ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2023, том 513, с. 34–40

ФИЗИКА

УДК 537.2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ВКЛЮЧЕНИЙ В МАТРИЧНОМ КОМПОЗИТЕ

© 2023 г. Академик РАН **В. И. Колесников**[1], **В. Б. Яковлев**[2], **И. В. Лавров**[2], **А. П. Сычев**[3,*], **А. В. Бардушкин**[2]

Поступило 15.06.2023 г.
После доработки 15.06.2023 г.
Принято к публикации 04.08.2023 г.

Получены выражения для операторов концентрации напряженности и индукции электрического поля на поверхности включений в матричном композите в зависимости от формы и объемной доли включений в материале. Данные операторы связывают поля на поверхности включения со стороны матрицы со средними величинами напряженности и индукции электрического поля в образце композита.

Ключевые слова: композит, матрица, включение, операторы концентрации напряженности и индукции электрического поля, приближение Максвелла–Гарнетта, обобщенное сингулярное приближение

DOI: 10.31857/S2686740023060093, **EDN:** HTSKME

Задачи исследования свойств поликристаллов и композитов условно могут быть разделены на две отдельные категории. К первой относятся задачи вычисления эффективных характеристик, т.е. характеристик неоднородного материала как целого [1, 2]. Ко второй – задачи по определению локального перераспределения значений приложенных к материалу воздействий [3–5]. Особое место среди таких задач занимают методы анализа физико-механических полей на поверхности включений в неоднородных средах [6, 7].

Межзеренные и межфазные границы играют важнейшую роль в формировании электрофизических и механических свойств поликристаллов и композитов, так как они являются областями (зонами) скопления дефектов и примесей. При этом их роль резко возрастает при уменьшении размеров кристаллитов и включений [8]. Распределение полей на границах раздела формирует движущие силы процессов диффузии и переноса, что, в конечном счете, приводит к сегрегации заключенной в материале примеси на определенной части поверхности зерен неоднородности. Это может приводить к упрочнению/ослаблению связи между включениями и матрицей в композите (кристаллитами и аморфной межкристаллитной фазой в поликристалле), формированию нанокластеров на поверхности включений и ко многим другим явлениям, результатами которых будут являться изменения эксплуатационных физико-механических характеристик материалов.

В настоящей работе эта задача решена для матричного композита с учетом объемного содержания компонентов, формы и ориентации включений. Решение данной задачи является актуальным вследствие возможности использования ее результатов в микро- и наноэлектронике, машиностроении и других областях науки и техники.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОПЕРАТОРЫ КОНЦЕНТРАЦИИ ПОЛЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ УЕДИНЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЕ

Определим операторы концентрации напряженности $K_{ij}^E(\mathbf{r})$ и индукции $K_{ij}^D(\mathbf{r})$ электрического поля на поверхности включения со стороны матрицы формулами

$$E_i^m(\mathbf{r}) = K_{ij}^E(\mathbf{r})\langle E_j\rangle, \quad D_i^m(\mathbf{r}) = K_{ij}^D(\mathbf{r})\langle D_j\rangle, \qquad (1)$$

где $E_i^m(\mathbf{r})$ и $D_i^m(\mathbf{r})$ – компоненты векторов напряженности и индукции электрического поля на поверхности включения со стороны матрицы,

[1]*Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия*
[2]*Институт нанотехнологий микроэлектроники Российской академии наук, Москва, Россия*
[3]*Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*
**E-mail: alekc_sap@mail.ru*

$\langle E_j \rangle$ и $\langle D_j \rangle$ – компоненты соответствующих векторов приложенного (среднего) поля к материалу образца, а $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки на поверхности включения.

Отметим, что в (1) и далее по тексту нижние индексы компонент векторов и тензоров принимают значения 1, 2, 3.

Ставится задача – найти выражения для данных операторов в зависимости от формы включения. Для нахождения $K_{ij}^E(\mathbf{r})$ и $K_{ij}^D(\mathbf{r})$ рассмотрим операторы проектирования на поверхности включения. Любой вектор на поверхности включения может быть разложен на две компоненты – нормальную и тангенциальную [9]:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^n + \mathbf{a}^\tau,$$

определяющиеся с помощью скалярного и векторного произведений:

$$\mathbf{a}^n = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}), \quad \mathbf{a}^\tau = -[\mathbf{n}[\mathbf{n}\,\mathbf{a}]], \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – вектор внешней единичной нормали в данной точке поверхности включения. В индексных обозначениях выражения (2) могут быть записаны как

$$a_i^n = n_i n_j a_j = n_{ij} a_j, \quad a_i^\tau = (\delta_{ij} - n_{ij}) a_j \equiv \theta_{ij} a_j,$$

где n_{ij} и θ_{ij} – компоненты операторов проектирования на внешнюю нормаль и касательную плоскость в данной точке поверхности, δ_{ij} – символ Кронекера. Отметим некоторые свойства операторов n_{ij} и θ_{ij}:

$$n_{ij} n_{jl} = n_{il}, \quad n_{ij}\theta_{jl} = 0, \quad \theta_{ij}\theta_{jl} = \theta_{il}.$$

Условия на границе матрица–включения можно записать в виде (здесь и далее по тексту верхние индексы "*p*" (*particle*) и "*m*" (*matrix*) обозначают принадлежность к включению и матрице соответственно):

$$n_{ij} D_j^m(\mathbf{r}) = n_{ij} D_j^p(\mathbf{r}), \quad \theta_{ij} E_j^m(\mathbf{r}) = \theta_{ij} E_j^p(\mathbf{r}), \tag{3}$$

что означает непрерывность нормальной составляющей индукции и тангенциальной составляющей напряженности электрического поля на границе раздела. Далее аргумент $\mathbf{r}$, где это возможно, будем опускать. С учетом условий (3) можно записать

$$D_j^m = \varepsilon_{jk}^m E_k^m = \varepsilon_{jk}^m n_{kl} E_l^m + \varepsilon_{jk}^m \theta_{kl} E_l^p,$$

где ε_{jk}^m – тензор диэлектрической проницаемости матрицы, при этом

$$n_{ij} D_j^m = n_{ij} D_j^p = n_{ij}\varepsilon_{jk}^m n_{kl} E_l^m + n_{ij}\varepsilon_{jk}^m(\delta_{kl} - n_{kl}) E_l^p.$$

Группируя поля в матрице и во включении, имеем

$$n_{ij}\varepsilon_{jk}^m n_{kl} E_l^m = n_{ij}\varepsilon'_{jk} E_k^p + n_{ij}\varepsilon_{jk}^m n_{kl} E_l^p,$$

где $\varepsilon'_{jk} = \varepsilon_{jk}^p - \varepsilon_{jk}^m$. Поскольку $n_j \varepsilon_{jk}^m n_k$ – скалярная функция компонент вектора нормали и тензора диэлектрической проницаемости матрицы, то

$$n_{il} E_l^m = \frac{n_i n_l}{n_j \varepsilon_{jk}^m n_k} \varepsilon'_{ls} E_s^p + n_{il} E_l^p.$$

Сложим последнее уравнение со вторым из уравнений (3), тогда после преобразований и индексных переобозначений будем иметь:

$$E_i^m = (\delta_{il} + A_{ij}(\mathbf{n})\varepsilon'_{jl}) E_l^p,$$

где

$$A_{ij}(\mathbf{n}) = \frac{n_i n_j}{n_l \varepsilon_{lk}^m n_k}.$$

Заметим, что в векторном виде последние две формулы можно записать как

$$\mathbf{E}^m = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{n})\boldsymbol{\varepsilon}'\right)\mathbf{E}^p, \tag{4}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{n})}, \tag{5}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор 2-го ранга. Связь векторов индукции электрического поля на поверхности включения со стороны матрицы и напряженности электрического поля во включении будет определяться выражением:

$$\mathbf{D}^m = (\boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{A}(\mathbf{n})\boldsymbol{\varepsilon}')\mathbf{E}^p. \tag{6}$$

Формулы (4) и (6) справедливы для включения любой формы с гладкой поверхностью. Для определения оператора концентрации электрических полей на поверхности включения необходимо связать приложенное (среднее по материалу) поле с полем во включении. Данную задачу решить в аналитическом виде удается только для включения эллипсоидальной формы, частными предельными случаями которой являются бесконечный эллиптический цилиндр, тонкий эллиптический диск и шар.

Рассмотрим задачу для неоднородного тела объема V с поверхностью S, состоящего из однородной матрицы с тензором $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ диэлектрической проницаемости, в которую погружен однородный эллипсоид, занимающий область V^p с границей S^p. Тензор диэлектрической проницаемости эллипсоида – $\boldsymbol{\varepsilon}^p$. К поверхности S тела приложено однородное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0$. Формулировка данной задачи имеет вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad \varphi|_S = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}), \tag{7}$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ – электростатический потенциал, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$ – тензор диэлектрической проницаемости тела, являющийся кусочно-постоянной функцией точки внутри тела:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^m, & \mathbf{r} \notin V^p; \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p, & \mathbf{r} \in V^p. \end{cases}$$

Наряду с задачей (7) рассматривается краевая задача для однородного тела сравнения такой же формы, полностью состоящего из матрицы:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^m \nabla \varphi^c(\mathbf{r}) = 0, \quad \varphi^c\big|_S = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}), \tag{8}$$

где $\varphi^c(\mathbf{r})$ – электростатический потенциал в точках тела сравнения. Вычитая (8) из (7), имеем краевую задачу

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^m \nabla \varphi'(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r}), \quad \varphi'\big|_S = 0, \tag{9}$$

где

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi^c(\mathbf{r}),$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \notin V^p; \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m, & \mathbf{r} \in V^p. \end{cases} \tag{10}$$

Введем функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ условиями

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^m \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\big|_{\mathbf{r}_1 \in S} = 0, \tag{11}$$

тогда решение задачи (9) можно записать в виде интеграла [10]

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\left(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}_1) \nabla \varphi(\mathbf{r}_1)\right) d\mathbf{r}_1. \tag{12}$$

Преобразуем (12) по формуле Остроградского–Гаусса. Тогда с учетом граничного условия в (11) и того, что $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}_1)$, получим

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \int_V \nabla^1 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \tag{13}$$

верхний индекс 1 у дифференциального оператора Гамильтона означает дифференцирование по $\mathbf{r}_1$. В пределе при $V \to \infty$ имеем: $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$. Учтем также (10), тогда (13) примет вид

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \int_{V^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m) \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1.$$

Поле внутри эллипсоидального включения однородно [11], поэтому данное выражение может быть записано в следующей форме:

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \left(\int_{V^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) d\mathbf{r}_1\right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in V^p. \tag{14}$$

Объемный интеграл в скобках

$$I_p = \int_{V^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) d\mathbf{r}_1 \tag{15}$$

сходится при любом $\mathbf{r} \in V^p$ (V^p считается открытым множеством). Действительно, учитывая, что [11]

$$G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) = \left(4\pi\sqrt{\det \boldsymbol{\varepsilon}^m}\sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})^T (\boldsymbol{\varepsilon}^m)^{-1} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}\right)^{-1},$$

имеем

$$\nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\det \boldsymbol{\varepsilon}^m}} \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m)^{-1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})^T (\boldsymbol{\varepsilon}^m)^{-1} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})]^{3/2}}, \tag{16}$$

т.е. подынтегральная функция в (15) имеет особенность только в точке $\mathbf{r}$. Рассмотрим шар V_δ малого радиуса δ с центром в точке $\mathbf{r}$, целиком содержащийся в V^p. Оценим норму интеграла I_δ от $\nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ по шару V_δ. Пусть $\varepsilon^m_{\min}$ и $\varepsilon^m_{\max}$ – наименьшая и наибольшая главные компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^m$, тогда

$$\|I_\delta\| = \left\|\int_{V_\delta} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) d\mathbf{r}_1\right\| \le$$
$$\le \frac{1}{4\pi(\varepsilon^m_{\min})^{3/2}} \int_{V_\delta} \frac{(\varepsilon^m_{\min})^{-1}|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})|}{(\varepsilon^m_{\max})^{-3/2}|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})|^3} d\mathbf{r}_1 = \frac{(\varepsilon^m_{\max})^{3/2}}{(\varepsilon^m_{\min})^{5/2}}\delta. \tag{17}$$

Из (17) следует, что $I_\delta \to 0$ при $\delta \to 0$, что влечет сходимость интеграла I_p.

Данный результат позволяет преобразовать объемный интеграл (15) к поверхностному [12]:

$$I_p = \oint_{S^p} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \mathbf{n}_1 dS_1, \tag{18}$$

где $\mathbf{n}_1$ – внешняя единичная нормаль к S^p (интегрирование ведется по $\mathbf{r}_1$). Таким образом, выражение (14) можно записать в виде

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \left(\oint_{S^p} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \mathbf{n}_1 dS_1\right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in V^p. \tag{19}$$

Вектор-функция $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_1)$ и тензорная функция $\nabla G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}_1(\mathbf{r}_1)$ непрерывны при $\mathbf{r} \in V^p$ и $\mathbf{r}_1 \in S^p$, поэтому в (19) справедливо дифференцирование под знаком интеграла [12], т.е.

$$\nabla \varphi'(\mathbf{r}) = \left(\oint_{S^p} \nabla G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}_1 dS_1\right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0),$$
$$\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in V^p,$$

откуда, принимая $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ и учитывая, что $\nabla G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) = -\nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$, получим:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \left(\oint_{S^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}_1 dS_1 \right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m)\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^p,$$

где $\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0$ (решением задачи (8) является $\varphi^c(\mathbf{r}) = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})$). Таким образом, для напряженности поля внутри включения $\mathbf{E}^p$ имеем уравнение

$$\mathbf{E}^p = \mathbf{E}_0 + \left(\oint_{S^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}_1 dS_1 \right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m)\mathbf{E}^p, \quad \mathbf{r} \in V^p. \tag{20}$$

Интеграл в скобках в (20) не зависит от $\mathbf{r}$ при $\mathbf{r} \in V^p$, поскольку остальные величины, входящие в (20), не зависят от $\mathbf{r}$. Возьмем начало координат в центре эллипсоида, примем $\mathbf{r} = 0$, тогда выражение для этого интеграла будет определять тензор $\mathbf{g}$, используемый в обобщенном сингулярном приближении (ОСП) [5, 10, 13]:

$$\mathbf{g} = \oint_{S^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1) \otimes \mathbf{n}_1 dS_1. \tag{21}$$

Таким образом, из (20) и (21) получаем связь между напряженностью поля $\mathbf{E}^p$ внутри эллипсоида и напряженностью приложенного поля $\mathbf{E}_0$ в бесконечной матрице:

$$\mathbf{E}^p = [\mathbf{I} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m)]^{-1}\mathbf{E}_0. \tag{22}$$

Компоненты тензора $\mathbf{g}$ можно вычислить по формуле [5]

$$g_{ij} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{n_i n_j}{n_k \varepsilon_{kl}^m n_l} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \tag{23}$$

где компоненты нормали к поверхности эллипсоида выражаются через сферические углы ϑ, φ. В векторном виде (23) может быть записана как

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{4\pi} \oiint_{S^p} \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{n})} d\Omega, \tag{24}$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла. Интегрирование в (24) проводится по всем направлениям нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S^p эллипсоидального включения. Выражение (24) можно также интерпретировать как среднее по всем направлениям:

$$\mathbf{g} = -\left\langle \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{n})} \right\rangle_\Omega,$$

или с учетом (5):

$$\mathbf{g} = -\langle \mathbf{A}(\mathbf{n}) \rangle_\Omega, \tag{25}$$

тогда связь между напряженностями приложенного поля и поля внутри включения примет вид

$$\mathbf{E}^p = [\mathbf{I} + \langle \mathbf{A}(\mathbf{n}) \rangle_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m)]^{-1}\mathbf{E}_0 = \left\langle \mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{n})(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m) \right\rangle_\Omega^{-1} \mathbf{E}_0. \tag{26}$$

Из (4) и (26) вытекает связь между напряженностями поля на границе включения со стороны матрицы и приложенного поля:

$$\mathbf{E}^m = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{n})(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m)) \langle \mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{n})(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m) \rangle_\Omega^{-1} \mathbf{E}_0. \tag{27}$$

Усреднив (27) по всем направлениям, получим:

$$\left\langle \mathbf{E}^m \big|_{S^p} \right\rangle_\Omega = \mathbf{E}_0,$$

т.е. средняя по всем направлениям напряженность поля на границе эллипсоидального включения со стороны матрицы равна напряженности приложенного поля.

Таким образом, из (27) следует, что в случае изолированного эллипсоидального включения в бесконечной матрице оператор концентрации электрического поля на границе включения имеет вид

$$\mathbf{K}^{sE}(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r}))(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m)) \times [\mathbf{I} + \langle \mathbf{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r})) \rangle_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m)]^{-1}, \tag{28}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r}))$ определяется выражением (5). Умножив левую и правую части (27) на $\boldsymbol{\varepsilon}^m$, аналогично получим оператор концентрации электрической индукции на поверхности включения:

$$\mathbf{K}^{sD}(\mathbf{r}) = (\boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r}))(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m)) \times [\boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^m \langle \mathbf{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r})) \rangle_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m)]^{-1}. \tag{29}$$

ОПЕРАТОРЫ КОНЦЕНТРАЦИИ ПОЛЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ВКЛЮЧЕНИЙ В МАТРИЧНОМ КОМПОЗИТЕ

Рассмотрим теперь случай матричного композита с эллипсоидальными включениями, количество которых в образце объемом V данного композита будем считать равным N. Пусть к поверхности S данного образца приложено постоянное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0$, причем в данных условиях средняя по образцу напряженность поля будет совпадать с $\mathbf{E}_0$, т.е. $\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}_0$ [14]. Если включение входит в состав неоднородной среды, то в формуле (21) вместо напряженности приложенного поля $\mathbf{E}_0$ следует использовать напряженность действующего, или эффективного, поля $\mathbf{E}^{eff}$. Напряженность такого поля можно принять равной средней напряженности поля в матрице, что характерно для приближения Максвелла–Гарнетта [15] как частного случая ОСП, если в качестве тела сравнения взять матрицу [10]

$$\mathbf{E}^{eff} = \left\langle \mathbf{E}^m \right\rangle.$$

Среднюю напряженность поля и среднюю электрическую индукцию в матрице в зависимости от средней напряженности поля $\langle \mathbf{E} \rangle$ и средней индукции $\langle \mathbf{D} \rangle$ в образце композита можно получить с помощью операторов объемной концентрации полей $\mathbf{K}^{vE}$ и $\mathbf{K}^{vD}$:

$$\left\langle \mathbf{E}^m \right\rangle = \mathbf{K}^{vE} \left\langle \mathbf{E} \right\rangle, \quad \left\langle \mathbf{D}^m \right\rangle = \mathbf{K}^{vD} \left\langle \mathbf{D} \right\rangle.$$

В свою очередь, операторы $\mathbf{K}^{vE}$ и $\mathbf{K}^{vD}$ для точек, лежащих в объеме матрицы, в ОСП имеют вид [5]

$$\mathbf{K}^{vE} = \langle (\mathbf{I} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^m))^{-1} \rangle^{-1},$$
$$\mathbf{K}^{vD} = \boldsymbol{\varepsilon}^m \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{I} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^m))^{-1} \rangle^{-1}.$$

Вычисляя средние, получим:

$$\begin{gathered} \mathbf{K}^{vE} = [(1-f)\mathbf{I} + f\langle (\mathbf{I} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m))^{-1} \rangle]^{-1}, \\ \mathbf{K}^{vD} = \boldsymbol{\varepsilon}^m [(1-f)\boldsymbol{\varepsilon}^m + f\langle \boldsymbol{\varepsilon}^p (\mathbf{I} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m))^{-1} \rangle]^{-1}, \end{gathered} \tag{30}$$

где усреднение производится по всем включениям, погруженным в матрицу, а f – их полная объемная доля в образце композита.

Таким образом, поля на поверхности включения со стороны матрицы в матричном композите могут быть найдены по следующим формулам:

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^E(\mathbf{r}) \left\langle \mathbf{E} \right\rangle, \quad \mathbf{D}^m(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^D(\mathbf{r}) \left\langle \mathbf{D} \right\rangle, \quad \mathbf{r} \in S^p,$$

где $\mathbf{K}^E(\mathbf{r})$, $\mathbf{K}^D(\mathbf{r})$ – полные операторы концентрации полей на границе включения со стороны матрицы в образце композита:

$$\begin{gathered} \mathbf{K}^E(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^{sE}(\mathbf{r}) \mathbf{K}^{vE}, \\ \mathbf{K}^D(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^{sD}(\mathbf{r}) \mathbf{K}^{vD}, \quad \mathbf{r} \in S^p, \end{gathered} \tag{31}$$

$\mathbf{K}^{sE}(\mathbf{r})$, $\mathbf{K}^{sD}(\mathbf{r})$ – операторы поверхностной концентрации поля на границе включения со стороны матрицы, определяются выражениями (28), (29); $\mathbf{K}^{vE}(\mathbf{r}^m)$, $\mathbf{K}^{vD}(\mathbf{r}^m)$ – операторы объемной концентрации поля в матрице, определяются выражениями (30).

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ МАТРИЧНОГО КОМПОЗИТА СО СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассмотрим матричный композит с изотропной матрицей ($\boldsymbol{\varepsilon}^m = \varepsilon^m \mathbf{I}$) и изотропными сферическими включениями ($\boldsymbol{\varepsilon}^p = \varepsilon^p \mathbf{I}$) радиусом r. В этом случае по формулам (5), (23) получим:

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{\varepsilon^m}, \quad \mathbf{g} = -\left\langle \mathbf{A}(\mathbf{n}) \right\rangle_\Omega = -\frac{1}{3\varepsilon^m} \mathbf{I}. \tag{32}$$

Для операторов объемной концентрации полей по формулам (30) имеем:

$$\begin{gathered} \mathbf{K}^{vE} = \frac{2\varepsilon^m + \varepsilon^p}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)} \mathbf{I}, \\ \mathbf{K}^{vD} = \frac{2\varepsilon^m + \varepsilon^p}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p + 2f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)} \mathbf{I}, \end{gathered} \tag{33}$$

оба эти оператора – диагональные. Для операторов поверхностной концентрации по формулам (28), (29) с учетом (32) получим:

$$\mathbf{K}^{sE}(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^{sD}(\mathbf{r}) = $$
$$= \left(\mathbf{I} + \frac{\varepsilon^p - \varepsilon^m}{\varepsilon^m} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\big|_{\mathbf{r}} \right) \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p}, \quad \mathbf{r} \in S^p.$$

В итоге для полных операторов концентрации полей на поверхности включений имеем:

$$\begin{gathered} \mathbf{K}^E(\mathbf{r}) = \\ = \left(\mathbf{I} + \frac{\varepsilon^p - \varepsilon^m}{\varepsilon^m} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\big|_{\mathbf{r}} \right) \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)}, \\ \mathbf{K}^D(\mathbf{r}) = \\ = \left(\mathbf{I} + \frac{\varepsilon^p - \varepsilon^m}{\varepsilon^m} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\big|_{\mathbf{r}} \right) \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p + 2f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)}, \\ \mathbf{r} \in S^p. \end{gathered} \tag{34}$$

Пусть $\mathbf{E}_0$ – напряженность приложенного поля к образцу композита, тогда из (33) получим, что средняя напряженность поля в матрице

$$\left\langle \mathbf{E}^m \right\rangle = \frac{2\varepsilon^m + \varepsilon^p}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)} \mathbf{E}_0.$$

В частности, для случая сильно контрастных включений при $\varepsilon^p \gg \varepsilon^m$

$$\left\langle \mathbf{E}^m \right\rangle \approx \frac{1}{1-f} \mathbf{E}_0. \tag{35}$$

В другом предельном случае при $\varepsilon^m \gg \varepsilon^p$

$$\left\langle \mathbf{E}^m \right\rangle \approx \frac{2}{2+f} \mathbf{E}_0. \tag{36}$$

Введем систему координат xyz с началом в центре выбранного включения со сферической поверхностью S^p, направив ось z по направлению $\mathbf{E}_0$; оси x, y направим перпендикулярно оси z. Рассмотрим две точки на S^p: точку $A(0; 0; r)$, лежащую на оси z, и точку $B(r; 0; 0)$ – на оси x. Векторы нормали в этих точках: $\mathbf{n}(A) = (0;0;1)$, $\mathbf{n}(B) = (1;0;0)$.

Из (34) получим, что оператор $\mathbf{K}^E(A)$ – диагональный с компонентами

$$K_{11}^E(A) = K_{22}^E(A) = \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)},$$

$$K_{33}^E(A) = \frac{3\varepsilon^p}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)},$$

причем в случае сильно контрастных включений при $\varepsilon^p \gg \varepsilon^m$ имеем:

$$K_{33}^E(A) \approx \frac{3}{1-f},$$

т.е. напряженность поля в точке A со стороны матрицы

$$\mathbf{E}^m(A) \approx \frac{3}{1-f}\mathbf{E}_0$$

и фактически в три раза больше средней напряженности поля в матрице (см. (35)). В то же время, в случае $\varepsilon^m \gg \varepsilon^p$ имеем

$$\mathbf{E}^m(A) \approx \frac{3}{2+f}\frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^m}\mathbf{E}_0,$$

т.е. $\mathbf{E}^m(A) \ll \left\langle \mathbf{E}^m \right\rangle$.

В точке B оператор $\mathbf{K}^E$ также диагональный с компонентами

$$K_{11}^E(B) = \frac{3\varepsilon^p}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)},$$

$$K_{22}^E(B) = K_{33}^E(B) = \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)}.$$

Напряженность поля в точке B со стороны матрицы:

$$\mathbf{E}^m(B) = \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)}\mathbf{E}_0,$$

причем в приближении Максвелла–Гарнетта она равна напряженности поля внутри включения (в силу диагональности оператора $\mathbf{K}^E$ в точке B нормальная к поверхности сферы составляющая напряженности поля отсутствует, а касательная – непрерывна при переходе через поверхность сферы). Для случая сильно контрастных включений при $\varepsilon^p \gg \varepsilon^m$ имеем:

$$\mathbf{E}^m(B) \approx \frac{3\varepsilon^m}{(1-f)\varepsilon^p}\mathbf{E}_0,$$

т.е. $\mathbf{E}^m(B) \ll \left\langle \mathbf{E}^m \right\rangle$. В другом предельном случае при $\varepsilon^m \gg \varepsilon^p$

$$\mathbf{E}^m(B) \approx \frac{3}{2+f}\mathbf{E}_0,$$

что фактически в полтора раза больше, чем среднее поле в матрице (см. (36)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом настоящей работы являются выражения (28)–(31) для операторов концентрации напряженности и индукции электрического поля на поверхности включения в матричном композите, которые позволяют прогнозировать значения данных величин в любой точке поверхности включений в зависимости от внешнего приложенного поля, от объемных долей и материальных характеристик компонентов композита, от формы и ориентации включений.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 122040800154-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Milton G.* The Theory of Composites. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 719 p.
2. Физика композиционных материалов / Под ред. Н.Н. Трофимова. Т. 2. М.: Мир, 2005. 344 с.
3. *Волков С.Д., Ставров В.П.* Статистическая механика композитных материалов. Минск: Изд-во БГУ, 1978. 208 с.
4. *Кунин И.А., Соснина Э.Г.* // ПММ. 1973. Т. 37. С. 306–315.
5. *Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н.* // ДАН. 2016. Т. 467. № 3. С. 275–279. https://doi.org/10.7868/S0869565216090097
6. *Маслов Б.П.* // ПМ. 1990. Т. 26. № 6. С. 13–19.
7. *Шермергор Т.Д., Яковлев В.Б.* // Известия РАН. Физика Земли. 1993. № 2. С. 81–89.
8. *Gleiter H.* // Acta mater. 2000. V. 48. № 1. P. 1–29. https://doi.org/10.1016/S1359-6454(99)00285-2
9. *Hill R.* // Mech. Phys. Solids. 1983. V. 31. No. 4. P. 347–357.
10. *Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н.* // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 27–31. https://doi.org/10.7868/S0869565213260083
11. *Giordano S., Palla P.L.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. V. 41. № 41. 415205 (24 pp). https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/41/415205
12. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1991. 544 с.
13. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
14. *Stroud D.* // Phys. Rev. B. 1975. V. 12. № 8. P. 3368–3373. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.12.3368
15. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.

DISTRIBUTION OF ELECTRIC FIELDS ON THE SURFACE OF INCLUSIONS IN MATRIX COMPOSITE

Academician of the RAS V. I. Kolesnikov[a], V. B. Yakovlev[b], I. V. Lavrov[b], A. P. Sychev[c], and A. V. Bardushkin[b]

[a] *Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russia*

[b] *Institute of Nanotechnology of Microelectronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

[c] *Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

Expressions are obtained for operators of concentration of electric field strength and displacement on the surface of inclusions in matrix composite depending on shape and volume fraction of inclusions in material. These operators relate the fields on the inclusion surface on the matrix side with the average values of the electric field strength and displacement in the composite sample.

Keywords: composite, matrix, inclusion, operators of concentration of electric field strength and displacement, Maxwell Garnett approximation, generalized singular approximation