НАУЧНАЯ СТАТЬЯ
УДК 372.851

Методические основы обучения школьников решению показательных уравнений

Инна Викторовна КОСЕНКОВА ✉, **Олег Валентинович СМИРНОВ**, **Екатерина Павловна ПЕТРОВА**
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
✉ kiwi1824@mail.ru

Аннотация. Приведен анализ изучения темы «Решение показательных уравнений и неравенств» в школьных учебниках по алгебре и началам анализа, рассмотрены методы и алгоритмы решения показательных уравнений, приведены примеры уравнений с разобранными решениями, предложены методические рекомендации по решению показательных уравнений.
Ключевые слова: показательные уравнения, методы решения показательных уравнений, методические рекомендации

Для цитирования: *Косенкова И.В., Смирнов О.В., Петрова Е.П.* Методические основы обучения школьников решению показательных уравнений // Державинский форум. 2024. Т. 8. № 3. С. 349-353.

ORIGINAL ARTICLE
UDC 372.851

Methodological basis for teaching schoolchildren to solve exponential equations

Inna V. KOSENKOVA ✉, **Oleg V. SMIRNOV**, **Ekaterina P. PETROVA**
Derzhavin Tambov State University
33 Internationalnaya St., Tambov, 392000, Russian Federation
✉ kiwi1824@mail.ru

Abstract. The analysis of the study on the topic “Solving exponential equations and inequalities” in school textbooks on algebra and the analysis basics is given, methods and algorithms for solving exponential equations are considered, equations’ examples with disassembled solutions are given, methodological recommendations for solving exponential equations are proposed.
Keywords: exponential equations, methods for solving exponential equations, algorithms for solving exponential equations, methodological recommendations

For citation: Kosenkova, I.V., Smirnov, O.V., & Petrova, E.P. (2024). Methodological basis for teaching schoolchildren to solve exponential equations. *Derzhavinskii forum = Derzhavin Forum*, vol. 8, no. 3, pp. 349-353.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение школьного курса математики направлено в первую очередь на развитие логического и алгоритмического мышления, развитие способности анализировать условие и находить оптимальные способы решения поставленной задачи. Данные цели достигаются абсолютно при изучении всех тем математики в течение всего школьного курса. Мы остановимся более подробно на теме «Решение показательных уравнений». С методической точки зрения данная тема интересна тем, что существует достаточно большое количество способов решения показательного уравнения, поэтому решение начинается с анализа предложенного условия и выбора оптимального способа решения. Сами методы решения очень алгоритмичны. Таким образом, мы видим, что изучение данной темы учащимися предоставляет прекрасные возможности для формирования у них алгоритмического и логического мышления [1; 2]. Следовательно, изучение методов решения показательных уравнений и неравенств является актуальной задачей, которой должно быть уделено значительное внимание.

Цель работы: изучение материалов по данной теме и разработка методических рекомендаций по решению показательных уравнений.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для анализа интересующей нас темы «Показательные уравнения и неравенства» будем рассматривать два учебника: «Алгебра и начала математического анализа 10–11 классы: базовый и углубленный уровни» авторов *Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В.* и др. и учебник «Алгебра и начала математического анализа; углубленное обучение. 11 класс» авторов *Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М.; под редакцией В.Е. Подольского.*

Рассмотрим учебник «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа» Ш.В. Алимова, Ю.М. Колягина [3].

Решение показательных уравнений, неравенств, а также систем показательных уравнений и неравенств рассматривается в III главе данного учебника, то есть учащиеся знакомятся с данной темой в 10 классе. Предварительно изучаются глава I «*Действительные числа*», и глава II «*Степенная функция*».

Итак, мы видим, что прежде, чем изучать показательные уравнения и неравенства, учащиеся изучают степени с рациональными и действительными показателями, основные свойства степени, которые необходимы в дальнейшем при решении показательных уравнений и неравенств.

Рассмотрим более подробно III главу «*Показательная функция*». В этой главе рассматривается интересующая нас тема: показательная функция, ее свойства и график. Строятся графики функций с основанием $a > 1$ и $0 < a < 1$. В этом же параграфе рассматривается задача 1: Решить уравнение $3^x = 27$. В разобранном решении вначале доказывается наличие корня, так как $27 > 0$, а множество значений показательной функции – множество всех положительных чисел. Сразу указывается, что одним из корней является $x = 3$ $(3^3 = 27)$. Дальше в решении доказывается, что других корней нет, так как функция возрастает на всей числовой прямой. Итак, мы видим, что уже при рассмотрении показательной функции рассматривается простейшее показательное уравнение и при его решении используются свойства показательной функции.

Рассмотрим более подробно следующий параграф «*Показательные уравнения*». Теоретический материал содержит девять примеров с разобранными решениями. В учебнике методы решения не называются, но все данные примеры решаются следующими методами: метод уравнивания показателей, вынесения общего множителя за скобки, метод почленного деления, метод введения новой переменной.

Решение показательных уравнений и неравенств в учебнике «Математика. Алгебра и начала математического анализа; углубленное обучение» авторов А.Г. Мерзляка, Д.А. Номировского, В.М. Полякова, под редакцией В.Е. Подольского изучается в 11 классе [4]. Так как учебник предназначен для углубленного изучения, то подача материала практически вузовская, близкая к курсу математического анализа.

Данный учебник содержит много заданий следующих уровней: простые, задачи средней сложности, сложные задачи и задачи высокой сложности.

Структура данной темы следующая: вначале рассматривается показательная функция, ее свойства и график. При рассмотрении темы «Показательные уравнения» на примерах демонстрируются следующие методы решения: метод уравнивания показателей, метод вынесения множителя за скобки; метод введения новой переменной; метод подбора корня и доказательство того, что этот корень единственный с помощью свойств показательной функции, а также рассматривается решение показательного уравнения, содержащее параметр.

Учебник содержит большое количество задач различного уровня сложности, поэтому задания из учебника можно использовать и для учащихся обычных школ как для подготовки к сдаче ЕГЭ, так и в течение учебного года.

Итак, анализ учебников позволяет нам сделать следующий вывод: во всех учебниках теоретический материал излагается на высоком научном уровне, при этом сохраняя доступность изложения. Большое количество разобранных примеров позволяют учащимся овладеть необходимыми умениями для решения показательных уравнений и неравенств.

Остановимся более подробно на основных методах решения показательных уравнений. Для этого разберем примеры с решениями.

Для решения уравнения *методом уравнивания показателей* необходимо выполнить следующие действия: 1) записать обе части уравнения в виде степеней с одинаковыми основаниями; 2) затем приравнять показатели степеней и решить полученное уравнение.

Пример. Решить уравнение: $13^{2x} = 1$

Решение: $13^{2x} = 1$

$13^{2x} = 13^0$:

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Ответ: $x = 0$.

При решении показательных уравнений *методом вынесения общего множителя за скобки* должны быть выполнены действия: 1) определяем общий множитель; 2) выносимого за скобки; 3) приводим получившееся выражение к уравнению простейшего вида и решаем его.

*Пример***.** Решить уравнение:

$$11^{x+2} + 11^x = 122$$

Решение: $11^{x+2} + 11^x = 122$.

Так как $11^{x+2} = 11^x \cdot 11^2$, то уравнение примет вид:

$$11^x \cdot 11^2 + 11^x = 122$$

Видим, что 11^x – это общий множитель, который нужно вынести за скобки:

$$11^x(11^2 + 1) = 122$$

$$11^x \cdot 122 = 122$$

$$11^x = \frac{122}{122}$$

$$11^x = 1$$

Так как $1 = 11^0$, то получаем $11^x = 11^0$, отсюда $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Показательное уравнение удобно решать *методом почленного деления*, когда каждый член уравнения содержит степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями. В этом случае удобно поделить каждое слагаемое на одну из степеней.

Пример. Решить уравнение:

$$25^{\frac{x-3}{2}} = 3^{2(x-3)}$$

Решение: $25^{\frac{x-3}{2}} = 3^{2(x-3)}$

$$25^{\frac{x-3}{2}} = (5^2)^{\frac{x-3}{2}} = 5^{2\frac{x-3}{2}} = 5^{x-3}$$

$$3^{2(x-3)} = (3^2)^{(x-3)} = 9^{x-3}$$

Итак, мы получили $5^{x-3} = 9^{x-3}$, то есть уравнение, содержащее степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями. Поделим почленно на 9^{x-3}.

$(\frac{5}{9})^{x-3} = 1$, отсюда $x - 3 = 0$, то есть $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Для решения показательного уравнения *методом введения новой переменной* выполняются следующие действия: 1) вводим новую переменную (получаем чаще всего квадратное уравнение); 2) решаем полученное уравнение.

Пример. Решить уравнение:

$$49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$$

Решение: $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$

$$(7^x)^2 - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$$

Пусть $t = 7^x, t > 0$. Тогда

$$t^2 - 8t + 7 = 0$$

Находим корни:

$t_1 = 7, t_2 = 1$

Возвращаемся к подстановке:

$7^x = 7, 7^x = 1$

$7^x = 7^1, 7^x = 7^0$

$x_1 = 1, x_2 = 0$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 0$.

Итак, мы рассмотрели виды решения показательных уравнений. Для успешного их решения можно предложить следующие методические рекомендации:

1) решение уравнения начинается с выбора необходимого метода решения, поэтому учащихся необходимо учить анализировать условие, чтобы определить, какой способ будет более подходящим;

2) правильного метода решения недостаточно для получения правильного ответа, необходимо уметь выполнять правильно преобразования и вычисления на каждом шаге решения;

3) для правильных преобразований и вычислений учащиеся должны хорошо владеть знаниями и навыками работы со степенями; уметь выносить общий множитель уравнения; решать квадратное уравнение;

4) для улучшения навыков решения учащимся необходимо предлагать к решению как можно большее количество разнообразных примеров, постепенно их усложняя.

ВЫВОД

Итак, мы показали, что для успешного решения показательных уравнений необходимо владеть алгоритмами решения, а также применять предлагаемые методические рекомендации по изучению показательных уравнений. На наш взгляд, эта информация будет полезна учащимся при подготовке к сдаче ЕГЭ по математике.

Список источников

1. *Батаева Я.Д.* Методика решения показательных уравнений // Проблемы современного педагогического образования. 2022. № 77-2. С. 47-49. https://elibrary.ru/opjzcy
2. *Храмова Н.А., Балаева О.И.* Методические особенности изучения показательных и логарифмических уравнений // Эвристическое обучение математике: труды VI Междунар. науч.-метод. конф. Донецк, 2023. С. 307-312. https://elibrary.ru/tddktt

3. *Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др.* Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. М.: Просвещение, 2018. 463 с.
4. *Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М.* Алгебра и начала математического анализа: 11 класс: углубленный уровень / под ред. В.Е. Подольского. М.: Просвещение, 2024. 412 с.

References

1. Bataeva Ya.D. (2022). Methods for solving exponential equations. *Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovaniya = Problems of Modern Pedagogical Education*, no. 77-2, pp. 47-49. (In Russ.) https://elibrary.ru/opjzcy
2. Khramova N.A., Balaeva O.I. (2023). Methodological features of the study of exponential and logarithmic equations. *Trudy VI Mezhdunarodnoi nauchno-metodicheskoi konferentsii «Evristicheskoe obuchenie matematike» = Proceedings of the 6th International Scientific and Practical Conference "Heuristic Teaching of Mathematics"*. Donetsk, pp. 307-312. (In Russ.) https://elibrary.ru/tddktt
3. Alimov Sh.A., Kolyagin Yu.M., Tkacheva M.V. et al. (2018). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10–11 klassy: uchebnik dlya obshcheobrazovatel'noi organizatsii: bazovyi i uglublenniy urovni*. Moscow, Prosveshchenie Publ., 463 p. (In Russ.)
4. Merzlyak A.G., Nomirovskii D.A., Polyakov V.M. (2024). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza: 11 klass: uglublennyi uroven'*. Moscow, Prosveshchenie Publ., 412 p.

Информация об авторах

Косенкова Инна Викторовна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры функционального анализа Института новых технологий и искусственного интеллекта, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, kiwi1824@mail.ru

Смирнов Олег Валентинович, магистрант по направлению подготовки «Преподавание математики и информатики», Институт новых технологий и искусственного интеллекта, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, 7sins-73@mail.ru

Петрова Екатерина Павловна, магистрант по направлению подготовки «Преподавание математики и информатики», Институт новых технологий и искусственного интеллекта, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, epetrova183@gmail.com

Information about the authors

Inna V. Kosenkova, Cand. Sci. (Education), Associate Professor of Functional Analysis Department, Institute of New Technologies and Artificial Intelligence, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation, kiwi1824@mail.ru

Oleg V. Smirnov, Master's Degree Student in "Teaching Mathematics and Computer Science" Programme, Institute of New Technologies and Artificial Intelligence, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation, 7sins-73@mail.ru

Ekaterina P. Petrova, Master's Degree Student in "Teaching Mathematics and Computer Science" Programme, Institute of New Technologies and Artificial Intelligence, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation, epetrova183@gmail.com

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 15.07.2024
Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 25.09.2024
Принята к публикации / Accepted for publication 27.09.2024