

УДК 556

КОНВЕКТИВНЫЕ ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ФОРМИРУЮЩИЕСЯ ПРИ ТАЯНИИ ЛЬДА, В ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

© 2024 г. Т. О. Чаплина*, В. П. Пахненко

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 10.04.2024 г.

Поступило 10.04.2024 г.

После доработки 17.04.2024 г.

Принято к публикации 22.04.2024 г.

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований конвективных вихревых течений, формирующихся при таянии льда, а также физического моделирования явления самопроизвольного вращения ледяного диска на поверхности воды. Показано, что причиной наблюдаемых движений на поверхности первоначально покоящейся воды является ячейистый конвективный поток, генерируемый процессом таяния льда на нижней границе диска и построена новая физическая модель такого вращения.

Ключевые слова: лёд, конвекция, таяние, конвективная ячейка, вихревое течение

DOI: 10.31857/S2686739724080182

В 2009 г. по спутниковым снимкам были обнаружены на льду Байкала гигантские кольца в ледовом покрове [1]. Причём аналогичные кольца были зафиксированы также в разные годы (начиная с 1975 г.) на озере Хубсугул в Монголии и др. местах [2, 3]. Кольца имеют практически круглую форму в диаметре 5–7 км с шириной самого кольца более тёмного и более тонкого льда порядка 1 км. Подлёдные гидрологические измерения течений и термической структуры вод в районе колец на озере Байкал показали, что в геострофической области озера под кольцом существует антициклонический вихрь, который и доставляет более тёплую глубинную воду к нижней поверхности льда, что и приводит к вытаиванию льда снизу [5].

Несмотря на большое количество работ [5–12] процессы формирования конвективных вихревых течений, образующихся вследствие таяния льда, изучены недостаточно полно, ряд сформулированных гипотез не нашёл подтверждения в опытах, что объясняется сложностью теоретического описания и методическими трудностями выполнения экспериментов.

В настоящей работе используется комплексный подход, сочетающий экспериментальное и

теоретическое исследование процесса формирования конвективных вихревых течений при таянии льда. В основе теоретических исследований лежит система гидродинамических уравнений, описывающих, в том числе, и конвективные процессы, и предложенная в работах авторского коллектива модель разбиения межфазной границы “лёд–вода” на ячейки таяния, уже показавшая свою адекватность исследуемому явлению.

В качестве ледяных маркеров использовались куски льда различной формы (круг, прямоугольник, квадрат, звезда, пятиугольник, сложная форма), отличающиеся по размеру и высоте. Ледяные маркеры с замороженными маркерами-указателями размещались на свободной поверхности покоящейся воды, как с нулевой солёностью, так и с солёностью изменяющей плотность воды в пределах от 1.003 до 1.120 г/см³, также изменялась температура воды — от 20 до 5 °С. Для лучшей визуализации возникающих течений лед выборочно подкрашивался введением традиционных для гидродинамики красителей (чернил различных цветов, анилиновых красителей, уранила в малых количествах).

При помещении на поверхность воды ледяного диска, характеризуемого, на первый взгляд, идеальными геометрическими формами, начинается процесс таяния льда, который по причине

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского,
Российская Академия наук, Москва, Россия
E-mail: tanya75.06@mail.ru

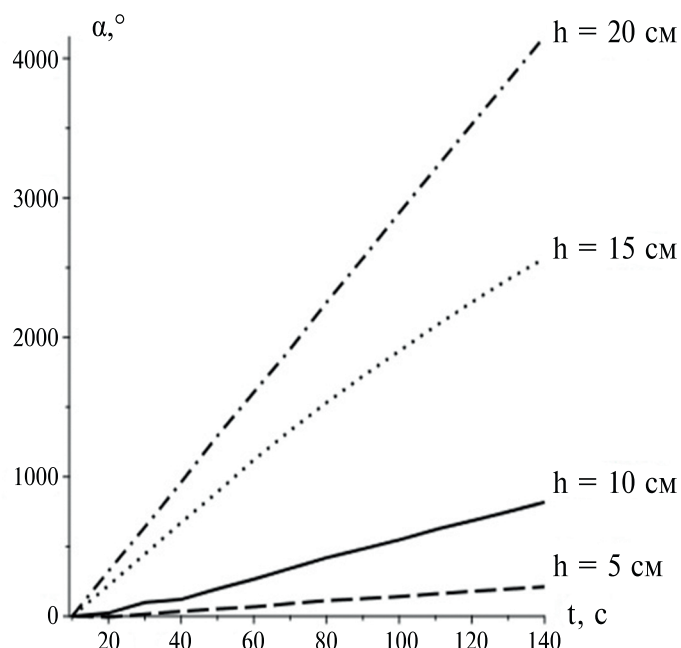


Рис. 1. Зависимость углового положения ледяных маркеров ($d = 1.5$ см, $h_d = 0.5$ см) от времени на различных глубинах.

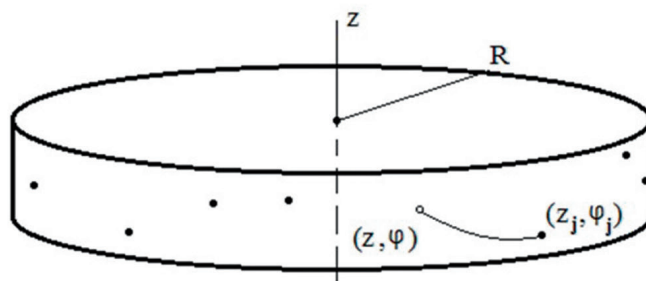
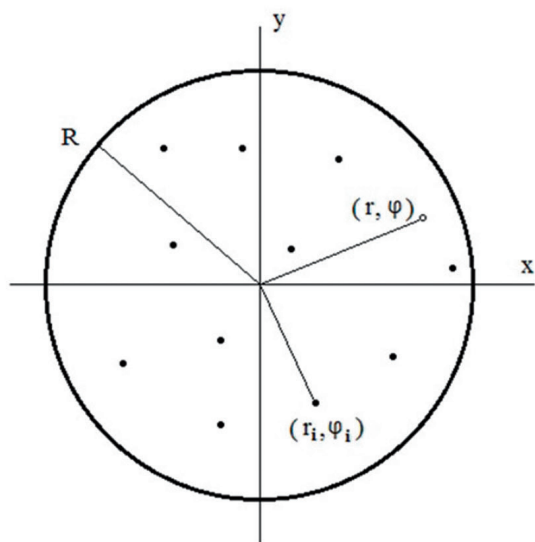


Рис. 2. Схема распределения центров таяния на дне и боковой стороне образца льда в форме диска.

невидимых глазу внутренних и поверхностных неоднородностей протекает наиболее интенсивно вблизи формирующихся центров таяния, расположенных в общем случае случайно по контактной границе “вода–лёд”. Вращение ледяного маркера регистрировалось как в пресной, так и в солёной воде ($S = 35\%$), при увеличении глубины слоя жидкости, на котором размещается

ледяной блок, угловая скорость его вращения растёт (рис. 1).

На рис. 2 представлены вероятностные схемы распределения центров таяния по поверхности льда, а именно на дне и боковой поверхности. Случайные положения центров обозначены чёрными точками, а светлой точкой обозначена точка наблюдения.

Наличие случайно расположенных центров таяния льда приводит к неоднородности температурного распределения по контактной поверхности, что приводит к возникновению касательных напряжений вдоль этой поверхности за счёт зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры, и порождению конвективных процессов по причине возникновения распределения силы плавучести в неоднородно прогретой жидкости, находящейся в гравитационном поле [13].

Эти два физических эффекта необходимо рассмотреть по отдельности, чтобы не усложнять постановку задачи.

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ “ВОДА–ЛЁД” НА ДИНАМИКУ ЛЕДЯНОГО ДИСКА

Каждый из центров таяния даёт свой вклад в нарушение равномерного распределения температуры по контактной поверхности “вода–лёд”, в результате чего градиент коэффициента поверхностного натяжения становится отличным от нуля.

Будем считать, что ледяной маркер представляет собой объект (диск) с идеально гладкой поверхностью, дно которого расположено на уровне $z = z_b(t) < 0$ (уровень воды – $z = 0$), а положение боковой стенки задается радиусом диска $R(t)$. Используемая цилиндрическая система координат (r, ϑ, z) такова, что её ось z совпадает с вертикальной осью, проходящей через центр диска. Так как внутри твёрдого льда макроскопическое движение его элементов отсутствует, то, согласно граничным условиям [13], возникающие вязкие напряжения на малом элементе dS поверхности льда задаются величиной $-\nabla \dot{a}|_S$, которая на дне диска ($z = z_b$) имеет вид

$$-(\dot{a}'_r \mathbf{e}_r + \dot{a}'_\vartheta / r \mathbf{e}_\vartheta)|_{z=z_b}, \quad (1)$$

при этом в (1) $\dot{a} = \dot{a}(r, \vartheta)$, а на боковой стороне приобретает форму

$$-(\dot{a}'_z \mathbf{e}_z + \dot{a}'_\vartheta / R \mathbf{e}_\vartheta)|_{r=R}, \quad (2)$$

причём в (2) $\dot{a} = \dot{a}(z, \vartheta)$.

Вклад вязких напряжений на дне диска во вращательный момент относительно вертикальной оси, проходящей через его центр, определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &\sim - \int_0^{2\vartheta} d\vartheta \int_0^R r dr \left[\mathbf{r} \mathbf{e}_r \times (\dot{a}'_r \mathbf{e}_r + \dot{a}'_\vartheta / r \mathbf{e}_\vartheta) \Big|_{z=z_b} \right] = \\ &= \mathbf{e}_z \int_0^{2\vartheta} d\vartheta \int_0^R \dot{a}'_\vartheta \Big|_{z=z_b} r dr = \\ &= \mathbf{e}_z \int_0^R r dr \int_0^{2\vartheta} \dot{a}'_\vartheta \Big|_{z=z_b} d\vartheta = \\ &= \mathbf{e}_z \int_0^R r dr \left(\dot{a}(r, 2\vartheta) \Big|_{z=z_b} - \dot{a}(r, 0) \Big|_{z=z_b} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

так как по причине непрерывности температурного распределения по поверхности льда имеет место и непрерывность распределения коэффициента поверхностного натяжения, то есть $\dot{a}(r, 2\vartheta) \Big|_{z=z_b} - \dot{a}(r, 0) \Big|_{z=z_b} = 0$, откуда и следует результат (3).

Вклад вязких напряжений на боковой стороне диска во вращательный момент относительно вертикальной оси задаётся величиной

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2 &\sim - \int_0^{2\vartheta} d\vartheta \int_{z_b}^0 dz \left[R \mathbf{e}_r \times \dot{a}'_\vartheta / R \mathbf{e}_\vartheta \Big|_{r=R} \right] = \\ &= \mathbf{e}_z \int_0^{2\vartheta} d\vartheta \int_{z_b}^0 \dot{a}'_\vartheta \Big|_{r=R} dz = \\ &= \mathbf{e}_z \int_{z_b}^0 dz \int_0^{2\vartheta} \dot{a}'_\vartheta \Big|_{r=R} d\vartheta = \\ &= \mathbf{e}_z \int_{z_b}^0 dz \left(\dot{a}(z, 2\vartheta) \Big|_{r=R} - \dot{a}(z, 0) \Big|_{r=R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

по той причине, что на боковой стороне диска $\dot{a}(z, 2\vartheta) \Big|_{r=R} - \dot{a}(z, 0) \Big|_{r=R} = 0$.

Таким образом, зависимость коэффициента поверхностного натяжения на границе “жидкость–твёрдое тело” может привести только к смещению, но не к вращению ледяного диска.

ВЛИЯНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ДИНАМИКУ ЛЕДЯНОГО ДИСКА

Как уже говорилось ранее, нижняя поверхность ледяного диска, плоская и однородная при обозрении её невооружённым глазом, на самом деле таковой не является. За счёт внутренних структурных неоднородностей льда, вызываемых различными причинами, на его поверхности

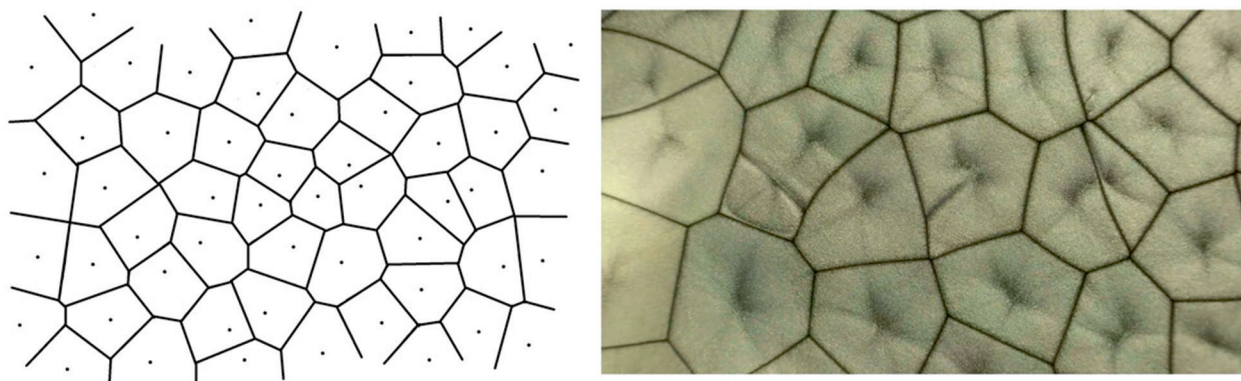


Рис. 3. Компьютерное моделирование (слева) и фотография реальной конвективной структуры (справа) в тонком слое жидкости [14] (вид сверху).

образуются локальные области, называемых центрами таяния, на которых процесс таяния происходит интенсивнее, чем в среднем по поверхности. В результате картина таяния, возникающая у нижней границы диска после контакта льда с водой, представляет собой слой талой воды и опускающиеся из него струи, порождённые центрами таяния льда. Эти струи вовлекают в своё движение окружающую воду, в том числе и слой талой воды вблизи границы “вода–лёд”, создавая на этой границе вязкие напряжения, которые при определённых условиях способны привести ледяной диск в движение.

При наличии единственного центра таяния течение в жидкости симметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей через этот центр и вертикальную ось симметрии ледяного диска. В результате момент вязких сил, действующих на поверхность диска, относительно центра его дна будет равен нулю, независимо от места расположения центра таяния. При этом результирующая сила может быть отличной от нуля, что может привести к смещению ледяного диска вдоль прямой, соединяющей центр дна диска и центр таяния. Неподвижная граница конвективных ячеек, порождённых двумя центрами таяния, характеризуется равенством давлений по обе её стороны (в противном случае граница начала бы смещаться). В рамках используемой модели равенства интенсивностей центров таяний это означает, что граница между двумя соседними конвективными ячейками проходит по серединному перпендикуляру к отрезку, соединяющему центры таяния.

На рис. 3 приведено визуальное обоснование предлагаемой модели посредством сравнения результатов одной из её компьютерных

реализаций и фотографии реальной конвективной структуры, образовавшейся в эксперименте при нагреве плоского горизонтального источника тепла. По сути дела, не существует отличия между экспериментально наблюдаемой и модельной структурами, что качественно подтверждает справедливость предлагаемой простейшей модели, которая далее будет использована при проведении необходимых расчётов.

Для того чтобы получить необходимые количественные оценки сил и моментов, действующих на таящий ледяной диск, необходимо задать моделью поля скорости в пограничном слое, примыкающем к его дну. Многочисленные экспериментальные результаты, в том числе и [14], указывают на то, что внутри конвективной ячейки горизонтальная компонента поля скорости в произвольной точке всегда направлена вдоль прямой, соединяющей эту точку и точку всплытия (погружения) жидкости — в рассматриваемом здесь случае такой точкой является центр таяния льда. При этом горизонтальная скорость должна обращаться в ноль как в центре таяния, так и на границах конвективной ячейки.

С целью упрощения описания и вычислений, окружность на краю диска представлялась в виде правильного 100-угольника. Каждая конвективная ячейка разбивается на треугольники отрезками, проведёнными из центра таяния в углы многоугольника, ограничивающего эту ячейку. Выбирается некоторая n -тая конвективная ячейка и j -тый треугольник в ней. Центр таяния расположен в точке (x_n, y_n) , а остальные две вершины этого j -того треугольника — в точках $(x_j^{(n)}, y_j^{(n)})$ и $(x_{j+1}^{(n)}, y_{j+1}^{(n)})$.

Момент сил относительно оси симметрии ледяного диска определяется выражением

$$M_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{M}_n = \mathbf{e}_z \cdot \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = -\eta \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{1-\mu_0^2} - \mu_0 \right) \sum_{n=1}^N v_n \left(x_n \sum_{j=1}^{J_n} I_{yj}^{(n)} - y_n \sum_{j=1}^{J_n} I_{xj}^{(n)} \right), \quad (5)$$

где N — число сформировавшихся конвективных ячеек на нижней поверхности тающего диска, $\mathbf{r}_n = x_n \mathbf{e}_x + y_n \mathbf{e}_y$, где η — динамическая вязкость воды, J_n — число сторон в n -той конвективной ячейке и введены обозначения. Здесь $\mu_0 \ll 1$ — размер области вблизи центра таяния, в которой существует нисходящая струя холодной жидкости, а горизонтальная скорость обращается в ноль, $\sqrt{1-\mu_0^2}$ — размер области вблизи границы ячейки, где имеет место восходящий поток и горизонтальная скорость также обращается в ноль, при этом выполняется закон сохранения массы в совместном действии восходящего и нисходящего потоком.

Полная сила, действующая на ледяной диск, задаётся величиной

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n. \quad (6)$$

При реализации статистической обработки расчётов для $N = 4$ и $N = 5$ центров таяния создавались ансамбли из 200 реализаций конвективных структур. Обработка результатов показала, что средние по ансамблю значения компонент результирующей силы и момента относительно вертикальной оси и их средние квадратичные отклонения имеют значения

$$\overline{F_x} = -0.017, \quad \overline{F_y} = 0.097, \quad \overline{M_z} = 0.005; \\ \delta F_x = 0.736, \quad \delta F_y = 0.448, \quad \delta M_z = 0.126$$

при $N = 4$, а при $N = 5$ имеют место данные

$$\overline{F_x} = -0.0006, \quad \overline{F_y} = 0.0145, \quad \overline{M_z} = -0.0008; \\ \delta F_x = 0.122, \quad \delta F_y = 0.584, \quad \delta M_z = 0.224.$$

Полученные результаты указывают на то, что ледяной диск может закручиваться как в одну, так и в другую стороны, а также смещаться в произвольном направлении (в зависимости от расположения центров таяния), но в среднем по ансамблю он остаётся на месте и не вращается. При этом увеличение числа центров таяния влечёт за собой уменьшение средних по

ансамблю значений компонент сил и момента относительно вертикальной оси. При этом каждая отдельная реализация конвективной структуры характеризуется смещением ледяного диска и его вращением.

Описание вращения ледяного диска основывается на теореме об изменении его кинетического момента относительно вертикальной оси, проходящей через его центр, под действием момента внешних сил. Момент внешних сил складывается из момента, возникающего за счёт конвективного течения среды, раскручивающего диск и описанного выше, а также момента, тормозящего вращение, за счёт возникающей силы вязкого трения на границе “лёд–вода”.

Раскручивающий момент за счёт конвекции представляется в форме выражения

$$M_c = \epsilon \zeta \Delta \tilde{n} \delta R^2 \sqrt{gH} f(t), \\ \left. \frac{d^n f}{dt^n} \right|_{t=0} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1 \quad (7)$$

где R — радиус диска, H — глубина воды, g — гравитационное ускорение, $\Delta \tilde{n}$ — разность в плотностях талой воды и воды экспериментального бассейна, ϵ — некоторая величина, носящая случайный характер, и определяемая расположением и количеством центров таяния на дне ледяного диска; функция $f(t)$ описывает особенности развития во времени интенсивности конвективного течения в среде. Тормозящий момент определяется действием силы трения по нижней поверхности диска и погружённой части его боковой поверхности

$$M_\zeta = \frac{2\delta}{3} R^2 \zeta \delta (R + 3h_*), \quad (8)$$

где δ — угловая скорость вращения диска, h_* — глубина погружения нижней поверхности диска.

Поскольку момент инерции диска относительно указанной вертикальной оси равен величине $J = mR^2/2 = \delta R^4 \tilde{n}_{ice}/2$, где h — толщина диска, $\tilde{n}_{ice}$ — плотность льда, то на основании уравнения для динамики кинетического момента $J\ddot{\phi} = M_c - M_\zeta$ и выражений (7, 8) формируется уравнение для изменения во времени углового положения диска

$$\ddot{\phi} + k\dot{\phi} = \dot{\imath} f(t), \quad k = \frac{4\zeta}{3\tilde{n}_{ice}Rh} \left(1 + \frac{3h_*}{R} \right), \\ \dot{\imath} = \frac{2\epsilon \zeta \Delta \tilde{n} \sqrt{gH}}{\tilde{n}_{ice} R^2 h}. \quad (9)$$

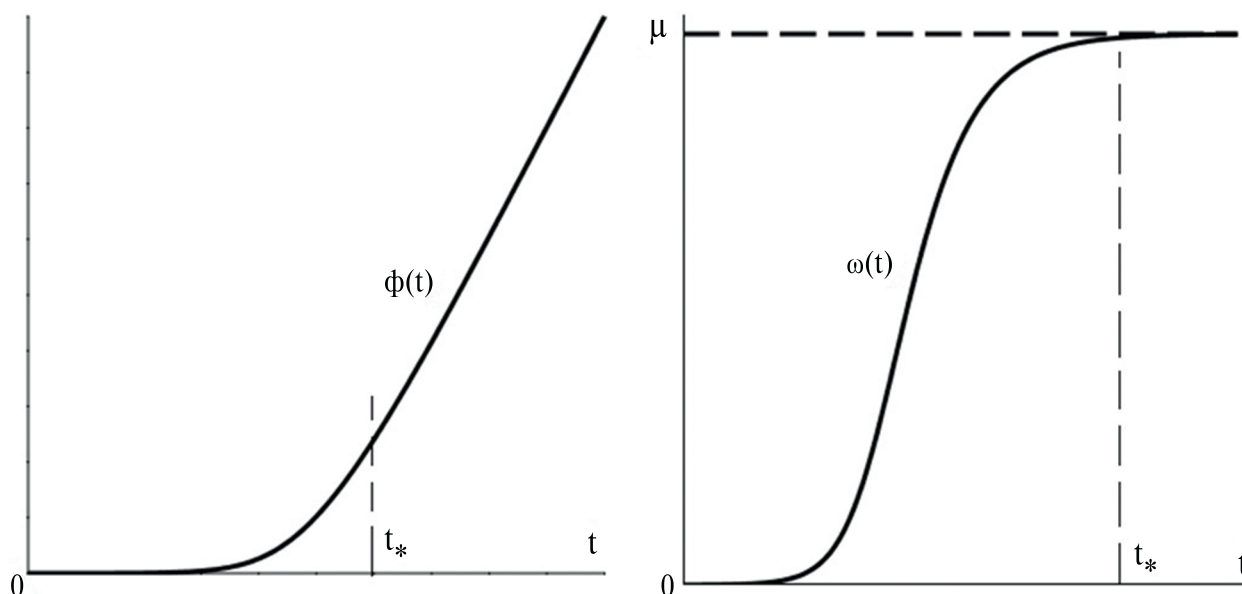


Рис. 4. Угловая частота вращения и угол поворота ледяного диска.

Решение уравнения (9) определяет угловую частоту и угол вращения соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \ddot{\phi} = i e^{-kt} \int_0^t e^{k\hat{\phi}} f(\hat{\phi}) d\hat{\phi}, \\ \ddot{\phi} &= i \int_0^t e^{-k\hat{\phi}} \left(\int_0^{\hat{\phi}} e^{k\hat{\phi}} f(\hat{\phi}) d\hat{\phi} \right) d\hat{\phi}.\end{aligned}\quad (10)$$

Вид решений (10) для $f(t) = th(t)$ представлен на рис. 4.

Как видно из представленных результатов, графики рис. 1 и рис. 4 для угла поворота диска показывают одинаковое поведение: сначала медленное увеличение угловой скорости вращения, а затем выход на её постоянное значение.

Таким образом, причина самопроизвольного смещения и вращения ледяных маркеров на поверхности покоящейся жидкости состоит в формировании под их нижней тающей поверхностью ячеистой конвективной структуры, порождённой несколькими центрами таяния льда. Именно наличие нескольких центров таяния способно придать ледяному диску не только поступательное, но и вращательное движение. Направление вращения зависит от знака суммарного момента, который определяется взаимным расположением центров таяния, и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда РНФ № 24-27-00029.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Granin N. G. The ringed Baikal // Science from First Hands. 2009. V. 3. P. 22–23 (In Russian).
2. Kouraev A. V., Zakharova E. A., Rémy F., Kostianoy A. G., Shimaraev M. N., Hall N. M. J., Suknev A. Ya. Giant ice rings on Lakes Baikal and Hovsgol: inventory, associated water structure and potential formation mechanism // Limnology and Oceanography. 2016. V. 61. P. 1001–1014. DOI: 10.1002/lno.10268.
3. Nordell B., Westerstrom G. Large rotating ice discs on ice-covered rivers // Weather. 1997. V. 209. P. 205–209.
4. Зырянов В. Н., Кураев А. В., Костяной А. Г. Ледовые кольца Байкала: наблюдения, гипотезы, теория / Сборник трудов Международного симпозиума “Мезомасштабные и субмезомасштабные процессы в гидросфере и атмосфере”. Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, 2018. С. 151–155.
5. <https://offshore-mag.ru>
6. <https://earth-chronicles.ru/news/2020-11-26-146205>
7. Heard W. B. Steady-state convection with melting at a boundary // Physics of Fluids. 1977. V. 20. № 12. P. 1993–1999.

8. *Nguyen A. T., Menemenlis D., Kwok R.* Improved modeling of the Arctic halocline with a subgrid-scale brine rejection parameterization // *Journal of Geophysical Researches*. 2009. 114(C11). C11014. doi: 10.1029/2008JC005121.
9. *Nguyen A. T., Menemenlis D., Kwok R.* Arctic ice–ocean simulation with optimized model parameters: approach and assessment // *Journal of Geophysical Researches*. 2011. 116(C4). C04025. doi: 10.1029/2010JC006573.
10. *Зырянов В. Н.* Сейши подо льдом // *Водные ресурсы*. 2011. Т. 38. № 3. С. 259–271.
11. *Kouraev A. V., Zakharova E. A., Rémy F., Kostianoy A. G., Shimaraev M. N., N. M. J. Hall, Zdorovenov R. E., Suknev A. Y.* Giant ice rings on lakes and field observations of lens-like eddies in the Middle Baikal (2016–2017) // *Limnology and Oceanography*. 2019. 64(6): 2738–2754. ISSN 19395590. doi: 10.1002/lno.11338.
12. *Dorbolo S., Adami N., Dubois C., Caps H., Vandewalle N., Darbois-Textier B.* Rotation of melting ice disks due to melt fluid flow // *Physical Review E*. 2016. 93(3):1–5. ISSN 24700053. doi: 10.1103/PhysRevE.93.033112.
13. *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Наука, 1980. 368 с.
14. <https://i.ytimg.com/vi/RUC-xRyBtSU/maxresdefault.jpg>
15. *White D. B.* The planforms and onset of convection with temperature dependent viscosity // *JFM*. 1988. V. 191. P. 247–268.

VORTEX CONVECTIVE FLOWS FORMED DURING THE MELTING OF ICE IN SINGLE-COMPONENT MEDIA

T. O. Chaplina[#], V. P. Pakhnenko

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Federation

[#]*E-mail: tanya75.06@mail.ru*

The results of theoretical and experimental studies of convective vortex currents formed during ice melting, as well as physical modeling of the phenomenon of spontaneous rotation of an ice disk on the water surface, are presented. It is shown that the cause of the observed movements on the surface of initially quiescent water is a cellular convective flow generated by the process of ice melting at the lower boundary of the disk, and a new physical model of such rotation is constructed.

Keywords: ice, convection, melting, convective cell, vortex flow