

УДК 539.3

ТРЕХЧЛЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ ТЕНЗОРНЫХ РЯДОВ В ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

© 2023 г. Д. В. Георгиевский^{1,2,3,*}

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 23.06.2022 г.

Поступило 24.06.2022 г.

После доработки 24.06.2022 г.

Принято к публикации 10.08.2022 г.

В трехмерном пространстве рассмотрен класс степенных тензорных рядов (определяющих соотношений) с коэффициентами (материальными функциями), являющимися функциями трех независимых инвариантов. На основе формулы Гамильтона–Кели найдены в виде матричных рядов точные выражения для коэффициентов трехчленных представлений таких степенных рядов. Выведена взаимосвязь коэффициентов прямых и обратных трехчленных определяющих соотношений. Обсуждены случаи тензорной линейности, или квазилинейности, а также независимости материальных функций от инвариантов.

Ключевые слова: изотропная тензорная функция, инвариант, тензорный ряд, квазилинейность, взаимнообратность, матричные представления

DOI: 10.31857/S2686740023010042, EDN: TKXDGO

1. Изотропные нелинейные тензор-функции в трехмерном пространстве в виде степенных рядов

$$\mathbf{b} = A_0 \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathbf{a}^n, \quad (1)$$

связывающие два симметричных тензорных поля второго ранга $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^3$, моделируют зависимость силового тензора (например, \mathbf{b}) от кинематического \mathbf{a} в теории определяющих соотношений для широкого класса изотропных сплошных сред [1–5]. С позиций механики сплошной среды A_0, A_1, A_2, \dots в (1) являются материальными функциями трех независимых инвариантов [6] тензора \mathbf{a} , в качестве которых удобно выбрать I_{a1}, I_{a2}, I_{a3} , где

$$I_{an} = \sqrt[n]{\text{tra}^n}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad I_{a2} = \|\mathbf{a}\|. \quad (2)$$

Инварианты I_{an} , $n \geq 4$, алгебраически выражаются через I_{a1}, I_{a2} и I_{a3} . Например, для $n = 4, 5, 6$ имеем [7]

$$6I_{a4}^4 = I_{a1}^4 - 6I_{a1}^2 I_{a2}^2 + 8I_{a1} I_{a3}^3 + 3I_{a2}^4,$$

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

³ Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

$$\begin{aligned} 6I_{a5}^5 &= I_{a1}^5 - 5I_{a1}^3 I_{a2}^2 + 5I_{a1}^2 I_{a3}^3 + 5I_{a2}^2 I_{a3}^3, \\ 12I_{a6}^6 &= I_{a1}^6 - 3I_{a1}^4 I_{a2}^2 + 4I_{a1}^3 I_{a3}^3 - \\ &- 9I_{a1}^2 I_{a2}^4 + 12I_{a1} I_{a2}^2 I_{a3}^3 + 3I_{a2}^6 + 4I_{a3}^6. \end{aligned} \quad (3)$$

Помимо I_{a2} и I_{a3} будем использовать и другие квадратичный и кубический инварианты тензора \mathbf{a} :

$$\begin{aligned} J_a &= \frac{1}{2}(I_{a1}^2 - I_{a2}^2), \\ \Delta_a \equiv \det \mathbf{a} &= \frac{1}{6} I_{a1}^3 - \frac{1}{2} I_{a1} I_{a2}^2 + \frac{1}{3} I_{a3}^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользуемся формулой Гамильтона–Кели в R^3 :

$$\mathbf{a}^3 = \Delta_a \mathbf{I} - J_a \mathbf{a} + I_{a1} \mathbf{a}^2. \quad (5)$$

Обозначим через $K_{a0}^{(n)}, K_{a1}^{(n)}$ и $K_{a2}^{(n)}$ коэффициенты в трехчленном разложении

$$\mathbf{a}^n = K_{a0}^{(n)} \mathbf{I} + K_{a1}^{(n)} \mathbf{a} + K_{a2}^{(n)} \mathbf{a}^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Тогда, согласно (5),

$$\mathbf{a}^{n+1} = K_{a0}^{(n)} \mathbf{a} + K_{a1}^{(n)} \mathbf{a}^2 + K_{a2}^{(n)} (\Delta_a \mathbf{I} - J_a \mathbf{a} + I_{a1} \mathbf{a}^2), \quad (7)$$

откуда следует рекуррентная связь

$$\begin{aligned} K_{a0}^{(n+1)} &= \Delta_a K_{a2}^{(n)}, \quad K_{a1}^{(n+1)} = K_{a0}^{(n)} - J_a K_{a2}^{(n)}, \\ K_{a2}^{(n+1)} &= K_{a1}^{(n)} + I_{a1} K_{a2}^{(n)}, \end{aligned} \quad (8)$$

которую можно записать в матричной форме

$$(K_{a0}^{(n+1)}, K_{a1}^{(n+1)}, K_{a2}^{(n+1)})^T = Q_a \cdot (K_{a0}^{(n)}, K_{a1}^{(n)}, K_{a2}^{(n)})^T, \quad (9)$$

$$Q_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta_a \\ 1 & 0 & -J_a \\ 0 & 1 & I_{a1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(K_{a0}^{(n)}, K_{a1}^{(n)}, K_{a2}^{(n)})^T = Q_a^n \cdot (1, 0, 0)^T, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

т.е. тройка коэффициентов $K_{a0}^{(n)}$, $K_{a1}^{(n)}$ и $K_{a2}^{(n)}$ является первым столбцом матрицы Q_a^n . Технически выписать общий вид Q_a^n для любого n , очевидно, затруднительно, поэтому оставим выражения для инвариантов $K_{a0}^{(n)}$, $K_{a1}^{(n)}$ и $K_{a2}^{(n)}$, фигурирующих в (6), в форме (10).

Таким образом, степенной тензорный ряд (1) эквивалентен трехчленному соотношению

$$\mathbf{b} = C_0 \mathbf{I} + C_1 \mathbf{a} + C_2 \mathbf{a}^2 \quad (11)$$

с вычисляемыми согласно описанной выше процедуре материальными функциями

$$C_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{a0}^{(n)}, \quad (12)$$

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_{a1}^{(n)}, \quad C_2 = \sum_{n=2}^{\infty} A_n K_{a2}^{(n)}.$$

Нижние пределы суммирования в (12) можно выбрать именно такими, поскольку, как следует из (6), $K_{a1}^{(0)} = 0$, $K_{a2}^{(0)} = 0$, $K_{a2}^{(1)} = 0$.

2. Положим, что ряд (1) обратим:

$$\mathbf{a} = B_0 \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathbf{b}^n, \quad (13)$$

где материальные функции B_0, B_1, B_2, \dots зависят от инвариантов I_{b1} , I_{b2} и I_{b3} , определенных аналогично (2). Нетрудно [7] вывести следующие алгебраические связи троек инвариантов I_{b1} , I_{b2} , I_{b3} и I_{a1} , I_{a2} , I_{a3} :

$$I_{b1} = 3C_0 + I_{a1}C_1 + I_{a2}^2C_2,$$

$$I_{b2}^2 = 3C_0^2 + 2I_{a1}C_0C_1 + I_{a2}^2(C_1^2 + 2C_0C_2) +$$

$$+ 2I_{a3}^3C_1C_2 + I_{a4}^4C_2^2, \quad (14)$$

$$I_{b3}^3 = 3C_0^3 + 3I_{a1}C_0^2C_1 + 3I_{a2}^2C_0(C_1^2 + C_0C_2) +$$

$$+ I_{a3}^3C_1(C_1^2 + 6C_0C_2) +$$

$$+ 3I_{a4}^4C_2(C_1^2 + C_0C_2) + 3I_{a5}^5C_1C_2^2 + I_{a6}^6C_2^3,$$

куда из (3) должны быть подставлены выражения I_{a4}^4 , I_{a5}^5 и I_{a6}^6 . Обратные к (14) связи запишем в общем виде

$$I_{an} = I_{an}(I_{b1}, I_{b2}, I_{b3}), \quad n = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Построим теперь, как это сделано в (9), (10), последовательность троек инвариантов $K_{b0}^{(n)}$, $K_{b1}^{(n)}$ и $K_{b2}^{(n)}$:

$$(K_{b0}^{(n)}, K_{b1}^{(n)}, K_{b2}^{(n)})^T = Q_b^n \cdot (1, 0, 0)^T,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad Q_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta_b \\ 1 & 0 & -J_b \\ 0 & 1 & I_{b1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

и запишем ряд (13) в виде трехчленного соотношения

$$\mathbf{a} = D_0 \mathbf{I} + D_1 \mathbf{b} + D_2 \mathbf{b}^2, \quad (17)$$

$$D_0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n K_{b0}^{(n)}, \quad (18)$$

$$D_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_{b1}^{(n)}, \quad D_2 = \sum_{n=2}^{\infty} B_n K_{b2}^{(n)}.$$

Подставляя тензорную функцию (11) в обратную ей (17), после преобразований получим связь материальных функций C_0, C_1, C_2 и D_0, D_1, D_2 . Она следует из решения линейной неоднородной системы уравнений относительно D_0, D_1 и D_2 :

$$D_0 + C_0 D_1 + (C_0^2 + 2C_1 C_2 \Delta_a + C_2^2 I_{a1} \Delta_a) D_2 = 0,$$

$$C_1 D_1 + (2C_0 C_1 - 2C_1 C_2 J_a - C_2^2 I_{a1} J_a + C_2^2 \Delta_a) D_2 = 1, \quad (19)$$

$$C_2 D_1 + (2C_0 C_2 + C_1^2 + 2C_1 C_2 I_{a1} +$$

$$+ C_2^2 I_{a1}^2 - C_2^2 J_a) D_2 = 0$$

и замены в решении инвариантов I_{an} на I_{bn} , $n = 1, 2, 3$, согласно (15). Из второго и третьего уравнений (19) находятся D_1 и D_2 , после чего из первого уравнения определяется D_0 .

3. В теории определяющих соотношений обычно фигурируют два эквивалентных определения тензорной линейности функций (11) и (17) (по терминологии [2] квазилинейности). Одно из них связано с тождественным обращением в нуль коэффициентов C_2 в (12) и D_2 в (18), а другое — с тем, что угол между девиаторами $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - I_{a1} \mathbf{I}/3$ и $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - I_{b1} \mathbf{I}/3$ нулевой [8], т.е.

$$\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{b}} = \sqrt{\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}}} \sqrt{\bar{\mathbf{b}} : \bar{\mathbf{b}}}.$$

Условия разделения девиаторных и шаровых свойств изотропных тензор-функций в общем случае нелинейности и в случае квазилинейности подробно освещены в [9].

Взаимобратные тензорные функции (11) и (17) квазилинейны либо неквазилинейны одновременно. Наличие в рядах (1) и (13) слагаемых со степенями тензоров больше первой еще не говорит о тензорной нелинейности соответствующих функций. Так, например, если $A_2 = -I_{a1} A_3$, то

функция $\mathbf{b} = A_2 \mathbf{a}^2 + A_3 \mathbf{a}^3$ тем не менее тензорно линейна и равна $A_3(\Delta_a \mathbf{I} - J_a \mathbf{a})$.

4. Важным частным случаем является ситуация, когда все коэффициенты A_n , $n = 0, 1, 2$, в (1) постоянны, т.е. не зависят от инвариантов тензора \mathbf{a} . Тогда их можно рассматривать как коэффициенты ряда Тейлора вблизи нуля $A_n = F^{(n)}(0)/n!$ некоторой скалярной функции $F(x)$, а сам ряд (1) интерпретировать как тензорную функцию $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$, порожденную (посредством набора A_n) скалярной функцией F . Квазилинейность такой тензор-функции, эквивалентная, как было отмечено выше, равенству нулю C_2 в (12), имеет место тогда и только тогда, когда $A_2 = A_3 = \dots \equiv 0$, т.е. при отсутствии в (1) слагаемых со степенями тензора \mathbf{a} больше первой. Это сразу следует из того, что введенная в (6) функция $K_{a_2}^{(n)}$ — многочлен степени $n - 2$ от инвариантов I_{a_1} , I_{a_2} и I_{a_3} .

Примерами подобных построений являются взаимобратные друг другу тензорные (матричные) экспонента и логарифм:

$$\mathbf{b} = \beta \left(\exp \frac{\mathbf{a}}{\alpha} - \mathbf{I} \right) \equiv \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\mathbf{a}}{\alpha} \right)^n,$$

$$\mathbf{a} = \alpha \ln \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{b}}{\beta} \right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{\mathbf{b}}{\beta} \right)^n,$$

где α и β — характерные величины с физическими размерностями, совпадающими с размерностями \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно.

Для функции $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$, допускающей трехчленное представление (11), (12), в матричной форме можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= (\mathbf{I}, \mathbf{a}, \mathbf{a}^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n (K_{a_0}^{(n)}, K_{a_1}^{(n)}, K_{a_2}^{(n)})^T = \\ &= (\mathbf{I}, \mathbf{a}, \mathbf{a}^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n Q_a^n \cdot (1, 0, 0)^T = \\ &= (\mathbf{I}, \mathbf{a}, \mathbf{a}^2) \cdot F(Q_a) \cdot (1, 0, 0)^T. \end{aligned} \quad (20)$$

Это означает, что столбец $(C_0, C_1, C_2)^T$ совпадает с первым столбцом матрицы $F(Q_a)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана РНФ (грант 22-21-00077).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
2. *Победра Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
3. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
4. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. М.: Наука, 2017. 432 с.
5. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2018. 560 с.
6. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
7. *Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150–176.
8. *Георгиевский Д.В.* Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Известия РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 29–33.
9. *Георгиевский Д.В.* Условия разделения девиаторных и шаровых свойств у изотропных тензорно-нелинейных функций // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 504. С. 32–35.

THREE-TERM REPRESENTATIONS OF POWER TENSOR SERIES IN THE THEORY OF CONSTITUTIVE RELATIONS

D. V. Georgievskii^{a,b,c}

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^b Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^c Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov

A class of power tensor series (constitutive relations) with coefficients (material functions), which are functions of three independent invariants, is considered in three-dimensional space. Based on the Hamilton–Cayley formula the exact expressions in the form of matrix series are found for the coefficients of three-term representations of such power series. The relationship of the coefficients of direct and inverse three-term constitutive relations is derived. The cases of tensor linearity, or quasi-linearity, as well as the independence of material functions from invariants are discussed.

Keywords: isotropic tensor function, invariant, tensor series, quasi-linearity, reciprocity, matrix representations