, \quad t'_J = \frac{4R_1 R'_2}{(R'_2 + R_1)^2}.$$

Отношение коэффициентов прохождения по интенсивности

$$\frac{t'_J}{t_J} = \frac{R'_2 (R_2 + R_1)^2}{R_2 (R'_2 + R_1)^2}.$$

Учитывая, что $R_2 \gg R_1$ и $R'_2 \gg R_1$, получим

$$\frac{t'_J}{t_J} = \frac{R_2}{R'_2} = \frac{\rho_2 C_2}{\rho'_2 C'_2},$$

т.е. отношение коэффициентов прохождения по интенсивности рыхлой и уплотненной пористых сред равно отношению их волновых сопротивлений.

Для того чтобы определить волновое сопротивление рыхлого песка, был проведен дополнительный эксперимент с неуплотненной насыпкой с пористостью 0.45, скорость ударно-волнового импульса в верхней части СНС между датчиками D1–D2 84 м/с. В уплотненном за счет утруски песке пористость – 0.4, скорость – 120 м/с, тогда для отношения коэффициентов по интенсивности получим

$$\frac{t'_J}{t_J} = \frac{0.6}{0.55} \cdot \frac{120}{84} = 1.6.$$

В рассмотренном случае коэффициент прохождения по интенсивности в рыхлый песок больше, чем в уплотненный, в 1.6 раза. Это означает, что после разрыхления песка при воздействии ударно-волнового импульса у приходящего после него зондирующего импульса большая доля интенсивности

пройдет в насыпную среду. Но, к сожалению, этого недостаточно для объяснения механизма формирования пиков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обнаружено, что ударно-волновой импульс малой амплитуды 20–35 кПа, воздействуя на уплотненную песчаную насыпную среду, изменяет ее структуру так, что зондирующий импульс, проходящий по ней непосредственно после (13 мс) основного импульса, кардинально изменяет свою амплитуду и форму.

Анализируя результаты, полученные при различных слоях насыпной среды, можно дать следующую интерпретацию об эволюции зондирующего импульса:

- 1) в верхнем слое песка формируется пик, вдвое превышающий амплитуду импульса на поверхности;
- 2) по мере прохождения в толщу песка амплитуда пика парадоксально нарастает, в отличие от амплитуды основного импульса, которая уменьшается, разница достигает 3.5 раза;
- 3) форма импульса существенно изменяется с увеличением толщины слоя, пик смещается с заднего фронта к переднему, значительно нарастаая по амплитуде.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке госзадания № 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахметов А.Т., Гималтдинов И.К., Ситдикова Л.Ф., Азаматов М.Ш., Султангареев Ю.С., Хайретдинов Т.Д. О влиянии влагосодержания на распространение ударных волн слабой ин-

- тенсивности в насыпных средах // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94. № 2. С. 418–423.
2. Дучков А.Д., Дучков А.А., Дугаров Г.А., Дробчик А.Н. Скорости ультразвуковых волн в песчаных образцах, содержащих воду, лед или гидраты метана и тетрагидрофурана (лабораторные измерения) // ДАН. 2018. Т. 478. № 1. С. 94–99.
 3. Купер К.Э., Дробчик А.Н., Дучков А.А., Дугаров Г.А., Шарафутдинов М.Р. Исследование структуры газогидратных отложений методами рентгеновской томографии и акустического зондирования // Инженерно-физический журнал. 2022. Т. 95. № 7. С. 1815–1820.
 4. Дучков А.Д., Дугаров Г.А., Дучков А.А., Дробчик А.Н. Лабораторные исследования скорости и поглощения ультразвуковых волн в песчаных образцах, содержащих воду/лед, гидраты метана и тетрагидрофурана // Геология и геофизика. 2019. Т. 60. № 2. С. 230–242.
 5. Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю. Волны в пористой среде со слоем, содержащим газовый гидрат // Прикладная механика и техническая физика. 2020. Т. 61. № 4(362). С. 31–38.
 6. Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н. Скорость и поглощение линейных волн в по-ристых средах, насыщенных газом и его гидратом // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63. № 4(374). С. 56–63.
 7. Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н. Методика численного моделирования волновых процессов в неоднородной гидратосодержащей пористой среде // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2022. Т. 8. № 3(31). С. 59–71.
 8. Ахметов А.Т., Азаматов М.А., Мухаметзянов А.Ф. Изменение структуры ударных волн в насыпных средах при переотражении // Многофазные системы. 2020. Т. 15. №. 1–2. С. 10.
 9. Ахметов А.Т., Гималтдинов И.К., Азаматов М.А., Мухаметзянов А.Ф., Богданов Д.Р. Зондирование водогазонасыщенных насыпных сред переотраженными волнами непосредственно после воздействия ударной волны // Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48. № 1. С. 23–26.
 10. Зацепин А.Ф. Акустический контроль. В 2 ч. Ч. 1. Введение в физику акустического контроля. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 88 с.
 11. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

EFFECT OF AMPLIFICATION OF SHOCK WAVES IN BULK MEDIA

A. T. Akhmetov^a, I. K. Gimaltdinov^b, A. F. Mukhametzyanov^b, R. F. Gizatullin^a

^a*Mavlyutov Institute of Mechanics Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*

^b*Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia*

Presented by Academician of the RAS R. I. Nigmatulin

It is well known that shock waves in sandy environments are absorbed, i.e. as they pass through the bulk medium, their amplitude decreases. In shock tubes, as a rule, the results of the impact of shock wave pulses on an object are studied, leading to a change in the shape and amplitude of the pulse that characterizes the medium. In a shock tube equipped with a section of bulk media, the wave is repeatedly reflected from the surfaces of the porous medium under study and the upper end of the tube. The amplitude and shape of the reflected wave differs insignificantly from the main pulse. At the same time, the amplitude of the re-reflected wave propagating in the sand immediately after exposure (13 ms) to the main pulse increases more than three times compared to the amplitude of the main pulse at this depth. Compared to its value at the sand surface, the amplitude in the sand thickness becomes almost twice as high. The maximum amplification of the amplitude of a reflected wave in a bulk medium increases with increasing layer through which the pulse passes to a certain depth, and then begins to decrease.

Keywords: sand fill, shock tube, shock wave pulse, main pulse, probing pulse, pressure peak, bulk medium layer

УДК 539.37: 624.04

ПОСЛОЙНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ОСЛАБЛЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ В ПЛАНЕ ВЫРЕЗАМИ

© 2024 г. В. Н. Бакулин^{1,*}

Представлено академиком РАН А. М. Липановым 04.06.2024 г.

Поступило 07.06.2024 г.

После доработки 07.06.2024 г.

Принято к публикации 07.08.2024 г.

Предложена эффективная модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных цилиндрических оболочек, что позволило впервые исследовать ослабленные прямоугольными вырезами трехслойные конструкции в достаточно точной постановке. Применение построенной блочной модели, состоящей из двумерных моментных несущих слоев и трехмерного слоя заполнителя, значительно расширяет класс решаемых актуальных научных и прикладных задач по прочностному расчету перспективных трехслойных элементов конструкций. В качестве примера впервые исследовано влияние толщины несущего слоя, к которому приложена нагрузка, на напряженно-деформированное состояние в слоях трехслойных цилиндрических отсеков, ослабленных прямоугольными в плане вырезами.

Ключевые слова: трехслойные цилиндрические нерегулярные оболочки, прямоугольные в плане вырезы, двумерная модель моментных несущих слоев, трехмерная оболочечная модель слоя заполнителя, послойный анализ, напряженно-деформированное состояние

DOI: 10.31857/S2686740024060086, **EDN:** HVVJHN

О применении оболочек, в том числе трехслойной структуры, в ракетной, космической, авиационной и др. современной технике отмечалось в работах [1–4] и др. На эффективность такого применения указывалось в [5–8].

Часто конструкции имеют различного рода вырезы конструктивного, технологического или другого назначения, которые приводят к ослаблению несущей способности изделий и появлению концентрации напряжений.

В монографии [9] отмечено, что точные решения задач о концентрации напряжений получены для кругового отверстия, либо для жесткого включения в сферической оболочке, т.е. задач, для которых переменные разделяются, и также сказано, что для отверстий другой формы получить точные решения в рамках теории трансверсально-изотропных оболочек не представляется возможным.

Для проведения расчетов элементов конструкций, ослабленных прямоугольными в плане вырезами, приходится разрабатывать модели на основе

численных методов и в первую очередь метода конечных элементов (МКЭ) [10].

Следует отметить, что имеющиеся подходы, методы и модели (в том числе конечно-элементные модели (КЭМ)) часто не позволяют с необходимой точностью и эффективностью для многих важных для науки и практики задач исследовать НДС в общем случае нерегулярных трехслойных цилиндрических оболочек при наличии прямоугольных в плане вырезов, с учетом неоднородности структуры, моментного состояния несущих слоев, трехмерного напряженного состояния в слое заполнителя, при различных условиях закрепления и нагружения слоев [10, 11]. Такое состояние в области разработки моделей прочностного анализа трехслойных цилиндрических оболочек, ослабленных прямоугольными вырезами, сдерживает их эффективное применение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Разработать модели с учетом отмеченных особенностей и решить указанные задачи можно с помощью предлагаемого подхода послойного анализа с блочной конечно-элементной реализацией (в от-

¹ Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия

* E-mail: vbak@yandex.ru

личие от [12], где блочные элементы применяются для аналитического решения граничных задач).

Блочная модель послойного анализа трехслойных цилиндрических оболочек, ослабленных прямоугольными в плане вырезами, строится из двумерных конечных элементов (КЭ) тонких моментных несущих слоев (при этом используется классическая теория оболочек ([13] и др.) и трехмерного КЭ-слоя заполнителя).

Следует отметить, что при послойном анализе в зависимости от физико-механических характеристик и геометрических параметров конструкций и условий задач можно для расчета слоев использовать разнообразные разработанные модели [14].

При разработке и применении предлагаемого подхода послойного анализа с блочной конечно-элементной реализацией необходимо решить проблему снижения размерности рассматриваемых моделей, так как значительно растет число вычислительных операций, а следовательно, увеличиваются вычислительные погрешности, требуемые ресурсы, в том числе временные.

Большая размерность блочных конечно-элементных моделей (БКЭМ) послойного анализа связана с числом слоев исследуемой конструкции, количеством конечных элементов при моделировании слоев, числом узловых параметров КЭ. На размерность задач влияет необходимость исследования зон повышенных напряжений, что заставляет увеличивать число КЭ возле отверстий. Большая размерность блочных конечно-элементных моделей послойного анализа значительно усложняет разработку и применение таких моделей.

Решить проблему снижения размерности рассматриваемых моделей предлагается применением эффективных аппроксимаций для конечных элементов, используемых для моделирования слоев исследуемых конструкций.

Эффективными будем называть аппроксимации и построенные на их основе модели, приводящие к повышению скорости сходимости численных решений. То есть необходимая точность решения будет получена при значительно меньших порядках участвующих в процессе решения матрицах.

В настоящей работе представлен подход к получению аппроксимаций, на основе которых предложена эффективная оболочечная модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) в общем случае нерегулярных трехслойных цилиндрических оболочек, что позволило впервые исследовать влияние толщины несущего слоя, к которому приложена нагрузка, на НДС в слоях перспективных элементов конструкций, ослабленных прямоугольными в плане вырезами.

МОДЕЛЬ ДЛЯ ПОСЛОЙНОГО АНАЛИЗА

Будем рассматривать трехслойные оболочки с тонкими и жесткими моментными несущими слоями и толстым промежуточным слоем заполнителя. Как отмечалось, БКЭМ послойного анализа строится из двумерных КЭ несущих слоев и трехмерного КЭ-слоя заполнителя.

Конечные элементы несущих слоев и слоя заполнителя образованы сечением оболочки двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения, и двумя плоскостями, проходящими через ось оболочки. Узлы расположены в угловых точках КЭ.

Узловыми параметрами КЭ несущих слоев будут три перемещения точек срединной поверхности u , v , w и углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осевой (x) и окружной (ϕ) осей координат.

Для повышения скорости сходимости конечно-элементных решений в аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев введены перемещения как твердого тела, определяемые интегрированием геометрических соотношений, связывающих обобщенные деформации с перемещениями [13 и др.], при нулевых значениях деформаций. Запись этих полученных функций перемещений КЭ несущих слоев осуществляется с помощью шести неопределенных коэффициентов, являющихся константами интегрирования $\alpha_1, \dots, \alpha_6$.

Аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев состоят из перемещений как твердого тела и перемещений, вызванных деформированием конечного элемента.

Аппроксимация функций обобщенных деформаций, удовлетворяющих уравнениям неразрывности (с совместности) деформаций [13], а затем переход к аппроксимации функций перемещений КЭ значительно повышает скорость сходимости конечно-элементных решений, а следовательно, позволяет уменьшить число КЭ и размерность КЭМ.

Число неопределенных коэффициентов для записи аппроксимирующих функций КЭ несущих слоев равно числу степеней свободы конечных элементов, т.е. 20.

С помощью оставшихся после записи функций перемещений как твердого тела 14 неопределенных коэффициентов записываются аппроксимирующие функции обобщенных деформаций ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, \alpha_1, \alpha_2, \chi$) КЭ несущих слоев.

Матрица аппроксимирующих функций обобщенных деформаций КЭ несущих слоев будет иметь вид (см. таблицу ниже), где R – радиус срединной поверхности несущего слоя.

При этом аппроксимирующие функции обобщенных деформаций КЭ несущих слоев удовлетворяют уравнениям неразрывности деформаций [13].

...				1	φ													
						1	x		$-\frac{x^2}{2R}$	$-\frac{x^3}{6R}$	$-\frac{x^2\varphi}{2R}$	$-\frac{x^3\varphi}{6R}$						
							1											
								1	x	φ	$x\varphi$		1	x	φ	$x\varphi$		
										$\frac{x}{R}$	$\frac{x^2}{2R}$			$R\varphi$		$R\frac{\varphi^2}{2}$	1	

Функции, аппроксимирующие перемещения, вызванные деформированием КЭ несущих слоев, получаются интегрированием геометрических соотношений [13] при найденных аппроксимациях функций обобщенных деформаций.

Эффективность полученных аппроксимаций и построенной на их основе модели КЭ несущих слоев подтверждена сопоставлением с аналитическими и численными решениями на известных и широко распространенных для КЭ тестовых примерах.

Полученные эффективные аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев применены для построения трехмерного конечного элемента слоя заполнителя трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек. Для этого аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев приведены к соответствующим поверхностям стыковки с КЭ-слоя заполнителя аналогично тому, как это описано в работах [15].

Обе цилиндрические поверхности стыковки трехмерного КЭ-слоя заполнителя с КЭ несущих слоев выбраны в качестве узловых. Таким образом, трехмерный КЭ-слой заполнителя будет иметь восемь узлов.

После проведения необходимых математических операций, принимая линейный закон изменения перемещений по толщине трехмерного оболочечного КЭ, получим аппроксимирующие функции перемещений для этого КЭ-слоя заполнителя:

$$u = \left(\alpha_2 \frac{R_1 + h_1^c}{2} \cos \varphi + \alpha_4 \frac{R_1 + h_1^c}{2} \sin \varphi + \alpha_5 + \alpha_7 x + \alpha_8 x \varphi - \frac{\alpha_{10} R_1 h_1^c}{2} + \alpha_{11} R_1 \varphi + \frac{\alpha_{12} h_1^c x}{2} + \frac{\alpha_{13} h_1^c x^2}{4} + \frac{\alpha_{14} h_1^c x \varphi}{2} + \frac{\alpha_{15} h_1^c x^2 \varphi}{4} + \frac{\alpha_{17} R_1^2 (h_1^c - R_1 \varphi^2)}{2} + \alpha_{19} R_1^2 \varphi \left(\frac{h_1^c}{2} + R_1 \frac{1 - \varphi^2}{6} \right) - \alpha_{20} R_1^2 \varphi \right) \phi^1 + \left(\alpha_{22} \left(R_3 - \frac{h_3^c}{2} \right) \cos \varphi + \alpha_{24} \left(R_3 - \frac{h_3^c}{2} \right) \sin \varphi + \alpha_{25} + \alpha_{27} x + \alpha_{28} x \varphi + \frac{\alpha_{30} R_3 h_3^c}{2} + \alpha_{31} R_3 \varphi - \frac{\alpha_{32} h_3^c x}{2} - \frac{\alpha_{33} h_3^c x^2}{4} - \frac{\alpha_{34} h_3^c x \varphi}{2} - \frac{\alpha_{35} h_3^c x^2 \varphi}{4} - \alpha_{37} R_3^2 \frac{h_3^c + R_3 \varphi^2}{2} - \alpha_{39} R_3^2 \varphi \left(\frac{h_3^c}{2} - R_3 \left(1 - \frac{\varphi^2}{6} \right) \right) - \alpha_{40} R_3^2 \varphi \right) \phi^2,$$

$$v = \left((\alpha_1 + \alpha_2 x) \sin \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \cos \varphi + \alpha_6 \left(1 + \frac{h_1^c}{2R_1} \right) - \alpha_8 \left(1 + \frac{h_1^c}{2R_1} \right) \frac{x^2}{2R_1} + \frac{\alpha_{14} h_1^c x^2}{4R_1} + \frac{\alpha_{15} h_1^c x^3}{12R_1} + \alpha_{16} R_1 \left(R_1 + \frac{h_1^c}{2} \right) \varphi + \alpha_{17} R_1 \left(R_1 + \frac{h_1^c}{2} \right) x \varphi + \alpha_{18} R_1 \frac{\left(R_1 + \frac{h_1^c}{2} \right) \varphi^2 + h_1^c}{2} + \alpha_{19} R_1 \left(\left(R_1 + \frac{h_1^c}{2} \right) \frac{\varphi^2}{2} - R_1 \right) x + \alpha_{20} \left(R_1 + \frac{h_1^c}{2} \right) x \right) \phi^1 + \left((\alpha_{21} + \alpha_{22} x) \sin \varphi - (\alpha_{23} + \alpha_{24} x) \cos \varphi + \alpha_{26} \left(1 + \frac{h_3^c}{2R_3} \right) + \alpha_{28} \left(\frac{h_3^c}{2R} - 1 \right) \frac{x^2}{2R_3} - \frac{\alpha_{34} h_3^c x^2}{4R_3} - \frac{\alpha_{35} h_3^c x^3}{12R_3} + \alpha_{36} R_3 \left(R_3 - \frac{h_3^c}{2} \right) \varphi + \alpha_{37} R_3 \left(R_3 - \frac{h_3^c}{2} \right) x \varphi + \frac{\left(R_3 - \frac{h_3^c}{2} \right) \varphi^2 - h_3^c}{2} + \alpha_{38} \frac{\left(R_3 - \frac{h_3^c}{2} \right) \varphi^2 - R_3}{2} + \alpha_{39} R_3 \left(\left(R_3 - \frac{h_3^c}{2} \right) \frac{\varphi^2}{2} - R_3 \right) x + \alpha_{40} \left(R_3 - \frac{h_3^c}{2} \right) x \right) \phi^2;$$

$$w = \left(-(\alpha_1 + \alpha_2 x) \cos \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \sin \varphi + \alpha_9 R_1 + \alpha_{10} R_1 x - \frac{\alpha_{12} x^2}{2} - \frac{\alpha_{13} x^3}{6} - \frac{\alpha_{14} x^2 \varphi}{2} - \frac{\alpha_{15} x^3 \varphi}{6} - \alpha_{16} R_1^2 - \alpha_{17} R_1^2 x - \alpha_{18} R_1^2 \varphi - \alpha_{19} R_1^2 x \varphi \right) \phi^1 + \left(-(\alpha_{21} + \alpha_{22} x) \cos \varphi - (\alpha_{23} + \alpha_{24} x) \sin \varphi + \alpha_{29} R_3 + \alpha_{30} R_3 x - \frac{\alpha_{32} x^2}{2} - \frac{\alpha_{33} x^3}{6} - \frac{\alpha_{34} x^2 \varphi}{2} - \frac{\alpha_{35} x^3 \varphi}{6} - \alpha_{36} R_3^2 - \alpha_{37} R_3^2 x - \alpha_{38} R_3^2 \varphi - \alpha_{39} R_3^2 x \varphi \right) \phi^2.$$

Здесь h_1^c , h_3^c , R_1 , R_3 – соответственно толщина несущих слоев и радиусы их срединных поверхностей (1 – для внутреннего и 3 – для внешнего несущих слоев); $\phi^1 = \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{z}{h} \right)$, $\phi^2 = 1 - \phi^1$; z , h – радиальная координата и толщина трехмерного КЭ-заполнителя, верхний индекс: 1 – для внутренней, 2 – для внешней цилиндрических поверхностей КЭ-слоя заполнителя.

Применение аппроксимирующих функций перемещений КЭ несущих слоев при построении трех-

мерного КЭ-слоя заполнителя позволило избежать разрыва обобщенных перемещений на поверхностях контакта конечных элементов слоев трехслойной оболочки.

Используя геометрические соотношения, связывающие обобщенные деформации с перемещениями для трехмерного тела [1], и физические соотношения, связывающие деформации с напряжениями, и применив процедуру и алгоритмы, подобные [15], проводится построение матрицы жесткости КЭ-слоя заполнителя для анализа НДС трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек.

Решение задачи проводится с помощью процедур метода перемещений МКЭ.

ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ НЕСУЩЕГО СЛОЯ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В СЛОЯХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК, ОСЛАБЛЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ВЫРЕЗАМИ

Параметры напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек можно регулировать изменением толщины слоев. Поэтому актуальной научной проблемой, имеющей важное прикладное значение, является исследование влияния толщины несущего слоя, к которому приложена нагрузка, на НДС в слоях трехслойных цилиндрических оболочек, ослабленных прямоугольными в плане вырезами.

В качестве примера впервые приводится исследование НДС в слоях трехслойных цилиндрических оболочек, ослабленных прямоугольными в плане вырезами. Рассматриваются оболочки со стеклопластиковыми несущими слоями, имеющими разную толщину, со следующими физико-механическими характеристиками (ФМХ): $E_1 = 2.1 \cdot 10^5$ кг/см², $E_2 = 1.9 \cdot 10^5$ кг/см², $G_{12} = 0.35 \cdot 10^5$ кг/см², $\mu_1 = 0.1$, и с заполнителем из пенопласта с ФМХ: $E_{11} = E_{22} = E_{33} = 240$ кг/см², $G_{13} = G_{23} = G_{12} = 100$ кг/см². Оболочка с жестко заделанными торцами несущих слоев (для них разрешено осевое перемещение) имеет три одинаковых симметрично расположенных выреза, которые находятся на равном расстоянии от торцов оболочки.

Оболочка нагружена внутренним давлением $p = 0.1$ кг/см² и имеет следующие геометрические параметры:

$$\frac{L}{R_0} = 2, \frac{H}{R_0} = 0.0667, \bar{l}_B = \frac{l_B}{R_0} = 0.267; \bar{b}_B = \frac{b_B}{R_0} = 0.1335,$$

где L , R_0 и H – длина, внутренний радиус и толщина оболочки соответственно; \bar{l}_B и \bar{b}_B – относительные размеры выреза.

При исследовании изменялась толщина внутреннего несущего слоя $\bar{h}_1 = \frac{h_1}{H} = 0.05 \div 0.15$ при тол-

щине слоя заполнителя $\bar{h}_f = \frac{h_f}{H} = 0.85$ и толщине внешнего несущего слоя $\bar{h}_3 = \frac{h_3}{H} = 0.05$.

Вследствие симметрии в осевом и окружном направлениях рассматривалась 1/12 симметричной части трехслойной цилиндрической оболочки. Применялась неравномерная сетка разбиения на блоки, состоящие из КЭ несущих слоев и слоя заполнителя (16 блоков в осевом направлении и 18 в окружном), со сгущением линий разбиения в окрестности выреза. Приняв линейные размеры сторон рассматриваемой симметричной части трехслойной цилиндрической оболочки за 1, сетка разбиения будет следующей, считая от середины выреза: в осевом направлении 8 блоков с относительными размерами по 0.03125, затем 4 блока по 0.065 и 4 блока по 0.125 и в окружном направлении 10 блоков по 0.015625, 2 блока по 0.065, 6 блоков по 0.125.

Результаты исследований приведены на рис. 1. При этом введены следующие обозначения:

$$\bar{w}^1 = \frac{w_1}{w_0}, \quad \bar{\sigma}^{it} = \frac{\sigma_{mn}^{it}}{\sigma_{22}^{1N}}, \quad \bar{\sigma}^f = \frac{\sigma_{mn}^f}{\sigma_{33}^f},$$

где w_0 , σ_{22}^{1N} , σ_{33}^f – соответственно прогиб при $\bar{h}_1 = 0.05$, $\bar{h}_3 = 0.05$, $\bar{h}_f = 0.85$ вдали от выреза, а также окружные мембранные напряжения во внутреннем несущем слое и поперечные нормальные напряжения в слое заполнителя при $\bar{h}_1 = 0.1$; $\bar{h}_3 = 0.05$; $\bar{h}_f = 0.85$ вдали от выреза ($i = 1, 3$; $m = 1, 2$; $n = 1, 2$; t соответствует: N – мембранным, M – моментным, Σ – суммарным напряжениям в несущих слоях; Δ , $-$, \cup означают место, соответственно, в районе угла, середины прямолинейного и криволинейного краев выреза).

Максимальные прогибы в трехслойной цилиндрической оболочке с прямоугольными в плане вырезами отмечаются на середине прямолинейного края выреза внутреннего несущего слоя \bar{w}^1 . Эти прогибы \bar{w}^1 в 2.68 раза больше прогибов вдали от вырезов при $\bar{h}_1 = 0.05$. При увеличении толщины внутреннего несущего слоя \bar{h}_1 в 2 и 3 раза максимальные прогибы уменьшаются соответственно в 1.5 и 1.845 раза. С увеличением толщины внутреннего несущего слоя \bar{h}_1 разница между прогибами внутреннего и внешнего несущих слоев уменьшается.

Наибольшими напряжениями в несущих слоях являются мембранные окружные напряжения внутреннего несущего слоя $\bar{\sigma}_{22}^{1N}$. Эти напряжения достигают максимального значения в районе угловой точки выреза ($\bar{\sigma}_{22\Delta}^{1N} = 3.34$ при $\bar{h}_1 = 0.05$). С увеличением \bar{h}_1 наибольшие значения напряжений $\bar{\sigma}_{22\Delta}^{1N}$ уменьшаются для $\bar{h}_1 = 0.1$ в 1.5 раза и для $\bar{h}_1 = 0.15$ – в 2 раза (рис. 1).

С увеличением толщины внутреннего несущего слоя \bar{h}_1 разница между наибольшими значениями

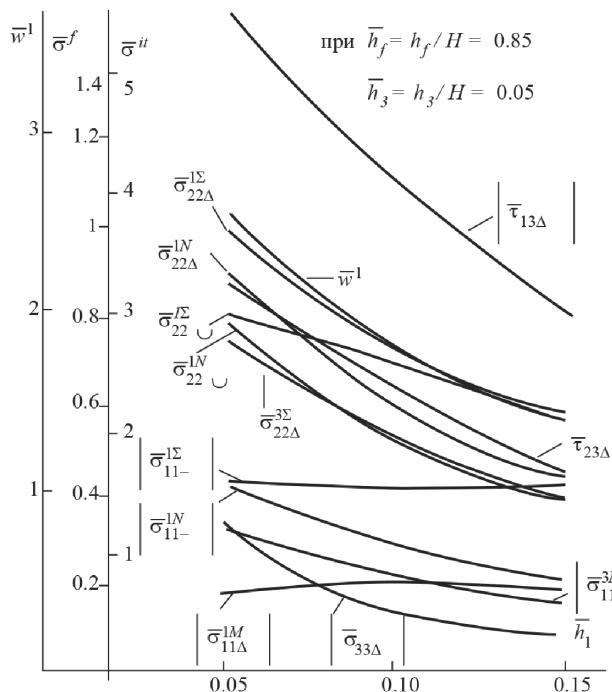


Рис. 1. Влияние толщины внутреннего несущего слоя, к которому приложена нагрузка, на наибольшие значения параметров НДС в слоях трехслойных цилиндрических оболочек, ослабленных прямоугольными в плане вырезами.

напряжений $\bar{\sigma}_{22\Delta}^{1N}$ внутреннего и внешнего несущих слоев уменьшается почти пропорционально изменению \bar{h}_1 .

Концентрация мембранных и суммарных напряжений наблюдается по всему криволинейному краю выреза. При этом моментные напряжения значительно меньше мембранных напряжений.

Оевые мембранные напряжения внутреннего несущего слоя $\bar{\sigma}_{11}^{1N}$ достигают максимального значения на середине прямолинейного края выреза при $\bar{h}_1 = 0.05$. При увеличении толщины внутреннего несущего слоя \bar{h}_1 максимальные значения этих напряжений $\bar{\sigma}_{11\Delta}^{1N}$ (рис. 1) уменьшаются почти в 1.7 раза и снижается разница между этими напряжениями во внутреннем и внешнем несущих слоях.

Моментные напряжения достигают наибольших значений в районе угловой точки выреза $\bar{\sigma}_{11\Delta}^{1M}$. По величине они значительно (почти в 5 раз) меньше мембранных напряжений в районе угловой точки выреза $\bar{\sigma}_{22\Delta}^{1N}$ (рис. 1).

Наибольшие суммарные напряжения наблюдаются в районе угловой точки выреза на поверхности сопряжения внутреннего несущего слоя и слоя заполнителя $\bar{\sigma}_{22\Delta}^{1\Sigma}$. Влияние толщины внутреннего несущего слоя на наибольшие значения этих напряжений в районе угловой точки выреза $\bar{\sigma}_{22\Delta}^{1\Sigma}$, на середине криволинейного края выреза $\bar{\sigma}_{22\Delta}^{1\Sigma}$, осевых суммарных напряжений на середине прямолинейного края выреза $\bar{\sigma}_{11\Delta}^{1\Sigma}$, а также суммарных напряжений на

поверхности сопряжения внешнего несущего слоя и слоя заполнителя в районе угловой точки выреза $\bar{\sigma}_{22\Delta}^{3\Sigma}$ приведено на рис. 1.

Наибольшие суммарные осевые напряжения на поверхности сопряжения внутреннего несущего слоя и слоя заполнителя $\bar{\sigma}_{11\Delta}^{1\Sigma}$ более чем в 2.5 раза меньше наибольших суммарных окружных напряжений на поверхности сопряжения внутреннего несущего слоя и слоя заполнителя, наблюдаемых в районе угловой точки выреза.

Наибольшими по величине напряжениями в слоях заполнителя являются поперечные сдвиговые напряжения τ_{13} в районе угловой точки выреза $\bar{\tau}_{13\Delta}$. На рис. 1 приведено влияние толщины внутреннего несущего слоя на наибольшие значения этих напряжений (верхний график на рис. 1), а также напряжений τ_{23} , наблюдаемых в районе угловой точки выреза $\bar{\tau}_{23\Delta}$, и поперечных нормальных напряжений в слое заполнителя $\bar{\sigma}_{33\Delta}$ (нижний график на рис. 1), наблюдаемых на расстоянии ширины выреза от угловой точки выреза.

Увеличение толщины внутреннего несущего слоя \bar{h}_1 приводит к уменьшению почти всех (за исключением моментных осевых напряжений во внутреннем несущем слое в районе угловой точки выреза $\bar{\sigma}_{11\Delta}^{1M}$ и суммарных осевых напряжений на поверхности сопряжения внутреннего несущего слоя и слоя заполнителя на середине прямолинейного края выреза $\bar{\sigma}_{11\Delta}^{1\Sigma}$) приведенных на рис. 1 параметров НДС в слоях трехслойных цилиндрических оболочек, ослабленных прямоугольными в плане вырезами.

Приведенные результаты могут быть использованы при проектировании перспективных трехслойных отсеков современной техники.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развит подход к получению эффективных аппроксимирующих функций перемещений несущих слоев при первоначальной аппроксимации деформаций. На основе полученных аппроксимаций разработана оболочечная модель для послойного анализа НДС в общем случае нерегулярных трехслойных цилиндрических оболочек, что позволило впервые исследовать ослабленные прямоугольными вырезами трехслойные конструкции. Применение построенной блочной модели, состоящей из двумерных КЭ моментных несущих слоев и трехмерного КЭ-слоя заполнителя, значительно расширяет класс решаемых актуальных научных и прикладных задач по прочностному расчету перспективных трехслойных элементов конструкций ракетной, авиационной, космической и другой современной техники. Впервые проведены важные научные и прикладные исследования влияния толщины внутреннего несущего слоя, к которому приложена нагрузка,

на наибольшие значения параметров НДС в слоях трехслойных цилиндрических отсеков, ослабленных прямоугольными в плане вырезами.

БЛАГОДАРНОСТИ

Посвящается 105-летию со дня рождения советского и российского ученого в области механики и ракетно-космической техники академика АН СССР и РАН Константина Сергеевича Колесникова (27.12.1919–3.5.2016), с которым автор работал до последних дней академика.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования проведены в рамках государственного задания Института прикладной механики РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. *Bakulin V.N.* Layer-by-Layer Study of the Stress and Strain State of Sandwich Conical Aircraft Compartments with Rectangular Cutouts // Russian Aeronautics. 2022. V. 65. № 4. P. 668–676.
3. *Соломонов Ю.С., Липанов А.М., Алиев А.В. и др.* Твердотопливные регулируемые двигательные установки / Под ред. А.М. Липанова, Ю.С. Соломонова. М.: Машиностроение, 2011. 416 с.
4. *Bakulin V.N.* Layer-by-layer stress-strain analysis of irregular sandwich shells of revolution with non-zero gaussian curvature // Mechanics of Solids. 2021. V. 56. № 7. P. 283–294.
5. *Сливинский В.И., Ткаченко Г.В., Сливинский М.В.* Эффективность применения сотовых конструкций в летательных аппаратах // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2005. Вып. 3. С. 169–173.
6. *Смердов А.А., Шон Ф.Т.* Анализ эффективности оптимальных композитных оболочек многослойной и трехслойной схем для отсеков ракет-носителей и разгонных блоков // Конструкции из композиционных материалов. 2016. № 3(143). С. 58–65.
7. *Bakulin V.N.* Influence of Dimensions of Rectangular Cutouts and Modulus of Elasticity of Reinforcing Embedded Elements on the Stress-Strain State of Sandwich Compartments // Russian Aeronautics. 2023. V. 66. № 2. P. 204–215.
8. *Тестоедов Н.А., Наговицин В.Н., Пермяков М.Ю.* Применение трехслойных сотовых конструкций в космических аппаратах // Вестник СибГАУ. 2016. Т. 17. № 1. С. 200–211.
9. *Пелех Б.Л., Сяський А.А.* Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках. К.: Наукова думка, 1975. 198 с.
10. *Bakulin V.N.* Layer-by-Layer Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Shells with Cutouts // Mechanics of Solids. 2019. V. 54. № 3. P. 448–460.
11. *Bakulin V.N.* Model for Layer -by-Layer Analysis of the Stress-Strain State of Three-Layer Irregular Shells of Revolution of Double Curvature // Mechanics of Solids. 2020. V. 55. № 2. P. 248–257.
12. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Блочные элементы и аналитические решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений // ДАН. 2014. Т. 454. № 2. С. 163–167.
13. *Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С. и др.* Основы строительной механики ракет. М.: Высш. шк., 1969. 494 с.
14. *Bakulin V.N.* Block Based Finite Element Model for Layer Analysis of Stress Strain State of Three-Layered Shells with Irregular Structure // Mechanics of Solids. 2018. V. 53. № 4. P. 411–417.
15. *Bakulin V.N.* A Model for Refined Calculation of the Stress-Strain State of Sandwich Conical Irregular Shells // Mechanics of Solids. 2019. V. 54. № 5. P. 786–796.

LAYER-BY-LAYER ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THREE-LAYER CYLINDRICAL SHELLS WEAKENED BY RECTANGULAR CUTOOUTS

V. N. Bakulin^a

^a*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A. M. Lipanov

An effective model for layer-by-layer analysis of the stress-strain state in the general case of irregular three-layer cylindrical shells is proposed, which made it possible for the first time to study three-layer structures weakened by rectangular cutouts in a sufficiently accurate formulation. The use of the constructed block model, consisting of two-dimensional moment bearing layers and a three-dimensional filler layer, significantly expands the class of solvable current scientific and applied problems in the strength calculation of promising three-layer structural elements. As an example, the influence of the thickness of the supporting layer to which the load is applied on the stress-strain state in the layers of three-layer cylindrical sections weakened by rectangular cutouts in plan was investigated for the first time.

Keywords: three-layer cylindrical irregular shells, rectangular in plan cutouts, two-dimensional model of moment bearing layers, three-dimensional shell model of filler layer, layer-by-layer analysis, stress-strain state

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ВЗАИМООБРАТНОСТИ ФУНКЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский^{1,2,*}

Представлено академиком РАН Р. Ф. Ганиевым 27.05.2024 г.

Поступило 27.05.2024 г.

После доработки 27.05.2024 г.

Принято к публикации 05.08.2024 г.

Представлена схема квазистатического эксперимента в линейно вязкоупругом изотропном цилиндрическом слое, где имеет место состояние, в котором одновременно в двух ортогональных друг другу направлениях реализуются сдвиговая ползучесть и сдвиговая релаксация. Внешняя поверхность слоя неподвижна, а определенным образом задавая на внутренней его поверхности касательные перемещения и сдвиговые напряжения и проводя на этой же поверхности измерения оставшихся компонент, можно экспериментально подтвердить интегральные соотношения взаимообратности функций сдвиговой ползучести и сдвиговой релаксации.

Ключевые слова: вязкоупругость, ползучесть, релаксация, кручение, осевой сдвиг, установочный эксперимент, взаимообратные определяющие соотношения

DOI: 10.31857/S2686740024060093, **EDN:** HVGTBG

В работе [1] в рамках интегральных определяющих соотношений для линейных изотропных вязкоупругих сред с ядрами разностного типа в случае нерелаксирующего объема предложены возможные, дополняющие известные, установочные эксперименты по определению ядер операторов \check{g}_β Ильюшина. Также предложены аналогичные схемы установочных экспериментов для нахождения ядер операторов \check{h}_γ , в определенном смысле сопряженных с \check{g}_β .

Ниже описывается схема возможного эксперимента в линейно вязкоупругом теле с напряженно-деформируемым состоянием, в котором одновременно в разных сдвиговых направлениях реализуются ползучесть и релаксация. Проводя комбинированный сдвиг при определенным образом заданных граничных условиях и осуществляя измерения на одной из поверхностей тела, можно экспериментально подтвердить (проверить) интегральные соотношения взаимообратности функций ползучести и релаксации.

1. Рассмотрим квазистатическое деформирование однородного упругого цилиндрического слоя в области

$$\Omega = \{a < r < b, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < \infty\}, \quad (1)$$

где (r, θ, z) — связанные с осью слоя цилиндрическая система координат. Массовые силы отсутствуют, а на поверхностях $r = a$ и $r = b$ заданы следующие физические компоненты вектора перемещений и тензора напряжений:

$$\begin{aligned} r = a: \quad u_r \equiv 0, \quad u_\theta = u_0(t), \quad \sigma_{rz} = P_0(t); \\ r = b: \quad u_r = u_\theta = u_z \equiv 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_0(t)$ и $P_0(t)$ — известные функции времени, обеспечивающие квазистатичность напряженно-деформированного состояния в Ω .

Нетрудно найти [1] точное аналитическое решение краевой задачи линейной теории упругости в области (1) с граничными условиями (2). Это решение представляет собой суперпозицию двух не зависящих друг от друга $(r\theta)$ - и (rz) -сдвигов. Выпишем ненулевые физические компоненты вектора пере-

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

² Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

* E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

мешений и тензоров деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{a(b^2 - r^2)}{r(b^2 - a^2)} u_0, & \varepsilon_{r\theta} &= -\frac{ab^2}{r(b^2 - a^2)} u_0, \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{2\mu ab^2}{r(b^2 - a^2)} u_0, & u_z &= \frac{aP_0}{\mu} \ln \frac{r}{b}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{a}{2\mu r} P_0, & \sigma_{rz} &= \frac{a}{r} P_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где μ — модуль сдвига упругого материала.

Пользуясь принципом Вольтерры линейной теории вязкоупругости [2, 3], из решения (3) можно получить решение квазистатической краевой задачи с граничными условиями (2) для материала с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(t) &= \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon_{\alpha\beta}(\tau), \\ \varepsilon_{\alpha\beta}(t) &= \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma_{\alpha\beta}(\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где пара индексов $(\alpha\beta)$ принимает значения $(r\theta)$ и (rz) , $R(t)$ — функция сдвиговой релаксации, $\Pi(t)$ — функция сдвиговой ползучести. Величины $u_0(r, t)$, $\varepsilon_{r\theta}(r, t)$ и $\sigma_{rz}(r, t)$, в выражениях для которых отсутствует упругий модуль μ , останутся теми же, что и в (3), а для остальных компонент имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}(r, t) &= -\frac{ab^2}{r(b^2 - a^2)} \int_0^t R(t - \tau) du_0(\tau), \\ u_z(r, t) &= 2a \ln \frac{r}{b} \int_0^t \Pi(t - \tau) dP_0(\tau), \\ \varepsilon_{rz}(r, t) &= \frac{a}{r} \int_0^t \Pi(t - \tau) dP_0(\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Положим, что в эксперименте на комбинированный $(r\theta)$ - (rz) -сдвиг вязкоупругого цилиндрического слоя при заданных $u_0(t)$ и $P_0(t)$ возможно непосредственное измерение и вычисление компонент $\sigma_{r\theta}(a, t)$ и $u_z(a, t)$, которые, с другой стороны, из соотношений (5) представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}(a, t) &= -\frac{b^2}{a(b^2 - a^2)} \int_0^t R(t - \tau) du_0(\tau), \\ u_z(a, t) &= -2a \ln \frac{a}{b} \int_0^t \Pi(t - \tau) dP_0(\tau). \end{aligned} \quad (6)$$

2. Возьмем два идентичных толстостенных цилиндрических слоя (образца) со связями сдвиговых напряжений и деформаций (4) и последовательно проведем сначала с одним, а затем с другим два эксперимента. В эксперименте 1 с первым образцом зададим

$$u_0(t) = u_0^0 h(t), \quad P_0(t) = P_0^0 h(t), \quad (7)$$

где $h(t)$ — функция Хевисайда. Заметим, что в одном данном эксперименте реализуются релаксация применительно к $(r\theta)$ -сдвигу и ползучесть применительно к (rz) -сдвигу. При этом

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}(a, t) &= -\frac{b^2 u_0^0}{a(b^2 - a^2)} R(t), \\ u_z^0(a, t) &= -2a P_0^0 \Pi(t) \ln \frac{b}{a}, \end{aligned} \quad (8)$$

причем, как предполагалось выше, функции $\sigma_{r\theta}(a, t)$ и $u_z^0(a, t)$ могут быть найдены из измерений.

В эксперименте 2 со вторым образцом зададим

$$u_0(t) = u_z^0(a, t), \quad P_0(t) = \sigma_{r\theta}^0(a, t), \quad (9)$$

где правые части взяты именно из эксперимента 1, и будем измерять функции времени $\sigma_{r\theta}(a, t)$ и $u_z(a, t)$, которые обозначим $\tilde{\sigma}_{r\theta}(a, t)$ и $\tilde{u}_z(a, t)$ соответственно.

Эти же две функции можно определить и в результате подстановки (8) в (6):

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}(a, t) \equiv \gamma P_0^0, \quad \tilde{u}_z(a, t) \equiv \gamma u_0^0, \quad \gamma = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (10)$$

Безразмерный параметр γ , как видно, зависит только от отношения радиусов внешней и внутренней границ слоя и не зависит от вида функций $\Pi(t)$ и $R(t)$, т. е. от свойств вязкоупругого материала в рамках линейных определяющих соотношений (4). При получении формул (10), естественно, была использована интегральная взаимообратность функций ползучести и релаксации [2]:

$$\int_0^t \Pi(t - \tau) dR(\tau) = \int_0^t R(t - \tau) d\Pi(\tau) = 1. \quad (11)$$

Из (10) следует, что величины $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ и \tilde{u}_z от времени не зависят, а с точностью до одного и того же коэффициента γ совпадают с выбранными в эксперименте 1 постоянными P_0^0 и u_0^0 . Совпадение в эксперименте 2 функций $\tilde{\sigma}_{r\theta}(a, t)$ и $\tilde{u}_z(a, t)$ с теоретическими постоянными значениями γP_0^0 и γu_0^0 естественно интерпретировать как экспериментальное подтверждение взаимообратности (11) функций сдвиговой ползучести и сдвиговой релаксации в линейной теории вязкоупругости.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российской научным фондом (грант 24-21-20008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Георгиевский Д.В. Схемы экспериментов по определению ядер некоторых разностных операторов для сред с нерелаксирующими объемом // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 1. С. 45–52.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. Георгиевский Д.В. Модели теории вязкоупругости. М.: ЛЕНАНД, 2023. 144 с.

EXPERIMENTAL CONFIRMATION OF THE RECIPROCITY OF CREEP AND RELAXATION FUNCTIONS IN THE LINEAR THEORY OF VISCOELASTICITY

D. V. Georgievskii^{a,b}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b*Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS R. F. Ganiev

A scheme of a quasistatic experiment in a linear viscoelastic isotropic cylindrical layer is presented, where there is a state in which shear creep and shear relaxation are realized simultaneously in two orthogonal directions to each other. The external surface of the layer is stationary, and by setting tangential displacements and shear stresses on its inner surface in a certain way and measuring the remaining components on the same surface, it is possible to experimentally confirm the integral relations of reciprocity of the shear creep and shear relaxation functions.

Keywords: viscoelasticity, creep, relaxation, torsion, axial shear, set experiment, reciprocal constitutive relations

УДК 532.685: 551.345: 532.71

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕГРАДАЦИИ МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ПОРОД, СОДЕРЖАЩИХ СКОПЛЕНИЯ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ ГАЗОГИДРАТОВ И СВОБОДНОГО ГАЗА, ПОД ТЕПЛОВЫМ И СОЛЕВЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ РАСТВОРОВ

© 2024 г. М. М. Рамазанов^{1,2,*}, Н. С. Булгакова^{1,***}, академик РАН Л. И. Лобковский^{3,***}

Поступило 03.07.2024 г.

После доработки 03.07.2024 г.

Принято к публикации 11.08.2024 г.

Сформулирована математическая модель деградации многолетнемерзлых пород, содержащих лед, скопления метастабильных самоконсервированных газогидратов и свободного газа, под тепловым и солевым воздействием растворов с учетом осмотического эффекта и деформации вмещающих пород. Численным методом в автомодельной постановке исследована эволюция данной системы. Выявлены закономерности и темпы развития, характерные для рассматриваемого процесса с учетом влияния осмоса. Полученные оценки хорошо согласуются с имеющимися в литературе экспериментальными и теоретическими данными по деградации углеводородсодержащих мерзлых пород.

Ключевые слова: многолетнемерзлые породы, газогидраты, плавление льда, деградация, растворы, осмос, математическая модель

DOI: 10.31857/S2686740024060106, EDN: HVCBAO

Одной из причин глобального потепления климата считаются выбросы большого количества парникового газа метана в атмосферу в Арктическом регионе. Вклад Арктики в парниковый эффект планеты является значительным, поскольку осадочный слой этого региона содержит более 30% мировых запасов углерода. Предполагается, что существенный вклад при этом вносит разложение реликтовых газогидратов. Особое внимание, которое уделяется реликтовым залежам нестабильных газогидратов, вызвано их восприимчивостью к изменению климата [1–4]. Интенсивность выбросов метана в рассматриваемом регионе контролируется темпами и механизмами деградации подводной вечной мерзлоты и наличием путей миграции газа [5]. По оценкам, на Восточно-Сибирском шельфе находится более 80% существующей подводной вечной мерзлоты и основ-

ная часть мелководных газогидратов [6]. Основными факторами, влияющими на деградацию вечной мерзлоты, являются тепловое воздействие, солевое воздействие и эрозионные процессы. Хотя изучению данной проблемы посвящено немало лабораторных и натурных экспериментальных исследований [5, 7, 8], а также исследований, основанных на математическом моделировании, эти вопросы недостаточно изучены.

Имеется много работ, посвященных моделированию разложения газогидратов в различных условиях, но все они не соответствуют целям настоящего сообщения. Так, в [9] при исследовании вечной мерзлоты рассмотрены лишь кондуктивные механизмы соле- и теплопереноса. В [10] рассмотрены разные постановки задач, однако речь идет о разложении стабильных газогидратов. В [11] рассмотрено разложение метастабильных газогидратов, при этом влияние переноса тепла и соли не учитывается. Относительно близкая модель рассмотрена в [12], где учитывается и солеперенос, и теплоперенос, однако и здесь вместе с таянием льда рассматривается разложение стабильных газогидратов. В [13] на основе математического и физического моделирования рассмотрена кинетика разложения метастабильных самоконсервированных газогидратов. При этом процесс считается изотермическим и не учитываются

¹ Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиал Объединенного института высоких температур Российской академии наук, Махачкала, Россия

² Институт динамики геосфер им. академика М. А. Садовского Российской академии наук, Москва, Россия

³ Институт океанологии им. П. П. Ширшова Российской академии наук, Москва, Россия

* E-mail: mukamatay-ipg@mail.ru

** E-mail: ipgnatali@mail.ru

*** E-mail: llobkovsky@ocean.ru

соле- и теплоперенос. Кроме того, ни в одной из этих или других известных нам моделей при исследовании деградации мерзлых пород не учитывается влияние осмотического эффекта [14, 15].

Влияние осмоса учитывается в предыдущих наших работах [16, 17], но они посвящены обратному процессу, процессу промерзания пород, насыщенных раствором. Эти работы показали, что при промерзании существенная часть соли оседает (адсорбируется) в мерзлых породах, а другая часть вытесняется вниз фронтом промерзания. Это согласуется с современными представлениями, согласно которым в течение геологической истории толща горных пород в прибрежной зоне Сибирского арктического шельфа подвергалась периодическим процессам трансгрессии и регрессии моря, а также замерзания и оттаивания, в результате чего здесь сформировались засоленные мерзлые породы с большим количеством линз и прослоев сильноминерализованных вод с отрицательной температурой, называемых криопэгами [5, 18]. При оттаивании засоленных мерзлых пород соль растворяется в образовавшейся влаге, увеличивая концентрацию раствора и соответственно усиливая осмотическое влияние. Рассматриваемая здесь модель учитывает данный эффект.

Модель включает три слоя пористой среды, насыщенных, соответственно: раствором и свободным газом (верхний слой); льдом и раствором, находящимися в термодинамическом равновесии, а также свободным газом (средний слой); нижний слой является частью исходного мерзлого непроницаемого пласта, насыщенного льдом и самоконсервированными газогидратами. Модель допускает также присутствие в нижнем слое неподвижного свобод-

ного газа в микрополостях существенно надмолекулярных размеров и незначительного количества неподвижного раствора.

В целом предлагаемая модель призвана ответить на ряд ключевых вопросов:

1. Каковы темпы деградации мерзлых гидратонасыщенных пород и соответственно интенсивность разложения реликтовых газогидратов при тепловом и солевом воздействии растворов.

2. Какова структура переходной области между замороженной и талой областями, т.е. каковы соотношения доли объема пор занимаемых льдом, газом и раствором.

3. Каковы массовые расходы газа и воды, вызванные разложением метастабильного газогидрата и таянием льда.

4. Куда направлен поток воды в талой и переходной областях: вверх или вниз.

5. Какую роль в ответах на эти и другие вопросы играет осмос.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется горизонтальный замороженный не проницаемый грунтовый пласт (область III на рис. 1), насыщенный льдом, метастабильным (законсервированным) газогидратом и свободным газом. Возможно также присутствие незначительного количества неподвижной воды, содержащей ионы солей. Пласт на верхней границе контактирует с пористой областью, насыщенной раствором соли (область I на рис. 1). В некоторый момент времени над верхней границей пласта температура раствора повышается выше температуры плавления льда при данном локальном давлении и данной концентрации раствора. Тогда сверху вниз будут распространяться два фрон-

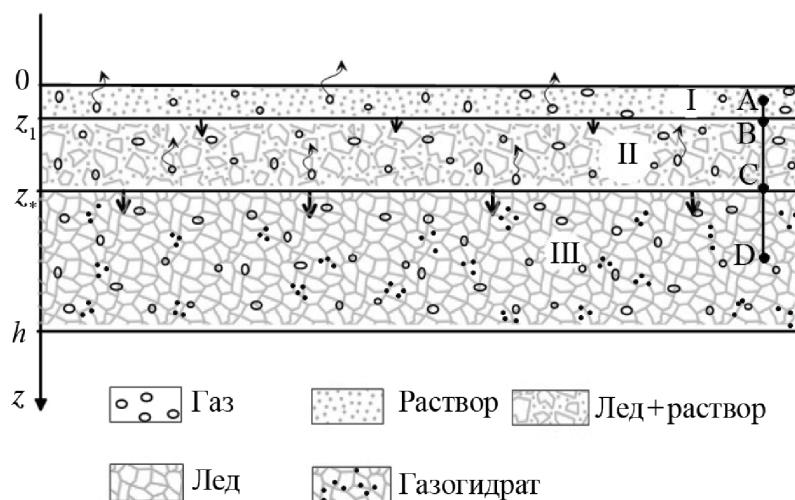


Рис. 1. Схема задачи: I — талая область пласта, насыщенная раствором соли и свободным газом; II — частично замороженная область пласта, насыщенная льдом и раствором соли, находящихся в термодинамическом равновесии, а также свободным газом; III — непроницаемая замороженная область породы, состоящая из льда, метастабильного газогидрата и свободного газа; $z = z_1(t)$ — подвижная граница области I; $z = z_*(t)$ — фронт частичного таяния льда, разложения метастабильного газогидрата и высвобождения свободного газа.

та таяния льда (рис. 1). Первый фронт — это граница между верхней талой областью пласта и областью, где имеются раствор и лед, находящиеся в термодинамическом равновесии, а также свободный газ. Второй фронт — это граница между указанным равновесным частично замерзшим слоем и исходной замороженной непроницаемой областью пласта, насыщенного льдом, метастабильным (законсервированным) газогидратом и неподвижным свободным газом в микрополостях существенно надмолекулярных размеров. Предполагается, что газогидрат на этой границе разлагается полностью, в то время как лед частично плавится на границе и может продолжать плавиться внутри области II.

Предполагается, что перед фронтом частичного плавления льда в матрице пласта содержится соль с концентрацией a_0 , которая могла адсорбироваться ранее при промерзании пород насыщенных раствором. Эта соль частично переходит в воду по мере таяния льда на межфазной границе, а затем и внутри области, содержащей раствор и лед.

Требуется сформулировать математическую модель рассматриваемого процесса деградации мерзлого пласта и разложения газогидрата с разгрузкой газа на верхней границе и исследовать закономерности и темпы эволюции такой системы с учетом осмотической силы и деформации вмещающих пород.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Приведем системы уравнений в каждом слое и граничные условия на межфазных границах (рис. 2). Направим ось z вниз и выберем систему координат, как это показано на рис. 1.

Область I. В рассматриваемой области породы насыщены только жидким раствором и свободным газом. Систему уравнений в этой талой области

можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 v_w &= -\frac{k f_w(s_w)}{\eta_w} \left(\rho_w \frac{\partial \mu_1}{\partial c} c' + p' - \rho_w g \right), \\
 v_g &= -\frac{k f_g(s_g)}{\eta_g} (p' - \rho_g g), \\
 \frac{\partial}{\partial t} (m s_w \rho_w) + (\rho_w v_w)' &= 0, \quad \rho_w = \rho_w(p, T, c), \\
 \frac{\partial}{\partial t} (m s_g \rho_g) + (\rho_g v_g)' &= 0, \quad \rho_g = \rho_g(p, T, c), \\
 (m s_w + \Gamma) \frac{\partial c}{\partial t} + v_w c' &= (s_w D c')', \\
 \Gamma(K, c) &= \frac{\partial a(K, c)}{\partial c}, \quad \lim_{Kc \rightarrow \infty} a(K, c) = a_\infty, \\
 C_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho_w C_w v_w + \rho_g C_g v_g) T' &= (\lambda_m T')', \\
 C_m &= m (s_w \rho_w C_w + s_g \rho_g C_g) + (1 - m) C_s, \\
 \lambda_m &= m (s_w \lambda_w + s_g \lambda_g) + (1 - m) \lambda_s.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Штрих означает производную по z . Здесь и далее используются следующие обозначения: m — пористость пласта; k — проницаемость пласта; s_w, s_i, s_h, s_g — насыщенность пласта раствором, льдом, газогидратом и газом соответственно; $f_w(s_w), f_g(s_g)$ — фазовые проницаемости раствора и газа; $\rho_w, \rho_i, \rho_h, \rho_g$ — плотности раствора, льда, газогидрата и газа соответственно; v_w, v_g — поля скоростей фильтрации раствора и газа; C_m — эффективная теплоемкость единицы объема насыщенной пористой среды; C_w, C_i, C_p, C_s — удельные теплоемкости раствора, льда, газа и матрицы пород; T — температура; p — давление; c — концентрация соли в растворе; c_0 — характерная концентрация; λ_m — эффективная теплопроводность насыщенной пористой среды; $\lambda_w, \lambda_i, \lambda_g, \lambda_s$ — теплопроводности раствора, льда, газа и пород; μ_1 — химический потенциал растворителя в растворе; η_w, η_g — вязкости раствора и газа; D — коэффициент диффузии соли в растворе; q — удельная теп-

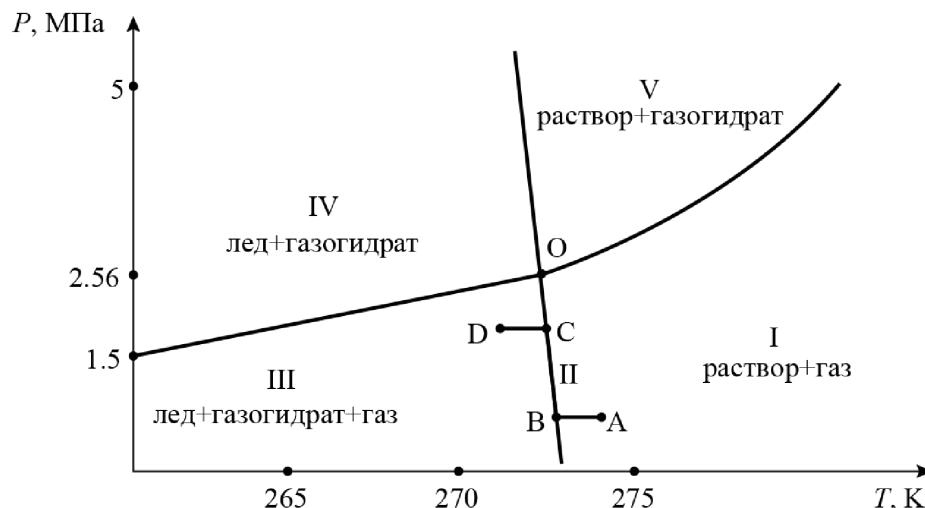


Рис. 2. Термодинамическая схема для системы лед + газогидрат. Точка О — квадрупольная точка. В области III газогидрат находится в метастабильном состоянии, а в областях IV и V — в стабильном. Точки А, В, С, Д качественно соответствуют соответствующим точкам на рис. 1. Области II на рис. 1 соответствуют отрезку ВС на рис. 2.

лота плавления льда; a — концентрация соли в твердой фазе пористой среды; K — константа адсорбционного равновесия; β_w, β_g — коэффициенты теплового расширения раствора и газа.

В (1) учтена установившаяся адсорбция соли. Например, в случае изотермы Ленгмюра уравнение адсорбции имеет вид

$$a(K, c) = a_\infty \frac{Kc}{1 + Kc}, \quad (2)$$

где a_∞ — значение предельной адсорбции; c — равновесная концентрация адсорбента в растворе.

В (1) первое и второе уравнения — это обобщенный закон Дарси, третье и четвертое — уравнения баланса массы раствора и газа, пятое и шестое уравнения — уравнения баланса соли и энергии. Отметим, что в первом уравнении (1) член, пропорциональный градиенту концентрации, есть осмотическая сила [14].

Область II. Система в этой области находится в состоянии фазового равновесия раствор-лед, потому согласно уравнению состояния температура является функцией давления и концентрации соли. Обычно считается, что температура зависит от концентрации линейно. Другими словами, уравнение состояния можно записать в виде

$$T = T_w(p) - \psi_0 c. \quad (3)$$

Здесь $T_w(p)$ — зависимость температуры замерзания от давления для чистой воды без примеси; ψ_0 — постоянная, характеризующая степень понижения температуры замерзания воды из-за наличия растворенной соли.

Зависимость (3) можно записать и иначе:

$$p = P_w(T + \psi_0 c). \quad (4)$$

Здесь $p = P_w(T)$ — известная функция: уравнение состояния для чистой жидкости, т. е. обратная функция по отношению к $T_w(p)$. Далее будем пользоваться формой (4) для уравнения состояния фазового равновесия.

Система уравнений в рассматриваемой области пласта запишется в виде

$$\begin{aligned} v_w &= -\frac{k f_w(s_w)}{\eta_w} \left[\rho_w \frac{\partial \mu_1}{\partial c} c' + \frac{dP}{dT} (T' + \psi_0 c') - \rho_w g \right], \\ v_g &= -\frac{k f_g(s_g)}{\eta_g} \left[\frac{dP}{dT} (T' + \psi_0 c') - \rho_g g \right], \\ \frac{\partial}{\partial t} &[m(s_w \rho_w + (1 - s_w - s_g) \rho_i)] + (\rho_w v_w)' = 0, \\ \rho_w &= \rho_w(T, c), \\ \frac{\partial}{\partial t} &[m s_g \rho_g] + (\rho_g v_g)' = 0, \quad \rho_s = \rho_g(T, c), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (m s_w + \Gamma) \frac{\partial c}{\partial t} + v_w c' &= (m s_w D c')' - \\ &- c_0 \frac{m \rho_i}{\rho_w} \left(\frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial s_g}{\partial t} \right), \\ \Gamma(K, c) &= \frac{\partial a(K, c)}{\partial c}, \quad \lim_{Kc \rightarrow \infty} a(K, c) = a_\infty, \\ \bar{C}_m \frac{\partial T}{\partial t} + q m \rho_i &\left(\frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial s_g}{\partial t} \right) + \\ + (\rho_w \bar{C}_w v_w + \rho_g \bar{C}_g v_g) T' &= (\lambda_m T')', \\ \bar{C}_m &= C_m - m(s_w \beta_w + s_g \beta_g) T \frac{dP}{dT}, \\ \rho_w \bar{C}_w &= \rho_w C_w - \beta_w T \frac{dP}{dT}, \\ \rho_g \bar{C}_g &= \rho_g C_g - \beta_g T \frac{dP}{dT}, \\ C_m &= m[s_w \rho_w C_w + s_g \rho_g C_g + (1 - s_w - s_g) \rho_i C_i] + (1 - m) C_s, \\ \lambda_m &= m[s_w \lambda_w + s_g \lambda_g + (1 - s_w - s_g) \lambda_i] + (1 - m) \lambda_s. \end{aligned}$$

Здесь обозначения те же, что и в системе (1).

В дальнейшем в системе (5) будем полагать теплофизические коэффициенты постоянными величинами, отнесенными к характерным значениям параметров. Также будем полагать коэффициенты $\partial \mu_1 / \partial c, \partial P_w / \partial T$ постоянными величинами, при этом сами величины давления, температуры и концентрации связаны нелинейной зависимостью фазового равновесия (4). Кроме того, для простоты будем считать фазовые проницаемости раствора и газа в законе Дарси линейными, что при численном решении не принципиально, т. е. положим

$$f_w(s_w) = s_w, \quad f_g(s_g) = s_g, \quad s_w + s_g + s_i = 1.$$

В дальнейшем будем полагать, что выполнено неравенство

$$\frac{\rho_w g}{\gamma dP/dT} \ll 1, \quad \gamma = \frac{T^0 - T_0}{h}, \quad (6)$$

где h — толщина пласта; T_0 — температура на нижней границе области III, T^0 — температура на верхней границе $z = 0$. Неравенство (6) означает, что градиент температуры на линии насыщения, вызванный гидростатическим перепадом давления, который, по оценкам, составляет примерно 1 градус на 100 м, мал по сравнению с рассматриваемым градиентом температуры.

Говоря иначе, (6) означает, что рассматриваемое приближение справедливо, когда характерные градиенты давления, возникающие в равновесной области из-за изменения температуры, много больше гидростатического градиента $\rho_w g \sim 10^4$ Па. Поэтому, согласно условию (6), в дальнейшем в законе Дарси в (1) и (5) будем пренебречь силой тяжести. Это условие для характерных проницаемостей и других параметров обычно выполняется и позволяет записать задачу в автомодельном виде. Эффекты же, связанные с гравитацией, при необходимости могут

быть учтены дополнительно как поправки к полученному решению.

Область III. В этой мерзлой области среда неподвижна, поэтому здесь имеем только уравнение теплопроводности

$$C_{mi} = \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{mi} T'', \quad (7)$$

$$C_{mi} = m (\rho_i s_{i0} C_i + \rho_h s_{h0} C_h + \rho_{gn} s_{gn} C_g) + (1 - m) C_s, \\ \lambda_{mi} = m (\rho_i s_{i0} \lambda_i + \rho_h s_{h0} \lambda_h + \rho_{gn} s_{gn} \lambda_g) + (1 - m) \lambda_s,$$

где C_{mi} , λ_{mi} – эффективные теплоемкость и теплопроводность замороженной пористой среды, насыщенной льдом, законсервированным газогидратом и неподвижным газом; s_{i0} , s_{h0} , s_{gn} – доли порового пространства, занимаемого льдом, газогидратом и свободным газом в исходном мерзлом пласте.

Следует отметить, что в общем случае в данной замороженной грунтовой области в незначительном количестве может присутствовать также незамерзшая вода, содержащая ионы солей, однако ее малым влиянием на коэффициент теплопроводности будем пренебречь.

Границные условия. Считая для простоты нижний слой бесконечным, граничные условия, т. е. внешние условия и условия сопряжения (полей и потоков воды, соли и энергии) можно записать в виде

$$z = 0: \quad T = T^0, \quad p = p^0, \quad c = c^0; \\ z = z_1: \quad \rho_w (v_w - ms_w \dot{z}_1)_- = \rho_w (v_w - ms_w \dot{z}_1)_+ - \\ - \rho_i m (1 - s_w - s_g) \dot{z}_1, \\ \rho_g (v_g - ms_g \dot{z}_1)_- = \rho_g (v_g - ms_g \dot{z}_1)_+, \\ T_- = T_+ = T_1, \\ -\lambda_- T'_- = \rho_i q m (1 - s_w - s_g) \dot{z}_1 - \lambda_+ T'_+, \\ c_- = c_+ = c_1, \\ (v_w - ms_w \dot{z}_1)_- c_1 - ms_w Dc'_- = (v_w - ms_w \dot{z}_1)_+ c_1 - \\ - ms_w Dc'_+, \\ p_- = p_+ = p_1 = P_*(T_1); \quad (8)$$

$$z = z_*: \quad \rho_w (v_w - ms_w \dot{z}_*)_- - \rho_i m (1 - s_w - s_g) \dot{z}_* = \\ = -(\rho_i s_{i0} + \gamma \rho_h s_{h0} + \rho_w s_{wn}) m \dot{z}_*, \\ \rho_g (v_g - ms_g \dot{z}_*)_- = -[(1 - \gamma) \rho_h s_{h0} + \\ + \rho_{gn} s_{gn}] m \dot{z}_*, \\ T_- = T_+ = T_*, \\ -\lambda_- T'_- + q m [\rho_i (1 - s_w - s_g) - \\ - (\rho_i s_{i0} + \gamma \rho_h s_{h0} + \rho_w s_{wn})] \dot{z}_* = -\lambda_+ T'_+, \quad (9) \\ c_- = c_*, \quad c_+ = 0, \\ (v_w - ms_w \dot{z}_*) c_- - ms_w Dc'_- = \\ = -(a_0 - a_-) \dot{z}_*, \\ a_- = \Gamma c_-, \\ s_{i0} + s_{h0} + s_{gn} + s_w = 1; \\ z \rightarrow \infty: \quad T \rightarrow T_0.$$

Отметим, что в (8)–(9) водонасыщенность на границах фазового перехода может терпеть разрыв; $\rho_{gn} s_{gn}$ и $\rho_w s_{wn}$ означают некоторое количество неподвижного свободного газа и незначительное количество неподвижного раствора в мерзлых породах. В дальнейшем эти величины для краткости положим равными нулю, однако при необходимости они легко могут быть учтены в конечных формулах и при расчетах.

Здесь и далее определим индексы следующим образом: индекс “+” характеризует указанную величину при приближении к той или иной границе снизу, индекс “–” – при приближении сверху, индекс “*” указывает на значение на границе $z = z_*$, верхний индекс “0” – на границе $z = 0$, нижний индекс “0” – на границе $z \rightarrow \infty$ или означает постоянное характерное значение величины в области.

Величины T^0 , c^0 , p^0 , T_0 , a_0 , s_{w0} , s_{i0} , s_{h0} задаются. В результате решения задачи необходимо найти подвижные границы фазовых переходов z_1 , z_* , температуру, концентрацию соли, давление, водонасыщенность и газонасыщенность в незамороженном слое I; температуру, концентрацию соли, водонасыщенность, газонасыщенность и льдонасыщенность в равновесном слое II и на его границах; температуру в замороженном слое III.

Равенства (1), (4), (5), (7)–(9) представляют собой замкнутую математическую модель деградации мерзлых пород, содержащих лед, самоконсервированные газогидраты, а также неподвижные скопления газа и, возможно, воды (в незначительном количестве) под влиянием теплого раствора соли с учетом осмоса и деформации пород.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Записывая задачу (1), (4), (5), (7)–(9) с учетом (6) в автомодельном виде, используя координату $\xi = z/\sqrt{t}$, получим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в каждом из слоев и соответствующие граничные условия. В мерзлой области III задача решается аналитически, а в областях I и II – численно. При этом решения с помощью граничных условий сшиваются на внутренних межфазных границах и подчиняются внешним граничным условиям. Численные решения находятся разностным методом с постоянным шагом, используя процедуру итераций.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Основная цель данной работы заключалась в представлении предлагаемой математической модели, в рамках которой предполагалось провести численные исследования, позволяющие ответить на ряд ключевых вопросов, относящихся к рассматриваемому процессу деградации вечной мерзлоты, содержащей самоконсервированные скопления га-

зогидратов, под тепловым и солевым воздействием. Приведем кратко некоторые из полученных результатов.

При расчетах предполагалось: температура на верхней границе талой области равна +1 градус Цельсия, а температура мерзлых пород в начальном невозмущенном состоянии равна -4 градуса; мерзлые породы засолены и при таянии льда соль переходит в раствор. На нижнем (переднем) фронте плавления задавалась концентрация соли, равная 10 г/л. На верхней границе талой области задавалась меньшая концентрация соли, равная 1 г/л. В дальнейшем предполагается рассмотреть и другие возможные варианты граничных условий, как концентрации соли, так и температуры.

Как известно, осмотические свойства проявляются при наличии полупроницаемой мембранны, разделяющей растворы солей разной концентрации [14]. В природных условиях мембранные, следовательно, осмотические свойства проявляют слабопроницаемые глинистые и илистые породы [19]. Согласно литературным данным, проницаемости глин составляют $10^{-16} \div 10^{-18} \text{ м}^2$ и менее [20]. В этой связи при расчетах в данной работе взята проницаемость 10^{-17} м^2 .

Расчеты проводились при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}
 R &= 8.3 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{моль}), \rho_w = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3, \\
 \rho_i &= 0.92 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3, \rho_h = 0.9 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3, s_{h0} = 0.8, \\
 s_{i0} &= 0.2, \gamma_h = 0.87, T^0 = 274 \text{ К}, T_0 = 269 \text{ К}, c^0 = 1 \text{ г}/\text{л}, \\
 c_0 &= 10 \text{ г}/\text{л}, k = 10^{-17} \text{ м}^2, \eta_w = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}, \\
 \eta_g &= 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}, D = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}, C_s = 1.38 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К}), \\
 C_h &= 2.08 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К}), C_i = 2.09 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К}), \\
 C_g &= 2.23 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К}), C_w = 4.18 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К}), \\
 \lambda_s &= 5.5 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}), \lambda_h = 0.5 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}), \\
 \lambda_i &= 2.18 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}), \lambda_g = 0.03 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}), \\
 \lambda_w &= 0.58 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}).
 \end{aligned}$$

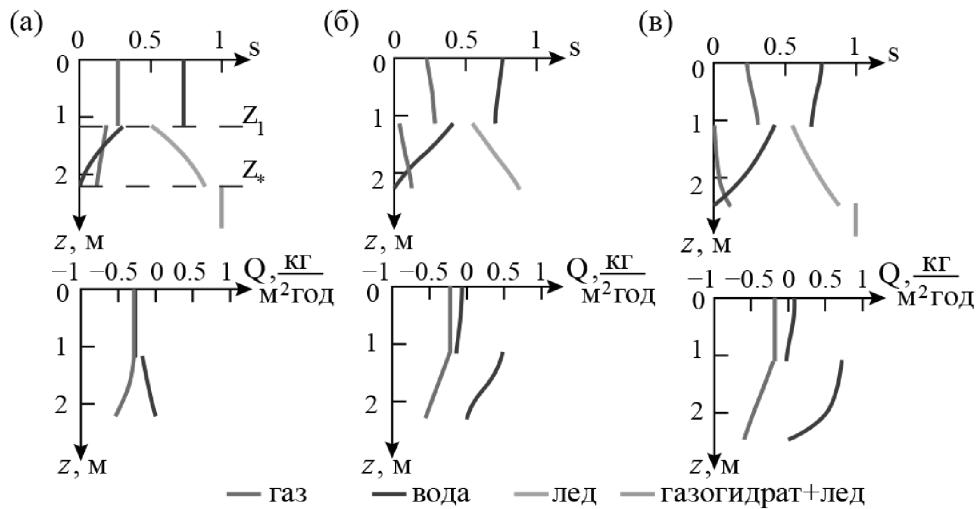


Рис. 3. Распределения насыщенности пор различными фазами в талой и в частично мерзлой переходной области — верхний ряд; массовые потоки газа и воды в указанных областях — нижний ряд, при различных значениях коэффициента осмоса: $\gamma = 0; 0.07; 0.14$ (а, б, в).

Рассмотрим рис. 3а, который относится к случаю отсутствия осмотического эффекта. Горизонтальными пунктирами показаны фронты плавления, нижний (передний) фронт, где происходит частичное плавление льда и разложение газогидрата, и верхний (задний) фронт, на котором полностью плавится оставшийся лед. На верхнем рисунке показаны распределения насыщенности пор различными фазами в талой и в частично мерзлой переходной области. Видно, что на переднем фронте воды почти нет, и поры содержат лед и газ в результате разложения газогидрата. Далее видно, что в сторону верхнего фронта насыщенность льдом уменьшается, соответственно, насыщенность водой растет, а также растет и доля пор, занятая газом. Таким образом, при таянии льда освободившаяся часть пор частично занимается водой, а частично газом. На верхней границе оставшийся лед резко тает полностью, и как водонасыщенность, так и газонасыщенность скачком увеличиваются при переходе в талую область. Эти скачки могут быть связаны не только с разницей удельных объемов воды и льда, но и с резким изменением скоростей фильтрации газа и воды, со скоростью движения фазовых границ и т. д., так, чтобы выполнялись нелинейные граничные условия для массовых потоков воды и газа. Таким образом, мы видим, что газ может занимать существенную долю объема пор, сопоставимую с объемом пор, занятых водой.

Рассмотрим нижний рис. 3а, где показаны распределения массовых потоков газа и воды с глубиной. Видно, что эти потоки при отсутствии осмоса отрицательные, т. е. направлены вверх и разгружаются через верхнюю границу талой области. Далее, на рис. 3б и 3в показаны случаи, когда коэффициенты осмоса не равны нулю. Из рисунков видно, что осмос приводит к уменьшению доли пор, занимаемой

газом, и к некоторому уменьшению массового потока газа. Относительно воды, напротив, происходит некоторый рост водонасыщенности. При этом для умеренных значений коэффициента осмоса поток воды в талой области уменьшается, но сохраняет направленность в сторону верхней границы талой области. Однако в переходной области поток становится положительным, т. е. движется в обратную сторону — в сторону движения переднего фронта. При дальнейшем росте коэффициента осмоса в обеих областях поток воды положительный, т. е. движется в ту же сторону, что и фазовые границы. Это связано с тем, что градиент концентрации положительный, поэтому осмотическая сила втягивает влагу вниз, в сторону передней фазовой границы.

Из рис. 4 следует, что осмос приводит к значительному росту давления и его градиента в переходной области. Увеличение давления вызвано втягиванием влаги в переходную область осмосом. С ростом исходной концентрации соли в мерзлых породах величины давления могут увеличиться еще в несколько раз и даже приводить к разрушению пласта.

Температура с ростом коэффициента осмоса меняется слабо, а концентрация соли и его градиент в переходной области уменьшаются, что связано с увеличением скорости деградации мерзлоты.

Наконец, рис. 5а–в показывает зависимость различных величин от коэффициента осмоса. Из рис. 5а следует, что осмос существенно ускоряет деградацию мерзлоты, несмотря на некоторое противодействие потока газа. Из рис. 5б можно увидеть расход газа и воды на границе разгрузки, т. е. верхней границе талой области. При этом отрицательные величины соответствуют разгрузке, а положительные — втеканию. Рис. 5в иллюстрирует, как растет давление вблизи передней фазовой границы при росте коэффициента осмоса. На рис. 5г показана глубина проникновения переднего фронта частичного плавления и заднего фронта полной деградации мерзлоты во времени в течение 100 тыс. лет при непрерывном процессе.

Из рис. 5б видно, что массовый расход газа через границу разгрузки, в зависимости от значения коэффициента осмоса, через год после начала про-

цесса составляют (200–300) г/(м²год), в рассматриваемых условиях, когда начальная гидратонасыщенность $s_{h0} = 0.8$. Для сравнения, согласно [12], оценки максимального потока газа в настоящее время для условий Восточно-Сибирских арктических морей составляет 204.7 г/(м²год), а для условий североамериканского моря Бофорта 188.5 г/(м²год). С учетом имеющихся естественных неопределенностей параметров задачи согласие можно считать хорошим.

В [5] экспериментальными методами получено, что в прибрежной зоне Восточно-Сибирского арктического шельфа имеет место деградация вечной мерзлоты сверху со средней скоростью 14 см/год в течение последних 30–32 лет. Оценим эту величину по полученному решению. Расстояние (м), пройденное фронтом полной деградации (задний фронт на рис. 3а) за время t (год), и средняя скорость (м/год) за это время, соответственно, равны

$$h = z_1 \sqrt{t}, \quad v = \frac{z_1}{\sqrt{t}}.$$

Учитывая, что, согласно рис. 3а, $z_1 \approx 1$ м для $t = 30$ лет, имеем $v = 0.18$ м/год = 18 см/год.

Таким образом, предложенная нелинейная модель показывает хорошее согласие с экспериментальными данными одновременно как по темпам деградации мерзлоты, так и по потоку газа через границу разгрузки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель деградации вечной мерзлоты, содержащей метастабильные законсервированные газогидраты под влиянием тепла и соли с учетом осмоса. Образуются два фронта фазового перехода, передний фронт, где разлагаются газогидраты и почти не плавится лед, и задний фронт, где происходит резкое полное плавление оставшегося льда. В литературе можно увидеть сомнения по поводу того, что поток газа может пройти через слой воды в порах. Как показали расчеты, доля пор, занимаемая газом, может быть сопоставима с водонасыщенностью, что связано с большим давлением в газе, возникающим при разложении газогидрата. Поток газа через верхнюю границу раз-

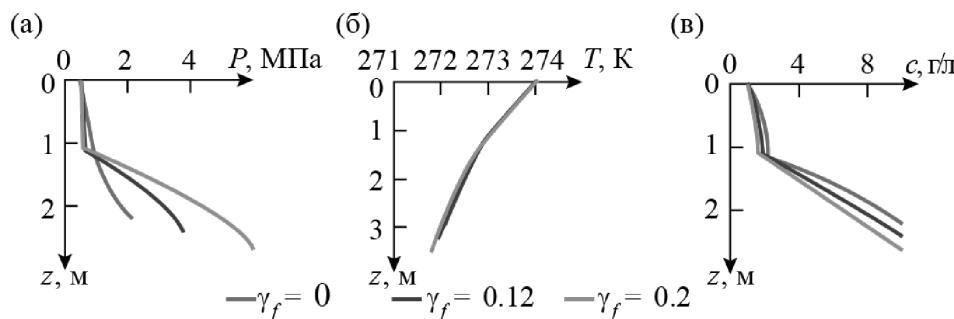


Рис. 4. Распределения давления (а), температуры (б) и концентрации соли (в) с глубиной для различных значений коэффициента осмоса: $\gamma_f = 0; 0.12; 0.2$.

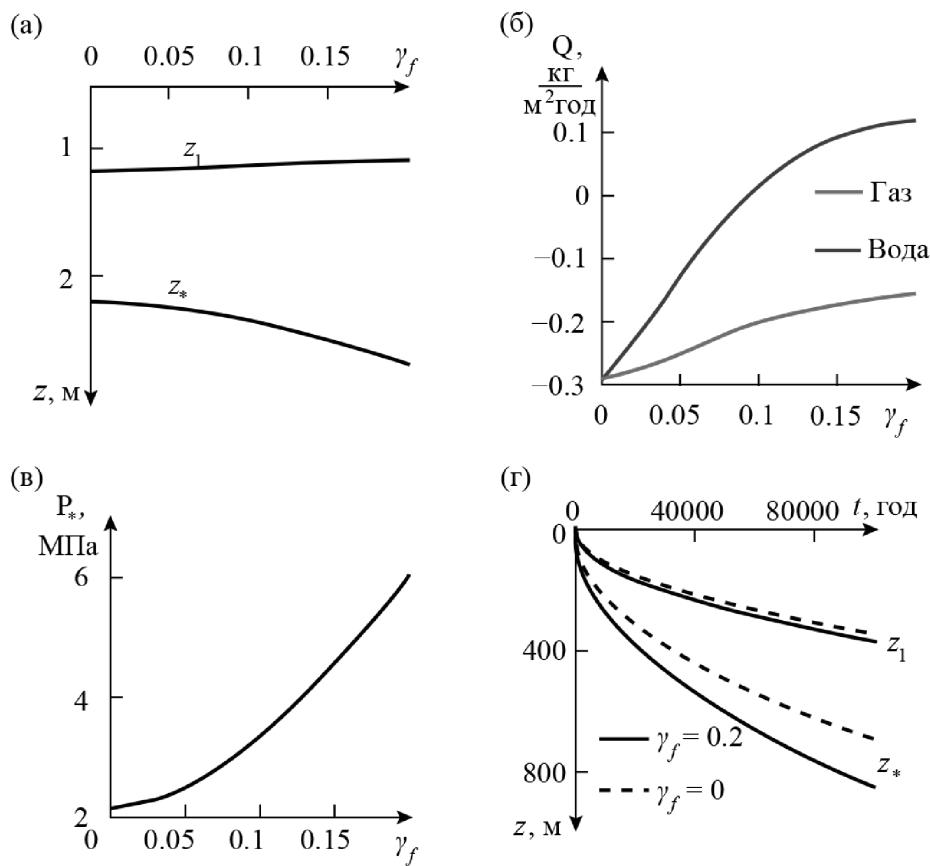


Рис. 5. Зависимость нижнего и верхнего фронтов деградации мерзлоты (а), массового расхода через 300 лет (б) и давления на нижней фазовой границе (в) от безразмерного коэффициента осмоса через один год после начала процесса; зависимость нижнего и верхнего фронтов деградации мерзлоты от времени с учетом и без учета осмоса (г).

грузки зависит от начальной гидратонасыщенности мерзлого пласта и со временем убывает. Величина потока газа через верхнюю границу разгрузки пласта составляет порядка 300 г/(м²·год) через 300 лет после начала процесса, если начальная гидратонасыщенность s_{h0} составляет 80% (через 30 лет, если s_{h0} равна 4%). В течение 100 тыс. лет передний фронт проходит примерно 800 м, а задний (фронт полного плавления) вдвое меньше. Переходная область — область между двумя фронтами — расширяется со временем, и содержание льда в этой области со временем продолжает уменьшаться. В рассматриваемых условиях как тепло, так и соль играют существенную роль в разрушении мерзлоты. Осмос также в рассмотренных условиях приводит к увеличению скорости деградации мерзлоты. Если соль влияет на плавление льда за счет понижения температуры плавления, то осмос ускоряет плавление льда за счет дополнительного увеличения давления в переходной области. Полученные на основе модели оценки хорошо согласуются с экспериментальными данными.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-67-

00025); государственного задания Института проблем геотермии и возобновляемой энергетики — филиала ОИВТ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Сергиенко В.И., Лобковский Л.И., Семилетов И.П., Дударев О.В., Дмитревский Н.Н., Шахова Н.Е., Романовский Н.Н., Космач Д.А., Никольский Д.Н., Никифоров С.Л., Саломатин А.С., Ананьев Р.А., Росляков А.Г., Салюк А.Н., Карнаух В.В., Черных Д.Б., Тумской В.Е., Юсупов В.И., Куриленко А.В., Чувилин Е.М., Буханов Б.А. Деградация подводной мерзлоты и разрушение гидратов шельфа морей Восточной Арктики как возможная причина “метановой катастрофы”: некоторые результаты комплексных исследований 2011 года // ДАН. 2012. Т. 446. № 3. С. 330. <https://doi.org/10.1134/S1028334X12080144>
- Якушев В.С. Природный газ и газовые гидраты в криолитозоне. М.: ВНИИГАЗ, 2009. 192 с.
- Романовский Н.Н., Елисеева А.А., Гаврилов А.В., Типенко Г.С., Хуббертен Х.В. Многолетняя динамика толщ мерзлых пород и зоны стабильности гидратов газов в рифтовых структурах арктического шельфа Восточной Сибири (сообще-

- ние 2) // Криосфера Земли. 2006. Т. 10. № 1. С. 29–38.
4. *Shakhova N., Semiletov I., Salyuk A., Kosmach D., Leifer I., Rekant P.* Geochemical and geophysical evidence of methane release over the east Siberian Arctic shelf // *J. Geophysical Research: Oceans*. 2010. V. 115. N 8. P. C08007. <https://doi.org/10.1029/2009JC005602>
5. *Shakhova N., Semiletov I., Gustafsson O., Sergienko V., Lobkovsky L., Dudarev O., Timskoy V., Grigoriev M., Mazurov A., Salyuk A., Ananiev R., Koshurnikov A., Kosmach D., Charkin A., Dmitrevsky N., Karnaugh V., Gunar A., Meluzov A., Chernykh D.* Current rates and mechanisms of subsea permafrost degradation in the East Siberian Arctic Shelf // *Nature Communications*. 2017. V. 8. P. 15872. <https://doi.org/10.1038/ncomms15872>
6. *Криотермия и натуральные газгидраты в Северном Ледовитом океане / Под ред. В.А. Соловьева и др.* Л.: Севморрео, 1987. 150 с.
7. *Chuvilin E., Ekimova V., Bukhanov B. et al.* Role of salt migration in destabilization of intrapermafrost hydrates in the Arctic shelf: experimental modeling // *Geosciences*. 2019. № 9. P. 188:1–188:18. <https://doi.org/10.3390/geosciences9040188>
8. *Чувилин Е.М., Екимова В.В., Давлетшина Д.А., Буханов Б.А., Кривохат Е.О.* Солеперенос в мерзлых породах, содержащих гидрат метана, при их взаимодействии с солевыми растворами // Криосфера Земли. 2023. Т. 27. № 6. С. 40–50. <https://doi.org/10.15372/KZ20230604>
9. *Harrison W.D., Osterkamp T.E.* A Coupled Heat and Salt Transport Model for Subsea Permafrost // Report No. UAG R-247. 1976 (Geophysical Institute, University of Alaska).
10. *Цыпкин Г.Г.* Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: Физматлит, 2009. 232 с.
11. *Lobkovsky L.I., Ramazanov M.M., Semiletov I.P., Alekseev D.A.* Mathematical model of the decomposition of unstable gas hydrate accumulations in the cryolithozone // *Geosciences* (Switzerland). 2022. V. 12. № 9. P. 345. <https://doi.org/10.3390/geosciences12090345>
12. *Frederick J.M., Buffett B.A.* Taliks in relict submarine permafrost and methane hydrate deposits: Pathways for gas escape under present and future conditions // *J. Geophys. Res. Earth Surf.* 2014. V. 119. Iss. 2. P. 106–122. <https://doi.org/10.1002/2013JF002987>
13. *Рамазанов М.М., Булгакова Н.С., Лобковский Л.И., Чувилин Е.М., Давлетшина Д.А., Шахова Н.Е.* Математическое и экспериментальное моделирование кинетики диссоциации гидрата метана в мерзлых породах при снижении внешнего давления // Доклады РАН. Науки о Земле. 2024. Т. 516. № 2. С. 622–631. <https://doi.org/10.31857/S2686739724060152>
14. *Рамазанов М.М., Каракин А.В., Лобковский Л.И.* Математическая модель движения растворов с учетом осмотического эффекта // ДАН. 2019. Т. 489. № 1. С. 75–79. <https://doi.org/10.31857/S0869-5652489175-79>
15. *Рамазанов М.М.* Математическая модель фильтрации растворов в пористой среде с полупроницаемыми включениями. Осмотическая конвекция // Инженерно-физический журнал. 2023. Т. 96. № 3. С. 823–833. <https://doi.org/10.1007/s10891-023-02744-7>
16. *Ramazanov M., Bulgakova N., Lobkovsky L.* Mathematical model of freezing of rocks saturated with salt solution taking into account the influence of osmosis // *Russian Journal of Earth Sciences*. 2023. V. 23. № 5. P. ES5007. <https://doi.org/10.2205/2023ES000857>
17. *Рамазанов М.М., Булгакова Н.С., Лобковский Л.И.* Математический критерий образования криопэгов в процессе промерзания пород, насыщенных раствором соли // ДАН. Физика, технические науки. 2024. Т. 515. № 1. С. 59–66.
18. *Стрелецкая И.Д., Лейбман М.О.* Криогеохимическая взаимосвязь пластовых льдов, криопэгов и вмещающих их отложений центрального Ямала // Криосфера Земли. 2002. Т. 6. № 3. С. 15–24.
19. *Neuzil C.E.* Osmotic generation of “anomalous” fluid pressures in geological environments // *Nature*. 2000. V. 40. P. 182–184. <https://doi.org/10.1038/35003174>
20. *Гольдберг В.М., Скворцов Н.П.* Проницаемость и фильтрация в глинах. М.: Недра, 1986. 160 с.

MATHEMATICAL MODEL OF DEGRADATION OF PERMAFROST ROCKS CONTAINING ACCUMULATIONS OF METASTABLE GAS HYDRATES AND FREE GAS UNDER THE THERMAL AND SALINE EFFECTS OF SOLUTIONS

M. M. Ramazanova^b, N. S. Bulgakova^a, Academician of RAS L. I. Lobkovsky^c

^a*Institute for Geothermal Research and Renewable Energy"—Branch of Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences, Makhachkala, Russia*

^b*Sadovsky Institute of Geosphere Dynamics, Moscow, Russia*

^c*Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

A mathematical model has been formulated for the degradation of permafrost rocks containing ice, accumulations of metastable self-preserved gas hydrates and free gas, under the thermal and salt action of solutions, taking into account the osmotic effect and deformation of the host rocks. The evolution of this system is investigated numerically in a self-similar formulation. The patterns and rates of development characteristic of the process under consideration, taking into account the influence of osmosis, are revealed. The estimates obtained are in good agreement with the experimental and theoretical data available in the literature on the degradation of hydrocarbon-containing frozen rocks.

Keywords: permafrost rocks, gas hydrates, ice melting, degradation, solutions, osmosis, mathematical model

УДК 539.52:548.735.6/7

ВКЛАД ТЕКСТУРЫ И СТРУКТУРЫ В ДЕФОРМИРУЕМОСТЬ ЛИСТОВ СПЛАВА СИСТЕМЫ Al–Mg–Si

© 2024 г. В. Н. Серебряный^{1,*}, А. С. Колянова¹, А. С. Гордеев¹

Представлено академиком РАН К. В. Григоровичем 02.04.2024 г.

Поступило 17.05.2024 г.

После доработки 17.05.2024 г.

Принято к публикации 01.08.2024 г.

Предложена модифицированная модель Тейлора для количественной оценки параметра деформируемости листов металлов и сплавов — коэффициента нормальной анизотропии — с учетом вклада кристаллографической текстуры и структурной анизотропии исследуемого материала. Модель применена для предсказания зависимости коэффициента нормальной анизотропии от угла между направлениями прокатки и растяжения в плоскости листа сплава системы Al–Mg–Si. Получено хорошее согласование между расчетными и экспериментальными значениями коэффициента нормальной анизотропии.

Ключевые слова: коэффициент нормальной анизотропии, текстура, функция распределения ориентировок, микроструктура зерен, модель Тейлора, лист, алюминиевый сплав

DOI: 10.31857/S2686740024060116, EDN: HUWQYI

Листы металлов и сплавов часто подвергаются штамповке с целью придания им необходимой формы. Они должны обладать необходимым уровнем механических свойств и параметров деформируемости, чтобы быть востребованными в таких отраслях промышленности, как автомобильная, авиационно-космическая и электронная. Одним из параметров деформируемости, предсказывающим способность материала к листовой штамповке, является коэффициент нормальной анизотропии (КНА) R . Он определяется из механических испытаний на одноосное растяжение листовых образцов, как правило, вырезанных для нескольких направлений в плоскости листа по отношению к направлению прокатки, и характеризует отношение поперечных деформаций к нормальным деформациям в листе [1]:

$$R = \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_S} = \frac{\ln(b_D/b)}{\ln(s_D/s)}, \quad (1)$$

где b и s — ширина и толщина образца до деформации; b_D и s_D — ширина и толщина образца после деформации. Параметр R в значительной степени определяется кристаллографической текстурой листового полуфабриката. Для установления количественной связи между R и кристаллографической текстурой в виде коэффициентов $C_{\lambda}^{\mu\nu}$ разложения

в ряд по сферическим функциям распределения ориентировок (ФРО) используется модель пластической деформации Тейлора [2–4], в рамках которой каждое зерно в поликристалле претерпевает ту же деформацию, что и весь образец. Однако это условие часто не выполняется в различных процессах пластической деформации, так как отдельные зерна изменяют свою форму, отличающую от формоизменения образца. В этом случае применение модели Тейлора не обеспечивает совпадение расчетных и экспериментальных значений R .

Цель настоящей работы — разработать в рамках модели Тейлора методику расчета КНА с учетом параметров текстуры и структурной анизотропии для листов металлов и сплавов с кубической симметрией решетки. Предварительно прокатанные и термообработанные листовые полуфабрикаты на последнем этапе подвергаются одноосному растяжению для определения параметров анизотропии и механических свойств. В результате в них часто формируется микроструктура смешанного типа, содержащая зерна различной формы и с разной степенью вытянутости, включая и равноосные. Предлагаемая методика расчета КНА предназначена для данного случая. В ней теоретический анализ в рамках модели Тейлора производится отдельно для равноосных и вытянутых зерен. Для первых расчет производится по классической модели Тейлора.

В рамках данной модели трехосная пластическая деформация образца описывается тензором

¹ Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова Российской академии наук, Москва, Россия
* E-mail: vns@imet.ac.ru

деформации [2, 3]:

$$E_{ij}^S = \eta \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -(1-q) \end{vmatrix}, \quad (2)$$

т. е. удлинением η в направлении x_1 и сжатием $-\eta q$ и $-\eta(1-q)$ в направлениях x_2 и x_3 , соответственно, q — параметр, определяющий тензор деформации. В рассматриваемом случае направление x_1 совпадает с направлением прокатки, x_2 — с поперечным направлением, а x_3 — с направлением нормали в образце. Каждое зерно в поликристаллическом образце претерпевает ту же деформацию, что и весь поликристалл, определяемую тензором (2) в системе координат кристаллита. Деформация происходит скольжением по пяти независимым системам [2, 3]. Согласно принципу виртуальной работы, среди всех возможных комбинаций пяти систем скольжения активной комбинацией является та, что дает минимальный суммарный сдвиг

$$M = \min \sum_{\lambda=1}^5 \tau_{\lambda}^c |b_{\lambda}^m|, \quad (3)$$

где τ_{λ}^c — критическое напряжение сдвига для конкретной системы скольжения, а b_{λ}^m — сдвиг, вызываемый этой системой скольжения [2–4], M — фактор Тейлора. Фактор Тейлора $M_p(q, g)$ для равноосных зерен определяется по формуле (3) пяти активным системам скольжения. Усредненный по всем ориентировкам фактор Тейлора $\bar{M}_p(q, \alpha)$ вычисляется с помощью коэффициентов ФРО $C_{\lambda}^{\mu\nu}$ и аналогичных им коэффициентов $m_{\lambda, \rho}^{\mu\nu}$ для фактора Тейлора [2, 3]:

$$\bar{M}_p(q, \alpha) = \sum_{\lambda=0}^L \sum_{\mu=1}^{N(\lambda)} \sum_{\nu=1}^{N'(\lambda)} m_{\lambda}^{\mu\nu} C_{\lambda}^{\mu\nu} \frac{1}{2\lambda+1} \cos \alpha, \quad (4)$$

где λ , μ , ν — индексы суммирования; L , $N(\lambda)$, $N'(\lambda)$ — пределы суммирования, зависящие от симметрии материала; $m_{\lambda}^{\mu\nu}$ — коэффициенты разложения фактора Тейлора в ряд по сферическим гармоникам соответствующей симметрии; $C_{\lambda}^{\mu\nu}$ — коэффициенты ФРО; α — угол между рассматриваемым направлением и направлением прокатки (НП). Вытянутость зерен можно оценить по микрофотографиям, полученным оптическим методом, как правило, для долевого (вдоль НП) и поперечного (поперек НП) сечений по толщине листового полуфабриката. Для вытянутых вдоль и поперек НП зерен один из пяти компонент тензора деформации, в первом случае e_{12} , а во втором — e_{23} , вследствие возможных сдвиговых деформаций становятся неопределенными [4]. Это приводит к уменьшению линейно независимых компонент тензора деформации до четырех, и, в результате, деформация в этих зернах осуществляется по четырем системам скольжения. В этом случае фактор Тейлора $M_b(q, g)$ определяется по фор-

муле (3) по четырем активным системам скольжения и усредненные факторы Тейлора для вытянутых вдоль НП зерен $\bar{M}_b^{\parallel}(q, \alpha)$ и поперек $\bar{M}_b^{\perp}(q, \alpha)$ вычисляются по формуле, аналогичной (4). Тогда общий усредненный фактор Тейлора $\bar{M}(q, \alpha)$ определяется из соотношения

$$\bar{M}(q, \alpha) = \bar{M}_p(q, \alpha) \cdot x + \left(\frac{a}{a+b} \cdot \bar{M}_b^{\parallel}(q, \alpha) + \frac{b}{a+b} \cdot \bar{M}_b^{\perp}(q, \alpha) \right) \cdot (1-x), \quad (5)$$

где $\bar{M}_p(q, \alpha)$ и $\bar{M}_b^{\parallel}(q, \alpha)$, $\bar{M}_b^{\perp}(q, \alpha)$ — усредненные факторы Тейлора для равноосных и вытянутых вдоль и поперек НП зерен, соответственно; a и b — дополнительная степень вытянутости зерен по отношению к степени вытянутости образца вдоль и поперек НП; x — объемная доля равноосных зерен. Минимизированием $\bar{M}(q, \alpha)$ по q получаем зависимость $q_{\min}(\alpha)$, из которой определяется параметр анизотропии $R(\alpha)$:

$$R(\alpha) = \frac{q_{\min}(\alpha)}{1 - q_{\min}(\alpha)}. \quad (6)$$

Предложенная методика расчета зависимости КНА от угла α в плоскости листа $R(\alpha)$ была опробована в листе толщиной 1.0 мм алюминиевого сплава химического состава Al–0.6Mg–1.5Si–0.5Fe (вес.-%), предварительно подвергнутого холодной прокатке и термообработке, включающей быстрый нагрев (в течение 2 мин) до 550°C, закалку в воду и последующее старение при 65°C в течение 8 ч [5]. Листовые образцы данного сплава до и после одноосного растяжения, а также микроструктура в долевом и поперечном направлениях и экспериментальные значения $R(\alpha)$ для трех направлений растяжения в плоскости листа под углами α 0, 45 и 90° к НП были предоставлены к.т.н. А. Ф. Гречниковой (АО “СМЗ”, г. Самара). Текстуру листов сплава до и после одноосного растяжения измеряли в виде четырех неполных полюсных фигур (ПФ) 111, 200, 220 и 311 методом “на отражение” на рентгеновском дифрактометре ДРОН-7 в $C_{O_{ka}}$ -излучении в диапазоне углов наклона α (0–70°) и поворотов β (0–360°) с шагом по α и β = 5°. По экспериментальным ПФ восстанавливали ФРО методом компонент с определением объемных долей основных ориентировок W_i [6–8]. Коэффициенты $C_{\lambda}^{\mu\nu}$ разложения ФРО по сферическим функциям рассчитывали по объемным долям основных ориентировок W_i согласно методике, описанной в работах [3, 9]. Количественные параметры степени анизотропии зеренной структуры определяли с помощью программы Image ExpertPro 3.0.

При одноосном растяжении листов металлов и сплавов с гранецентрированной кубической (ГЦК) решеткой основной системой скольжения является октаэдрическое скольжение (111)[110]. Однако в алюминиевых сплавах системы Al–Mg–Si были

выявлены в плоскостях (100) мельчайшие выделения игольчатого типа плотностью 10^{17} см $^{-3}$ и размером в длину и поперечным сечением 66 и 7 нм, соответственно [10]. Эти выделения при растяжении при комнатной температуре активируют поперечное скольжение дислокаций от плоскостей (111) к плоскостям (100) и последующее скольжение по последним [11, 12]. Таким образом, для данных сплавов к октаэдрическому скольжению добавляется система скольжения (001)[110]. Критические напряжения сдвига (КНС) на этих системах скольжения оценивали исходя из обобщенного закона Шмида, предполагая, что отношение КНС для (111)[100] и (001)[110] систем скольжения равно отношению соответствующих усредненных ориентационных факторов, рассчитанных с учетом объемных долей основных ориентировок [13, 14].

На рис. 1 приведены сечения ФРО для углов $\varphi_2 = 0$ и 45° листов исследуемого сплава до (а) и после (б) растяжения. В табл. 1 и 2 представлены основные ориентировки с их объемными долями и соответствующие им факторы Шмида и ориентационные факторы для листов сплава до и после растяжения, соответственно. Из рис. 1 и данных табл. 1, 2 видно, что в текстуре листа сплава до и после растяжения присутствует несколько одинаковых кубических ориентировок и ориентировка типа (113) [2–11]. После растяжения к этим ориентировкам добавляются новые ориентировки с суммарной объемной

долей 0.22 (см. табл. 2). Из данных табл. 1 и 2 определили отношение КНС для (111)[110] и (001)[110] систем скольжения в начале и в конце растяжения: 2.16 и 1.77, соответственно.

На рис. 2 приведена микроструктура листа исследуемого сплава в долевом (а) и поперечном (б) направлениях. Видно, что большая часть зерен вытянуты вдоль и поперек НП, однако присутствуют и равноосные зерна. Количественная обработка микроструктуры с помощью Image ExpertPro 3.0 показала, что средний размер зерна составляет 43 мкм, при чем 90% зерен вытянутые и 10% – равноосные. При этом степень вытяжки зерен в долевом и поперечном направлениях составляла 2.14 и 2.19, соответственно. Вместе с тем, степень вытяжки образца в долевом и поперечном направлениях равнялась, соответственно, 1.75 и 0.75. Тогда дополнительные степени вытяжки зерен в долевом (а) и в поперечном (б) направлениях, соответственно, равны 0.39 и 1.44. Используя представленную выше методику расчета КНА и предполагая, что при растяжении деформация листов алюминиевого сплава системы Al–Mg–Si обеспечивается скольжением дислокаций по системам (111)[110] и (001)[110] с соотношением КНС 1:1.96, усредненным до и после растяжения, а также с учетом полученных текстурных и структурных данных, рассчитали зависимость $R(\alpha)$ от угла α между НП и направлением растяжения образцов в плоскости листа.

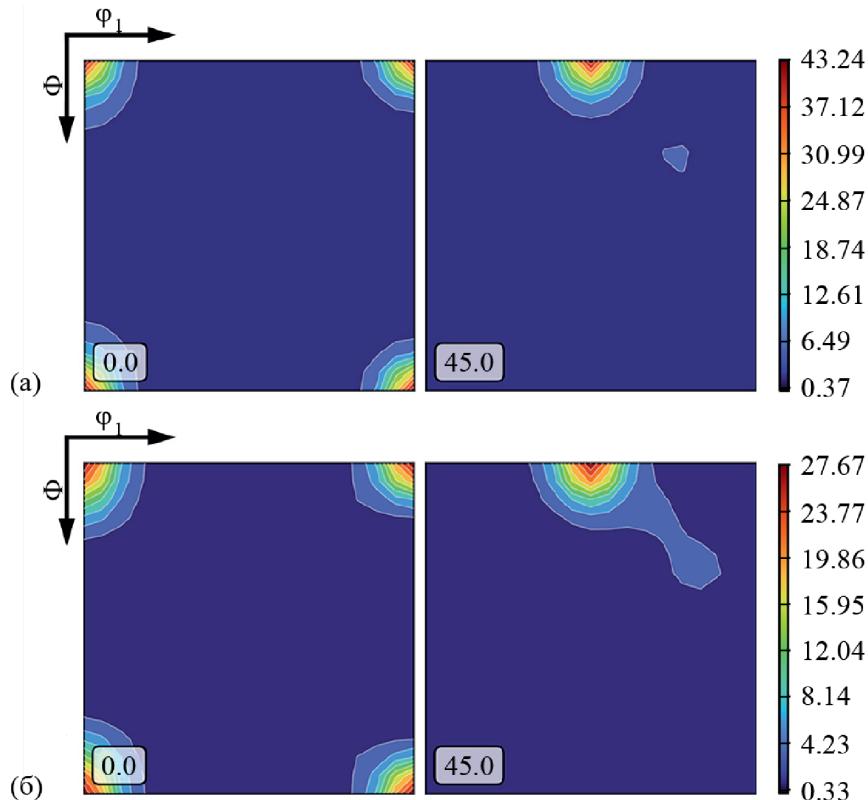


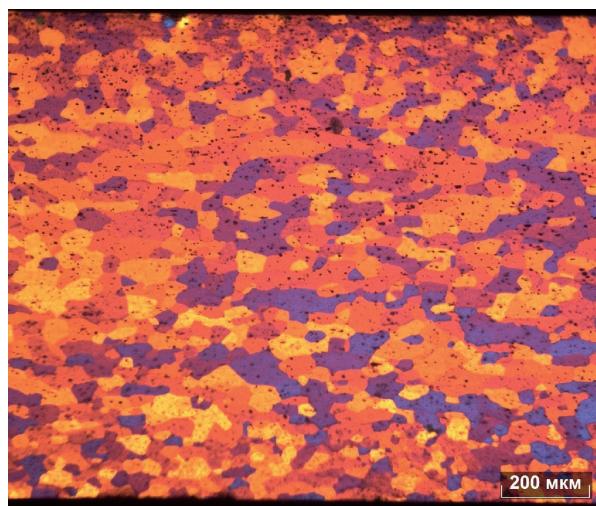
Рис. 1. Сечения ФРО для $\varphi_2 = 0$ и 45° , рассчитанные для листов сплава системы Al–Mg–Si до (а) и после (б) одноосного растяжения.

Таблица 1. Основные ориентировки листа сплава до растяжения, их объемные доли и соответствующие им факторы Шмидта и ориентационные факторы

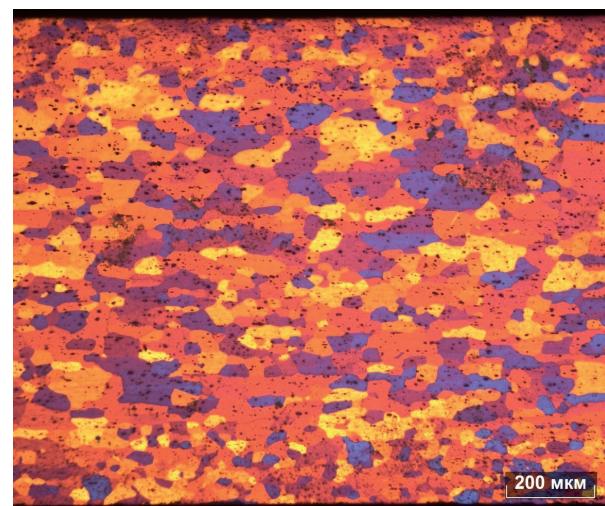
№	(hkl)[uvw]	Углы Эйлера (по Бунге) в °			W_j	m_j для (111) [110]	m_j для (001) [110]			
		φ_1	Φ	φ_2						
1	(001)[100]	0	1	0	0.09	0.272	0.000			
2	(016)[100]	358	9	1	0.12	0.272	0.000			
3	(01.11)[7-10]	9	5	358	0.19	0.283	0.066			
4	(131)[2-11]	20	73	21	0.24	0.182	0.236			
		Бестекстурная составляющая			0.36	0.446	0.214			
Обобщенный фактор Шмидта						0.315	0.146			
Ориентационный фактор						3.173	6.839			
Отношение ориентационных факторов							2.16			

Таблица 2. Основные ориентировки листа сплава после растяжения, их объемные доли и соответствующие им факторы Шмидта и ориентационные факторы

№	(hkl)[uvw]	Углы Эйлера (по Бунге) в °			W_j	m_j для (111) [110]	m_j для (001) [110]			
		φ_1	Φ	φ_2						
1	(001)[24.-10]	1	0	0	0.09	0.277	0.020			
2	(160)[001]	90	90	9	0.10	0.272	0.000			
3	(171)[1-16]	79	83	10	0.15	0.273	0.112			
4	(164)[9-9.11]	51	57	9	0.17	0.153	0.247			
5	(192)[4-3.12]	70	77	6	0.05	0.250	0.184			
6	(252)[3-47]	58	70	21	0.12	0.186	0.245			
		Бестекстурная составляющая			0.32	0.446	0.214			
Обобщенный фактор Шмидта						0.297	0.168			
Ориентационный фактор						3.367	5.952			
Отношение ориентационных факторов							1.77			



(a)



(б)

Рис. 2. Микроструктура листа сплава системы Al–Mg–Si в долевом (а) и поперечном (б) направлениях.

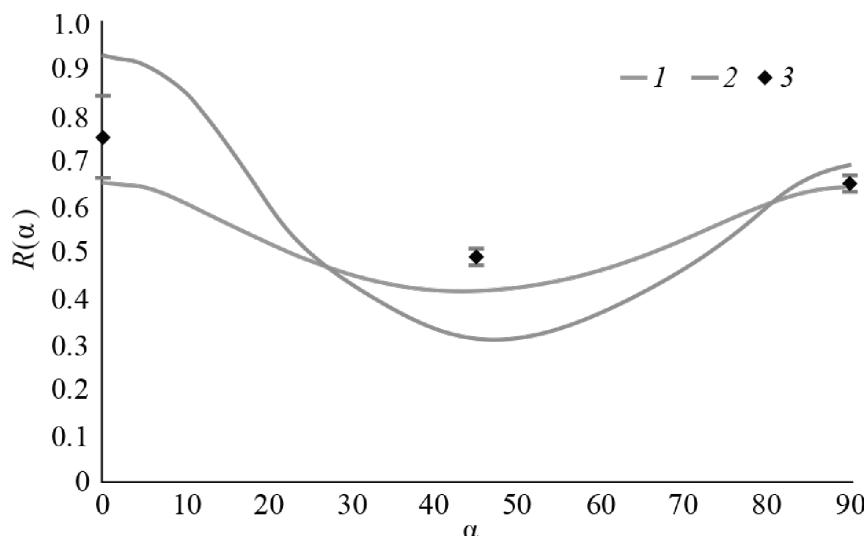


Рис. 3. Расчетные по предложенной модели (1) и классической модели Тейлора (2) и экспериментальная (3) зависимости $R(\alpha)$ в плоскости листа сплава системы Al–Mg–Si.

Для сравнения привели также зависимость $R(\alpha)$, рассчитанную в рамках модели Тейлора без учета влияния структурной анизотропии. Результаты расчета $R(\alpha)$ вместе с экспериментальными значениями КНА, полученными из механических испытаний, приведены на рис. 3. Видно, что учет структурной анизотропии при расчете зависимости $R(\alpha)$ приближает расчетные значения к экспериментальным по сравнению с величиной $R(\alpha)$, рассчитанной в рамках классической модели Тейлора. Степень отклонения расчетных и экспериментальных значений $R(\alpha)$ находится в пределах экспериментальных погрешностей измерения R и не превышает уровень отклонения, полученный для листов данного сплава в состоянии T4 с использованием вязко-пластичной самосогласованной модели [15, 16]. Следует также отметить, что небольшой уровень плоскостной анизотропии в листах этого сплава указывает на благоприятное влияние сформировавшихся в процессе технологии параметров текстуры и структуры.

Таким образом, подводя итоги проведенных исследований, можно отметить, что впервые разработана методика количественной оценки КНА для листов металлов и сплавов с кубической решеткой в рамках модели Тейлора с учетом кристаллографической текстуры и структурной анизотропии. Методика успешно опробована для предсказания зависимости $R(\alpha)$ при растяжении в плоскости листа алюминиевого сплава системы Al–Mg–Si. В дальнейшем разработанная методика может быть использована для определения количественных параметров текстуры и структуры, обеспечивающих заданный уровень нормальной и плоскостной анизотропии в листах различных металлов и сплавов с кубической решеткой. Это открывает дополнительные возможности целенаправленного поиска оптимальных режимов деформации и термообработки для полу-

чения листовых полуфабрикатов с высокими показателями штампуемости.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят к.т.н. А. Ф. Гречникову (АО «СМЗ», г. Самара) за предоставленные образцы листов сплава, а также за данные по микроструктуре и механическим испытаниям.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены по государственному заданию № 075-00320-24-00.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аверкиев Ю.А., Аверкиев А.Ю. Технология холодной штамповки. М.: Машиностроение, 1989. 304 с.
2. Bunge H.J. Texture Analysis in Materials Science. Mathematical Methods. Gottingen: Cuvillier Verlag, 1993. 595 p.
3. Park N.J., Klein H., Dahlem-Klein E. Program Systems: Physical Properties of Textured Materials. Gottingen: Cuvillier Verlag, 2001. 150 p.
4. Van Houtte P., Li S., Seefeldt M., Delannay L. Deformation Texture Prediction: from the Taylor Model to the advanced Lamel Model // International Journal of Plasticity. 2005. V. 21. P. 589–624. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2004.04.011>
5. Chen K.-X., Yan L.-Z., Zhang Y.-A., Li X.-W., Li Z.-H., Gao G.-J., Xiong B.-Q., Liu H.-W. Investigation of particles on the microstructure, texture and formability of Al–Mg–Si–Zn alloy for automotive body sheet // J. Mater. Sci. 2022. V. 57. P. 17779–17796. <https://doi.org/10.1007/s10853-022-07716-5>

6. *Helming K., Schwarzer R., Rauschenbach B., Geier S., Wenk H.-R., Ullemaier K., Heinitz J.* Texture estimates by means of components // *Z. Met.* 1994. V. 85. P. 545–553.
<https://doi.org/10.1515/ijmr-1994-850803>
7. *Schaeben H.* A Simple Standard Orientation Density Function: The Hyperspherical de la Vallée Poussin Kernel // *Physica Status Solidi B*. 1997. V. 200. P. 367–376.
[https://doi.org/10.1002/1521-3951\(199704\)200:2<367::AID-PSSB367>3.0.CO;2-I](https://doi.org/10.1002/1521-3951(199704)200:2<367::AID-PSSB367>3.0.CO;2-I)
8. *Ivanova T.M., Savelova T.I.* Robust method of approximating the orientation distribution function by canonical normal distributions // *The Physics of Metals and Metallography*. 2006. V. 101. P. 114–118.
<https://doi.org/10.1134/S0031918X06020037>
9. *Serebryany V.N.* Plastic Anisotropy Prediction by Ultrasonic Texture Data // *Texture and Microstructure*. 1996. V. 25. P. 223–228.
10. *Delmas F., Majimel J., Vivas M., Molenat G., Couret A., Coujou A.* Cross-slip and glide in 001 planes of Al–Mg–Si alloy 6056 // *Phil. Mag. Letters*. 2003. V. 83. P. 289–296.
<https://doi.org/10.1080/095008303100>
11. *Caillard D., Martin J.-L.* Glide of dislocations in non-octahedral planes of fcc metals: a review // *Int. J. Mat. Res. (formerly Z. Metallkd.)*. 2009. V. 100. № 10. P. 1403–1410.
<https://doi.org/10.3139/146.110190>
12. *Colin J., Beauchamp P., Brochard S., Grilhe J., Coujou A.* Non-linear elastic effects in plasticity: 100 dislocation gliding in aluminum-based alloy // *EPL*. 2007. V. 78. P. 16002 (p1–p4).
<https://doi.org/10.1209/0295-5075/78/16002>
13. *Kocks U.F., Tome C.N., Wenk H.R.* Texture and Anisotropy. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1998. 675 p.
14. *Serebryany V.N., Rokhlin L.L., Monina A.N.* Texture and Anisotropy of Mechanical Properties of the Magnesium Alloy of Mg–Y–Gd–Zr System // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2014. V. 5. № 2. P. 116–123.
<https://doi.org/10.1134/S207511331402018X>
15. *Engler O., Schafer C., Runar Myhr O.* Effect of natural ageing and pre-straining on strength and anisotropy in aluminium alloy AA 6016 // *Materials Science & Engineering A*. 2015. V. 639. P. 65–74.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2015.04.097>
16. *Engler O.* Effect of precipitation state on plastic anisotropy in sheets of the age-hardenable aluminium alloys AA 6016 and AA 7021 // *Materials Science & Engineering A*. 2022. V. 830. 142324.
<https://doi.org/10.1016/j.msea.2021.142324>

CONTRIBUTION OF TEXTURE AND STRUCTURE TO THE FORMABILITY OF ALLOY SHEETS OF THE Al–Mg–Si SYSTEM

V. N. Serebryany^a, A. S. Kolyanova^a, A. S. Gordeev^a

^aBaikov Institute of Metallurgy and Materials Science, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS K. V. Grigorovich

A modified Taylor model is proposed for quantitative evaluation of the formability parameter of sheets of metals and alloys – the normal anisotropy coefficient (NAC). The model takes into account the contribution of the crystallographic texture and structural anisotropy of the material under study. The model was used to predict the dependence of the NAC on the angle between the rolling and tension directions in the plane of the Al–Mg–Si alloy sheet. Good agreement was obtained between modeled and experimental values of the NAC.

Keywords: normal anisotropy coefficient, texture, orientation distribution function, grain microstructure, Taylor model, sheet, aluminum alloy