НАУЧНАЯ СТАТЬЯ
УДК 372.851

Методические основы формирования понятия первообразной в курсе математики общеобразовательной школы

Инна Викторовна КОСЕНКОВА ✉, **Евгений Константинович ДЕНИСОВ**, **Наталия Михайловна КУРКИНА**, **Ольга Владимировна АНУФРИЕВА**
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
✉ kiwi1824@mail.ru

Аннотация. Приведен анализ изучения темы «Интеграл» в школьном учебнике по алгебре и началам анализа, предложены методические рекомендации по решению интегралов, а также задания для самостоятельной работы по этой теме.
Ключевые слова: первообразная, неопределенный интеграл, определенный интеграл, методические рекомендации

Для цитирования: *Косенкова И.Н., Денисов Е.К., Куркина Н.М., Ануфриева О.В*. Методические основы формирования понятия первообразной в курсе математики общеобразовательной школы / Державинский форум. 2025. Т. 9. № 1. С. 8-13.

ORIGINAL ARTICLE
UDC 372.851

Methodological basis formation of the antiderivative concept in a secondary school mathematics course

Inna V. KOSENKOVA ✉, **Evgeniy K. DENISOV**, **Nataliya M. KURKINA**, **Olga V. ANUFRIEVA**
Derzhavin Tambov State University
33 Internationalnaya St., Tambov, 392000, Russian Federation
✉ kiwi1824@mail.ru

Abstract. The analysis of the “Integral” topic study in the school textbook on algebra and beginnings of analysis is given, methodological recommendations for solving integrals are offered, as well as tasks for independent work on this topic.
Keywords: antiderivative, indefinite integral, definite integral, methodological recommendations

For citation: Kosenkova, I.V., Denisov, E.K., Kurkina, N.M., & Anufrieva, O.V. (2025). Methodological basis formation of the concept of antiderivative in a secondary school mathematics course. *Derzhavinskii forum = Derzhavin Forum*, vol. 9, no. 1, pp. 8-13.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие первообразной, наряду с тесно связанным с ним понятием производной, принадлежит к одним из наиболее абстрактных и сложных для понимания тем в школьном курсе математики. Как показывает практика, несмотря на то, что само понятие производной является сложным для понимания и осознания, вычисление производной в школьном курсе математики производится неплохо [1]. При вычислении же первообразной учащиеся совершают большее количество ошибок: к вычислительным ошибкам добавляется применение формул дифференцирования вместо формул интегрирования. Поэтому методические основы изучения первообразной в курсе средней школы достаточно важны и актуальны [2].

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью нашей работы является рассмотреть изучение темы «Интеграл» в учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы» авторов Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой и др., а также предложить некоторые рекомендации при изучении данной темы.

В данном учебнике рассматриваемая нами тема изучается в X главе «Интеграл», сразу после изучения VIII главы «Производная и ее геометрический смысл» и IX главы «Применение производной к исследованию функций», что полностью соответствует логике изучаемого материала [3]. В такой же последовательности изучаются данные темы в курсе математического анализа, к которому они принадлежат. Так как для вычисления интегралов необходимо знать производную, рассмотрим кратко, что должны знать и уметь учащиеся, приступающие к теме «Интеграл». В результате обучения учащиеся узнают определение производной, вычисление производной степенной функции, используя определение производной, основные правила дифференцирования, производную сложной функции и производные некоторых элементарных функций (степенной, логарифмической, показательной, тригонометрических).

Перейдем теперь к изучению первообразной. Перед тем как ознакомить с определением первообразной, учащимся напоминают, что производная – это скорость: $v(t) = s'(t)$, и требуется решить обратную задачу: найти закон движения $s(t)$, зная скорость движения $v(t)$. То есть фактически учащимся сразу объясняется, что интегрирование – операция, обратная дифференцированию. Обязательные задачи к данному параграфу требуют от учащихся только показать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Данный тип заданий отрабатывает навыки дифференцирования. Также предлагаются к решению задачи, в которых необходимо найти первообразную для данной функции. Это более сложные задания. В следующем параграфе вводится понятие интегрирование как обратная операция дифференцирования, но не используется знак неопределенного интеграла. Дается готовая таблица первообразных, состоящая из двух столбцов: левый столбец «Функция», правый столбец соответствующая «Первообразная». Авторы учебника, прежде чем привести таблицу первообразных, отмечают, что для некоторых функций можно использовать таблицу производных и поясняют это единственным примером, находя множество первообразных для функции $\sin x$ (табл. 1).

Остановимся подробно на нахождении первообразной степенной функции. В предыдущем параграфе учебника доказывается, что функция $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ является первообразной функции $f(x) = x^p$ (для любого действительного $p \neq -1$). Но остается неясным, как мы сразу получили формулу первообразной для степенной функции. Для хорошо успевающего ученика возможно не составит затруднений вывести данную формулу в общем виде сразу, но большинству учащихся помогают следующие предварительные рассуждения. На доске пишется формула производной степенной функции $(x^n)' = nx^{n-1}$, и учитель обращает внимание ребят на то, что при дифференцировании показатель степени уменьшается на единицу. Затем предлагает найти первообразную для функции $y = x$. Учащиеся предлагают взять функцию x^2, продифференцировав которую получаем коэффициент 2, следовательно, искомая функция $\frac{x^2}{2}$. Аналогичные рассуждения получаем для функции $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$. На доске записываем выкладки и получаем следующую табл. 2.

Таблица 1

Первообразные

Table 1

The primordial ones

Функция	Первообразная
$x^p,\ p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$

Таблица 2

Первообразные

Table 2

The primordial ones

Функция	Первообразная
1	$x + C$
x	$\frac{x^2}{2} + c$
x^2	$\frac{x^3}{3} + C$
x^3	$\frac{x^4}{4} + c$
x^4	$\frac{x^5}{5} + C$

Ребята дальше уже устно называют первообразную для степенной функции, и мы можем записать формулу в общем виде. Если класс состоит из очень хорошо успевающих по математике учащихся, то можно сразу вывести формулу в общем виде следующими рассуждениями. Так как при дифференцировании степенной функции показатель степени уменьшается на единицу, то, чтобы получить показатель степени, равный p, необходимо взять функцию с показателем $p + 1$. Проверяем $(x^{p+1})' = (p+1)x^p$. Отсюда, видим, что необходимо взять функцию вида $\frac{x^{p+1}}{p+1}$.

Заметим, что учащиеся лучше понимают и применяют формулы интегрирования, если к каждой из них применить соответствующую формулу дифференцирования и необходимые рассуждения. Если учащиеся поняли, как получена таблица первообразных, то проблем с решением примеров на эту тему обычно не возникает.

Помимо таблицы первообразных, в этом же параграфе приводятся два основных правила интегрирования.

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке. Тогда:

1) функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной функции $f(x) \pm g(x)$;

2) функция $aF(x)$ является первообразной функции $af(x)$.

Авторы учебника дают словесную формулировку хорошо известных свойств интегрирования, так как не используют знак неопределенного интеграла, и в учебнике приводят таблицу первообразных, а не таблицу интегралов, как это принято в курсе высшей школы. Разобранные две задачи содержат словесные пояснения, и записывается в ответе сразу первообразная.

Рассмотрим самое первое упражнение на эту тему (упражнение № 988): найти одну из первообразных функции:

$2x^5 - 3x^2$. В хорошо знакомых нам обозначениях данное решение будет выглядеть следующим образом:

$$\int (2x^5 - 3x^2)dx = 2\int x^5\,dx - 3\int x^2 dx = 2\frac{x^6}{6} - 3\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^6}{3} - x^3 + C.$$

При вычислении данного неопределенного интеграла мы используем оба указанных в учебнике свойства интегрирования и интеграл от степенной функции. Но, как показывает наш опыт, этот и ему подобные примеры в качестве первого задания вызывают затруднения у учащихся. Поэтому приведем некоторые примеры с решениями, которые мы предлагаем при изучении этой темы. После решения данных примеров учащиеся решают задания из учебника

1. $\int 12x^2 dx = 12\frac{x^3}{3} + C = 4x^3 + C,$
2. $\int \sqrt[7]{x^5}\,dx = \int x^{\frac{5}{7}} dx = \frac{7x^{\frac{12}{7}}}{12} + C,$
3. $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = \frac{-1}{3x^3} + C,$
4. $\int \left(\frac{1}{x}\middle| -2\sin x\right) dx = \int \frac{1}{x} dx - 2\sin x dx = \ln x + 2\cos x + C,$
5. $\int (7x+5)\,dx = 7\int x\,dx + 5\int dx = 7\frac{x^2}{2} + 5x + C.$

Здесь в первом примере используется только одно свойство интегрирования (константу можно выносить за знак интеграла) и применяется формула первообразной для степенной функции. Второй и третий примеры вычисляются без использования свойств интегрирования, но они позволяют повторить свойства степенной функции. В четвертом и пятом примерах к применению свойства «константу можно выносить за знак интеграла» добавляется свойство «интеграл от суммы равен сумме интегралов». При изучении данной темы мы сразу использовали знак неопределенного интеграла, применяя его не только при решении примеров, но и записывая свойства интегрирования в более привычном в курсе математического анализа виде:

1) $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + gxdx;$
2) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,$

где a – постоянная.

Мы считаем, что учащихся следует сразу приучать к решению задач с использованием неопределенного интеграла, потому что, во-первых, это стандартная форма записи, используемая в курсе математического анализа, а во-вторых, авторы учебника все равно вводят знак интеграла в следующем параграфе, рассматривая площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим несколько первых примеров с решением, предлагаемых учащимся на вычисление интегралов с помощью формулы Ньютона–Лейбница (упражнения № 1004 (1, 2), 1005 (1), 1006 (1)) Вычислить интеграл:

1) $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2};$
2) $\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9;$
3) $\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1;$
4) $\int_{-3}^2 (2x-3)dx = \left(2\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{-3}^2 = (2^2 - 3\cdot 2) - \big((-3)^2 - 3\cdot(-3)\big) = -20.$

Таблица 3

Задания для самостоятельной работы

Table 3

Tasks for independent work

Вариант 1	Вариант 2
Вычислить интегралы: 1. $\int \frac{7dx}{x^2}$; 2. $\int (3e^x \vert +7\cos x - 5)dx$; 3. $\int (6x+1)(x-3)dx$; 4. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x}}dx$; 5. $\int_0^1 (2x+1)^2 dx$.	Вычислить интегралы: 1. $\int \frac{5dx}{x^3}$; 2. $\int \left(\frac{4}{x}\right\vert -3\sin x + 8\left.\right) dx$; 3. $\int (2x-3)(x+5)dx$; 4. $\int \frac{9x^2-4}{x\sqrt{x}}dx$; 5. $\int_0^1 (3x-1)^2 dx$.

Итак, мы видим, что в первых предлагаемых примерах очень просто найти первообразную, основной упор сделан на применение формулы Ньютона–Лейбница. Если учащиеся на предыдущих занятиях научились правильно применять свойства интегрирования и, следовательно, правильно находить первообразную, то вычисление определенного интеграла в большинстве случаев не вызывает трудностей.

Мы уже выше говорили, что чем лучше учащиеся понимают, что интегрирование – это операция, обратная дифференцированию, и как находятся первообразные элементарных функций, тем лучше они вычисляют интегралы. Но мы считаем, что необходимо не только понимание, но и знание таблицы первообразных. Поэтому мы проводили математический диктант на знание формул. Эта форма работы позволяет получить обратную связь от учащихся, а слабые учащиеся любят эту форму работы за возможность получить высокую оценку.

Говоря о проверке понимания данной темы, отметим еще такую форму работы, как «летучка» – самостоятельная работа на 15–20 минут. Ее удобно проводить перед изучением темы «Вычисление площадей фигур», так как умение вычислять определенный интеграл является лишь частью решения данных задач. Приведем пример одной из таких самостоятельных работ (табл. 3).

ВЫВОД

Для лучшего понимания и решения задач на вычисление первообразной мы считаем необходимым показать учащимся применение таблицы производных элементарных функций для вычисления их первообразных. Также мы полагаем, что процесс обучения данной теме будет более эффективным, если предлагать к решению примеры «от простого к сложному», проверять знание таблицы первообразных с помощью математического диктанта, проверять навыки вычисления интегралов с помощью самостоятельной работы.

Список источников

1. *Поличка А.Е., Дудкевич Н.В.* Цифровые подходы пропедевтики содержания применения производной в школьном курсе математики // Актуальные вопросы педагогики: сб. ст.

V Междунар. науч.-практ. конф. Пенза: Наука и просвещение, 2021. С. 74-77. https://elibrary.ru/xkafbh
2. *Борисова И.Н., Гарипов И.Б.* Абстрактность школьного курса математического анализа как причина реализации принципа наглядности // Математическое образование в школе и вузе: опыт, проблемы, перспективы (MATHEDU'2021): материалы X Междунар. науч.-практ. конф. Казань, 2021. С. 28-36. https://elibrary.ru/srcwpn
3. *Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др.* Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. Москва: Просвещение, 2018. 463 с.

References

1. Polichka A.Ye., Dudkevich N.V. (2021). Digital approaches of propedeutics of content to use the derivative in the school course of mathematics. *Sbornik stayey V Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferencii «Aktualnye voprosy pedagogiki» = Collection of Articles of the 5th International Scientific and Practical Conference "Current Issues in Pedagogy"*. Penza, Nauka i prosveshchenie Publ., pp. 74-77. (In Russ.) https://elibrary.ru/xkafbh
2. Borisova I.N., Garipov I.B. Abstract of the school course of mathematical analysis as a reason for implementing the principle of visibility. *Materialy X Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferencii «Matematicheskoe obrazovanie v shkole i vuze: opyt, problem, perspektivy (MATHEDU'2021)» = Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference "Mathematical Education in Schools and Universities: Experience, Problems, Prospects (MATHEDU'2021)"*. Kazan, 2021, pp. 28-36. (In Russ.) https://elibrary.ru/srcwpn
3. Alimov Sh.A., Kolyagin M.Yu., Tkachev M.V. et al. (2018). *Algebra and the Beginnings of Mathematical Analysis*. *Grades 10–11*. Moscow, Prosveshenie Publ., 463 p. (In Russ.)

Информация об авторах

Косенкова Инна Викторовна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, kiwi1824@mail.ru

Денисов Евгений Константинович, магистрант по направлению подготовки «Математика», Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, Denisovek@mail.ru

Куркина Наталия Михайловна, магистрант по направлению подготовки «Математика», Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, vasyukovanm@mail.ru

Ануфриева Ольга Владимировна, магистрант по направлению подготовки «Математика», Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, nika87-68@mail.ru

Information about authors

Inna V. Kosenkova, Cand. Sci. (Education), Associate Professor of Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation, kiwi1824@mail.ru

Evgeniy K. Denisov, Master's Degree Student in "Mathematics" Program, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation, Denisovek@mail.ru

Nataliya M. Kurkina, Master's Degree Student in "Mathematics" Program, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation, vasyukovanm@mail.ru

Olga V. Anufrieva, Master's Degree Student in "Mathematics" Program, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation, nika87-68@mail.ru

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 27.11.2024
Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 21.01.2025
Принята к публикации / Accepted for publication 03.03.2025