



**САМАРСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва



ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online

ВЕСТНИК

САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

**ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ
СЕРИЯ**

VESTNIK

OF SAMARA UNIVERSITY

**NATURAL SCIENCE
SERIES**

ТОМ 29 • №2 • 2023 ГОД

Подписной индекс 80307
ISSN 2541-7525

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

- *Математическое моделирование*
- *Математические методы в естественных науках*
- *Физика*

ТОМ 29 • № 2 • 2023 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. —

«Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

2023 Т. 29 № 2

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, член-корреспондент РАН, д-р тех. наук, проф., научный руководитель Самарского университета, главный научный сотрудник института акустики машин, зав. кафедрой автоматических систем энергетических установок (Самара, Самарский университет, РФ)

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики, зам. директора Межвузовского научно-исследовательского центра по теоретическому материаловедению (Самара, Самарский университет, РФ)

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

Л.В. Степанова, д-р физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

Ответственный секретарь:

М.А. Лихобабенко, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

Т.И. Кузнецовой

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Выпускающий редактор

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельникова

Издатель: Самарский университет

Адрес издателя:

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312 б.

Центр периодических изданий Самарского университета

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016

**Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» 80307
ISSN 2541-7525**

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.
0+

Цена свободная

Подписано в печать 21.08.2023. Дата выхода в свет 30.08.2023
Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 10,25.

Тираж 200 экз. (первый завод — 30 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета
443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

В.Э. Видельман, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РФ)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.В. Иважник, д-р физ.-мат. наук, проф., декан физического факультета, зав. кафедрой оптики и спектроскопии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

М.А. Леган, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, РФ)

Константин Панкрашкин, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой физики твердого тела и неравновесных систем (Самарский университет, Самара, РФ)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. кафедры химии (Миланский университет, Милан, Италия)

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, РФ; Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры физики (Самарский университет, Самара, РФ)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, профессор кафедры кибернетики (Самарский университет, Самара, РФ)

П.А. Терехин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, РФ)

А.И. Хромов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры прикладной математики и информатики (Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, РФ)

© Самарский университет, 2023

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mathematical
Modelling*
- *Mathematical
Methods
in Natural
Sciences*
- *Physics*

VOL. 29 • № 2 • 2023

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
Vestnik of Samara University. Natural Science Series
2023 V. 29 № 2

Chief editor:

E.V. Shakhmatov, corresponding member of the RAS, Dr. of Science (Engineering), prof., scientific adviser of Samara National Research University, chief researcher of Machine Acoustics Institute, head of Department of Power Plant Automatic Systems (Samara, Samara National Research University, RF)

Deputy chief editors:

A.F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., professor of Department of General and Theoretical Physics, deputy director of Samara Center for Theoretical Materials Science (Samara, Samara National Research University, RF)

S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

L.V. Stepanova, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., prof. of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, Russian Federation)

Executive editor:

M.A. Likhobabenko, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

T.I. Kuznetsova

Computer makeup, dummy

M.A. Likhobabenko

Executive editor

T.A. Murzinova

Information in English

M.S. Strelnikov

Publisher: Samara National Research University

Address publisher:

312 b, building 22 a, 34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Samara region, Russian Federation.

Centre of Periodical Publications of Samara University

Address of editorial staff: 1, Akademika Pavlova Street, Samara,
443011, Samara region, Russian Federation.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС
77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for
Supervision of Communications, Information Technology and Mass
Media.

**Subscription Index in the United catalog «Press of Russia»
80307**

ISSN 2541-7525

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 21.08.2023.

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 10,25.

Circulation 200 copies (first printing – 30 copies).

Order №

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara region, Russian
Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

V.E. Videlman, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials
Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm
National Research Polytechnic University, Perm, RF)

A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of General and Theoretical Physics (Samara National
Research University, Samara, RF)

A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Experimental Physics (Ogarev Mordovia National
University, Saransk, RF)

V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., dean of the Faculty
of Physics, head of the Department of Optics and Spectroscopy
(Samara National Research University, Samara, RF)

A.I. Kozhanov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research
worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Sobolev
Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS,
Novosibirsk, RF)

M.A. Legan, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the
Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk State
Technical University, Novosibirsk, RF)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the
Department of Mathematics (University of Paris-Sud 11, Orsay,
France)

A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the
Department of Algebra and Geometry (Samara National Research
University, Samara, RF)

A.V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the
Department of Solid-State Physics and Nonequilibrium Systems
(Samara National Research University, Samara, RF)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. of the Department
of Chemistry (University of Milan, Milan, Italy)

L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of Differential Equations and Control Theory (Samara
National University, Samara, RF)

S.G. Pyatkov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Higher Mathematics; leading research worker (Yugra
State University, Khanty-Mansiysk, RF; Sobolev Institute of
Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

V.V. Revin, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty
of Biotechnology and Biology, head of the Department of
Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Ogarev Mordovia
National Research University, Saransk, RF)

V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department
of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Differential Equations and Control Theory, prof.
of the Department of Engineering Cybernetics (Samara National
Research University, Samara, RF)

P.A. Terekhin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov
State University, Saratov, RF)

A.I. Khromov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of Applied Mathematics and Informatics (Komsomolsk-
na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, RF)

© Samara University, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Математическое моделирование

Борзунов С.В. Трансформация колебаний неустойчивой системы в преобразователе-накопителе энергии	7
Борзунов С.В., Решетова О.О. Динамика преобразователя-запасателя энергии с гистерезисным трением	19
Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Влияние слагаемых высокого порядка малости в решении, обобщающем подход М. Уильямса, учитывающем анизотропию материала	30

Математические методы в естественных науках

Zhuraev T.F., Dolgoplov M.V. Equivariant properties of the space $\mathbb{Z}(X)$ for a stratifiable space X	40
--	-----------

Физика

Алимов Л.Э., Салеев В.А. Ассоциативное рождение J/ψ -мезонов и прямых фотонов при энергии коллайдера NICA	48
Башкиров Е.К. Перепутывание двух сверхпроводящих зарядовых кубитов	62
Захаров Р.К., Башкиров Е.К. Перепутывание в нелинейной двухкубитной модели Тависа — Каммингса	72

<i>Требования к оформлению статей</i>	81
---	-----------

CONTENTS

Mathematical Modelling

Borzunov S.V. Transformation of oscillations of an unstable system in an energy harvester	7
Borzunov S.V., Reshetova O.O. Dynamics of an energy harvester with hysteresis friction	19
Mushankova K.A., Stepanova L.V. Influence of high-order terms in the solution generalizing the approach of M. Williams, taking into account the anisotropy of the material	30

Mathematical Methods in Natural Sciences

Zhuraev T.F., Dolgoplov M.V. Equivariant properties of the space $\mathbb{Z}(X)$ for a stratifiable space X	40
--	-----------

Physics

Alimov L.E., Saleev V.A. Associative production of J/ψ -mesons and direct photons at the energy of the NICA collider.....	48
Bashkirov E.K. Entanglement between two superconducting charge qubits	62
Zakharov R.K., Bashkirov E.K. Entanglement in nonlinear two-qubit Tavis — Cummings model	72
<i>Requirements to the design of articles</i>	81

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-7-18

УДК 517; 519.6; 519.8

Дата: поступления статьи: 01.03.2023
после рецензирования: 11.04.2023
принятия статьи: 30.06.2023

С.В. Борзунов

Воронежский государственный университет,
г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: sborzunov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5099-9655>

ТРАНСФОРМАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ НЕУСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ В ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ-НАКОПИТЕЛЕ ЭНЕРГИИ

АННОТАЦИЯ

В настоящей статье предложена простая модель преобразователя-запасателя энергии, трансформирующего энергию неустойчивых механических колебаний в полезную электрическую энергию. Механическая часть системы представлена в виде перевернутого маятника. Электрическая часть состоит из преобразователя механической энергии, основанного на прямом пьезоэлектрическом эффекте, и полезной нагрузки. Динамика системы рассматривается в линеаризованной постановке, определены области устойчивости, идентифицированы различные режимы динамики в пространстве параметров. Установлено, что стабилизирующее маятник управление, основанное на принципах обратной связи, позволяет перевести систему в устойчивый режим функционирования. Найдены оптимальные характеристики системы, отвечающие максимальной мощности.

Ключевые слова: преобразователь-запасатель энергии; перевернутый маятник; устойчивость системы

Цитирование. Борзунов С.В. Трансформация колебаний неустойчивой системы в преобразователе-накопителе энергии // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 7–18. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-7-18>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Борзунов С.В., 2023

Сергей Викторович Борзунов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

Введение

В настоящее время совершенствование конструкции и повышение производительности преобразователей-запасателей энергии — устройств, предназначенных для трансформации энергии колебаний механических составляющих сложных систем, — являются предметом интенсивных исследований. Современные достижения в науках о материалах, электронике и теории управления позволили уменьшить размеры, надежность и стоимость таких устройств, но тем не менее достижение характеристик, сравнимых с традиционными электрическими батареями, продолжает оставаться актуальной научно-технической задачей.

Процесс запасания энергии, как известно, заключается в перераспределении кинетической энергии колеблющегося массивного тела в электрическую форму энергии.

Различные механизмы поддержания резонансных режимов посредством вибрационных колебательных систем с настраиваемыми характеристиками рассматривались в работах [1–6]. Однако рассматриваемые в этих работах системы требуют прецизионной настройки параметров, не всегда реализуемой в реальных технических системах. В частности, большое внимание уделяется величинам электрического напряжения [7], температурным условиям [8], шумовым воздействиям [9].

В частности, ряд работ посвящен электрическим цепям, включающим в свой состав пьезоэлектрические материалы, т. е. вещества, в которых при упругих деформациях возникает электрическая поляризация. Они представляют собой кристаллические вещества без центра симметрии и характеризуются сложной, нелинейной зависимостью между приложенным механическим напряжением и создаваемым электрическим полем. Среди пьезоэлектриков выделяют класс сегнетоэлектрических материалов, которые обладают в определенном диапазоне температур ненулевой поляризацией, изменяющейся за счет внешних воздействий [10; 11]. Именно сегнетоэлектрики служат материалом для построения микроэлектромеханических систем (microelectromechanical systems, MEMS): излучателей звука, акселерометров, прецизионных датчиков микроперемещений [8; 12; 13].

Существует максимальное значение внешнего поля, при котором сегнетоэлектрический материал может эксплуатироваться без повреждения (пробоя). Таким образом, приложенное поле материала не может достичь положения насыщения. Но в приложениях входное значение часто не достигает этого фиксированного максимального значения, и иногда начальное входное значение может быть просто нулевым.

Экспериментальные данные показывают, что известные модели с достаточной точностью описывают пьезокерамический преобразователь, когда он подвергается воздействию низкочастотного электрического напряжения. Точность моделей ухудшается, если диапазон частот напряжения становится шире, а также в случае относительно больших механических нагрузок [14].

1. Модель преобразователя-запасателя энергии в линейном приближении

Как было указано выше, важнейшими частями преобразователя-запасателя энергии являются механическая колебательная система и связанная с ней электромагнитная система, воспринимающая энергию осцилляций. В настоящей статье механическую часть преобразователя энергии предлагается выбрать в виде обратного маятника.

Модель изучаемой системы состоит из перевернутого математического маятника, закрепленного на легкой горизонтальной платформе и соединенного механической связью с сегнетоэлектрическим конденсатором, который включен в замкнутую электрическую цепь. Платформа P может перемещаться в горизонтальном направлении. Обозначим угол отклонения маятника относительно вертикали через $\varphi(t)$, координату платформы — через $u(t)$ (рис. 1.1). Длина маятника равна l , масса его груза равна m . Связь между механической и электрической подсистемами содержит звено, подчиняющееся закону вязкого трения с коэффициентом диссипации c [соответствующая сила трения равна $F_{\text{тр}} = cv(t) = c \frac{d}{dt}(l\varphi/2 + u)$].

Пьезоэлектрический материал, образующий конденсатор с емкостью C , включен в электрическую цепь с внешней омической нагрузкой R . Напряжение на нагрузке обозначим через $V(t)$.

Рассматриваемая динамическая система описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} ml\ddot{\varphi} + c(l\dot{\varphi}/2 + \dot{u}) - mg \sin \varphi + AV = -m\ddot{u}, \\ C\dot{V} + \frac{V}{R} = B(l\dot{\varphi}/2 + \dot{u}). \end{cases} \quad (1.1)$$

Первое из уравнений системы (1.1) представляет собой уравнение движения груза m в условиях действия сил механического происхождения и силы инерции, а второе — баланс токов в электрической цепи. Точкой над символом обозначена производная по времени t .

В приближении небольших отклонений маятника от положения равновесия $\sin \varphi \sim \varphi$ получаем (далее введены обозначения $\gamma_0 = c/(2m)$, $\omega_0^2 = g/l$):

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \gamma_0\dot{\varphi} - \omega_0^2\varphi + \frac{A}{ml}V = -\frac{1}{l}\ddot{u} - 2\frac{\gamma_0}{l}\dot{u}, \\ \dot{V} + \frac{1}{RC}V - \frac{Bl}{2C}\dot{\varphi} = \frac{B}{C}\dot{u}. \end{cases} \quad (1.2)$$

В этой системе A и B — параметры связи (coupling) механической и электрической подсистем, которые выводятся на основе следующих рассуждений. Уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(t)$ представляет собой уравнение движение осциллятора, находящегося под воздействием, помимо механических сил, внешней силы немеханического происхождения [$F_{\text{ext}}(t) = AV(t)$], а также силы инерции $F_{\text{iner}}(t) = -m\ddot{u}(t)$.

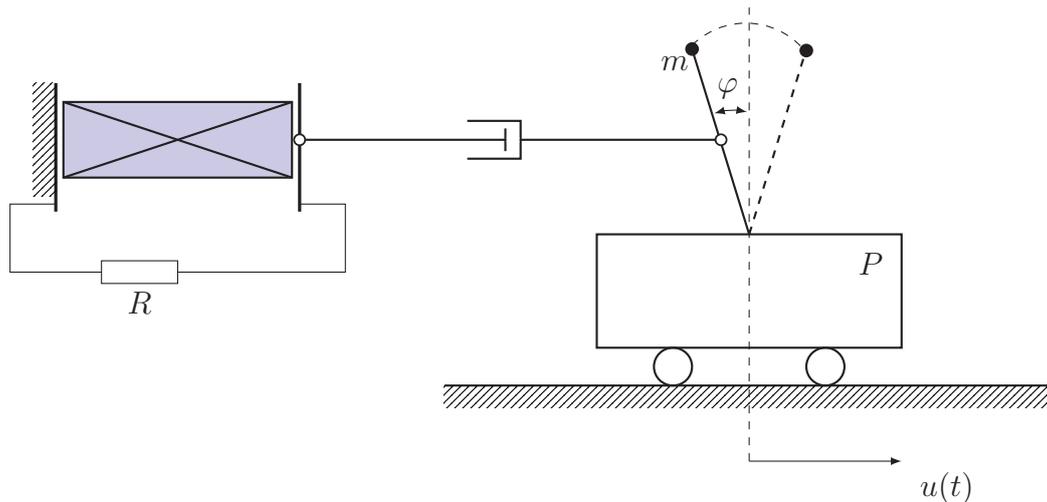


Рис. 1.1. Схематическое описание математического маятника, связанного с пьезоэлектрическим генератором

Fig. 1.1. Scheme of a mathematical pendulum associated with a piezoelectric generator

Закон упругих деформаций (закон Гука) связывает натяжение σ и относительную деформацию (для однородных и изотропных материалов в случае умеренных абсолютных величин упругих деформаций):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.3)$$

где E — модуль Юнга, зависящий только от материала пьезоэлектрика и его физического состояния [в нелинейном случае $\sigma = E\varepsilon + E_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2)$].

Если нет касательных напряжений, то поляризация пьезоэлектрического образца при растяжении или сжатии определяется выражением

$$P_x = d_{11}(\tau_x - \tau_y), \quad (1.4)$$

где τ_x и τ_y — механические натяжения, действующие параллельно осям Ox и Oy , а d_{11} — постоянная, называемая пьезоэлектрическим модулем. Выразим заряд $Q = CV(t)$, сформированный на гранях образца (примем за S площадь одной грани, C — электрическая емкость конденсатора, образованного пьезоэлектрической пластинкой):

$$Q = p_x S, \quad (1.5)$$

$$Q = d_{11}F. \quad (1.6)$$

Следовательно, между упругой силой, действующей со стороны пьезоэлектрика на груз m , и смещением $\delta(t) = l\varphi/2 + u$ существует связь в виде линейной пропорциональности:

$$F = \frac{d_{11}}{C}V = AV, \quad (1.7)$$

где A — константа, зависящая только от материала и его диэлектрика термодинамических свойств. Другими словами, напряжение линейно зависит от смещения по формуле $V(\delta) = \frac{ES}{AL}\delta(t)$, где L — длина пьезоэлектрической пластинки [т. к. закон Гука можно представить в виде $F/S = E \times (\delta/L)$].

Для того чтобы использовать поляризационные заряды, появляющиеся на противоположных гранях кварцевой пластинки при ее деформации, грани снабжены металлическими обкладками. На таких обкладках индуцируются заряды, равные и противоположные по знаку поляризационным, а во внешних проводах, соединяющих обкладки, возникает электрический ток.

В электрической цепи, состоящей из внешнего источника тока (за счет поляризации пластин диэлектрика) и параллельно соединенных конденсатора C и резистора R (выполняющего роль активной нагрузки), действует закон Ома:

$$C\dot{V} + \frac{V}{R} = B\dot{\delta}, \quad (1.8)$$

где $B = \frac{CES}{AL} = \frac{C^2ES}{d_{11}L} = const.$

Заметим, что в литературе, посвященной моделям накопителей энергии, описаны электрические подсистемы, построенные на тех же принципах, но удовлетворяющие другим дифференциальным уравнениям, в частности,

в работе [15]:

$$\tilde{B}\ddot{x} + C\dot{V} + \frac{\dot{V}}{R} + \frac{V}{L} = 0, \quad (1.9)$$

в работах [16; 17]:

$$R\dot{Q} - \frac{d(x)}{C}x + \frac{Q}{C} = 0 \quad (1.10)$$

(здесь $d(x)$ — зависящий от механического параметра x коэффициент связи между механической и электрической подсистемами).

Среди многих вариантов механической колебательной системы на основе маятника, предлагаемых для использования в накопителях энергии, отметим маятник на перевернутой балке [18], перевернутый маятник с ограничителями амплитуды (inverted pendulum amplitude limiters) [19], перевернутая консольная балка с массой на конце (cantilever beam with a tip mass) [20].

1.1. Приведение системы к безразмерному виду

Перейдем от переменных t и V к безразмерным переменным по следующему правилу:

$$t = t_c \cdot \tau, \quad V = V_c \cdot v, \quad (1.11)$$

где характерные величины времени t_c и напряжения V_c будут определены ниже. Угол отклонения маятника $\varphi(t)$ является безразмерной величиной.

Система (1.1) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi} + \frac{\gamma_0}{t_c} \dot{\varphi} - \omega_0^2 \varphi + \frac{A}{ml} V_c v = -\frac{1}{l^2} \ddot{u}(t_c \tau) - 2 \frac{\gamma_0}{l t_c} \dot{u}(t_c \tau), \\ \frac{V_c}{t_c} \dot{v} + \frac{1}{RC} V_c v - \frac{Bl}{2C} \frac{1}{t_c} \dot{\varphi} = \frac{B}{C t_c} \dot{u}(t_c \tau). \end{cases} \quad (1.12)$$

Здесь и далее точкой над символом обозначена производная по безразмерному времени τ (двумя точками — вторая производная по τ). Выполним алгебраические преобразования:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \gamma_0 t_c \dot{\varphi} - \omega_0^2 t_c^2 \varphi + \frac{A}{ml} V_c t_c^2 v = -\frac{1}{l} \ddot{u}(t_c \tau) - 2 \frac{\gamma_0 t_c}{l} \dot{u}(t_c \tau), \\ \dot{v} + \frac{1}{RC} t_c v - \frac{Bl}{2C} \frac{1}{V_c} \dot{\varphi} = \frac{B}{C V_c} \dot{u}(t_c \tau). \end{cases} \quad (1.13)$$

Пусть функция, определяющая движение платформы P , равна $\tilde{u}(t) = u(t_c \tau)$, а значения размерных коэффициентов: $t_c = RC$, $V_c = \frac{ml}{A(RC)^2}$. Тогда получим основную систему в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \gamma_0 (RC) \dot{\varphi} - \omega_0^2 (RC)^2 \varphi + v = -\frac{1}{l} \ddot{\tilde{u}}(\tau) - 2 \frac{\gamma_0 (RC)}{l} \dot{\tilde{u}}(\tau), \\ \dot{v} + v - \frac{AB}{2m} R^2 C \dot{\varphi} = \frac{AB}{ml} R^2 C \dot{\tilde{u}}(\tau). \end{cases} \quad (1.14)$$

С целью упрощения и ясности дальнейших вычислений введем обозначения для безразмерных величин: коэффициента затухания, характеристической частоты маятника и внешнего воздействия: $\gamma = \gamma_0 \cdot (RC)$, $\omega = \omega_0 \cdot (RC)$, $w = \tilde{u}(\tau)/l$. Также удобно обозначить коэффициент связи электрической и механической подсистем через $\sigma = \frac{AB}{2m} R^2 C$. Окончательно

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \gamma \dot{\varphi} - \omega^2 \varphi + v = -\ddot{w}(\tau) - 2\gamma \dot{w}(\tau), \\ \dot{v} + v - \sigma \dot{\varphi} = 2\sigma \dot{w}(\tau), \end{cases} \quad (1.15)$$

или в более удобной матричной форме:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 & -\gamma & -1 \\ 0 & \sigma & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{w} - 2\gamma \dot{w} \\ 2\sigma \dot{w} \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

где $\psi(\tau) = \dot{\varphi}(\tau)$ — угловая скорость маятника. Заметим, что согласно физической постановке задачи выполняются неравенства $\omega > 0$, $\gamma \geq 0$.

1.2. Исследование устойчивости линеаризованной системы

Исследуем вопрос об устойчивости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.16). Для этого выпишем характеристическое уравнение системы (1.16) в автономном случае:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \omega^2 & -\gamma - \lambda & -1 \\ 0 & \sigma & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.17)$$

оно приводится к алгебраическому уравнению третьей степени с постоянными коэффициентами:

$$\lambda^3 + (\gamma + 1)\lambda^2 + (\gamma + \sigma - \omega^2)\lambda - \omega^2 = 0. \quad (1.18)$$

Как известно, необходимым и достаточным условием устойчивости системы дифференциальных уравнений является положительность всех трех главных диагональных миноров Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 определителя Гурвица

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad (1.19)$$

где a_i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ — коэффициенты алгебраического уравнения (1.18), причем $a_0 = 1$ (см., например, [21]). Поскольку $a_3 = -\omega^2 < 0$, то условия критерия Гурвица $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$:

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

как легко видеть, несовместны ни при каких допустимых значениях параметров ω , γ , σ . Следовательно, система (1.16) является неустойчивой. Тем не менее введение управления с помощью внешнего воздействия $w(\tau)$ позволяет в ряде случаев перевести динамическую систему в устойчивый режим колебаний. В следующем разделе рассмотрим, при каких значениях параметров задачи это возможно.

1.3. Управление амплитудой колебаний маятника

В настоящем разделе покажем, что введение управления с помощью внешнего воздействия $w(\tau)$ позволяет стабилизировать движение маятника и предоставляет возможность управления амплитудой $\varphi(\tau)$ его колебаний.

В настоящем разделе используется представление величин, изменяющихся по гармоническому закону, в виде вещественной части от экспоненциальной функции мнимого аргумента $\sim \exp(i\Omega\tau)$. Как известно, для линейных систем алгебраических или дифференциальных уравнений такой подход корректен и позволяет выполнять промежуточные выкладки в более компактной и наглядной форме.

Запишем систему уравнений (1.16) в условиях управления вида $\dot{w}(t) = \alpha\varphi(t) + de^{i\Omega t}$, где $d \in \mathbb{C}$:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 & -\gamma & -1 \\ 0 & \sigma & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha\dot{\varphi} - 2\gamma\alpha\varphi - e^{i\Omega\tau}(i\Omega + 2\gamma)d \\ 2\sigma\alpha\dot{\varphi} + 2\sigma i\Omega e^{i\Omega\tau}d \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

или

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 - 2\gamma\alpha & -(\gamma + \alpha) & -1 \\ 2\sigma\alpha & \sigma & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(i\Omega + 2\gamma)e^{i\Omega\tau} \\ 2\sigma i\Omega e^{i\Omega\tau} \end{bmatrix} d. \quad (1.22)$$

Как видно из (1.22), коэффициенты матрицы системы в результате действия управления изменились. Проверим условия критерия Гурвица в этом случае. Выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + (1 + \gamma + \alpha)\lambda^2 + [\gamma + \sigma - \omega^2 + (1 + 2\gamma)\alpha]\lambda + [-\omega^2 + 2(\gamma + \sigma)\alpha] = 0 \quad (1.23)$$

и матрицу Гурвица

$$\Gamma(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 + \gamma + \alpha & -\omega^2 + 2(\gamma + \sigma)\alpha & 0 \\ 1 & \gamma + \sigma - \omega^2 + (1 + 2\gamma)\alpha & 0 \\ 0 & 1 + \gamma + \alpha & -\omega^2 + 2(\gamma + \sigma)\alpha \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

которая приводит к следующим условиям:

$$\begin{cases} 1 + \gamma + \alpha > 0, \\ (1 + 2\gamma)\alpha^2 + (1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - \sigma - \omega^2)\alpha + (1 + \gamma)(\gamma + \sigma) - \gamma\omega^2 > 0, \\ -\omega^2 + 2(\gamma + \sigma)\alpha > 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Итак, система (1.22) обладает устойчивостью тогда и только тогда, когда ее параметры удовлетворяют условиям (1.25). Ее решение относительно параметра управления α не представляет сложностей:

$$\begin{cases} \alpha > \frac{\omega^2}{2(\gamma + \sigma)}, \text{ если } \mathcal{D} > 0, \\ \alpha > \max\left(\frac{\omega^2}{2(\gamma + \sigma)}, \alpha_b\right), \text{ если } \mathcal{D} \leq 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

где α_b — больший из двух корней квадратного уравнения (1.25), \mathcal{D} — его дискриминант:

$$\mathcal{D} = (1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - \sigma - \omega^2)^2 - 4(1 + 2\gamma)(\gamma + \gamma^2 + \sigma + \gamma\sigma - \gamma\omega^2). \quad (1.27)$$

Запишем решение системы (1.22), представленное в виде суммы общего решения однородной системы и частного решения неоднородной:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} = \text{Re} \left(C_1 e^{\lambda_1 \tau} \vec{f}_1 + C_2 e^{\lambda_2 \tau} \vec{f}_2 + C_3 e^{\lambda_3 \tau} \vec{f}_3 + \begin{bmatrix} A_\varphi \\ A_\psi \\ A_v \end{bmatrix} e^{i\Omega\tau} \right). \quad (1.28)$$

В формуле (1.28) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные значения матрицы системы (1.22), а $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ — отвечающие им собственные векторы.

В установившемся режиме, т. е. при достаточно больших значениях времени $\tau \gg \gg \max(1/|\text{Re } \lambda_1|, 1/|\text{Re } \lambda_2|, 1/|\text{Re } \lambda_3|)$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} = \text{Re} \begin{bmatrix} A_\varphi \\ A_\psi \\ A_v \end{bmatrix} e^{i\Omega\tau}. \quad (1.29)$$

Как видно из (1.29), решение в установившемся режиме содержит слагаемые, изменяющиеся по гармоническому закону $\sim e^{i\Omega\tau}$. Их амплитуды A_φ, A_ψ, A_v , как несложно показать непосредственной подстановкой $\{\varphi(\tau) = A_\varphi e^{i\Omega\tau}, \psi(\tau) = A_\psi e^{i\Omega\tau}, v(\tau) = A_v e^{i\Omega\tau}\}$ в (1.22), удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} -i\Omega & 1 & 0 \\ \omega^2 - 2\gamma\alpha & -(\gamma + \alpha + i\Omega) & -1 \\ 2\sigma\alpha & \sigma & -1 - i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(i\Omega + 2\gamma) \\ 2\sigma i\Omega \end{bmatrix} d = 0. \quad (1.30)$$

Таким образом, для амплитуды колебаний маятника в зависимости от амплитуды гармонического члена с частотой Ω в управлении $\dot{w}(\tau)$ получаем формулу:

$$A_\varphi = \frac{1}{\mathcal{F}(\Omega)} [2\gamma + i(1 + 2\gamma + 2\sigma)\Omega - \Omega^2] d, \quad (1.31)$$

где $\mathcal{F}(\Omega) = \omega^2 - 2\alpha(\gamma + \sigma) - i\Omega [(1 + 2\gamma)\alpha + \gamma + \sigma - \omega^2] + \Omega^2(\alpha + \gamma + 1) + i\Omega^3$ — определитель системы (1.30) (заметим, что этот определитель также может быть получен из правой части (1.23) путем выполнения формальной замены $\lambda \rightarrow i\Omega$). Установившиеся колебания возможны при условии $\mathcal{F}(\Omega) \neq 0$.

Аналогичным образом вычисляются амплитуды колебаний угловой скорости маятника и напряжения:

$$A_\psi = \frac{i\Omega}{\mathcal{F}(\Omega)} [2\gamma + i(1 + 2\gamma + 2\sigma)\Omega - \Omega^2] d, \quad (1.32)$$

$$A_v = \frac{\sigma}{\mathcal{F}(\Omega)} [4\alpha\gamma + 2i(\alpha + \gamma - 2\alpha\gamma + \omega^2)\Omega + (2\alpha + 2\gamma - 1)\Omega^2 + 2i\Omega^3] d. \quad (1.33)$$

Результаты численных расчетов области устойчивости, корней характеристического уравнения и решения системы при различных значениях параметров представлены на рис. 1.2–1.3.

Графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний маятника $|A_\varphi|$ в пространстве параметров $\{(d, \Omega)\}$ представлены на рис. 1.4–1.5. На этих рисунках видны убывание максимальной амплитуды с увеличением γ , а также смещение резонансной области в сторону больших частот Ω в этом случае. В силу линейности системы (1.30) величина $|A_\varphi|$ пропорциональна параметру d в управляющей функции $\dot{w}(t)$.

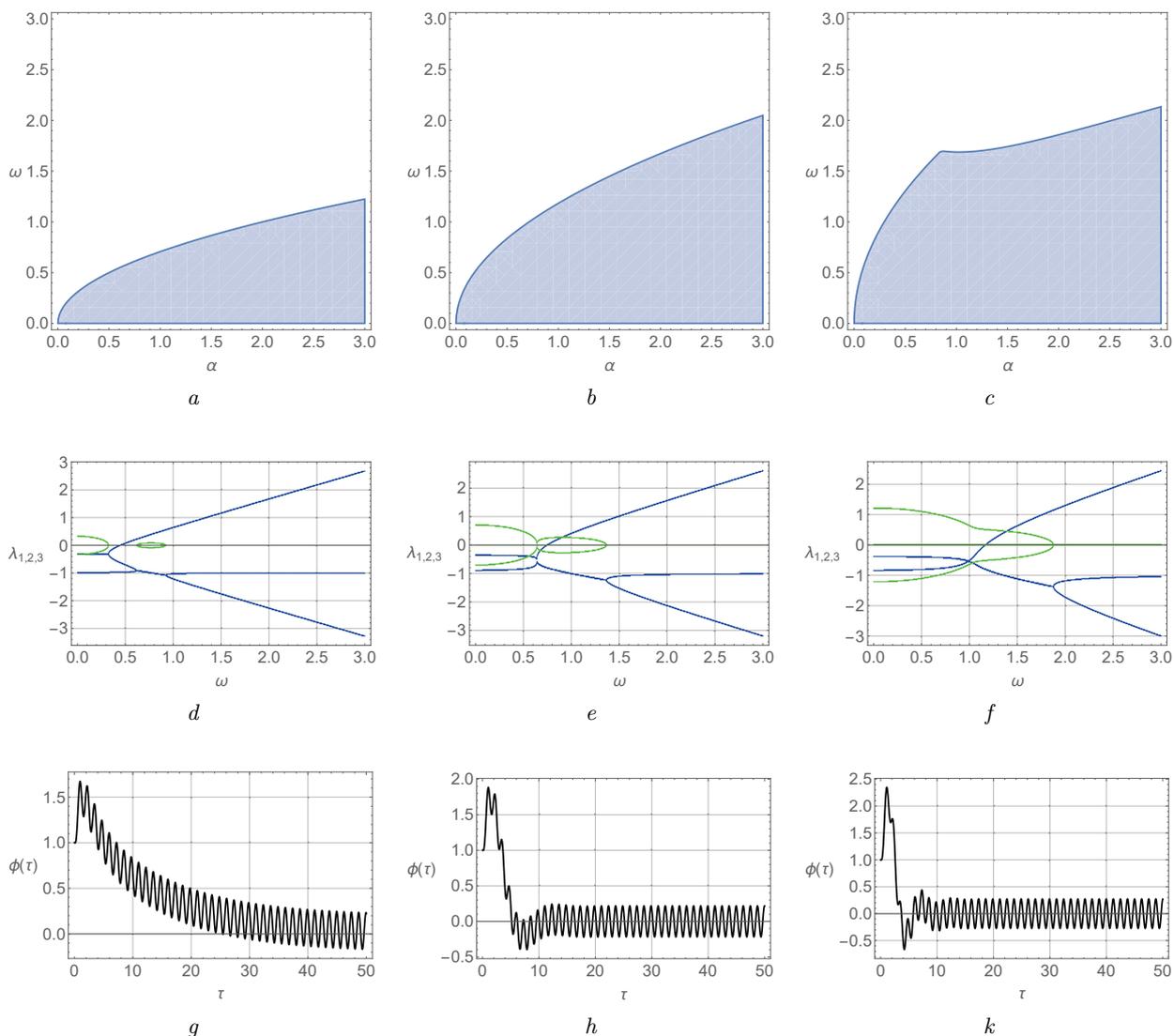


Рис. 1.2. Результаты численных расчетов области устойчивости (1.22), корней характеристического уравнения и решения (1.22) при $\gamma = 0,2$, $\alpha = 0,4$. Параметры и начальные условия для угла отклонения $\omega = 0,4$, $d = 1,0$, $\Omega = 5,0$, $\varphi(0) = 1,0$, $\psi(0) = 0,0$, $v(0) = 1,0$: *a* — область устойчивости для $\sigma = 0,05$; *b* — область устойчивости для $\sigma = 0,5$; *c* — область устойчивости для $\sigma = 1,5$; *d* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для $\sigma = 0,05$; *e* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для $\sigma = 0,5$; *f* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для $\sigma = 1,5$; *g* — угол отклонения маятника для $\sigma = 0,05$; *h* — угол отклонения маятника для $\sigma = 0,5$; *k* — угол отклонения маятника для $\sigma = 1,5$

Fig. 2.2. Results of numerical calculations of the stability region (1.22), roots of the characteristic equation and the solution (1.22) for $\gamma = 0,2$, $\alpha = 0,4$. Parameters and initial conditions for the deflection angle are $\omega = 0,4$, $d = 1,0$, $\Omega = 5,0$, $\varphi(0) = 1,0$, $\psi(0) = 0,0$, $v(0) = 1,0$: *a* — region of stability for $\sigma = 0,05$; *b* — region of stability for $\sigma = 0,5$; *c* — region of stability for $\sigma = 1,5$; *d* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for $\sigma = 0,05$; *e* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for $\sigma = 0,5$; *f* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for $\sigma = 1,5$; *g* — pendulum deflection angle for $\sigma = 0,05$; *h* — pendulum deflection angle for $\sigma = 0,5$; *k* — pendulum deflection angle for $\sigma = 1,5$

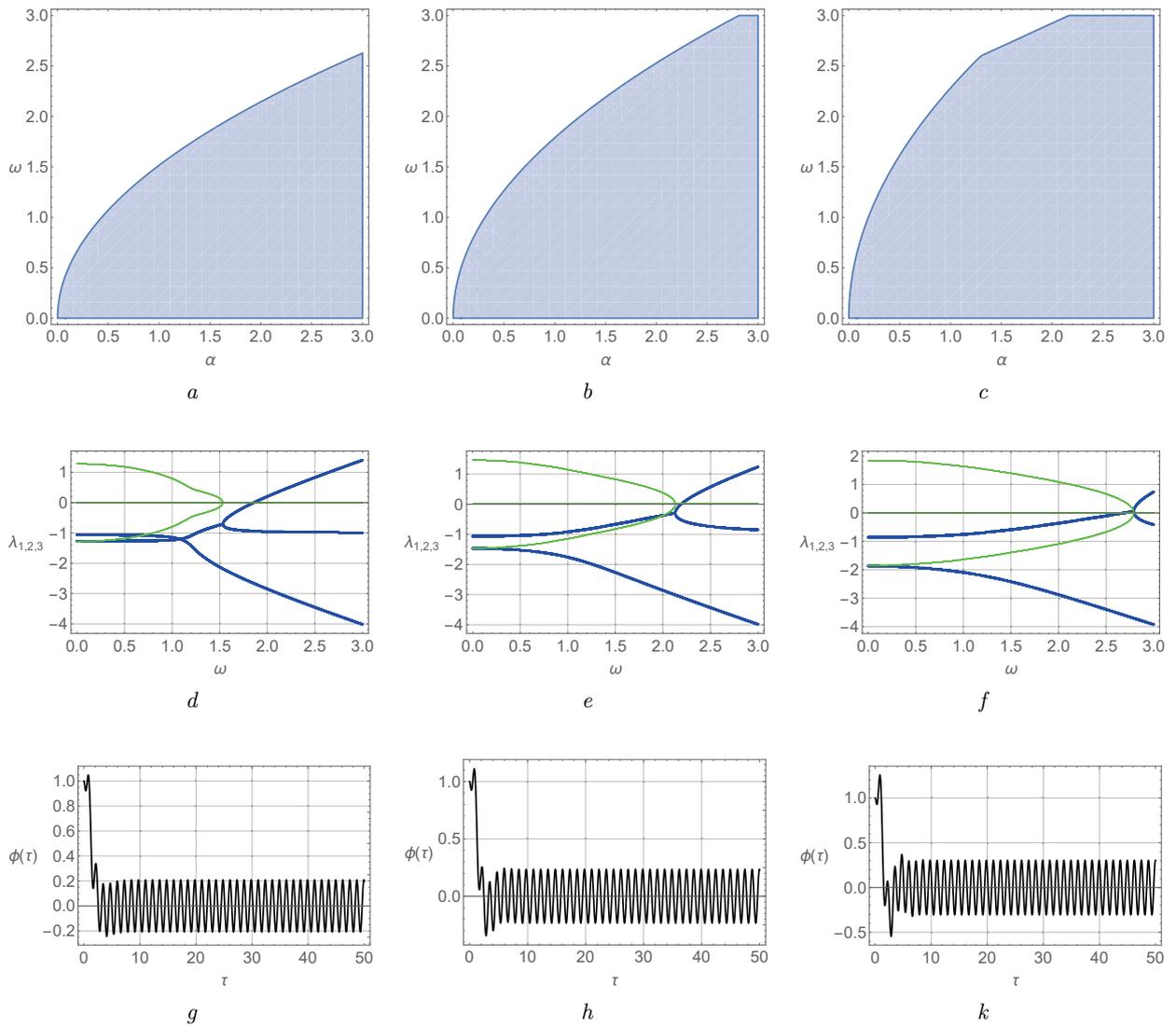


Рис. 1.3. Результаты численных расчетов области устойчивости (1.22), корней характеристического уравнения и решения (1.22) при $\gamma = 1,1$, $\alpha = 1,5$. Параметры и начальные условия для угла отклонения $\omega = 1,2$, $d = 1,0$, $\Omega = 5,0$, $\varphi(0) = 1,0$, $\psi(0) = 0,0$, $v(0) = 1,0$: *a* — область устойчивости системы для $\sigma = 0,05$; *b* — область устойчивости системы для $\sigma = 0,5$; *c* — область устойчивости системы для $\sigma = 1,5$; *d* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для $\sigma = 0,05$; *e* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для $\sigma = 0,5$; *f* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для $\sigma = 1,5$; *g* — угол отклонения маятника для $\sigma = 0,05$; *h* — угол отклонения маятника для $\sigma = 0,5$; *k* — угол отклонения маятника для $\sigma = 1,5$

Fig. 2.3. Results of numerical calculations of the stability region (1.22), roots of the characteristic equation and the solution (1.22) for $\gamma = 1,1$, $\alpha = 1,5$. Parameters and initial conditions for the deflection angle are $\omega = 1,2$, $d = 1,0$, $\Omega = 5,0$, $\varphi(0) = 1,0$, $\psi(0) = 0,0$, $v(0) = 1,0$: *a* — region of stability for $\sigma = 0,05$; *b* — region of stability for $\sigma = 0,5$; *c* — region of stability for $\sigma = 1,5$; *d* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for $\sigma = 0,05$; *e* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for $\sigma = 0,5$; *f* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for $\sigma = 1,5$; *g* — pendulum deflection angle for $\sigma = 0,05$; *h* — pendulum deflection angle for $\sigma = 0,5$; *k* — pendulum deflection angle for $\sigma = 1,5$

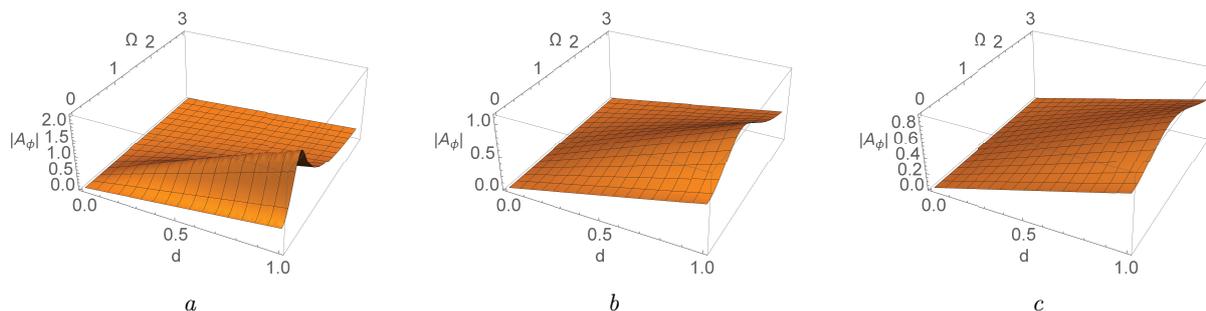


Рис. 1.4. Амплитуда вынужденных колебаний маятника $|A_\varphi(d, \Omega)|$ согласно (1.31) для значений параметра γ , характеризующего трение: $a - \gamma = 0.2$; $b - \gamma = 1.1$; $c - \gamma = 1.9$. Расчет выполнен для $\sigma = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $\omega = 1.2$

Fig. 1.4. Amplitude of forced oscillations of the pendulum $|A_\varphi(d, \Omega)|$ according to (1.31) for the values of the γ parameter characterizing the friction: $a - \gamma = 0.2$; $b - \gamma = 1.1$; $c - \gamma = 1.9$. The calculation was made for $\sigma = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $\omega = 1.2$

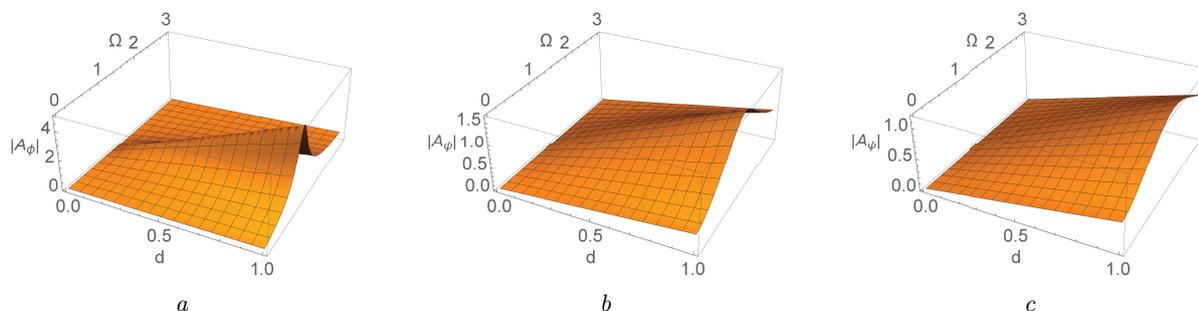


Рис. 1.5. Амплитуда вынужденных колебаний маятника $|A_\varphi(d, \Omega)|$ согласно (1.31) для значений параметра γ , характеризующего трение: $a - \gamma = 0.2$; $b - \gamma = 1.1$; $c - \gamma = 1.9$. Расчет выполнен для $\sigma = 1.5$, $\alpha = 1.5$, $\omega = 1.2$

Fig. 1.5. Amplitude of forced oscillations of the pendulum $|A_\varphi(d, \Omega)|$ according to (1.31) for the values of the γ parameter characterizing the friction: $a - \gamma = 0.2$; $b - \gamma = 1.1$; $c - \gamma = 1.9$. The calculation was made for $\sigma = 1.5$, $\alpha = 1.5$, $\omega = 1.2$

Заключение

В настоящей статье предложена модель преобразователя-запасателя энергии, механической частью которого является обратный маятник. В рамках предложенной модели проведено исследование устойчивости линеаризованной системы. В частности, установлено, что стабилизирующее маятник управление, основанное на принципах обратной связи, позволяет перевести систему в устойчивый режим. В рамках численных экспериментов идентифицированы области в пространстве параметров, отвечающие максимальной мощности. Помимо этого идентифицированы области устойчивости в пространстве параметров, амплитудно-частотные характеристики, а также зависимость передаваемой мощности от параметра связи элементов преобразователя энергии.

Литература

- [1] Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю. Модель автоколебаний без гармоник основной частоты // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24, № 3. С. 53–59. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-53-59>. EDN: <https://elibrary.ru/ytbbet>.
- [2] Ibrahim P., Arafa M., Anis Y. An Electromagnetic Vibration Energy Harvester with a Tunable Mass Moment of Inertia // Sensors. 2021. Vol. 21, Issue 16. Article number 5611. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21165611>.
- [3] Le Scornec J., Guiffard B., Seveno R., Le Camb V. Frequency tunable, flexible and low cost piezoelectric micro-generator for energy harvesting // Sensors and Actuators A: Physical. 2020. Vol. 312, Article number 112148. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2020.112148>.

- [4] Wang Y., Li L., Hofmann D., Andrade J.E., Daraio C. Structured fabrics with tunable mechanical properties // *Nature*. 2021. Vol. 596, pp. 238–243. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03698-7>.
- [5] Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A. Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case // *Journal of Vibration and Control*. 2021. Vol. 27, Issue 1–2, Pp. 43–56. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546320923436>. EDN: <https://elibrary.ru/uztjrc>.
- [6] Semenov M.E., Meleshenko P.A., Borzunov S.V., Reshetova O.O., Barsukov A.I. A Simple Model of the Energy Harvester within a Linear and Hysteresis Approach // *Micromachines*. 2023. Vol. 14, Issue 2, Article number 310. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi14020310>.
- [7] Wang Z., He L., Zhang Z., Zhou Z., Zhou J., Cheng G. Research on a Piezoelectric Energy Harvester with Rotating Magnetic Excitation // *Journal of Electronic Materials*. 2021. Vol. 50, pp. 3228–3240. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11664-021-08910-y>.
- [8] Kovacova V., Glinsek S., Girod S., Defay E. High Electrocaloric Effect in Lead Scandium Tantalate Thin Films with Interdigitated Electrodes // *Sensors*. 2022. Vol. 22, Issue 11, article number 4049. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22114049>.
- [9] Bouhedma S., Hu S., Schütz A., Lange F., Bechtold T., Ouali M., Hohlfeld D. Analysis and Characterization of Optimized Dual-Frequency Vibration Energy Harvesters for Low-Power Industrial Applications // *Micromachines*. 2022. Vol. 13, Issue 7. Article number 1078. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi13071078>.
- [10] Damjanovic D. Ferroelectric, dielectric and piezoelectric properties of ferroelectric thin films and ceramics // *Reports of Progress in Physics*. 1998. Vol. 61, Number 9, Pp. 1267–1324. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/61/9/002>.
- [11] Dawber M. Physics of thin-film ferroelectric oxides // *Review of Modern Physics*. 2005. Vol. 77, Issue 4. Article number 1083. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.1083>.
- [12] Cheng C., Peters T., Dangi A., Agrawal S., Chen H., Kothapalli S.-R., Trolier-McKinstry S. Improving PMUT Receive Sensitivity via DC Bias and Piezoelectric Composition // *Sensors*. 2022. Vol. 22, Issue 15. Article number 5614. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22155614>.
- [13] Ge C., Cretu E. Simple and Robust Microfabrication of Polymeric Piezoelectric Resonating MEMS Mass Sensors // *Sensors*. 2022. Vol. 22, Issue 8, Article number 2994. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22082994>.
- [14] Hu H., Ben Mrad R. On the classical Preisach model for hysteresis in piezoceramic actuators // *Mechatronics*. 2003. Vol. 13, Issue 2. Pp. 85–94. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0957-4158\(01\)00043-5](https://doi.org/10.1016/S0957-4158(01)00043-5).
- [15] Renno J.M., Daqaq M.F., Inman D.J. On the optimal energy harvesting from a vibration source // *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 320, Issues 1–2, pp. 386–405. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.07.029>.
- [16] Triplett A., Quinn D.D. The effect of nonlinear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting // *Proceedings of the IMECE2008 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Boston, MA, USA, 31 October – 6 November 2008; IMECE2008-66393*. Pp. 1–6.
- [17] Tusset A.M., Rocha R.T., Iliuk I., Balthazar J.M., Litak G. Dynamics and Control of Energy Harvesting from a Non-ideally Excited Portal Frame System with Fractional Damping // Balthazar J.M. (eds) *Vibration Engineering and Technology of Machinery. Mechanisms and Machine Science*, vol 95. Cham: Springer, 2021, pp. 383–395. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-60694-7_25.
- [18] Pan J., Qin W., Deng W., Zhang P., Zhou Z. Harvesting weak vibration energy by integrating piezoelectric inverted beam and pendulum // *Energy*. 2021. Vol. 227. Article number 120374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.120374>.
- [19] Lygas K., Wolszczak P., Litak G. Broadband frequency response of a nonlinear resonator with clearance for energy harvesting // *MATEC Web Conference*. 2018. Vol. 148, Article number 12003. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201814812003>.
- [20] Friswell M.I., Ali S.F., Bilgen O., Adhikari S., Lees A.W., Litak G. Non-linear piezoelectric vibration energy harvesting from a vertical cantilever beam with tip mass // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2012. Vol. 23, Issue 13. Pp. 1505–1521. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X12455722>.
- [21] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 560 с. ISBN 978-5-9221-0524-8. URL: <https://djvu.online/file/9RBsN3mYxlxaq>.



S. V. Borzunov

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: sborzunov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5099-9655>

TRANSFORMATION OF OSCILLATIONS OF AN UNSTABLE SYSTEM IN AN ENERGY HARVESTER

ABSTRACT

In this work, a simple model of energy harvester transforming the energy of unstable mechanical vibrations into useful electric energy is proposed. The mechanical part of the system is presented in the form of an inverted pendulum. The electric part consists of a converter of mechanical energy based on a direct piezoelectric effect, and a payload. The dynamics of the system is considered in the linearized production, the areas of stability are determined, various dynamics modes in the parameter space are identified. It was established that the stabilizing pendulum of management based on the principles of feedback allows you to transfer the system into a stable mode of functioning. The optimal characteristics of the system that meets maximum power were found.

Key words: energy harvester; inverted pendulum; stability of the system.

Citation. Borzunov S.V. Transformation of oscillations of an unstable system in an energy harvester. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 7–18. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-7-18>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Borzunov S.V., 2023

Sergei V. Borzunov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation.

References

- [1] Zaitsev V.V., Fedyunin E.Yu. Model of self-oscillations without harmonicas of the base frequency. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 53–59. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-53-59>. EDN: <https://elibrary.ru/ytbbet>. (In Russ.)
- [2] Ibrahim P., Arafa M., Anis Y. An Electromagnetic Vibration Energy Harvester with a Tunable Mass Moment of Inertia. *Sensors*, 2021, vol. 21, issue 16, article number 5611. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21165611>.
- [3] Le Scornec J., Guiffard B., Seveno R., Le Camb V. Frequency tunable, flexible and low cost piezoelectric micro-generator for energy harvesting. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2020, vol. 312, p. 112148. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2020.112148>.
- [4] Wang Y., Li L., Hofmann D., Andrade J.E., Daraio C. Structured fabrics with tunable mechanical properties. *Nature*, 2021, vol. 596, pp. 238–243. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03698-7>.
- [5] Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A. Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case. *Journal of Vibration and Control*, 2021, vol. 27, issue 1–2, pp. 43–56. <https://doi.org/10.1177/1077546320923436>
- [6] Semenov M.E., Meleshenko P.A., Borzunov S.V., Reshetova O.O., Barsukov A.I. A Simple Model of the Energy Harvester within a Linear and Hysteresis Approach. *Micromachines*, 2023, vol. 14, issue 2, p. 310. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi14020310>.
- [7] Wang Z., He L., Zhang Z., Zhou Z., Zhou J., Cheng G. Research on a Piezoelectric Energy Harvester with Rotating Magnetic Excitation. *Journal of Electronic Materials*, 2021, vol. 50, pp. 3228–3240. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11664-021-08910-y>.
- [8] Kovacova V., Glinsek S., Girod S., Defay E. High Electrocaloric Effect in Lead Scandium Tantalate Thin Films with Interdigitated Electrodes. *Sensors*, 2022, vol. 22, issue 11, article number 4049. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22114049>.
- [9] Bouhedma S., Hu S., Schütz A., Lange F., Bechtold T., Ouali M., Hohlfeld D. Analysis and Characterization of Optimized Dual-Frequency Vibration Energy Harvesters for Low-Power Industrial Applications. *Micromachines*, 2022, vol. 13, issue 7, article number 1078. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi13071078>.

- [10] Damjanovic D. Ferroelectric, dielectric and piezoelectric properties of ferroelectric thin films and ceramics. *Reports of Progress in Physics*, 1998, vol. 61, number 9, pp. 1267–1324. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/61/9/002>.
- [11] Dawber M. Physics of thin-film ferroelectric oxides. *Reviews of Modern Physics*, 2005, vol. 77, issue 4, article number 1083. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.1083>.
- [12] Cheng C., Peters T., Dangi A., Agrawal S., Chen H., Kothapalli S.-R., Trolier-McKinstry S. Improving PMUT Receive Sensitivity via DC Bias and Piezoelectric Composition. *Sensors*, 2022, vol. 22, issue 15, article number 5614. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22155614>.
- [13] Ge C., Cretu E. Simple and Robust Microfabrication of Polymeric Piezoelectric Resonating MEMS Mass Sensors. *Sensors*, 2022, vol. 22, issue 8, article number 2994. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22082994>.
- [14] Hu H., Ben Mrad R. On the classical Preisach model for hysteresis in piezoceramic actuators. *Mechatronics*. 2003. Vol. 13, Issue 2. P. 85–94. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0957-4158\(01\)00043-5](http://doi.org/10.1016/S0957-4158(01)00043-5).
- [15] Renno J.M., Daqaq M.F., Inman D.J. On the optimal energy harvesting from a vibration source. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, vol. 320, issues 1–2, pp. 386–405. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.07.029>.
- [16] Triplett A., Quinn D.D. The effect of nonlinear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting. In: *Proceedings of the IMECE2008 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Boston, MA, USA, 31 October–6 November 2008*; IMECE2008-66393. pp. 1–6.
- [17] Tusset A.M., Rocha R.T., Iliuk I., Balthazar J.M., Litak G. Dynamics and Control of Energy Harvesting from a Non-ideally Excited Portal Frame System with Fractional Damping. In: *Balthazar J.M. (eds) Vibration Engineering and Technology of Machinery. Mechanisms and Machine Science*, vol. 95. Cham: Springer, 2021, pp. 383–395. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-60694-7_25.
- [18] Pan J., Qin W., Deng W., Zhang P., Zhou Z. Harvesting weak vibration energy by integrating piezoelectric inverted beam and pendulum. *Energy*, 2021, vol. 227, article number 120374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.120374>.
- [19] Lygas K., Wolszczak P., Litak G. Broadband frequency response of a nonlinear resonator with clearance for energy harvesting. In: *MATEC Web Conference*, 2018, vol. 148, article number 12003. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201814812003>.
- [20] Friswell M.I., Ali S.F., Bilgen O., Adhikari S., Lees A.W., Litak G. Non-linear piezoelectric vibration energy harvesting from a vertical cantilever beam with tip mass. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2012, vol. 23, issue 13, pp. 1505–1521. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X12455722>.
- [21] Gantmakher F.R. Theory of matrices. Moscow: FIZMATLIT, 2010, 560 p. ISBN 978-5-9221-0524-8. Available at: <https://djuv.online/file/9RBsN3mYxlxaq>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-19-29

УДК 517; 519.6; 519.8

Дата: поступления статьи: 02.03.2023
после рецензирования: 11.04.2023
принятия статьи: 30.06.2023

С.В. Борзунов

Воронежский государственный университет,
г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: sborzunov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5099-9655>

О.О. Решетова

Воронежский государственный университет,
г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: tribunskih1993@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8257-7836>

ДИНАМИКА ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ-ЗАПАСАТЕЛЯ ЭНЕРГИИ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМ ТРЕНИЕМ

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена модель преобразователя-запасателя энергии с гистерезисным вязким трением. Механическая часть преобразователя-запасателя энергии выполнена в виде перевернутого маятника. Гистерезис формализуется в рамках модели Прейзаха, представляющей собой континуальный аналог системы неидеальных реле, соединенных параллельно. В рамках численных экспериментов исследованы зависимости динамических параметров, в частности, угла отклонения маятника и напряжения на нагрузке, а также фазовых портретов от значения коэффициента, характеризующего влияние гистерезисного трения. Продемонстрирована роль нелинейных эффектов.

Ключевые слова: преобразователь-запасатель энергии; перевернутый маятник; гистерезис; неидеальное реле; модель Прейзаха.

Цитирование. Борзунов С.В., Решетова О.О. Динамика преобразователя-запасателя энергии с гистерезисным трением // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 19–29. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-19-29>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Борзунов С.В., Решетова О.О., 2023

Сергей Викторович Борзунов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

Ольга Олеговна Решетова — ассистент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

Введение

Современные преобразователи-запасатели энергии создаются на основе достижений физики, химии, материаловедения, электроники и теории управления. В такого рода устройствах происходит преобразование механической энергии, как правило, кинетической энергии колеблющегося тела, в электрическую форму энергии. Один из важнейших способов преобразования энергии основан на прямом пьезоэлектрическом эффекте, заключающемся в возникновении поляризации диэлектрического образца под действием механических напряжений. Пьезоэлектрические материалы характеризуются нелинейной зависимостью между приложенным механическим напряжением и создаваемым электрическим полем [1; 2].

С одной стороны, относительно небольшие механические напряжения приводят к линейному отклику электрических характеристик пьезоэлектрического образца. С другой стороны, в практической задаче конструирования преобразователей-запасателей энергии, как правило, достигаются значения внешнего воздействия, превышающие порог линейного отклика. Таким образом, возникает гистерезисная зависимость напряжения, заряда и других электрических характеристик от динамических параметров механической подсистемы [3; 4].

Петля гистерезиса возникает при рассмотрении зависимости поляризации сегнетоэлектрического образца от приложенного электрического поля, причем в переменном поле параметры петли существенно зависят от частоты изменения поля. Также гистерезисная связь проявляется на вольт-фарадных характеристиках некоторых сегнетоэлектрических пленок, т. е. в зависимостях емкости от приложенного к образцу напряжения [5; 6]. Интересно, что образцы сегнетоэлектрических пленок, напыленные на кремниевые пластины *p*- и *n*-типа проводимости, отличаются направлением обхода петли (по часовой стрелке и против часовой стрелки соответственно).

Моделирование динамики систем с гистерезисом представляет собой сложную математическую задачу, привлекающую внимание многих исследователей. Применяются как конструктивные модели — неидеальное реле, преобразователь Прейзаха, модель Ишлинского [7; 9–12], так и феноменологические — модель Боука–Вена, Айвана, Дьюема и др. [13; 14].

Среди конструктивных моделей гистерезисных нелинейностей важную роль играет преобразователь Прейзаха [15–17]. Первоначально эта модель была сформулирована для описания свойств ферромагнитных материалов [18], позже была доказана ее применимость к широкому спектру явлений из различных научно-практических задач [19; 20]. Модель Прейзаха хорошо зарекомендовала себя для аналитического описания наблюдаемых свойств ферромагнитных и сегнетоэлектрических материалов. Известны многочисленные технические приложения — модели накопителей энергии, других систем, использующих пьезоэффект, модели систем с долговременной памятью. Также известны результаты применения преобразователя Прейзаха в биологии и медицине, а также экономике [8].

Основу модели Прейзаха составляет нелинейный преобразователь, представляющий собой континуальную систему реле, соединенных параллельно. Выходом преобразователя Прейзаха $\Gamma[u(t)]$ (где $u(t)$ — непрерывная функция времени) считают функцию $x(t)$, значение которой в каждый момент времени определяется, как и для всех гистерезисных преобразователей, не только значением входа $u(t)$, но и всей предысторией.

1. Гистерезисные зависимости в модели преобразователя-запасателя энергии

При практической реализации конструирования запасателей энергии, как правило, имеют место гистерезисные зависимости различного вида как в механической подсистеме, так и электромагнитной природы. В настоящем разделе рассматривается электромеханическая система запасателя энергии с гистерезисным демпфированием, иными словами, предполагается, что трение в механической подсистеме подчиняется гистерезисному закону (рис. 1.1).

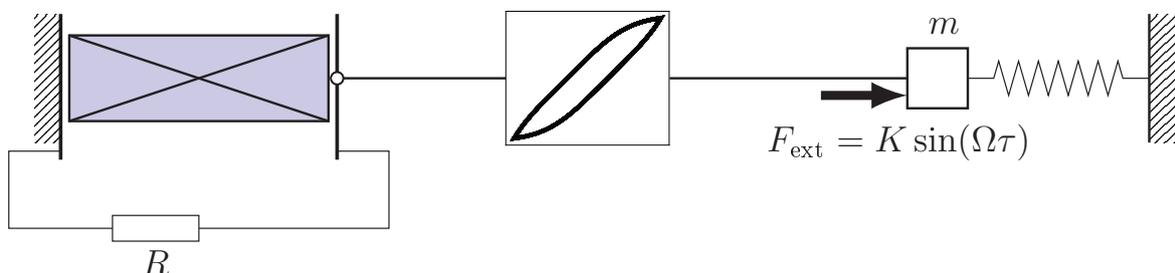


Рис. 1.1. Преобразователь-запасатель энергии, механически связанный с классическим осциллятором посредством гистерезисного звена

Fig. 1.1. Energy harvester mechanically connected to a classical oscillator by means of a hysteresis link

Рассмотрим простую модель преобразователя-запасателя энергии в виде перевернутого математического маятника, закрепленного на легкой горизонтальной платформе. Маятник соединен механической связью с одной из обкладок сегнетоэлектрического конденсатора, который включен в замкнутую электрическую цепь (рис. 1.2).

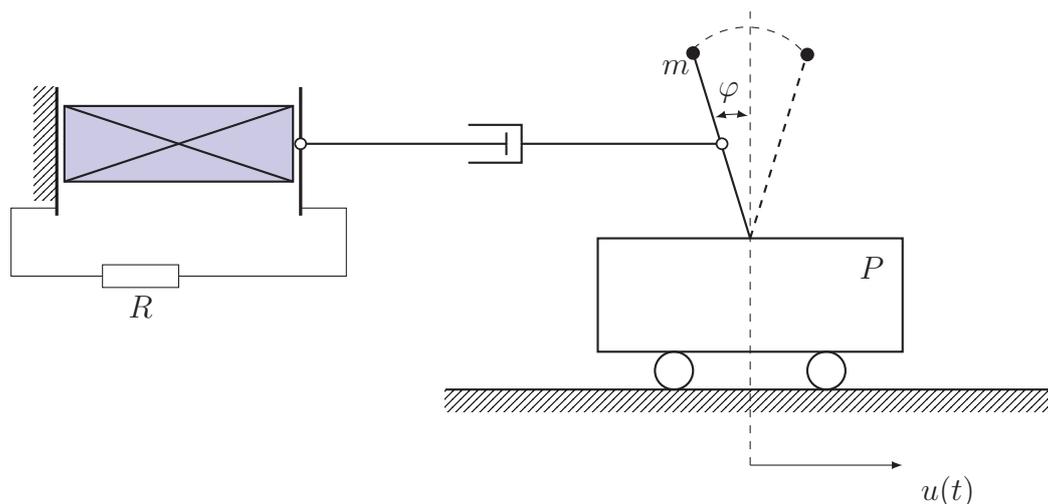


Рис. 1.2. Математический маятник, связанный с пьезоэлектрическим генератором
 Fig. 1.2. Mathematical pendulum associated with a piezoelectric generator

Платформа P может перемещаться в горизонтальном направлении. Угол отклонения маятника относительно вертикали равен $\varphi(t)$, координата платформы — $u(t)$. Длина маятника равна l , масса его груза равна m .

Пьезоэлектрический материал, образующий конденсатор с емкостью C , включен в электрическую цепь с внешней нагрузкой R . Напряжение на нагрузке обозначим через $V(t)$.

Рассматриваемая динамическая система описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (первое из которых есть уравнение движения груза m под действием сил механического происхождения и силы инерции, второе — баланс токов в электрической цепи):

$$\begin{cases} ml\ddot{\varphi} + c(l\dot{\varphi}/2 + \dot{u}) - mg \sin \varphi + AV = -m\ddot{u}, \\ C\dot{V} + \frac{V}{R} = B(l\dot{\varphi}/2 + \dot{u}). \end{cases} \quad (1.1)$$

Точкой над символом здесь и далее будем обозначать производную по времени t .

При небольших отклонениях маятника от положения равновесия $\sin \varphi \sim \varphi$ получаем:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \gamma_0\dot{\varphi} - \omega_0^2\varphi + \frac{A}{ml}V = -\frac{1}{l}\ddot{u} - 2\frac{\gamma_0}{l}\dot{u}, \\ \dot{V} + \frac{1}{RC}V - \frac{Bl}{2C}\dot{\varphi} = \frac{B}{C}\dot{u}, \end{cases} \quad (1.2)$$

здесь $\gamma_0 = c/(2m)$, $\omega_0^2 = g/l$, A и B — параметры связи механической и электрической подсистем.

1.1. Система с гистерезисным трением в рамках модели Пре́йзаха

На рис. 1.1 схематически представлена модель преобразователя-запасателя энергии, основанного на классическом осцилляторе m , связанного с электрической подсистемой посредством гистерезисно-демпфирующего звена. Внешнее воздействие определялось посредством периодической силы $F_{\text{ext}} = K \sin(\Omega\tau)$, приложенной к m .

В настоящем разделе гистерезисный преобразователь введем с помощью подхода, развитого М. А. Красносельским и А. В. Покровским [7]. В рамках указанного подхода гистерезисный преобразователь трактуется как оператор, определенный на пространстве непрерывных функций, динамика которых описывается соотношениями: “вход–состояние” и “состояние–выход”.

Обозначим через $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ гистерезисный преобразователь, отвечающий неидеальному реле с пороговыми числами α и β , где $x_0 \in \{0, 1\}$ — начальное состояние преобразователя, t_0 — начальный момент времени. Пространством состояний неидеального реле является двухэлементное множество $\{0, 1\}$. Входом системы является непрерывная при $t \geq t_0$ функция $u(t)$, выходом — ступенчатая функция $x(t)$, определяемая соотношением:

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t). \quad (1.3)$$

Заметим, что начальное состояние x_0 преобразователя должно удовлетворять условию:

$$x_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } u(0) \leq \alpha, \\ 1, & \text{если } u(0) \geq \beta. \end{cases} \quad (1.4)$$

В случае выполнения неравенств $\alpha \leq u(0) \leq \beta$ величина x_0 может принимать любое значение из множества $\{0, 1\}$. Значения выхода $x(t)$ при непрерывном входе $u(t)$ для $t \in (t_0, \infty)$ при каждом $t = \tau$ определяются согласно правилу:

$$R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(\tau) = \begin{cases} x_0, & \text{если } \forall t \in [t_0, \tau]: [\alpha < u(t) < \beta], \\ 1, & \text{если } \exists t' \in [t_0, \tau]: [u(t') \geq \beta] \wedge \{\forall t \in [t', \tau]: [u(t) > \alpha]\}, \\ 0, & \text{если } \exists t' \in [t_0, \tau]: [u(t') \leq \alpha] \wedge \{\forall t \in [t', \tau]: [u(t) < \beta]\}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Будем говорить, что реле включено, если выход равен единице, и что реле находится в выключенном состоянии в противном случае.

Примечание. Заметим, что выбор элементов двухэлементного множества \mathbb{B} может быть произведен и другим способом, например, как $\{-1, 1\}$. За исключением абсолютных значений выхода реле, определение (1.5) и свойства неидеального реле не изменятся. Легко видеть, что биективное отображение $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, заданное согласно правилу $f(x) = (1 + x)/2$, делает выбор конкретных значений элементов \mathbb{B} полностью эквивалентным.

Рассмотрим набор из N неидеальных реле, занумерованных индексом j , где $1 \leq j \leq N$. Система реле \mathcal{R}_N , соединенных параллельно, схематично представлена на рис. 1.3. Выход определяется естественным образом как взвешенная сумма выходов, получаемых от каждого из индивидуальных реле:

$$\mathcal{R}_N \left[\{x_0^{(0)}, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(N)}\}, t_0 \right] u(t) = \sum_{j=1}^N \mu_j R[\alpha_j, \beta_j, x_0^{(j)}, t_0] u(t), \quad (1.6)$$

где $\{x_0^{(0)}, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(N)}\}$ — множество начальных состояний конечной системы реле.

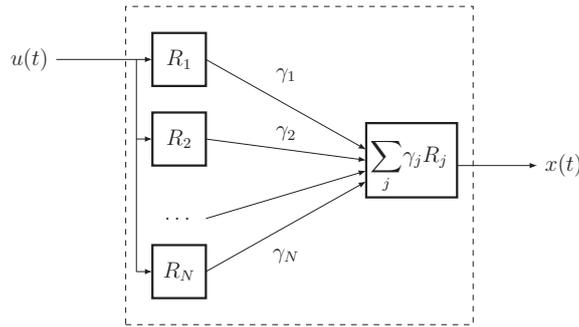


Рис. 1.3. Параллельное соединение N экземпляров реле $R_j[\alpha, \beta, x_0, t_0]$, взятых с весами $\gamma_j > 0$, где $j = 1, \dots, N$

Fig. 1.3. Parallel connection of N relay instances $R_j[\alpha, \beta, x_0, t_0]$, taken with weights $\gamma_j > 0$, where $j = 1, \dots, N$

Определение такой системы реле основано на реализации трехэтапной конструкции. На первом шаге выход системы определим на монотонных входах $u(t)$, на втором шаге с помощью полугруппового тождества на кусочно-монотонных входах, затем на третьем этапе выполним переход к произвольным непрерывным входам.

Справедливо свойство монотонности конечной системы неидеальных реле относительно функции входа $u(t)$, что является непосредственным следствием линейности конструкции (1.6) и монотонности по входу одного гистерона. Система не является управляемой, как легко видеть в частном случае двух неидеальных реле. В самом деле, параллельное соединение двух реле $R_1[\alpha_1, \beta_1, x_0^{(1)}, t_0]$ и $R_2[\alpha_2, \beta_2, x_0^{(2)}, t_0]$, где $\beta_{1,2} = \alpha_{1,2} + \varepsilon$ (при условии $0 < \varepsilon < |\beta - \alpha|$), $x^{(0)} = 1$, $x^{(1)} = 0$, характеризуется следующим поведением: легко видеть, что для любых допустимых входов $u(t)$ справедлива импликация

$$(R_1[\alpha_1, \beta_1, x_0^{(1)}, t_0]u(t) = 1) \Rightarrow (R_2[\alpha_2, \beta_2, x_0^{(2)}, t_0] = 1), \quad (1.7)$$

т. е. событие “первое реле выключено, а второе — включено” является невозможным.

Преобразователь Прейзаха является континуальным аналогом семейства неидеальных реле, соединенных параллельно. Пространство состояний этого преобразователя состоит из пар $\{u(t), z(\alpha, \beta, t)\}$, где $u(t)$ — значение входа в момент времени t , а $z(\alpha, \beta, t)$ — характеристическая функция подмножества полуплоскости $\alpha < \beta$, принимающая значения 0, 1. Входно-выходные соответствия оператора Прейзаха определяются соотношениями: вход-состояние

$$z(\alpha, \beta, t) = R[\alpha, \beta, z_0, t_0]u(t), \quad (1.8)$$

где $z_0 = z(\alpha, \beta, t_0)$ и состояние-выход

$$\Gamma[z(\alpha, \beta, t), u(t_0), t_0]u(t) = \iint_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta. \quad (1.9)$$

Указанный преобразователь широко применяется для формализации различных гистерезисных зависимостей, его свойства, а также различные приложения можно найти, например, в [21].

Будем предполагать, что носитель меры преобразователя Прейзаха ограничен, и, следовательно, пространство состояний состоит из характеристических функций, носитель которых содержится на ограниченных множествах.

Результаты численного решения представленной на рис. 1.1 системы (в обезразмеренном виде) с гистерезисным трением в рамках модели Прейзаха

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + H\Gamma\varphi(\tau) + \omega^2\varphi + v = K \sin(\Omega\tau), \\ \dot{v} + v - \sigma\dot{\varphi} = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

где H — коэффициент, характеризующий «влияние» гистерезисного трения. Численные эксперименты при значениях коэффициента $H \in \{0, 0.5, 1.0, 8.0\}$ представлены на рис. 1.4–1.7. В расчетах в качестве носителя меры преобразователя Прейзаха было выбрано множество $[-1, 1] \times [-1, 1]$, количество элементарных гистерезисов равно 20 100.

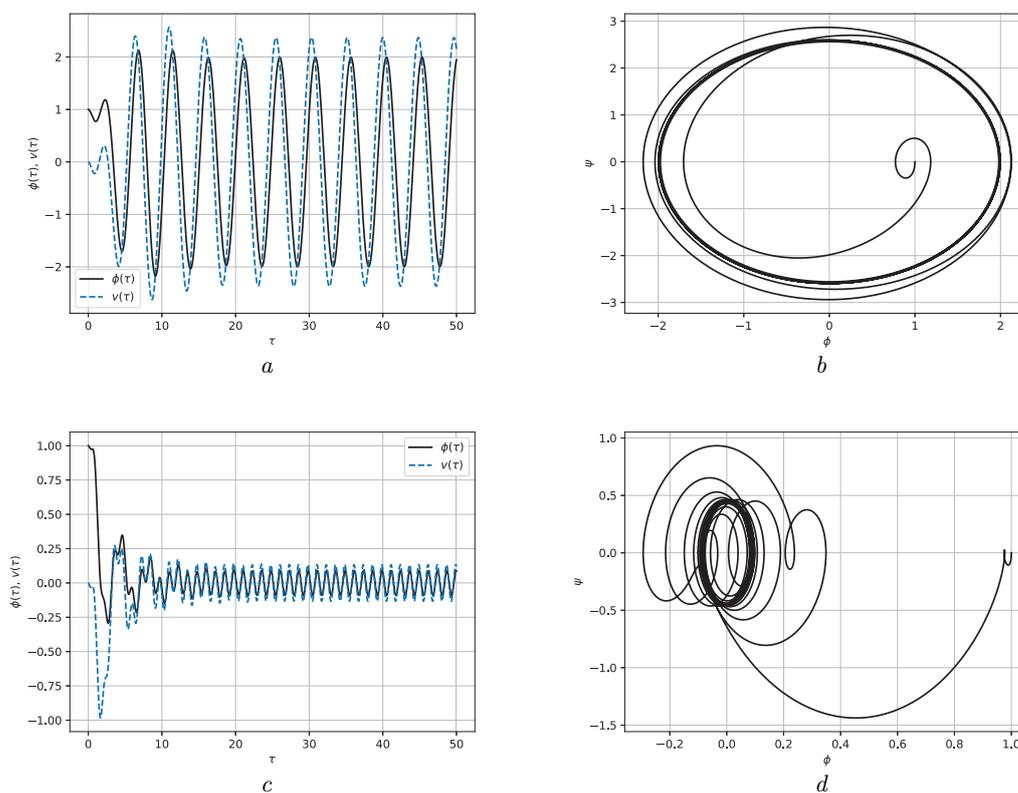


Рис. 1.4. Зависимость динамических переменных от безразмерного времени и фазовые портреты в условиях отсутствия гистерезисного слагаемого. Значения параметров $\sigma = 1.5$, $\omega = 1.2$, $K = 2.0$, $H = 0$. Начальные условия $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$: a — угол отклонения маятника $\varphi(\tau)$ и напряжение $v(\tau)$, $\Omega = 1.3$; b — фазовый портрет колебаний маятника $\psi(\varphi)$ при $\Omega = 1.3$; c — угол отклонения маятника $\varphi(\tau)$ и напряжение $v(\tau)$, $\Omega = 5.0$; d — фазовый портрет колебаний маятника $\psi(\varphi)$ при $\Omega = 5.0$

Fig. 1.4. The dependence of dynamic variables on dimensionless time and phase portraits in the absence of a hysteresis term. Parameter values $\sigma = 1.5$, $\omega = 1.2$, $K = 2.0$, $H = 0$. Initial conditions $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$: a — angle of deflection of the pendulum $\varphi(\tau)$ and voltage $v(\tau)$, $\Omega = 1.3$; b — phase portrait of pendulum oscillations $\psi(\varphi)$ at $\Omega = 1.3$; c — angle of deflection of the pendulum $\varphi(\tau)$ and voltage $v(\tau)$, $\Omega = 5.0$; d — phase portrait of pendulum oscillations $\psi(\varphi)$ at $\Omega = 5.0$

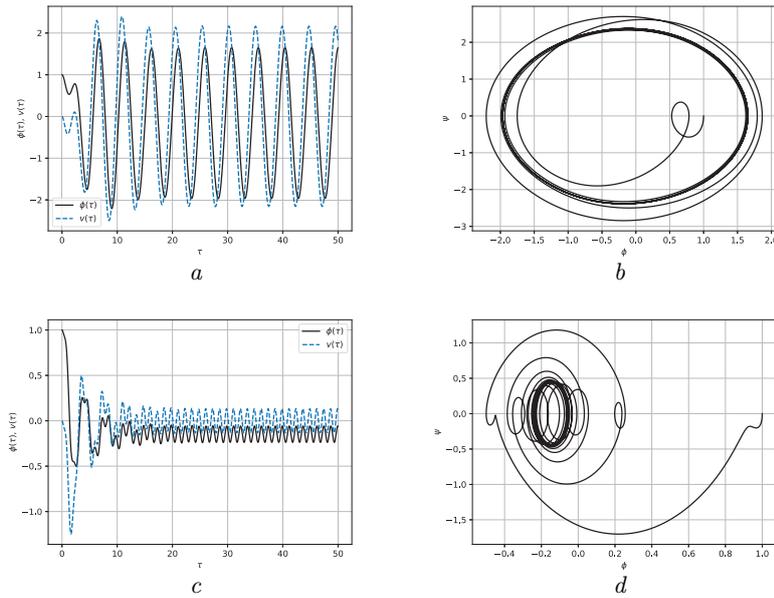


Рис. 1.5. Зависимость динамических переменных от безразмерного времени и фазовые портреты при $H = 0.5$. Значения параметров $\sigma = 1.5$, $\omega = 1.2$, $K = 2.0$. Начальные условия $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$: a — угол отклонения маятника $\varphi(\tau)$ и напряжение $v(\tau)$ при $\Omega = 1.3$; b — фазовый портрет колебаний маятника $\psi(\varphi)$ при $\Omega = 1.3$; c — угол отклонения маятника $\varphi(\tau)$ и напряжение $v(\tau)$ при $\Omega = 5.0$; d — фазовый портрет колебаний маятника $\psi(\varphi)$ при $\Omega = 5.0$

Fig. 1.5. The dependence of dynamic variables on dimensionless time and phase portraits at $H = 0.5$. Parameter values $\sigma = 1.5$, $\omega = 1.2$, $K = 2.0$. Initial conditions $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$: a — angle of deflection of the pendulum $\varphi(\tau)$ and voltage $v(\tau)$ at $\Omega = 1.3$; b — phase portrait of pendulum oscillations $\psi(\varphi)$ at $\Omega = 1.3$; c — angle of deflection of the pendulum $\varphi(\tau)$ and voltage $v(\tau)$ at $\Omega = 5.0$; d — phase portrait of pendulum oscillations $\psi(\varphi)$ at $\Omega = 5.0$

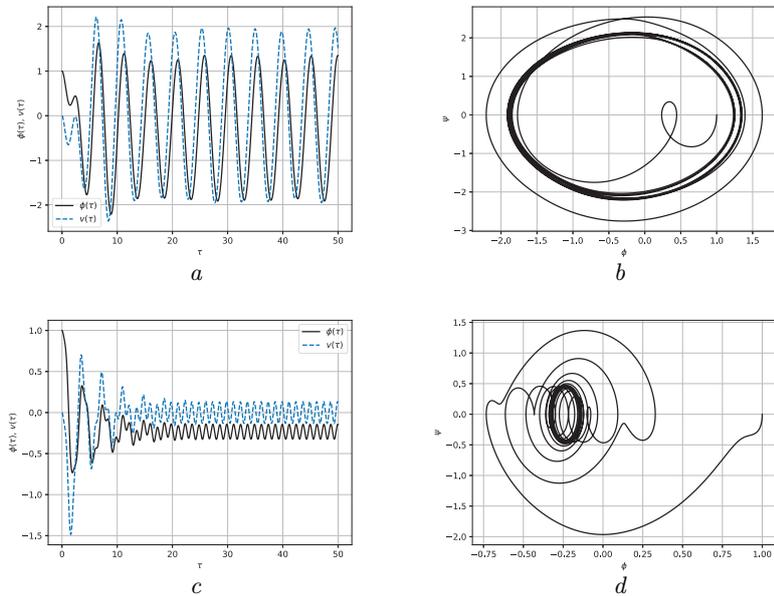


Рис. 1.6. Зависимость динамических переменных от безразмерного времени и фазовые портреты при $H = 1.0$. Значения параметров $\sigma = 1.5$, $\omega = 1.2$, $K = 2.0$. Начальные условия $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$: a — угол отклонения маятника $\varphi(\tau)$ и напряжение $v(\tau)$ при $\Omega = 1.3$; b — фазовый портрет колебаний маятника $\psi(\varphi)$ при $\Omega = 1.3$; c — угол отклонения маятника $\varphi(\tau)$ и напряжение $v(\tau)$ при $\Omega = 5.0$; d — фазовый портрет колебаний маятника $\psi(\varphi)$ при $\Omega = 5.0$

Fig. 1.6. The dependence of dynamic variables on dimensionless time and phase portraits at $H = 1.0$. Parameter values $\sigma = 1.5$, $\omega = 1.2$, $K = 2.0$. Initial conditions $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$: a — angle of deflection of the pendulum $\varphi(\tau)$ and voltage $v(\tau)$ at $\Omega = 1.3$; b — phase portrait of pendulum oscillations $\psi(\varphi)$ at $\Omega = 1.3$; c — angle of deflection of the pendulum $\varphi(\tau)$ and voltage $v(\tau)$ at $\Omega = 5.0$; d — phase portrait of pendulum oscillations $\psi(\varphi)$ at $\Omega = 5.0$

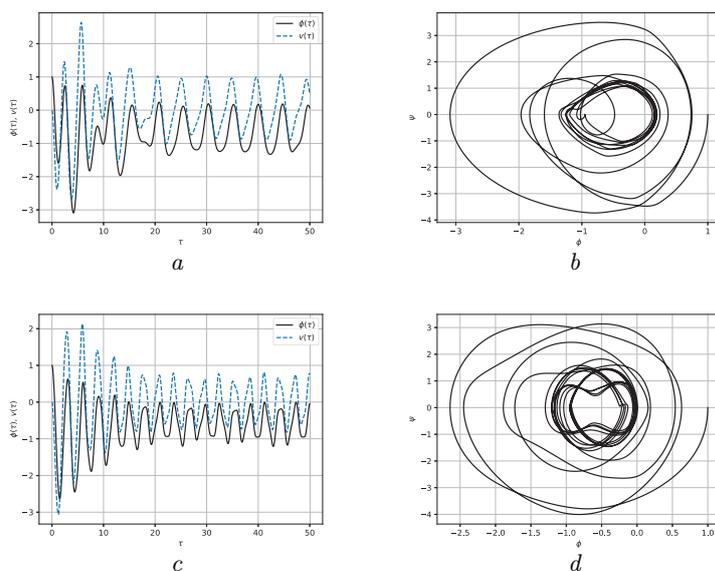


Рис. 1.7. Зависимость динамических переменных от безразмерного времени и фазовые портреты при $H = 8.0$. Значения параметров $\sigma = 1.5$, $\omega = 1.2$, $K = 2.0$. Начальные условия $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$: a – угол отклонения маятника $\varphi(\tau)$ и напряжение $v(\tau)$ при $\Omega = 1.3$; b – фазовый портрет колебаний маятника $\psi(\varphi)$ при $\Omega = 1.3$; c – угол отклонения маятника $\varphi(\tau)$ и напряжение $v(\tau)$ при $\Omega = 5.0$; d – фазовый портрет колебаний маятника $\psi(\varphi)$ при $\Omega = 5.0$

Fig. 1.7. The dependence of dynamic variables on dimensionless time and phase portraits at $H = 8.0$. Parameter values $\sigma = 1.5$, $\omega = 1.2$, $K = 2.0$. Initial conditions $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$: a – angle of deflection of the pendulum $\varphi(\tau)$ and voltage $v(\tau)$ at $\Omega = 1.3$; b – phase portrait of pendulum oscillations $\psi(\varphi)$ at $\Omega = 1.3$; c – angle of deflection of the pendulum $\varphi(\tau)$ and voltage $v(\tau)$ at $\Omega = 5.0$; d – phase portrait of pendulum oscillations $\psi(\varphi)$ at $\Omega = 5.0$

Из графиков видно, что в области частот $\Omega \gg \omega$ амплитуда колебаний меньше, чем в резонансном случае $\Omega \simeq \omega$. При относительно больших значениях H ($H = 8$) длительность переходного процесса, приводящего к установившимся колебаниям, увеличивается. Сравнение мощности внешнего возбуждения p_{ext} и мощности, передаваемой гистерезисным звеном системы, представлено в таблице.

Таблица

Мощность внешнего возбуждения и передаваемая мощность в случае гистерезисного звена в рамках модели Преязаха

Table

Power of external excitation and transmitted power in the case of hysteresis link within the framework of the Prezah model

Значения параметров системы	Мощность внешнего возбуждения p_{ext}	Мощность, передаваемая гистерезисным звеном S/T	Электрическая мощность p_{avr}	Отношение p_{avr}/p_{ext}
$K = 1.0, \Omega = 1.8, \omega = 1.2, H = 1.0$	0.232048	0.193251	1.9193589	8.27139
$K = 1.0, \Omega = 1.9, \omega = 1.2, H = 1.0$	0.272911	0.203482	1.3663276	5.0065
$K = 1.0, \Omega = 2.0, \omega = 1.2, H = 1.0$	0.31831	0.133638	0.76924010	2.41664
$K = 2.0, \Omega = 1.7, \omega = 1.2, H = 1.0$	0.781928	0.181108	7.84558034	10.0336
$K = 2.0, \Omega = 1.8, \omega = 1.2, H = 1.0$	0.928192	0.196008	6.20816887	6.68845
$K = 2.0, \Omega = 1.9, \omega = 1.2, H = 1.0$	1.09164	0.205938	4.12163400	3.77563

На рис. 1.8 представлена гистерезисная кривая в координатах $(\varphi, \Gamma\varphi)$. Из рисунка видно, что после нескольких циклов колебаний достигается установившийся режим.

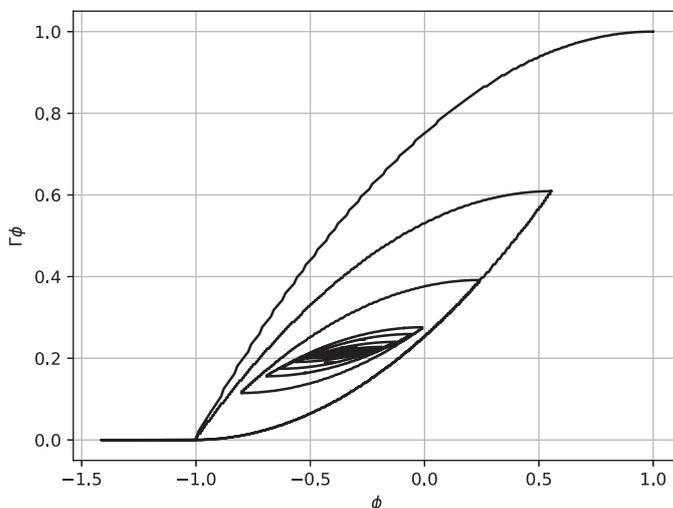


Рис. 1.8. Зависимость $\Gamma\varphi$ от φ при значениях параметров $K = 2.0$, $\omega = 1.2$, $\Omega = 5.0$, $\sigma = 1.5$, $H = 2.5$.

Начальные условия: $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$

Fig. 1.8. Dependence of the $\Gamma\varphi$ on φ at $K = 2.0$, $\omega = 1.2$, $\Omega = 5.0$, $\sigma = 1.5$, $H = 2.5$. Initial conditions: $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$

Заключение

В статье исследована модель преобразователя-запасателя энергии с гистерезисным вязким трением. Механической частью системы является обратный маятник, гистерезисное вязкое трение присутствует в передаточном механическом звене. Исследованы зависимости динамических параметров, в частности, угла отклонения маятника и напряжения на нагрузке, а также фазовых портретов от значения коэффициента, характеризующего влияние гистерезисного трения. С использованием конструктивной модели Прейзаха продемонстрирована роль нелинейных эффектов.

Литература

- [1] Damjanovic D. Ferroelectric, dielectric and piezoelectric properties of ferroelectric thin films and ceramics // Reports on Progress in Physics. 1998. Vol. 61, Number 9, Pp. 1267–1324. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/61/9/002>.
- [2] Dawber M. Physics of thin-film ferroelectric oxides // Review of Modern Physics. 2005. Vol. 77, Issue 4, Article number 1083. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.1083>
- [3] Juhász L., Maas J., Borovac B. Parameter identification and hysteresis compensation of embedded piezoelectric stack actuators // Mechatronics. 2011. Vol. 21, Issue 1, Pp. 329–338. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2010.12.006>.
- [4] Montegiglio P., Maruccio C., Acciani G., Rizzello G., Seelecke S. Nonlinear multi-scale dynamics modeling of piezoceramic energy harvesters with ferroelectric and ferroelastic hysteresis // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 100, pp. 1985–2003. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05660-0>.
- [5] Kwak, D.-H.; Jang, B.-T.; Cha S.-Y., Lee S.-H., Lee H. C.; Yu, B.-G. Hysteresis analysis in capacitance-voltage characteristics of Pt/(Ba, Sr)TiO₃/Pt structures // Integrated Ferroelectrics. 1996. Vol. 13, Issue 1–3, Pp. 121–127. DOI: <https://doi.org/10.1080/10584589608013086>.
- [6] Myasnikov É.N., Tolstousov S.V., Frolenkov K.Yu. Memory Effect in Ba_{0.85}Sr_{0.15}TiO₃ Ferroelectric Films on Silicon Substrates // Physics of the Solid State. 2004. Vol. 46, Pp. 2268–2274. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1841392>.

- [7] Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983, 272 с.
- [8] Cross R., McNamara H., Pokrovskii A., Rachinskii D. A new paradigm for modelling hysteresis in macroeconomic flows // *Physica B: Condensed Matter*. 2008. Vol. 403, № 2–3, pp. 231–236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2007.08.017>. EDN: <https://elibrary.ru/klcqwtd>.
- [9] Lacarbonara, W.; Talò, M.; Carboni, B.; Lanzara, G. Tailoring of Hysteresis Across Different Material Scales // In: Belhaq M. (Eds.) *Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics*. Springer Proceedings in Physics, vol 199. Cham: Springer, 2018, pp. 227–250. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6_13.
- [10] Медведский А.Л., Мелешенко П.А., Нестеров В.А., Решетова О.О., Семенов М.Е. Динамика гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля: метод малого параметра // *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2021. Т. 4, № 4. С. 7–26. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002338821040107>. EDN: <https://www.elibrary.ru/pjxctf>.
- [11] Semenov M.E., Solovyov A.M.; Meleshenko P.A., Reshetova O.O. Efficiency of Hysteresis Damper in Oscillating Systems // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2020. Vol. 15, article number 43. DOI: <https://doi.org/10.1051/mmnp/2019053>.
- [12] Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A. Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case // *Journal of Vibration and Control*. 2021. Vol. 27, Issue 1–2, pp. 43–56. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546320923436>.
- [13] Ikhouane F., Mañosa V., Pujol G. Minor loops of the Dahl and LuGre models // *Applied Mathematical Model*. 2020. Vol. 77, Part 2. Pp. 1679–1690. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.08.031>.
- [14] Ismail M., Ikhouane F., Rodellar J. The hysteresis Bouc–Wen model, a survey // *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2009. Vol. 16. Pp. 161–188. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11831-009-9031-8>.
- [15] Mayergoyz I.D., Friedman G. Generalized Preisach model of hysteresis // *IEEE Transactions on Magnetics*. 1988. Vol. 24, Issue 1, Pp. 212–217. DOI: <https://doi.org/10.1109/20.43892>.
- [16] Krejčí P., O’Kane J.P., Pokrovskii A., Rachinskii D. Properties of solutions to a class of differential models incorporating Preisach hysteresis operator // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2012. Vol. 241, Issue 22, Pp. 2010–2028. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2011.05.005>.
- [17] Krejčí P., Monteiro G.A. Inverse parameter-dependent Preisach operator in thermo-piezoelectricity modeling // *Discrete & Continuous Dynamical Systems–B*. 2019. Vol. 24, Issue 7, Pp. 3051–3066. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018299>.
- [18] Preisach F. Über die magnetische Nachwirkung // *Zeitschrift für Physik*. 1935. Vol. 94, Pp. 277–302. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01349418>.
- [19] Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A. Stochastic Preisach operator: Definition within the design approach // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 101, Pp. 2599–2614. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>.
- [20] Борзунов С.В., Семенов М.Е., Сельвесюк Н.И., Мелешенко П.А., Соловьев А.М. Стохастическая модель гистерезисного преобразователя с доменной структурой // *Математическое моделирование*, 2021. Т. 33, № 9, С. 60–86. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2021-09-05>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xtialm>.
- [21] Bertotti G., Mayergoyz I.D. *The Science of Hysteresis: 3-Volume Set*. Amsterdam, the Netherlands: Elsevier, Academic Press, 2005. 2160 p. ISBN: 9780080540788.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-19-29

Submitted: 02.03.2023

Revised: 11.04.2023

Accepted: 30.06.2023

S. V. Borzunov

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: sborzunov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5099-9655>

O. O. Reshetova

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: tribunskih1993@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8257-7836>

DYNAMICS OF AN ENERGY HARVESTER WITH HYSTERESIS FRICTION

ABSTRACT

A model of an energy harvester converter with hysteresis viscous friction is considered. The mechanical part of the energy harvester is made in the form of an inverted pendulum. The hysteresis is formalized within the framework of the Preisach model, which is a continuum analogue of a system of non-ideal relays connected in parallel. Within the framework of numerical experiments, the dependences of the dynamic parameters, in particular, the angle of deflection of the pendulum and the voltage on the load, as well as phase portraits, on the value of the coefficient characterizing the effect of hysteresis friction, were investigated. The role of nonlinear effects is demonstrated.

Key words: energy harvester; inverted pendulum; hysteresis; non-ideal relay; Preisach operator.

Citation. Borzunov S.V., Reshetova O.O. Dynamics of an energy harvester with hysteresis friction. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 19–29. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-19-29>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Borzunov S.V., 2023

Sergei V. Borzunov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation.

© Reshetova O.O., 2023

Olga O. Reshetova — associate professor of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, 394018, Voronezh, Russian Federation.

References

- [1] Damjanovic D. Ferroelectric, dielectric and piezoelectric properties of ferroelectric thin films and ceramics. *Reports on Progress in Physics*, 1998, vol. 61, no. 9, pp. 1267–1324. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/61/9/002>.
- [2] Dawber M. Physics of thin-film ferroelectric oxides. *Reviews of Modern Physics*, 2005, vol. 77, issue 4, article number 1083. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.1083>.
- [3] Juhász L., Maas J., Borovac B. Parameter identification and hysteresis compensation of embedded piezoelectric stack actuators. *Mechatronics*, 2011, vol. 21, issue 1, pp. 329–338. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2010.12.006>.
- [4] Montegiglio P., Maruccio C., Acciani G., Rizzello G., Seelecke S. Nonlinear multi-scale dynamics modeling of piezoceramic energy harvesters with ferroelectric and ferroelastic hysteresis. *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 100, pp. 1985–2003. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05660-0>.
- [5] Kwak D.H., Jang B.T., Cha S.Y., Lee S.H., Lee H.C., Yu B.G. Hysteresis analysis in capacitance-voltage characteristics of Pt/(Ba, Sr)TiO₃/Pt structures. *Integrated Ferroelectrics*, 1996, vol. 13, issue 1–3, pp. 121–127. DOI: <https://doi.org/10.1080/10584589608013086>.
- [6] Myasnikov É.N., Tolstousov S.V., Frolenkov K.Yu. Memory Effect in Ba_{0.85}Sr_{0.15}TiO₃ Ferroelectric Films on Silicon Substrates. *Physics of the Solid State*, 2004, vol. 46, pp. 2268–2274. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1841392>.
- [7] Krasnosel'skiĭ M.A., Pokrovskii A.V. Systems with Hysteresis. Moscow: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1983, 272 p. (In Russ.)
- [8] Cross R., McNamara H., Pokrovskii A., Rachinskii D. A new paradigm for modelling hysteresis in macroeconomic flows. *Physica B: Condensed Matter*, 2008, vol. 403, no. 2–3, pp. 231–236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2007.08.017>. EDN: <https://elibrary.ru/klcqw>.
- [9] Lacarbonara W., Talò M., Carboni B., Lanzara G. Tailoring of Hysteresis Across Different Material Scales. In: *Belhaq M. (Eds.) Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics. Springer Proceedings in Physics*, vol 199. Cham: Springer, 2018, pp. 227–250. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6_13.
- [10] Medvedsky A.L., Meleshenko P.A., Nesterov V.A., Reshetova O.O., Semenov M.E. Dynamics of hysteric-related Van-der-Pol oscillators: the small parameter method. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2021, vol. 60, no. 4, pp. 511–529. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230721040092>. EDN: <https://www.elibrary.ru/cscifj>. (In English; original in Russian)

- [11] Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A., Reshetova O.O. Efficiency of Hysteresis Damper in Oscillating Systems. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2020, vol. 15, article number 43. DOI: <https://doi.org/10.1051/mmnp/2019053>.
- [12] Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A. Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case. *Journal of Vibration and Control*, 2021, vol. 27, issues 1–2, pp. 43–56. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546320923436>.
- [13] Ikhouane F., Mañosa V., Pujol G. Minor loops of the Dahl and LuGre models. *Applied Mathematical Model*, 2020, vol. 77, part 2, pp. 1679–1690. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.08.031>.
- [14] Ismail M., Ikhouane F., Rodellar J. The hysteresis Bouc–Wen model, a survey. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2009, vol. 16, pp. 161–188. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11831-009-9031-8>.
- [15] Mayergoyz I.D., Friedman G. Generalized Preisach model of hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1988, vol. 24, issue 1, pp. 212–217. DOI: <https://doi.org/10.1109/20.43892>.
- [16] Krejčí P., O’Kane J.P., Pokrovskii A., Rachinskii D. Properties of solutions to a class of differential models incorporating Preisach hysteresis operator. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2012, vol. 241, issue 22, pp. 2010–2028. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2011.05.005>.
- [17] Krejčí P., Monteiro G.A. Inverse parameter-dependent Preisach operator in thermo-piezoelectricity modeling. *Discrete & Continuous Dynamical Systems.–B*, 2019, vol. 24, issue 7, pp. 3051–3066. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018299>.
- [18] Preisach F. Über die magnetische Nachwirkung. *Zeitschrift für Physik*, 1935, vol. 94, pp. 277–302. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01349418>.
- [19] Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A. Stochastic Preisach operator: Definition within the design approach. *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 101, pp. 2599–2614. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>.
- [20] Borzunov S.V., Semenov M.E., Sel’vesyuk N.I., Meleshenko P.A., Solovyev A.M. Stochastic model of the hysteresis converter with a domain structure. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2021, vol. 33, no. 9, pp. 60–86. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2021-09-05>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xtialm>. (In Russ.)
- [21] Bertotti G., Mayergoyz I.D. The Science of Hysteresis: 3-Volume Set. Amsterdam, the Netherlands: Elsevier, Academic Press, 2005, 2160 p. ISBN: 9780080540788.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-40

УДК 519.6

Дата: поступления статьи: 16.02.2023
после рецензирования: 22.03.2023
принятия статьи: 30.06.2023

К.А. Мушанкова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: karinamushankova@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6081-1169>

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: stepanovalv2015@yandex.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

ВЛИЯНИЕ СЛАГАЕМЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ В РЕШЕНИИ, ОБОБЩАЮЩЕМ ПОДХОД М. УИЛЬЯМСА, УЧИТЫВАЮЩЕМ АНИЗОТРОПИЮ МАТЕРИАЛА¹

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена исследованию поля напряжений у вершины острой трещины в анизотропном материале с тремя взаимно ортогональными осями симметрии четвертого порядка (с кубической сингонией). Рассмотрен плоский случай, когда одна из осей симметрии ортогональна пластине, а оставшиеся две оси лежат в плоскости пластины. Приведен асимптотический анализ вклада высших приближений в обобщенном асимптотическом разложении механических полей вблизи вершины трещины в линейно-упругом анизотропном материале с кубической симметрией его упругих свойств. В статье на основании полученного решения Неджети с соавторами для бесконечной анизотропной пластины с центральной трещиной найдены и проанализированы угловые распределения составляющих тензора напряжений вблизи вершины острой трещины на различных расстояниях от кончика трещины, что позволяет оценить вклад неособых (регулярных) слагаемых в общее асимптотическое представление механических полей, генерированных острой трещиной. В работе Неджети проанализирован вклад исключительно Т-напряжений, тогда, как показано в настоящей статье, следующие за Т-напряжением слагаемые играют значимую роль в описании полей, индуцированных трещиной. Сравнение угловых зависимостей компонент тензора напряжений, построенных на различных расстояниях от вершины трещины, индикативно показывает, что с увеличением расстояния от вершины дефекта требуется сохранение в асимптотических рядах, представляющих напряжения, перемещения и деформации вблизи кончика разреза, слагаемых высокого порядка малости. Сохранение слагаемых высокого порядка малости может быть использовано для расширения области, в которой справедливо асимптотическое решение в рядах.

Ключевые слова: асимптотическое разложение; поля напряжений; кубическая сингония; слагаемые высокого порядка малости.

Цитирование. Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Влияние слагаемых высокого порядка малости в решении, обобщающем подход М. Уильямса, учитывающем анизотропию материала // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 30–40. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-40>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Мушанкова К.А., Степанова Л.В., 2023

Карина Артемовна Мушанкова — магистрант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 21-11-00346).

Лариса Валентиновна Степанова — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Многопараметрический анализ полей напряжений является важным аспектом исследований в современной механике разрушения. Этим вопросам посвящается большое количество исследований [2–10]. В статье Неджети с соавторами [1] изучено напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины дефекта и приведено двучленное разложение механических полей. Авторы сфокусировали свое внимание на влиянии Т-напряжений, на целостное описание поля напряжений у вершины острой трещины. Однако научным сообществом принято представление о важной роли следующих за Т-напряжением слагаемых. Во многих статьях [2–10] было показано, что с увеличением расстояния от кончика дефекта эффект влияния высших приближений усиливается. Данная статья может рассматриваться продолжением работы Неджети и соавторов. В настоящей работе реализована попытка учесть высшие приближения в асимптотическом разложении механических полей, индуцированных трещиной в анизотропной пластине с кубической кристаллической решеткой.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу о плоском напряженном состоянии $\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ в пластине из анизотропного материала. Тогда обобщенный закон Гука имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ — компоненты тензоров деформации и напряжений, S_{ij} — тензор податливости.

Зависимость деформации от смещения в плоскости описывается следующим соотношением, где u и v — смещения в направлениях x_1 и x_2 :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}. \quad (1.2)$$

Деформации удовлетворяют условию совместности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (1.3)$$

Представим напряжения через функции Эри:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (1.4)$$

Тогда, подставляя напряжения в уравнение совместности (1.3) и используя обобщенный закон Гука, заданный уравнением (1.1), получим следующее соотношение:

$$S_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} - 2S_{26} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2S_{12} + S_{66}) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2S_{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1 \partial x_2^3} + S_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0. \quad (1.5)$$

Для решения уравнения совместности используется общее решение в виде комплексного потенциала $\phi = \phi(z)$ с комплексной переменной $z = x_1 + \mu x_2$. Подставляя это общее решение в уравнение (1.5), получим характеристическое уравнение:

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0 \quad (1.6)$$

Получившееся уравнение определяет зависимость решения от материальных констант. Корни этого характеристического уравнения показывают влияние упругой анизотропии на решение плоской задачи теории упругости.

В данной статье будем опираться на результаты молекулярно-динамического исследования свойств материала, проведенного в пакете LAMMPS. В статье [11] были получены значения упругих модулей

для материалов с кубической сингонией. Воспользуемся тензором упругих модулей ГЦК-меди, описанной потенциалом погруженного атома:

$$\begin{pmatrix} 162 & 115 & 115 & 0 & 0 & 0 \\ 115 & 162 & 115 & 0 & 0 & 0 \\ 115 & 115 & 162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где значения представлены в ГПа.

Для тензора упругих модулей (1.7) были получены следующие корни характеристического уравнения (1.6):

$$\mu_1 = 0.708728 + 0.705482i, \mu_2 = -0.708728 + 0.705482i, \mu_3 = \bar{\mu}_1, \mu_4 = \bar{\mu}_2. \quad (1.8)$$

Асимптотическое разложение полей напряжений, учитывающее анизотропию материала, подробно описанное в статье [1], имеет вид:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} &= 2Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ - \left(\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \right) \end{bmatrix} \right) + \\ &+ 2Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ - \left(\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \right) \end{bmatrix} \right), \quad (1.9) \end{aligned}$$

где A_n, B_n – амплитудные множители поля напряжений.

Приведем амплитудные множители в случае бесконечной анизотропной пластины с центральной трещиной, подвергнутой одноосному нагружению:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2a}}{4} \sigma \sin^2 \alpha, \quad B_1 = \frac{\sqrt{2a}}{4} \sigma \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$A_2 = \frac{\sigma}{2Im(\mu_1 + \mu_2)} [\cos^2 \alpha + Re(\mu_1 \mu_2) \sin^2 \alpha + \lambda Re(\mu_1 + \mu_2)], \quad B_2 = \frac{\sigma Re(\mu_1 + \mu_2)}{2Im(\mu_1 \mu_2)} [\sin \alpha \cos \alpha - \lambda],$$

$$A_3 = \frac{3}{8\sqrt{2a}} \sigma \sin^2 \alpha, \quad B_3 = \frac{3}{8\sqrt{2a}} \sigma \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$A_{2n+2} = B_{2n+2} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$A_{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1} \sigma \sin^2 \alpha}{8(2a)^{n+\frac{1}{2}}} \left[-4 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots 2n} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots (2n+1)}{4 \times 6 \times 8 \times \dots (2n+2)} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1} \sigma \sin \alpha \cos \alpha}{8(2a)^{n+\frac{1}{2}}} \left[-4 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots 2n} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots (2n+1)}{4 \times 6 \times 8 \times \dots (2n+2)} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где λ – константа, относящаяся к вращению тела как абсолютно твердого (исследование проводилось при $\lambda = 0$), α – угол наклона трещины, a – половина длины трещины, σ – прикладываемая к пластине нормальная нагрузка.

2. Результаты исследования

Проведем исследование при приложении к пластине одноосного нагружения $\sigma = 50$ ГПа на различных обезразмеренных половиной длины трещины $a = 20 \text{ \AA}$ расстояниях от вершины дефекта при угле

наклона $\alpha = 0$. Такие значения нагрузки и длины дефекта обусловлены дальнейшим направлением исследований, связанным со сравнением полей напряжений на наноскопическом уровне с представленным в статье Неджети и соавторов [1] аналитическим решением для анизотропных материалов.

Рассмотрим зависимости $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ от полярного угла θ при удержании различного количества слагаемых на безразмерных расстояниях $\frac{r}{a} = \bar{r} = 0.1, 0.5, 1.0, 1.25$. На рисунках 2.1–2.4 кривые, обозначенные цифрой 1, показывают распределение компонент тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ при одночленном асимптотическом обобщенном разложении Уильямса, кривая 2 при двучленном разложении и так далее до 7 слагаемых. Также визуализируется разложение при удержании 50 слагаемых, которое мы будем считать точным решением поставленной задачи.

Помимо визуальной оценки найдем средние абсолютные и относительные погрешности. Для каждой компоненты тензора напряжений разобьем отрезок θ от $-\pi$ до π на 500 точек и определим средние отклонения от асимптотического разложения при удержании 50 слагаемых по следующим формулам:

$$\Delta\sigma_{ij} = \frac{\sum_k |\sigma_{ij}^{k,n} - \sigma_{ij}^{k,50}|}{500}, \quad \delta\sigma_{ij} = \frac{\sum_k |\sigma_{ij}^{k,n} - \sigma_{ij}^{k,50}| / |\sigma_{ij}^{k,50}|}{500} \cdot 100 \%, \quad (2.10)$$

где $\sigma_{ij}^{k,n}$ – компонента тензора напряжений σ_{ij} при значении полярного угла $\theta = \theta_k$ при удержании в асимптотическом разложении n слагаемых.

В табл. 2.1 – 2.8 приведены средние абсолютные и относительные отклонения кривых $N = 1..7$ от кривой $N = 50$. По данным таблицам можно понять, что для достижения результата требуемой точности при большем удалении от вершины острой трещины необходимо учитывать большее количество регулярных слагаемых.

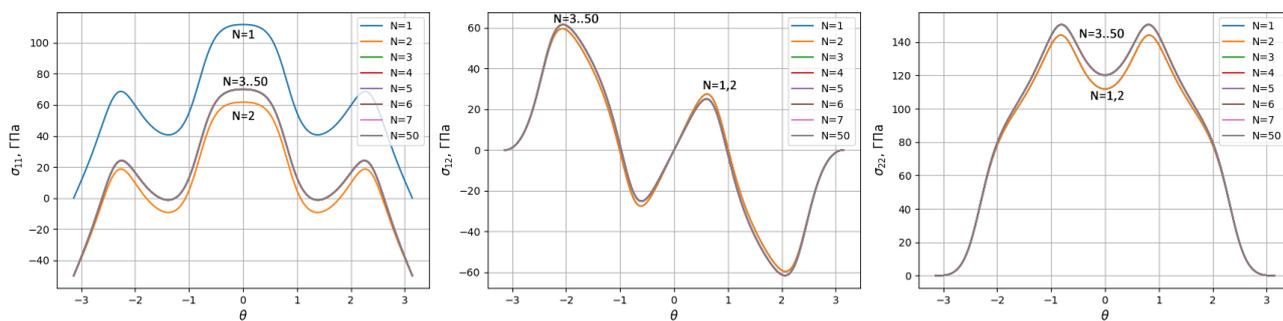


Рис. 2.1. Угловые распределения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ при удержании различного количества слагаемых в обобщенном асимптотическом решении на расстоянии $\bar{r} = 0.1$

Fig.2.1. Angular distributions $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ for different numbers of terms in the generalized asymptotic solution at a distance $\bar{r} = 0.1$

Таблица 2.1

Средние абсолютные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 0.1

Table 2.1

Average absolute deviations of the asymptotic expansion of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from the expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 0.1

Кол-во слагаемых	$\Delta\sigma_{11}$, ГПа	$\Delta\sigma_{12}$, ГПа	$\Delta\sigma_{22}$, ГПа
$n = 1$	43.66	1.80	3.52
$n = 2$	6.34	1.80	3.52
$n = 3$	0.14	0.10	0.07
$n = 4$	0.14	0.10	0.07
$n = 5$	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$1.26 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-3}$
$n = 6$	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$1.26 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-3}$
$n = 7$	$1.26 \cdot 10^{-5}$	$1.14 \cdot 10^{-5}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2.2

Средние относительные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 0.1

Table 2.2

Average relative deviations of the asymptotic expansions of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from the expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 0.1

Кол-во слагаемых	$\delta_{\sigma_{11}}, \%$	$\delta_{\sigma_{12}}, \%$	$\delta_{\sigma_{22}}, \%$
$n = 1$	1891.76	14.92	3.59
$n = 2$	339.10	14.92	3.59
$n = 3$	5.67	1.21	0.47
$n = 4$	5.67	1.21	0.47
$n = 5$	0.05	0.02	0.01
$n = 6$	0.05	0.02	0.01
$n = 7$	$4.60 \cdot 10^{-4}$	$4.05 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$

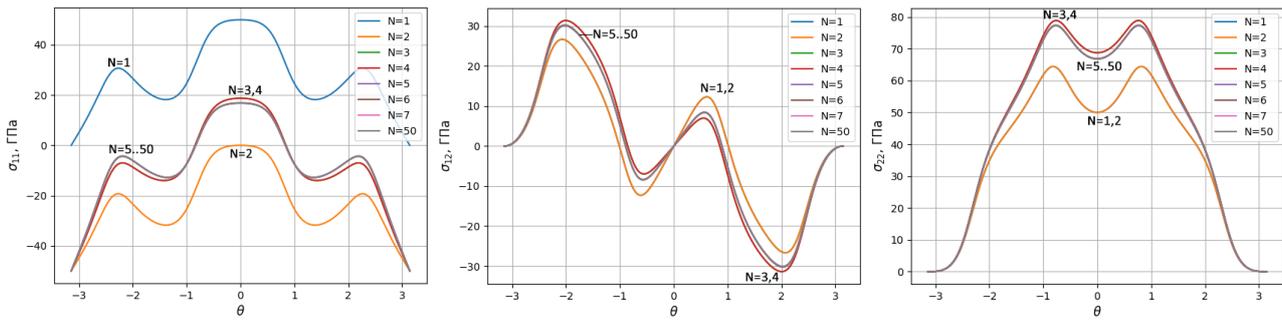


Рис. 2.2. Угловые распределения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ при удержании различного количества слагаемых в обобщенном асимптотическом решении на расстоянии $\bar{r} = 0.5$

Fig.2.2. Angular distributions $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ for different numbers of terms in the generalized asymptotic solution at a distance $\bar{r} = 0.5$

Таблица 2.3

Средние абсолютные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 0.5

Table 2.3

Average absolute deviations of the asymptotic expansion of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 0.5

Кол-во слагаемых	$\Delta_{\sigma_{11}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{12}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{22}}, \text{ ГПа}$
$n = 1$	35.21	3.11	7.27
$n = 2$	14.78	3.11	7.27
$n = 3$	1.55	1.13	0.77
$n = 4$	1.55	1.13	0.77
$n = 5$	0.07	0.07	0.07
$n = 6$	0.07	0.07	0.07
$n = 7$	$3.50 \cdot 10^{-3}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$	$3.69 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2.4

Средние относительные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 0.5

Table 2.4

Average relative deviations of the asymptotic expansions of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 0.5

Кол-во слагаемых	$\delta_{\sigma_{11}}, \%$	$\delta_{\sigma_{12}}, \%$	$S_{\sigma_{22}}, \%$
$n = 1$	465.88	54.23	13.28
$n = 2$	230.14	54.23	13.28
$n = 3$	19.28	19.67	1.70
$n = 4$	19.28	19.67	1.70
$n = 5$	0.89	1.11	0.21
$n = 6$	0.89	1.11	0.21
$n = 7$	0.05	0.05	0.02

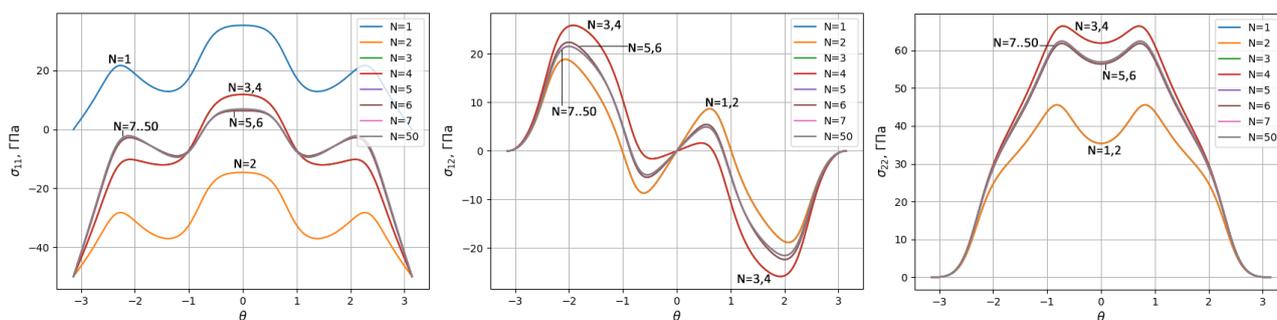


Рис. 2.3. Угловые распределения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ при удержании различного количества слагаемых в обобщенном асимптотическом решении на расстоянии $\bar{r} = 1.0$

Fig.2.3. Angular distributions $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ for different numbers of terms in the generalized asymptotic solution at a distance $\bar{r} = 1.0$

Таблица 2.5

Средние абсолютные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 1.0

Table 2.5

Average absolute deviations of the asymptotic expansion of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 1.0

Кол-во слагаемых	$\Delta_{\sigma_{11}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{12}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{22}}, \text{ ГПа}$
$n = 1$	27.90	2.72	9.37
$n = 2$	22.10	2.72	9.37
$n = 3$	4.47	3.28	2.01
$n = 4$	4.47	3.28	2.01
$n = 5$	0.41	0.41	0.39
$n = 6$	0.41	0.41	0.39
$n = 7$	0.04	0.04	0.04

Таблица 2.6

Средние относительные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 1.0

Table 2.6

Average relative deviations of the asymptotic expansions of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 1.0

Кол-во слагаемых	$\delta_{\sigma_{11}}, \%$	$\delta_{\sigma_{12}}, \%$	$\delta_{\sigma_{22}}, \%$
$n = 1$	1110.08	115.09	21.58
$n = 2$	998.25	115.09	21.58
$n = 3$	152.77	118.64	4.30
$n = 4$	152.77	118.64	4.30
$n = 5$	8.66	13.01	1.36
$n = 6$	8.66	13.01	1.36
$n = 7$	1.51	0.98	0.31

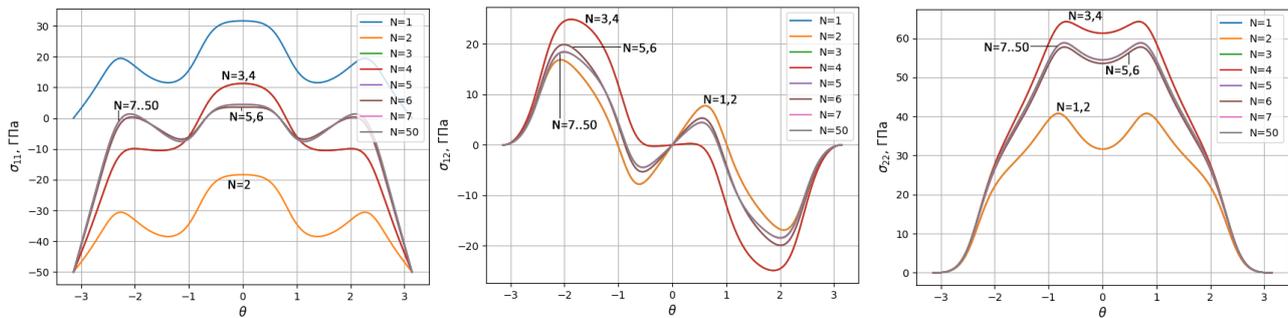


Рис. 2.4. Угловые распределения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ при удержании различного количества слагаемых в обобщенном асимптотическом решении на расстоянии $\bar{r} = 1.25$

Fig.2.4. Angular distributions $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ for different numbers of terms in the generalized asymptotic solution at a distance $\bar{r} = 1.25$

Таблица 2.7

Средние абсолютные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 1.25

Table 2.7

Average absolute deviations of the asymptotic expansion of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from the expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 1.25

Кол-во слагаемых	$\Delta_{\sigma_{11}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{12}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{22}}, \text{ ГПа}$
$n = 1$	24.57	2.11	10.06
$n = 2$	25.42	2.11	10.06
$n = 3$	6.31	4.65	2.67
$n = 4$	6.31	4.65	2.67
$n = 5$	0.73	0.73	0.68
$n = 6$	0.73	0.73	0.68
$n = 7$	0.09	0.09	0.09

Таблица 2.8

Средние относительные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 1.25

Table 2.8

Average relative deviations of the asymptotic expansions of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from the expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 1.25

Кол-во слагаемых	$\delta_{\sigma_{11}}$, %	$\delta_{\sigma_{12}}$, %	$\delta_{\sigma_{22}}$, %
$n = 1$	1535.34	76.01	25.03
$n = 2$	2424.37	76.01	25.03
$n = 3$	664.48	129.54	5.76
$n = 4$	664.48	129.54	5.76
$n = 5$	46.65	20.24	2.60
$n = 6$	46.65	20.24	2.60
$n = 7$	5.09	3.26	0.74

Выводы

По приведенным результатам видно, что при увеличении количества удерживаемых слагаемых высокого порядка малости уменьшаются абсолютные и относительные погрешности, а также при увеличении расстояния от кончика дефекта необходимо удерживать большее количество слагаемых в обобщенном асимптотическом разложении поля напряжений в окрестности вершины трещины для достижения необходимой точности. Данный анализ был проведен для понимания того, сколько слагаемых нужно удерживать в представленном аналитическом решении при сравнении его с результатами молекулярно-динамического моделирования полей напряжений пластины с центральной трещиной, что является дальнейшим направлением исследований.

Литература

- [1] Nejati M., Ghouli S., Aytollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 91. P. 837–862. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [2] Stepanova L.V., Belova O.N. Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2022. Vol. 119. Article number 103298. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103298>.
- [3] Stepanova L.V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2023. Vol. 30. Issue 19. Pp. 3862–3884. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084800>.
- [4] Rashidi Moghaddam M., Ayatollahi M., Berto F. The application of strain energy density criterion to fatigue crack growth behavior of cracked components // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2017. Vol. 97. Pp. 440–447. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.07.014>.
- [5] Razavi M.J., Aliha M.R.M., Berto F. Application of an average strain energy density criterion to obtain the mixed mode fracture load of granite rock tested with the cracked asymmetric four-point bend specimen // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2017. Vol. 97. Pp. 419–425. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.07.004>.
- [6] Lakshminpathy T., Steinmann P., Bitzek E. LFM is agnostic to geometrical nonlinearities arising at atomistic crack tips // Forces in Mechanics. 2022. Vol. 9. Article number 100127. URL: <https://arxiv.org/pdf/2208.11462.pdf>.
- [7] Chandra S., Kumar N.N., Samal M.K., Chavan V.M., Patel R.J. Molecular dynamics simulation of crack growth behavior in Al in the presence of vacancies // Computational Materials Science. 2016. Vol. 117. Pp. 518–526. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.02.032>.
- [8] Andric P., Curtin W.A. New theory for Mode I crack-tip dislocation emission // Journal of Mechanics and Physics of Solids. 2017. Vol. 106. Pp. 315–337. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.06.006>.
- [9] Gao Y.-J., Deng Q.-Q., Huang L.Ye, Wen Z.C., Luo Zhi-R. Atomistic modeling for mechanism of crack cleavage extension on nano-scale // Computational Materials Science. 2017. Vol. 130. Pp. 64–75. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2017.01.003>.

- [10] Cui C.B., Beom H.G. Molecular dynamics simulation of edge cracks in copper and aluminium single crystals // *Materials Science and Engineering: A*. 2014. Vol. 609. Pp. 102–109. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.04.101>.
- [11] Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Молекулярно-динамическое моделирование полей напряжений в пластине с центральной трещиной из материалов с гранецентрированной кубической решеткой // *Вестник Самарского университета. Естественная серия*. 2021. Т. 27, № 4. С. 68–82. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-68-82>.
- [12] Хеллан К. Введение в механику разрушения / пер. с англ. Москва: Мир. 1988. 364 с. URL: <https://libcats.org/book/449703>.
- [13] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 100–101. Pp. 11–28. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-40

Submitted: 16.02.2023

Revised: 22.03.2023

Accepted: 30.06.2023

K.A. Mushankova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: karinamushankova@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6081-1169>

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: stepanova2015@yandex.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

INFLUENCE OF HIGH-ORDER TERMS IN THE SOLUTION GENERALIZING THE APPROACH OF M. WILLIAMS, TAKING INTO ACCOUNT THE ANISOTROPY OF THE MATERIAL²

ABSTRACT

The research is devoted to the study of the stress field at the crack tip in an anisotropic material with three mutually orthogonal axes of symmetry of the fourth order (with cubic symmetry). A plane case is considered when one of the axes of symmetry is orthogonal to the cracked plate, and the remaining two axes lie in the plane of the plate. The paper presents an asymptotic analysis of the contribution of higher approximations in the generalized asymptotic decomposition of mechanical fields near the crack tip in a linearly elastic anisotropic material with cubic symmetry of its elastic properties. In the article, based on the obtained solution of M. Nejati and co-authors for an infinite anisotropic plate with a central crack, circumferential apportionments of the stress tensor components at the crack tip at various distances from the crack tip are constructed, which makes it possible to estimate the contribution of non-singular (regular) terms to the general asymptotic representation of mechanical fields generated by an acute crack. In the work of M. Nejati, the contribution of exclusively T-stresses is analyzed, then, as shown in this work, the terms following the T-stress play a significant role in describing the fields induced by the crack. A comparison of the angular distributions of the stress tensor components constructed at different distances from the crack tip indicates that with the increase of distances from the crack tip, it is required to preserve in asymptotic series representing stresses, displacements and strains near the tip of the crack, the terms of high order of smallness. The preservation of the terms of high order of smallness can be used to expand the domain in which the asymptotic solution in the series is valid.

Key words: asymptotic expansion; stress fields; cubic syngony; high-order terms.

Citation. Mushankova K.A., Stepanova L.V. Influence of high-order terms in the solution generalizing the approach of M. Williams, taking into account the anisotropy of the material. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 30–40. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-40>.

²The work is carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant № 21-11-00346).

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Mushankova K.A., 2023

Karina A. Mushankova — Master of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

© Stepanova L.V., 2023

Larisa V. Stepanova — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Nejati M., Ghouli S., Aytollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, vol. 91, pp. 837–862. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [2] Stepanova L.V., Belova O.N. Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2022, vol. 119, Article number 103298. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103298>.
- [3] Stepanova L.V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, vol. 30, issue 19, pp. 3862–3884. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084800>.
- [4] Rashidi Moghaddam M., Ayatollahi M., Berto F. The application of Strain Energy Density criterion to fatigue crack growth behavior of cracked components. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2017, vol. 97, pp. 440–447. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.07.014>.
- [5] Razavi M.J., Aliha M.R.M., Berto F. Application of an average strain energy density criterion to obtain the mixed mode fracture load of granite rock tested with the cracked asymmetric four-point bend specimen. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2017, vol. 97, pp. 419–425. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.07.004>.
- [6] Lakshminpathy T., Steinmann P., Bitzek E. LFM is agnostic to geometrical nonlinearities arising at atomistic crack tips. *Forces in Mechanics*, 2022, vol. 9, Article number 100127. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2208.11462.pdf>.
- [7] Chandra S., Kumar N.N., Samal M.K., Chavan V.M., Patel R.J. Molecular dynamics simulation of crack growth behavior in Al in the presence of vacancies. *Computational Materials Science*, 2016, vol. 117, pp. 518–526. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.02.032>.
- [8] Andric P., Curtin W.A. New Theory for Mode I Crack-tip Dislocation Emission. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 2017, vol. 106, pp. 315–337. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.06.006>.
- [9] Gao Y.-J., Deng Q.-Q., Huang L.Ye, Wen Z.C., Luo Zhi -R. Atomistic modeling for mechanism of crack cleavage extension on nano-scale. *Computational Materials Science*, 2017, vol. 130, pp. 64–75. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2017.01.003>.
- [10] Cui C.B., Beom H.G. Molecular dynamics simulation of edge cracks in copper and aluminium single crystals. *Materials Science and Engineering: A*, 2014, vol. 609, pp. 102–109. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.04.101>.
- [11] Mushankova K.A., Stepanova L.V. Molecular dynamic modeling of stress fields in plates with a central crack made of materials with a face-centered cubic lattice. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 68–82. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-68-82>. (In Russ.)
- [12] Hellan K. Introduction to fracture mechanics: Translated from English. Moscow: Mir, 1988, 364 p. Available at: <https://libcats.org/book/449703>. (In Russ.)
- [13] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, vol. 100–101, pp. 11–28. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032>.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ
MATHEMATICAL METHODS IN NATURAL SCIENCES



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-40-47

Submitted: 27.02.2023

Revised: 04.04.2023

Accepted: 30.06.2023

T.F. Zhuraev

Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: tursunzhuraev@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5379-3862>

M.V. Dolgoplov

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

E-mail: mikhaildolgoplov68@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8725-7831>

EQUIVARIANT PROPERTIES OF THE SPACE $\mathbb{Z}(X)$
FOR A STRATIFIABLE SPACE X

ABSTRACT

In this paper, we prove the action of the compact group G defined by the stratified space X is continuous to the space $Z(X)$ being a stratified space containing the self-stratified space X as a closed subset. An equivariant analogue of some results of R. Cauty concerning $A(N)R(S)$ – spaces is proved. It is presented that the orbit space $Z(X)/G$ by the action of the group G is a S space.

Key words: equivariant maps; stratified space; group actions; orbit space; invariant set; homotopy density; dimension; absolute extensor; neighborhood extensor; covariant functor; probabilistic measures.

Citation. Zhuraev T.F., Dolgoplov M.V. Equivariant properties of the space $\mathbb{Z}(X)$ for a stratifiable space X . *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia serii* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 40–47. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-40-47>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Zhuraev T.F., Dolgoplov M.V., 2023

Tursunboy F. Zhuraev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics, Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, 27, Bunyodkor Street, Tashkent, 700100, Uzbekistan.

Mikhail V. Dolgoplov — associate professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

Introduction

In the category of stratifiable spaces and continuous images, we include one construction belonging to the test space [1; 2] that defines the covariant functor in this category. This construction defines the functor that allows each stratified space X to be immersed in a closed manner into some other space $Z(X)$, which is the stratified space with "good" functorial, geometric and topological properties.

A stratifiable spaces can be defined of as topological space that is divided into smooth manifolds. Then a stratification in this context [3] is a structure associated with the emergence of closed sets, which is locally a decomposed space. This is what [4] refer to as a "germinal stratification". Each decomposed space causes a bundle of germs-stratifications, hence the concepts are consistent. Another notion of stratification can be found in [4], where the boundary conditions are slightly different. Stratifiable spaces always admit

tangent bundle. They are relevant because they are really singular, while the usual vector bundle is not [5]. Families of examples and applications [6; 7] arise from smooth equivariant vector bundles. The next main motivation for developing stratifiable vector bundles is to use them for quantization purposes. In particular, in the Kostant–Suriot–Weyl quantization picture, three components of the initial data are required: a symplectic manifold, a complex linear bundle with a connection, and polarization, all of which satisfy various compatibility conditions [8]. Therefore, it is relevant to consider and define theorems for equivariant properties of spaces over a stratifiable space.

Let X be a stratified (briefly, S -space) space. For each open subset U of the space X and any point $x \in U$ of the set U we put:

a) $n(U, x) = \min\{m : x \in U_m\}$, where $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$;

b) $U_x = U_{n(U, x)} \setminus (\overline{X \setminus \{x\}})_{n(U, x)}$.

Obviously, the set U_x is an open neighborhood of the point x and $U_x \subset U$. The set U_x has the following properties:

1°. U_x is an open neighborhood of the point x ;

2°. If $U_x \cap V_y \neq \emptyset$ and $n(U, x) \leq n(V, y)$ then $y \in U$.

3°. If $U_x \cap V_y \neq \emptyset$ then $x \in V$ or $y \in U$.

Let X be the topological space, $|F(X)|$ be a complete simplicial complex whose vertices are points in the space X , i.e. $|F(X)|^0 = X$. The space $|F(X)|$ has a weak topology. Now we define the topology on the space $|F(X)|$, the bases of open sets of which we denote by $Z(X)$ consists of W open in $F(X)$, satisfies following conditions:

o1. $W \cap X$ is an open in X ;

o2. $|F(W \cap X)| \subset W$;

i.e. $\tau_{Z(X)} = \{W \in \tau_{|F(X)|} : W \text{ satisfies the conditions o1-o2}\}$.

Condition o2 means that every simplex $\sigma \in F(X)$ is contained in W if all vertices of this simplex σ lie entirely in $W \cap X$.

1. Main results

For the subset $A \subset X$, the set $F(A)$ is a subcomplex of the full complex $F(X)$ and $Z(A)$ is a subspace of the space $Z(X)$. Obviously, $Z(A)$ is closed in $Z(X)$ if A is closed in X .

For each $n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ we put $Z_n(X) = |F(X)^n|$. $Z_n(X)$ is a subspace of $Z(X)$. Then $Z_0(X) \cong X$ and $Z(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n(X)$. It is easy to see that for any $n \in \mathbb{Z}_+$ the subspace $Z_n(X)$ is closed in $Z(X)$.

Let us introduce the following notation:

$T(A) = \{\sigma \in F(X) \setminus F(A) : \sigma \cap A \neq \emptyset\}$;

$M(A) = \{x \in Z(X) : \text{exists } \sigma \in F(A) \text{ such that } x(\hat{\sigma}) > 0\}$;

$T_n(A) = T(A) \cap (F(X)^n \setminus F(X)^{n-1})$;

$M_n(A) = Z(A) \cup (M(A) \cap Z_n(X))$;

For each $\varepsilon \in (0, 1)^{T(A)}$ and for each $n \in \mathbb{N}$, define the set:

$$M(A, \varepsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} M_n(A, \varepsilon),$$

where $M_0(A, \varepsilon) = Z(A) = |F(A)|$ and $M_n(A, \varepsilon) = Z(A) \cup \{\sigma(\varepsilon(\sigma)) \cap \pi_{\sigma}^{-1}(M_{n-1}(A, \varepsilon)) : \sigma \in T_n(A)\}$. Then the equality $M(A, \varepsilon) \cap X = A$ holds.

For each open set \mathcal{U} of the space X , the set $M(\mathcal{U}, \varepsilon)$ is open in $Z(X)$. In this case, the family $\mathcal{B}(M) = \{(\mathcal{U}, \varepsilon) : \mathcal{U} \text{ is open in } X \text{ and } \varepsilon \in (0, 1)^{\mathcal{U}}\}$ is an open base of the space $Z(X)$.

Therefore, if for every $n \in \mathbb{N}$ and every $\varepsilon \in (0, 1)^{T_1(A) \cup T_2(A) \cup \dots \cup T_n(A)}$ the set $M_n(A, \varepsilon)$ is defined, then the family

$\mathcal{B}(M) = \{M_1(\mathcal{U}, \varepsilon) : \mathcal{U} \text{ is open in } X \text{ and } \varepsilon \in (0, 1)^{T_1(\mathcal{U})}\}$ is an open base for $Z_1(X)$, i.e. the following holds.

Lemma [9]. Families $\{M(\mathcal{U}, \varepsilon) : \mathcal{U} \text{ is open in } X \text{ and } \varepsilon \in (0, 1)^{T(\mathcal{U})}\}$ and $\{M_1(\mathcal{U}, \varepsilon) : \mathcal{U} \text{ is open in } X \text{ and } \varepsilon \in (0, 1)^{T_1(\mathcal{U})}\}$ is the base of the space $Z(X)$, (respectively, the space $Z_1(X)$).

In the work [2] R. Cauty claimed that for the space $Z(X)$ the following are true:

a) Each continuous map $f : A \rightarrow Y$, where A is a closed subset of the stratified space X , has a continuous extension to all X with values in $Z(Y)$: that is, the following diagram holds

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ X & \xrightarrow{\tilde{f}} & Z(Y) \end{array}$$

$\tilde{f}|_A = f$. $X, Y \in S$.

b) The stratifiable space X is $AR(S)$ ($ANR(S)$) if and only if X is a retract (respectively, a neighborhood retract) of the space $Z(X)$.

Definition [6]. A topological space L is called hyper-connected (respectively, m -hyper-connected) if for each $i \in N$, there is a mapping $h_i : L^i \times \sigma^{i-1} \rightarrow L$ satisfying a, b and c (respectively, a, b and d):

- a) $t \in \sigma^{n-1}$ and $t_i = 0$ implies $h_n(x, t) = h_{n-1}(\delta_i \cdot x, \delta_i \cdot t)$ for each $x \in L^n$ and $n = 2, 3, \dots$
- b) For each $x \in L^n$ the mapping $t \rightarrow h_n(x, t)$ maps the sets σ^{n-1} to L continuously;
- c) For each $x \in L$ and a neighborhood U of x , there is a neighborhood V of x such that $\bigcup_{i=1}^{\infty} h_i(V^i \times \sigma^{i-1}) \subset U$ and $V \subset U$;
- d) For each $x \in L$ and a neighborhood U of the point x , there is a neighborhood V of the point x such that $\bigcup_{i=1}^n h_i(V^i \times \sigma^{i-1}) \subset U$ and $V \subset U$, where $\sigma^{n-1} = \{t \in R^n : \sum_{i=1}^n t_i = 1, t_i \geq 0\}$ - $(n-1)$ is a dimensional simplex a $\delta_i : A^n \rightarrow A^{n-1}$ mapping defined by the formula $\delta_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ $i = \overline{1, n}$, i.e. δ_i - "forgetting" i -th coordinate of the product.

A space L is said to be a locally hyper-connected if for each point $x \in L$, there exists a neighborhood V of the point x such that V is hyper-connected.

In the paper [2] R. Cauty proved that $X \in A(N)R(S)$ if and only if X is hyperconnected (respectively, locally hyperconnected).

Theorem 1. For an arbitrary S -space X , the space $Z(X) \setminus X$ is a $AR(S)$ space.

Proof. Let $n \in N$. We construct mapping $h_n(z_1, \dots, z_n, t) : (ZX \setminus X)^n \times \sigma^{n-1} \rightarrow ZX \setminus X$ assuming $h_n(z_1, z_2, \dots, z_n)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n z_i t_i$, where $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in (ZX \setminus X)^n, (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \sigma^{n-1}, \sum_{i=1}^n t_i = 1, t_i \geq 0$.

It is easy to show that $h_n((z_1, \dots, z_n) \times t) \in Z(X) \setminus X$.

Now we show that the space $Z(X) \setminus X$ is hyperconnected.

- a) Let $t \in \sigma^{n-1}, t = (t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n)$. Then $h_n(z, t) = h_n((z_1, z_2, \dots, z_n)(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n) = (t_1 z_1 + t_2 z_2 + \dots + t_{i-1} z_{i-1} + t_{i+1} z_{i+1} + \dots + t_n z_n) = h_{n-1}((z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n)(t_1, t_2, \dots, t_n)) = h_{n-1}(\delta_i z, \delta_i t)$.
- b) We fix $z_0 \in (Z(X) \setminus X)^n, z_0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0), z_1^0 \in ZX \setminus X$. Hence $z_1^0 = \sum_{k=1}^{l_1} m_k^i x_k^i, \sum_{i=1}^{l_1} m_k^i = 1, m_k^i \geq 0$. Let $t \in \sigma^{n-1}$, then $t \rightarrow h_n(z_0, t) = \sum_{i=1}^n t_i z_i^0 = t_1 \sum_{k=1}^{l_1} \mu_k \overline{x_k^1} + t_2 \sum_{k=1}^{l_2} \mu_k \overline{x_k^2} + \dots + t_n \sum_{k=1}^{l_n} \mu_k \overline{x_k^n}$. Let us put $t_i \mu_j = a_{ij}, t_i \geq 0, \mu_j \geq 0, a_{ij} \geq 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, l_n}, \sum_{ij} a_{ij} = 1$. Hence, we get $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_i} a_{ij} \overline{x_j^i}$. Consider the set $X_0 = \{x_j^i : i, j\}$.

In this case, point $h(z_0, t) \in Z(X_0)$, i.e. there is a simplex σ lying in $Z(X_0)$ whose vertices consist of points of the set X_0 . On the other hand, if we consider the simplex σ^{n-1} with vertices z_1^0, \dots, z_n^0 , i.e. $\sigma_0^{n-1} = \langle z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0 \rangle$. The mapping $h_n(z, t)$ with continuity in the argument t or the mapping $t \rightarrow h_n(z, t)$ completely covers the simplex σ_0^{n-1} , i.e. the mapping $t \rightarrow h_n(z, t)$ as a homeomorphism maps σ^{n-1} to z_0^{n-1} . Hence, the mapping $t \rightarrow h_n(z, t)$ is continuous.

c) Let $z_0 \in Z(X) \setminus X$ and U_{z_0} be an arbitrary neighborhood of the point z_0 in $Z(X) \setminus X$. Consider $\text{supp } z_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ the support of the point z_0 of the space $Z(X) \setminus X$. Then $z_0 \in \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle = \sigma$. By the definition of topology in the space $Z(X) \setminus X$, the set $V^1 = \sigma \cap U_{z_0}$ is open. Consider a set V of the form $\{z \in \sigma \cap U_{z_0} = V^1 : \text{segment } [z, z_0] \subset V^1\}$. Obviously, the set V is open and convex. By definition, the following takes place: $V \subset V^1 \subset U_{z_0}$. Note that if $z \in (Z(X) \setminus X)^n, z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ and $\text{supp } z_i \subset A, A \subset X$, then $\text{supp } h_n(z, t) \subseteq A$. If V is convex, then the maps $h_n(z, t)$ by definition maps $V^n \times \sigma^{n-1}$ to V . Therefore, the following holds: $\bigcup_{n=1}^{\infty} h_n(V^n \times \sigma^{n-1}) \subset U$. Hence, the space $Z(X) \setminus X$ is hyperslash. By virtue of R. Cauty's theorem [1], we obtain that $Z(X) \setminus X$ is $AR(S)$. Theorem 1 is proved.

Theorem 2. The finite product of $A(N)R(S)$ spaces is $A(N)R(S)$ spaces. Theorem 2 is proved in [6].

Let X be a topological space, G is a topological group $\theta : G \times X \rightarrow X$ is a continuous mapping such that

- (1) $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$ for all $h \in G$ and $x \in X$;
- (2) $\theta(e, x) = x$ for all $x \in X$, where e is the unit of the group G .

The mapping θ is called the action of the group G on the space X . The space X with a fixed action θ of the group G is called a G -space.

A set A is called invariant under the action of the group G (or G -invariant) if $G(A) = A$, where $G(A) = \{g(x) : g \in G, x \in A\}$.

For $g \in G$, we define the mapping $\theta_g : X \rightarrow X$ by the formula $\theta_g(x) = g(x) = \theta(g, x)$. By virtue of (1) or (2) we have $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}$ and θ_e is the identity mapping 1_X of the space X into itself. Thus, $\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} = \theta_e = 1_X = \theta_{g^{-1}} \cdot \theta_g$ therefore, for $g \in G$, the mapping θ_g is a homeomorphism of the space X onto itself.

An action θ is called effective if $\text{Ker}\theta = e$ (i.e., the mapping θ is injective), where $\text{Ker}\theta = \{g \in G : g(x) = x\}$ for any $x \in X$ the kernel of the action of θ , and is almost effective if $\text{Ker}\theta$ – is a discrete subgroup of the group G . Obviously, the kernel $\text{Ker}\theta$ is a normal divisor of the group G and is closed in G .

We note, that some of the supporting statements were considered in the articles [10–14].

Definition [15]. Let X and Y be G -spaces.

The mapping $\varphi : X \rightarrow Y$ is called an equivariant mapping (or G -mapping) if φ commutes by actions, i.e. $\varphi(g(x)) = g(\varphi(x))$ for all $g \in G$ and all $x \in X$.

For a fixed group G , the class of G -spaces is a class of objects of a certain category, whose morphisms are called equivariant maps.

An equivariant mapping $\varphi : X \rightarrow Y$ that is a homeomorphism is called the G -equivalence of G -spaces.

Note that if we denote by $\text{Homeo}(X)$ the group (with respect to, composition) of all homomorphisms of the space X onto itself. The mapping $g \rightarrow \theta_g$ defines a homeomorphism $\theta : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$.

Let X be some G space, and let $x \in X$. The set $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$ of elements of the group, for which x is a fixed point, is obviously a closed subgroup of the group G . This subgroup G_x is called the stationary subgroup (or the stabilizer of the point x).

On the other hand, note that $\text{ker}\theta$ is exactly $\bigcap_{x \in X} G_x$, i.e. $\text{ker}\theta = \bigcap_{x \in X} G_x$.

The action of the group G on the space X is called free if for any point $x \in X$ the subgroup G_x is trivial. An action is called semi-free if the stationary subgroup G_x of any point $x \in X$ is either trivial or is the whole of G . Take $x \in X$. The subspace $G(x) = \{g(x) : g \in G\}$ is called the orbit of the point x (with respect to the action of the group G). Note that $G(x) \subset X$ for any $x \in X$ and for points x and y the sets $G(x)$ and $G(y)$ either do not intersect each other or coincide, i.e. $G(x) \cap G(y) = \emptyset$ or $G(x) = G(y)$ for any $x, y \in X$. By $X \setminus G = \{G(x) : x \in X\}$ we denote the orbit set of G -space X . Let $\pi = \pi_X : X \rightarrow X/G$ be a natural mapping, associating the point x and the orbit $x^* = G(x)$. Then $X \setminus G$ is endowed with the quotient topology in the usual way (i.e., the set $U \subset X \setminus G$ is open if and only if $\pi^{-1}(U)$ is open in X), and the resulting topological space is called the orbit space. Note that if $U \subset X$ is open, then the set $G(U) = \bigcup_{g \in G} g(U)$ is open, since each of the sets $g(U) = \theta_g(U)$ (recall that $\theta_g : X \rightarrow X$ is a homeomorphism).

Therefore, for an open $U \subset X$, the set $\pi^{-1}\pi(U) = G(U)$ is also open, which by definition means that the set $\pi(U)$ is open in $X \setminus G$. Hence the projection $\pi : X \rightarrow X/G$ is a continuous open map.

Theorem [15]. Let the group G be compact and X is some G -space. Then

- (1) the space $X \setminus G$ is Hausdorff;
- (2) The projection $\pi : X \rightarrow X/G$ is a closed map;
- (3) the projection $\pi : X \rightarrow X/G$ is a proper mapping (that is, the preimage of any compact set is compact);
- (4) The compactness of the space X is equivalent to the compactness of the space $X \setminus G$;
- (5) The local compactness of the space X is equivalent to the local compactness of the space $X \setminus G$.

Let X be a stratified G -space that is the topological group G acts on the space X , i.e. there is a continuous mapping $(G, X) : G \times X \rightarrow X$ defined by the formula: $(g, x) = gx$. On the test space $Z(X)$, the action of the group G is defined as follows: $(G, Z(X)) : G \times Z(X) \rightarrow Z(X)$ $g \in G, z \in Z(X), z = \sum_{i=1}^k m_i \bar{x}_i, \sum_{i=1}^k m_i = 1, m_i \geq 0$ $(g, z) = g \cdot z = \sum_{i=1}^k m_i \overline{g(x_i)}$. Thus, the space $Z(X)$ is a G -space. It is easy to see that the space X in the G space $Z(X)$ is an invariant G -subset, i.e. if $x \in X$, then $g(x) = x \in X$.

Thus, the following holds.

Theorem 3. A continuous action of the group G defined on the space X extends continuously to the entire space $Z(X)$. Take the point $z = \sum_{i=1}^k m_i \bar{x}_i, m_i \geq 0, \sum_{i=1}^k m_i = 1$,

$$\text{then } G_z = \left\{ gz : g \in G, gz = g \sum_{i=1}^k m_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^k m_i \overline{g(x_i)} \right\}.$$

Obviously, $G_z = G_{m_1 \bar{x}_1 + \dots + m_k \bar{x}_k} = \{m_1 \overline{g(x_1)} + \dots + m_k \overline{g(x_k)} : g \in G\}$.

Note that $Z(X/G) \cong Z(X)/G$ and is invariant in $Z(X/G)$.

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{\pi_{G(x)}} X/G & & x \rightarrow G_x \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ Z(X) \xrightarrow{\pi_{G(z)}} Z(X)/G & & z \rightarrow G_z \end{array}$$

In his paper [9] Cauty proved the following

Lemma 1.2 [1]. Let X be a topological stratified space. If $Y \in S$ and $A \subset Y$ – is closed and $f : A \rightarrow X$ is continuous, then the mapping f has a continuous extension $\tilde{f} : Y \rightarrow Z(X)$.

Lemma 1. Let X be a topological stratified G -space, $A \subset Y$ a closed G -invariant subset, $f : A \rightarrow X$ an equivariant continuous mapping, when the mapping f has a continuous equivariant extension $\tilde{f} : Y \rightarrow Z(X)$.

Proof. Let A be a closed subset of the space X . We put $W = X \setminus A$. $W' = \{x \in W : x \in U_y, y \in A \text{ and } U \text{ is open in } X\}$ and $m(x) = \max\{n(U, y) : y \in A \text{ and } x \in U_y\}$. Obviously, $W' \subset W$ and for every $x \in W'$ there is $m(x) < n(W, x) < \infty$.

Let $W = Y \setminus A$, $W' = \{x \in W : x \in U_y, y \in A \text{ and } U \text{ is open in } X\}$. Consider the open covered $W^* = \{W_x : x \in W\}$ subspace W . Since the subspace W is paracompact, there exists a locally finite G -cover V inscribed in W^* .

For any $v \in V$, we fix a point (vertex) $x_v \in W$ such that $gx_v = x_{gv}$, where $g \in G$. If a point $x_v \in W'$ we fix such a point (vertex) $a_v \in A$ and an open set $S_v, a_v \in S_v$ such that $x_v \in (S_v)_{a_v}$ and $n(S_v, a_v) = m(x_v)$ and $ga_v = a_{gv}$. If $x_v \in W'$ we put a_v fixed $a_0 \in A$. Let $\{P_v : v \in V\}$ be partition of unity subordinate to V and $P_v(x) = P_{gv}(gx)$. The required continuation $F : Y \rightarrow Z(X)$ is defined as follows:

$$F(x) = \begin{cases} f(x); & \text{if } x \in A \\ \sum P_v(x) \cdot f(a_v), & \text{if } x \in W \end{cases}$$

a) Now we show that the mapping $F : Y \rightarrow Z(X)$ is equivariant, i.e. $gF(x) = F(gx)$, where $g \in G$.

1) If the point $x \in A$, due to the invariance of the set, we have, $gF(x) = gf(x) = f(gx) = F(gx)$.

2) Let the point $x \in W$ then we have $gF(x) = g \sum (P_v(x) \cdot f(a_v)) = \sum P_v(x) \cdot gf(a_v) = \sum P_v(x) f(a_{gv})$.
 $F(gx) = \sum P_{gv} g(x) \cdot f(a_{gv}) = \sum P_v(x) f(a_{gv})$.

Hence, $gF(x) = F(gx)$ i.e. the mapping F is equivariant.

b) Due to the G -invariance of the closed set A and the simpliciality of a certain mapping $F : Y \rightarrow Z(X)$, the mapping $F(x)$ is continuous.

Lemma 1 is proved.

By Lemma 1 and Theorem 1, we have

Theorem 4. The space $X \in G-A(N)R(S)$ if and only if there is a G -retraction r (neighborhood) G -space $Z(X)$ on the G -space X .

Lemma 2. Let $X \in A(N)R(S)$. Then there is a G -retraction $R_n : O(X^n) \rightarrow X^n$ such that $G \subseteq S^n$ and $n \in N$ such that $O(X^n)$ is a neighborhood X^n to $Z(X^n)$.

Proof. Let X be $ANR(S)$ -space. It follows from the results of R. Cauchy that there is a retraction $r : U \rightarrow X$, where U is a neighborhood of the space X in $Z(X)$. We put $V = (r^n)^{-1}(U^n)$, where $V \subset (Z(X))^n$, $r^n : U^n \rightarrow X^n$, $U^n \subset (Z(X))^n$.

Now we define the mapping $\varphi : Z(X^n) \rightarrow (Z(X))^n$ as follows: $z \in Z(X^n)$, $z = \sum_{i=1}^k m_i \bar{x}_i$, $x_i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$. We put $\varphi(z) = (\sum m_i \bar{x}_1^i, \sum m_i \bar{x}_2^i, \dots, \sum m_i \bar{x}_n^i)$. Obviously, $\varphi(z) \in (Z(X))^n$. It is easy to check that the mapping $\varphi : Z(X^n) \rightarrow (Z(X))^n$ is continuous. We put $R_n = r^n \circ \varphi$ and $\varphi^{-1}(V) = O(Z(X^n))$.

Hence $R_n : Z(X^n) \rightarrow X^n$. Now we show that R_n is an equivariant mapping, i.e. the equality $R_n(gz) = gR_n(z)$ holds.

$$\begin{aligned} R_n(gz) &= r^n(\varphi(gz)) = r^n(\varphi(\sum m_i \overline{gx}_i)) = r^n(\varphi(\sum m_i \overline{g(x_1^i \dots x_n^i)})) = \\ &= r^n(\varphi(\sum m_i (\overline{x_{g(1)}^i} \dots \overline{x_{g(n)}^i}))) = r^n((\sum m_i \overline{x_{g(j)}^i})) = r^n(g(\sum m_i \overline{x_j^i})) = g(r^n \sum m_i \overline{x_j^i}) = gR_n(z). \end{aligned}$$

Hence, the mapping R_n is equivariant. It is easy to check that R_n is a continuous retraction.

Lemma 2 is proved.

Theorem 5. Let $X \in A(N)R(S)$. Then $X^n \in G-A(N)R(S)$, where $G \subseteq S^n$ - is a subgroup of the group of all permutations.

Proof. Let $X \in A(N)R(S)$ and Y be a stratified G -space, A its closed invariant G -subset, $f : A \rightarrow X^n$ is an arbitrary continuous G -mapping. Let $O = \varphi^{-1}(O(Z(X^n)))$. We put $F_g = F \circ r^n$, $r^n = R_n^n$ - the Cartesian product of retraction R_n defined by Lemma 2, $F : Y \rightarrow Z(X^n)$ mapping defined in Lemma 1.

Then the mapping F_g is a G -extension, since F_g is the composition of two G -mappings F and r^U . Obviously, F_g is an extension of the mapping f . The theorem is proved.

This theorem implies

Corollary 1. If X is a G -space and $X \in A(N)R(S)$ then $X \in G-A(N)R(S)$.

By virtue of Lemma 1, we can also assert.

Corollary 2. Let X be a topological stratifiable G -space. If Y is a stratified G -space A is an invariant G -space, $f : A \rightarrow X|G$ is an equivariant mapping. Then f has an equivariant continuous extension $F : Y \rightarrow Z(X/G)$.

Corollary 1 implies.

Corollary 3. If $X \in G-A(N)R(S)$, then $X/G \in G-A(N)R(S)$.

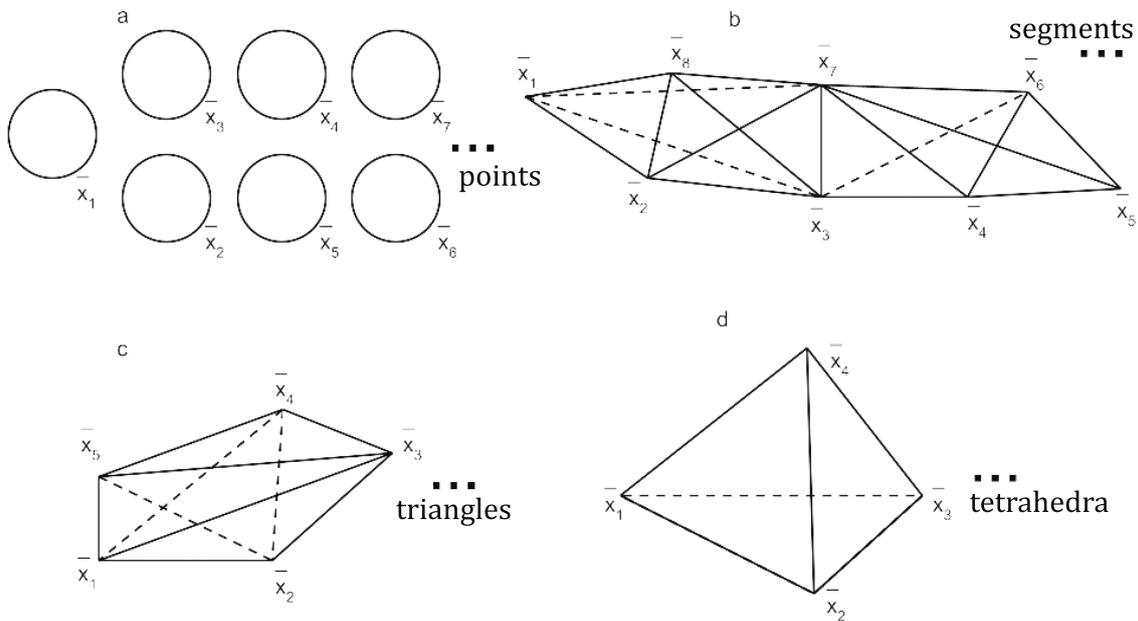


Fig. Illustrations to theorems: $a - z_0(x) - x$; $b - z_1(x) - \text{segments}$, vertices - point X (one-dimensional simplices); $c - z_2(x) - \text{triangles}$, vertices - points X (two-dimensional simplices); $d - z_3(x) - \text{tetrahedra}$, vertices - points X (three-dimensional simplices)

Рис. Иллюстрации к теоремам: $a - z_0(x) - x$; $b - z_1(x) - \text{отрезки}$, вершины - точки X (одномерные симплексы); $c - z_2(x) - \text{треугольники}$, вершины - точки X (двумерные симплексы); $d - z_3(x) - \text{тетраэдры}$, вершины - точки X (трехмерные симплексы)

Definition [13]. The set $A \subset X$ is called homotopically dense in X if there exists a homotopy $h(x, t): X \times [0, 1] \rightarrow X$ such that $h(x, 0) = id_X$ and $h(X \times (0, 1]) \subset A$.

Theorem 6. For any stratified space X and for any $n \in N^+$ subspace $Z(X) \setminus Z_n(X)$ is homotopically dense in $Z(X)$.

Proof. Let X is the stratified space and $n \in N^+$. Fixing the point $z_0 \in Z(X) \setminus Z_n(X)$, where $z_0 \in \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1} \rangle$ and

$$z_0 = m_1^0 \bar{x}_1 + m_2^0 \bar{x}_2 + \dots + m_{n+1}^0 \bar{x}_{n+1},$$

thus $\text{supp} z_0 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}\}$. We will construct the homotopy $h(z, t): Z(X) \times [0, 1] \rightarrow Z(X)$, assuming $h(z, t) = tz_0 + (1-t)z$.

By virtue of the convexity of the space $Z(X)$ for any $z \in Z(X)$ and $t \in [0, 1]$ the point $h(\mu, t)$ belongs to $Z(X)$, that is $h(\mu, t) \in Z(X)$, $\forall z \in Z$ and $\forall t \in [0, 1]$.

If $t = 0$, then $h(\mu, 0) = z$, that is $h(\mu, 0) = id_{Z(X)}$.

If $t > 0$ and $t \leq 1$, then $h(\mu, t) = tz_0 + (1-t)z$ belongs to $Z(X) \setminus Z_n(X)$ because the carriers $\text{supp} h(\mu, t)$ of point $h(\mu, t)$ consist of at least $n+1$ points, that is

$$h(\mu, t) = tz_0 + (1-t)z = t(m_1^0 \bar{x}_1 + m_2^0 \bar{x}_2 + \dots + m_{n+1}^0 \bar{x}_{n+1}) + (1-t)(m_1^0 \bar{x}'_1 + m_2^0 \bar{x}'_2 + \dots + m_k^0 \bar{x}'_k) \in Z(X) \setminus Z_n(X),$$

the point $h(\mu, t)$ carrier consists of points z and z_0 carriers, and it consists of different $(n+1)$ points. So the point $h(z, (0, 1]) \subset Z_n(X)$ and $h(z, (0, 1]) \subset Z(X) \setminus Z_n(X)$, which was required to be proved. The theorem is proved.

Conclusion

In this paper we consider that the functor Z is open, normal and monadic in the category of stratified spaces and continuous maps to itself. The dimensional properties of the space $Z(X)$ for the stratified space X are also studied, the subfunctor of the functor Z with the corresponding nested dimension is determined for each n .

References

- [1] Borges C.R. On stratifiable spaces. *Pacific Journal on Mathematics*, 1966, vol. 17, no. 1, pp. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.2140/PJM.1966.17.1>.
- [2] Cauty R. Retractions dans les espaces stratifiables. *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, 1972, vol. 102, pp. 129–149. DOI: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1774>.
- [3] Pflaum Markus J. Analytic and geometric study of stratified spaces. Contributions to Analytic and Geometric Aspects. Part of the book series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1768. Berlin: Springer-Verlag, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-45436-5>.
- [4] Crainic M., Mestre João Nuno. Orbispaces as differentiable stratified spaces. *Letters in Mathematical Physics*. 2018. Vol. 108. Pp. 805–859. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11005-017-1011-6>.
- [5] Ethan Ross. Stratified Vector Bundles: Examples and Constructions. 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2303.04200>.
- [6] Borges C.R. A study of absolute extensor spaces. *Pacific Journal on Mathematics*, 1969, vol. 31, issue 2, pp. 609–617. DOI: <https://doi.org/10.2140/PJM.1969.31.609>.
- [7] Borsuk K. The theory of retracts. Warszawa: [Pan?stwowe Wydawn. Naukowe], 1971. 251 p. Available at: <https://archive.org/details/theoryofretracts0000bors>.
- [8] Hall Brian C. Quantum Theory for Mathematicians. Part of the book series: Graduate Texts in Mathematics. Vol. 267. New York: Springer. 2013. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7116-5>.
- [9] Cauty R., Guo Bao-Lin, Sakai K. The huperspaces of finite subsets of stratifiable spaces. *Fundamenta Mathematicae*, 1995, vol. 147, issue 1. Pp. 1–9. DOI: http://dx.doi.org/10.4064/fm_1995_147_1_1_1_9.
- [10] Zhuraev T.F. Equivariant analogs of some geometric and topological properties on stratified spaces X // West. Kirg. Nat. University Named after Bolasagyn Zhasup. 2014. No. 1. P. 23–27.
- [11] Aleksandrov P.S., Pasynkov B.A. Introduction to the theory of dimension. Moscow: Nauka, 1973, 575 p. Available at: <https://djvu.online/file/jSWvCi71nbeFs>. (In Russ.)
- [12] Zhuraev T.F. Some geometric properties of the functor of probabilistic measures and its subfunctors: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis. Moscow: Moscow State University, 1989, 90 p. (In Russ.)
- [13] Banakh T., Radul T., Zarichniy M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Lviv: VNTL Publishers, 1996, Vol. 1, 232 p.
- [14] Zhuraev T.F. Dimension of paracompact σ -spaces and functors of finite degree // DAN of Uzbekistan. 1992. No. 4. Pp. 15–18. (In Russ.)
- [15] Bredon G. Introduction to the theory of compact transformation groups. Moscow: Nauka, 1980. Available at: <https://libcats.org/book/508918>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-40-47

УДК 515.12

Дата: поступления статьи: 27.02.2023
после рецензирования: 04.04.2023
принятия статьи: 30.06.2023

Т.Ф. Жураев

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: tursunzhuraev@mail.ru ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5379-3862>

М.В. Долгополов

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: mikhaildolgoplov68@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8725-7831>

ЭКВИВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{Z}(X)$ ДЛЯ СТРАТИФИЦИРУЕМОГО ПРОСТРАНСТВА X

АННОТАЦИЯ

В этой статье доказано, что действие компактной группы G , определяемой стратифицированным пространством X , непрерывно для пространства $\mathbb{Z}(X)$, являющегося стратифицированным пространством, содержащим самостратифицированное пространство X как замкнутое подмножество.

Доказан эквивариантный аналог некоторых результатов Р. Коти относительно $A(N)R(S)$ -пространств. Также показано, что орбитальное пространство $Z(X)/G$ под действием группы G является пространством S .

Ключевые слова: эквивариантные отображения; стратифицированное пространство; действия группы; орбитальное пространство; инвариантное множество; гомотопическая плотность; размерность; абсолютный экстензор; окрестностный экстензор; ковариантный функтор; вероятностные меры.

Цитирование. Zhuraev T.F., Dolgoplov M.V. Equivariant properties of the space $Z(X)$ for a stratifiable space X // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 40–47. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-40-47>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Жураев Т.Ф., 2023

Турсунбой Файзилович Жураев — доктор физико-математических наук, доцент кафедры математики, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, 700100, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Юсуф Хас Хажиб, 103.

© Долгополов М.В., 2023

Михаил Вячеславович Долгополов — доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики, Самарский государственный технический университет, 443086, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Литература

- [1] Borges C.R. On stratifiable spaces // Pacific Journal on Mathematics. 1966. Vol. 17, No. 1. Pp. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.2140/PJM.1966.17.1>.
- [2] Cauty R. Retractions dans les espaces stratifiables. // Bulletin de la Societe Mathematique de France. 1972. Vol. 102. Pp. 129–149. DOI: <https://doi.org/10.24033/bsmf.1774>.
- [3] Pflaum Markus J. Analytic and geometric study of stratified spaces. Contributions to Analytic and Geometric Aspects. Part of the book series: Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2001. Vol. 1768. DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-45436-5>.
- [4] Crainic M., Mestre João Nuno. Orbispaces as differentiable stratified spaces // Letters in Mathematical Physics. 2018. Vol. 108. Pp. 805–859. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11005-017-1011-6>.
- [5] Ethan Ross. Stratified Vector Bundles: Examples and Constructions. 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2303.04200>.
- [6] Borges C.R. A study of absolute extensor spaces // Pacific Journal on Mathematics. 1969. Vol. 31. Issue 2. Pp. 609–617. DOI: <https://doi.org/10.2140/PJM.1969.31.609>.
- [7] Borsuk K. The theory of retracts. Warsawa: [Pan?stwowe Wydawn. Naukowe], 1971. 251 p. Available at: <https://archive.org/details/theoryofretracts0000bors>.
- [8] Hall Brian C. Quantum Theory for Mathematicians. Part of the book series: Graduate Texts in Mathematics. Vol. 267. New York: Springer. 2013. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7116-5>.
- [9] Cauty R., Guo Bao-Lin, Sakai K. The hyperspaces of finite subsets of stratifiable spaces // Fundamenta Mathematicae. 1995. Vol. 147. Issue 1. Pp. 1–9. DOI: http://dx.doi.org/10.4064/fm_1995_147_1_1_1_9.
- [10] Zhuraev T.F. Equivariant analogs of some geometric and topological properties on stratified spaces X // West. Kirg. Nat. University Named after Bolasagyn Zhasup. 2014. No. 1. P. 23–27.
- [11] Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. Москва: Наука, 1973, 575 с. URL: <https://djvu.online/file/jSWvCi71nbeFs>.
- [12] Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его субфункторов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва: Московский государственный университет, 1989. 90 с.
- [13] Banakh T., Radul T., Zarichniy M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Львов: VNTL Publishers, 1996. Т. 1. 232 с.
- [14] Жураев Т.Ф. Размерность паракомпактных σ -пространств и функторы конечной степени // ДАН Узбекистана. 1992. № 4. С. 15–18.
- [15] Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. Москва: Наука, 1980. URL: <https://libcats.org/book/508918>.

ФИЗИКА PHYSICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-48-61

УДК 629.7.05

Дата: поступления статьи: 12.04.2023
после рецензирования: 22.05.2023
принятия статьи: 30.06.2023

Алимов Л.Э.

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: alimov.le@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4259-6707>

Салеев В.А.

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: saleev@samsu.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-5564>

АССОЦИАТИВНОЕ РОЖДЕНИЕ J/ψ -МЕЗОНОВ И ПРЯМЫХ ФОТОНОВ ПРИ ЭНЕРГИИ КОЛЛАЙДЕРА NICA¹

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается ассоциативное рождение J/ψ -мезонов и прямых фотонов при энергии коллайдера NICA, $\sqrt{s} = 27$ ГэВ в обобщенной партонной модели в лидирующем порядке теории возмущений квантовой хромодинамики. Адронизация пары $c\bar{c}$ -кварков в J/ψ -мезон описывается в рамках двух подходов: в модели цветных синглетов и в модели испарения цвета. Непертурбативные параметры моделей фиксируются из сравнения с имеющимися экспериментальными данными по рождению прямых J/ψ -мезонов, полученными при энергиях $\sqrt{s} = 19$ ГэВ и $\sqrt{s} = 200$ ГэВ. Показано, что процессы ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ могут быть использованы для изучения зависящих от поперечного импульса функций распределения глюонов в протоне.

Ключевые слова: NICA; чармониум; J/ψ -мезон; модель цветных синглетов; модель испарения цвета; жесткий процесс; обобщенная партонная модель; квантовая хромодинамика.

Цитирование. Алимов Л.Э., Салеев В.А. Ассоциативное рождение J/ψ мезонов и прямых фотонов при энергии коллайдера NICA // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 48–61. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-48-61>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Алимов Л.Э., Салеев В.А., 2023

Лев Эддарович Алимов — магистр кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Владимир Анатольевич Салеев — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Экспериментальное исследование процессов ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов в протон-протонных взаимодействиях представляет большой интерес не только для проверки пред-

¹Работа выполнена при поддержке гранта ОИЯИ.

сказаний пертурбативной квантовой хромодинамики (КХД) и различных моделей адронизации тяжелых кварков в кваркониум [1; 2], но и для получения информации о глюонных функциях распределения (ГФР) в протоне, в том числе зависящих от поперечного импульса поляризованных ГФР [3; 4].

Малость константы сильного взаимодействия на масштабе массы очарованного кварка $\alpha_S(m_c) \simeq 0.3$ позволяет проводить расчеты сечений рождения чармониев в рамках теории возмущений КХД. В настоящее время достигнута точность, отвечающая следующей за лидирующим приближением (СЛП) поправке, см. например, работу [5].

Процесс адронизации $c\bar{c}$ -пары тяжелых кварков в конечный чармоний — непертурбативный процесс, который может быть описан только в рамках феноменологических моделей. В модели цветных синглетов (МЦС) [6; 7] предполагается, что кварк-антикварковая пара рождается с квантовыми числами конечного чармония в синглетном состоянии по цвету. В более общем подходе нерелятивистской КХД (НРКХД), в котором учитываются релятивистские поправки по степеням относительной скорости кварка и антикварка, рождение чармония может происходить через промежуточные октетные по цвету состояния [8]. Другой подход к описанию адронизации, модель испарения цвета (МИЦ), предполагает, что все кварк-антикварковые пары с инвариантной массой от порога рождения чармония C до порога рождения открытого очарования с определенной вероятностью \mathcal{F}^C превращаются в этот чармоний [9; 10].

Принципиальную роль в описании спектров чармониев по поперечному импульсу играет выбор подхода факторизации эффектов физики жестких и мягких процессов. В области больших поперечных импульсов $p_T \geq m_c$, когда можно пренебречь поперечными импульсами начальных партонов, процессы протон-протонного взаимодействия адекватно описываются в коллинеарной партонной модели (КПМ) [11]. Однако для описания спектров в области малых поперечных импульсов $p_T \ll m_c$ необходимо учитывать наличие малого поперечного импульса начальных партонов, непертурбативной природы, что достигается в подходе так называемой TMD-факторизации, т. е. факторизации, зависящей от поперечного импульса или в неколлинеарной партонной модели (нКПМ) [12]. Для описания экспериментальных данных в промежуточной области поперечных импульсов $p_T \sim m_c$ используются различные процедуры "сшивания" результатов расчетов в КПМ и нКПМ [15] или феноменологический вариант нКМП — обобщенная партонная модель (ОПМ) [16].

В настоящее время накоплено большое количество экспериментальных данных по рождению J/ψ -мезонов в адронных взаимодействиях от энергий $\sqrt{s} = 19$ ГэВ до $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. В программу экспериментальных исследований коллаборации SPD NICA входит измерение сечений и спектров чармониев в поляризованных протон-протонных столкновениях при энергиях до $\sqrt{s} = 27$ ГэВ [13]. Рождение одиночных прямых фотонов в неполяризованных адронных взаимодействиях экспериментально хорошо изучено в широком диапазоне энергий [14] и планируется для изучения в столкновениях поляризованных протонов в экспериментах SPD NICA [13]. Однако до настоящего времени сечение ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов не было измерено ни в одном эксперименте.

В настоящей статье мы оцениваем возможность измерения сечения ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и фотонов при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ в эксперименте SPD NICA. Сравняются предсказания, полученные в ОПМ при использовании различных моделей адронизации тяжелых кварков в чармониях, а именно МЦС и МИЦ.

1. Партонная модель жестких процессов

Описание сечений жестких процессов (процессов с большой передачей импульса) основывается на факторизации процессов партон-партонного взаимодействия с большими передачами импульсов и мягких (непертурбативных) процессов в начальном состоянии, которые описываются партонными функциями распределения (ПФР). Энергетический масштаб факторизации в процессах рождения чармониев определяется массой c -кварка или чармония $\mu_F \simeq m_\psi$. Здесь и ниже в качестве чармония рассматривается J/ψ -мезон. В области больших поперечных импульсов чармония, $p_T \geq \mu_F$, процессы рождения описываются в КПМ [11] с использованием формулы коллинеарной факторизации

$$d\sigma(pp \rightarrow J/\psi X) = \int dx_1 \int dx_2 f_g^{(p)}(x_1, \mu_F) f_g^{(p)}(x_2, \mu_F) d\hat{\sigma}(gg \rightarrow J/\psi g), \quad (1.1)$$

где $f_g^{(p)}(x, \mu_F)$ — коллинеарные ПФР глюонов в протоне, $d\hat{\sigma}(gg \rightarrow J/\psi g)$ — дифференциальное сечение партонного подпроцесса рождения пары $c\bar{c}$ -кварков, из которых формируется конечный J/ψ -мезон с большим поперечным импульсом. Наряду с подпроцессом глюон-глюонного слияния $gg \rightarrow J/\psi g$ в КПМ учитываются также и подпроцессы кварк-антикварковой аннигиляции $q\bar{q} \rightarrow J/\psi g$ и кварк-глюонного рассеяния $q(\bar{q})g \rightarrow J/\psi q(\bar{q})$.

В области малых поперечных импульсов, $p_T \ll m_\psi$, КПМ, с одной стороны, предсказывает расходящееся при $p_T \rightarrow 0$ дифференциальное сечение рассеяния, а с другой стороны, уже нельзя пренебрегать

малыми поперечными импульсами партонов в протоне, которые имеют принципиально непertурбативную природу. В этой кинематической области используется нКПМ [12], в которой формула факторизации записывается как свертка зависящих от поперечного импульса ПФР и сечения партонного процесса

$$d\sigma(pp \rightarrow J/\psi X) = \int dx_1 \int d^2q_{T1} \int dx_2 \int d^2q_{T2} F_g^{(p)}(x_1, q_{T1}, \mu_F, \mu_Y) \times \\ \times F_g^{(p)}(x_2, q_{T2}, \mu_F, \mu_Y) d\hat{\sigma}(gg \rightarrow J/\psi), \quad (1.2)$$

где $F_{g,q}^{(p)}(x, q_T, \mu_F, \mu_Y)$ — зависящие от поперечного импульса $q_T^\mu = (0, \mathbf{q}_T, 0)^\mu$ глюонов или кварков(антикварков), μ_Y — жесткий масштаб, регулирующий быстротные расходимости в нКПМ. Так как начальные партоны в нКПМ имеют ненулевые поперечные импульсы, то поперечный импульс пары $c\bar{c}$ или J/ψ -мезона тоже ненулевой и имеет непertурбативную природу. Известно, что при высоких энергиях основной вклад дает подпроцесс глюон-глюонного слияния $gg \rightarrow J/\psi$, но в области энергий $\sqrt{s} = 10-40$ ГэВ вклад кварк-антикварковой аннигиляции $q\bar{q} \rightarrow J/\psi$ становится соизмеримым с вкладом глюон-глюонного слияния. Партонные подпроцессы с испусканием дополнительных конечных партонов с большими поперечными импульсами в нКПМ не учитываются, т. к. вносят вклад в область больших поперечных импульсов $p_T \gg m_\psi$, и их учет нарушает факторизацию нКПМ. Для описания сечений в кинематической области промежуточных поперечных импульсов, $p_T \sim m_\psi$ используются различные процедуры "сшивания" [15]. Другой подход для единого описания сечений рождения при малых и больших поперечных импульсах основан на ОПМ [16], в которой используется формула факторизации (1.2), но в качестве зависящих от поперечного импульса ПФР рассатриваются феноменологические распределения:

$$F_{g,q}^{(p)}(x, \mathbf{q}_T, \mu) = f_{g,q}^{(p)}(x, \mu) G_{g,q}^{(p)}(\mathbf{q}_T), \quad (1.3)$$

где $f_{g,q}^{(p)}(x, \mu)$ — коллинеарная ФР глюонов или кварков в протоне, а зависимость от поперечного импульса аппроксимируется нормированным на единицу гауссианом

$$G_{g,q}^{(p)}(\mathbf{q}_T) = \frac{1}{\pi a} \exp\left(-\frac{\mathbf{q}_T^2}{a}\right), \\ \int d^2q_T G_{g,q}^{(p)}(\mathbf{q}_T) = 1, \quad (1.4)$$

где $a = \langle \mathbf{q}_T^2 \rangle$ — средний квадрат поперечного импульса партона в протоне, который рассматривается как свободный параметр модели и определяется из сравнения с экспериментальными данными. В качестве коллинеарных ПФР глюонов и кварков в протоне в наших расчетах используется параметризация MSTW [17].

Несмотря на наличие у начальных партонов в ОПМ поперечных импульсов, они остаются на массовой поверхности, что достигается путем введения связанных между собой положительной и отрицательной конусных компонент в 4-импульсы партонов:

$$q_1^\mu = x_1 P_1^\mu + \tilde{x}_1 P_2^\mu + q_{1T}^\mu, \quad (1.5)$$

$$q_2^\mu = x_2 P_2^\mu + \tilde{x}_2 P_1^\mu + q_{2T}^\mu, \quad (1.6)$$

где

$$P_1^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, 1), \quad P_2^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -1)^\mu, \\ q_{1,2T} = (0, \mathbf{q}_{1,2T}, 0)^\mu, \quad \tilde{x}_1 = \mathbf{q}_{1T}^2/(x_1 S), \quad \tilde{x}_2 = \mathbf{q}_{2T}^2/(x_2 S)$$

2. Модель цветowych синглетов

В рамках НРКХД [8] сечение рождения чармония \mathcal{C} в партонном подпроцессе $a + b \rightarrow \mathcal{C} + X$ может быть представлено как сумма членов, в которых эффекты физики больших и малых расстояний факторизованы следующим образом:

$$d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow \mathcal{C} + X) = \sum_n d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow Q\bar{Q}[n] + X) \langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[n] \rangle, \quad (2.1)$$

где n обозначает набор квантовых чисел: цвет, спин, орбитальный и полный момент $c\bar{c}$ пары с 4-импульсом равным 4-импульсу физического чармония \mathcal{C} . Сечение подпроцесса $d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow Q\bar{Q}[n] + X)$ может быть рассчитано в пертурбативной КХД как ряд по степеням α_s , используя нерелятивистское приближение для относительного движения тяжелых кварков в $c\bar{c}$ -паре. Непertурбативный переход $c\bar{c}$ -пары в

чармониум C описывается непертурбативными матричными элементами (НМЭ) $\langle \mathcal{O}^C[n] \rangle$, которые могут быть извлечены их экспериментальных данных.

В работе [18] было показано, что экспериментальные данные коллаборации PHENIX [19] для спектра по поперечному импульсу прямых J/ψ -мезонов в области $p_T \leq 1$ GeV хорошо описываются в МЦС, и вклад октетных НМЭ должен быть малым. Как будет показано ниже, если фитировать экспериментальные данные по p_T -спектрам прямых J/ψ -мезонов в области $p_T \leq 3$ GeV в МЦС и ОПМ, варьируя только параметр a в ПФР, можно получить хорошее согласие с экспериментом. При этом будут учитываться вклады партонных подпроцессов прямого рождения J/ψ -мезонов, каскадного рождения через распад состояния $\psi(2S)$ и через распады P -волновых чармониев χ_{cJ}

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + g, \quad (2.2)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_1^{(1)}] + g, \quad (2.3)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_0^{(1)}], \quad (2.4)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_2^{(1)}], \quad (2.5)$$

квадраты модулей амплитуд которых впервые были получены в работе [21] и представлены ниже:

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + g)|^2} = \frac{320\pi^3\alpha_s^3 M}{81(M^2 - t)^2(M^2 - u)^2(t + u)^2} \times \quad (2.6)$$

$$\times [M^4(t^2 + tu + u^2) - M^2(t + u)(2t^2 + tu + 2u^2) + (t^2 + tu + u^2)^2]$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_1^{(1)}] + g)|^2} = \frac{128\pi^3\alpha_s^3(- (M^2(t + u)) + t^2 + tu + u^2)^2}{3M^3(M^2 - t)^4(M^2 - u)^4(t + u)^4} \times \quad (2.7)$$

$$\times (M^{10}(t^2 + u^2) - 2M^8(t + u)(3t^2 - tu + 3u^2) + M^6(13t^4 + 20t^3u + 10t^2u^2 + 20tu^3 + 13u^4) - 4M^4(t + u)(3t^4 + 5t^3u + t^2u^2 + 5tu^3 + 3u^4) + M^2 + (4t^6 + 18t^5u + 25t^4u^2 + 20t^3u^3 + 25t^2u^4 + 18tu^5 + 4u^6) - 2tu(t + u)(t^2 + tu + u^2)^2),$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_0^{(1)}])|^2} = \frac{8\pi^2\alpha_s^2}{3M^3}, \quad (2.8)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_2^{(1)}])|^2} = \frac{32\pi^2\alpha_s^2}{45M^3}, \quad (2.9)$$

где M —масса чармония в нерелятивистском приближении $M = 2m_c$. Как будет показано ниже, для согласованности результатов расчета при энергии $\sqrt{s} = 19.4$ GeV с экспериментальными данными коллаборации NA3 [20] необходимо учитывать дополнительные октетные вклады

$$q + \bar{q} \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}], \quad (2.10)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^1S_0^{(8)}], \quad (2.11)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_0^{(8)}] \quad (2.12)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_2^{(8)}] \quad (2.13)$$

с матричными элементами

$$\overline{|M(q + \bar{q} \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(8)}])|^2} = \frac{16\pi^2\alpha_s^2}{27M}, \quad (2.14)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^1S_0^{(8)}])|^2} = \frac{5\pi^2\alpha_s^2}{12M}, \quad (2.15)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_0^{(8)}])|^2} = \frac{5\pi^2\alpha_s^2}{M^3}, \quad (2.16)$$

$$\overline{|M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_2^{(8)}])|^2} = \frac{4\pi^2\alpha_s^2}{3M^3}. \quad (2.17)$$

Ассоциативное рождение $J/\psi + \gamma$ в ОПМ и МЦС в лидирующем приближении (ЛП) описывается только процессами, идущими через синглетное по цвету состояние

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + \gamma, \quad (2.18)$$

$$g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_1^{(1)}] + \gamma. \quad (2.19)$$

Однако вклад каскадных процессов рождения через распады $\psi(2S)$ и χ_{c1} оказывается пренебрежимо малым [1] и основной вклад дает процесс прямого рождения (2.18), квадрат модуля амплитуды которого равен

$$\begin{aligned} |M(g + g \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}] + \gamma)|^2 &= \frac{1024\pi^3\alpha\alpha_s^2}{243M(M^2 - t)^2(M^2 - u)^2(t + u)^2} \times \\ &\times (s^3(t^2 + tu + u^2) + s^2(t + u)^3 + stu(t^2 + 3tu + u^2) + t^2u^2(t + u)). \end{aligned} \quad (2.20)$$

3. Модель испарения цвета

Другая популярная модель адронизации пары $c\bar{c}$ в чармониум – МИЦ [9; 10]. Актуальный статус МИЦ представлен в работе [22]. В ОПМ начальные партоны имеют поперечный импульс, поэтому описание спектров по поперечному импульсу J/ψ -мезонов возможно уже в лидирующем приближении по константе сильного взаимодействия с учетом партонных подпроцессов

$$g + g \rightarrow c + \bar{c} \rightarrow J/\psi \quad (3.1)$$

и

$$q + \bar{q} \rightarrow c + \bar{c} \rightarrow J/\psi. \quad (3.2)$$

В МИЦ сечение рождения прямых J/ψ -мезонов связано с сечением рождения $c\bar{c}$ -пар следующим образом:

$$\sigma(pp \rightarrow J/\psi X) = \mathcal{F}^\psi \int_{m_\psi^2}^{4m_D^2} \frac{d\sigma(pp \rightarrow c\bar{c}X)}{dM_{c\bar{c}}^2} dM_{c\bar{c}}^2, \quad (3.3)$$

где $M_{c\bar{c}}$ – инвариантная масса $c\bar{c}$ -пары с 4-импульсом $p_{c\bar{c}}^\mu = p_c^\mu + p_{\bar{c}}^\mu$, m_D – масса легчайшего D -мезона. Для учета кинематического эффекта, связанного с разницей масс промежуточного состояния и конечного чармония, 4-импульс $c\bar{c}$ -пары и J/ψ -мезона связан соотношением $p^\mu = (m_\psi/M_{c\bar{c}})p_{c\bar{c}}^\mu$. Универсальный параметр \mathcal{F}^ψ рассматривается как вероятность превращения $c\bar{c}$ -пары с инвариантной массой $m_\psi < M_{c\bar{c}} < 2m_D$ в J/ψ -мезон.

Протон-протонное сечение связано с партон-партонным сечением по формуле (1.2), где дифференциальное сечение рождения $c\bar{c}$ -пары с импульсом $\mathbf{p}_{c\bar{c}} = \mathbf{p}_c + \mathbf{p}_{\bar{c}}$ в партонном подпроцессе имеет вид

$$\frac{d\hat{\sigma}(gg \rightarrow c\bar{c})}{d^3p_{c\bar{c}}dM_{c\bar{c}}^2} = \delta(\hat{s} - M_{c\bar{c}}^2)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{c\bar{c}} - \mathbf{p}_c - \mathbf{p}_{\bar{c}})\hat{\sigma}(gg \rightarrow c\bar{c}). \quad (3.4)$$

Здесь

$$\hat{\sigma}(gg \rightarrow c\bar{c}) = \frac{\pi\alpha_s^2}{3\hat{s}} \left[\left(1 + w + \frac{w^2}{16}\right) \ln \frac{1 + \sqrt{1-w}}{1 - \sqrt{1-w}} - \left(\frac{7}{4} + \frac{31}{16}w\right) \sqrt{1-w} \right]$$

и в случае рождения $c\bar{c}$ -пары в кварк-антикварковой аннигиляции

$$\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow c\bar{c}) = \frac{8\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}} \left(1 + \frac{w}{2}\right) \sqrt{1-w},$$

где $w = 4m_c^2/\hat{s}$, $\hat{s} = (p_c + p_{\bar{c}})^2$.

Для описания ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ ОПМ и МИЦ учитываются процессы

$$g + g \rightarrow c + \bar{c} + \gamma \quad (3.5)$$

и

$$q + \bar{q} \rightarrow c + \bar{c} + \gamma. \quad (3.6)$$

Амплитуды процессов (3.5) и (3.6) рассчитываются аналитически с помощью программных пакетов FeynArts и FeynCalc [23] в системе Mathematica. Дифференциальное сечение рождения пары $J/\psi + \gamma$ в ОПМ и МИС может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(pp \rightarrow c\bar{c}\gamma X)}{dy_{c\bar{c}}dp_{Tc\bar{c}}^2 dy_\gamma dp_{T\gamma}^2 d\phi_\gamma} &= \mathcal{F}^\psi \int_{m_\psi^2}^{4m_D^2} dM_{c\bar{c}}^2 \int dx_1 d^2q_{T1} \int dx_2 d^2q_{T2} \times \\ &\times F_g^{(p)}(x_1, q_{1T}, \mu_F) F_g^{(p)}(x_2, q_{2T}, \mu_F) \frac{d\hat{\sigma}(gg \rightarrow c\bar{c}\gamma)}{dM_{c\bar{c}}^2 dy_{c\bar{c}} dp_{Tc\bar{c}}^2 dy_\gamma dp_{T\gamma}^2 d\phi_\gamma}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где партонное сечение записывается как

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}(gg \rightarrow c\bar{c}\gamma)}{dM_{c\bar{c}}^2 dy_{c\bar{c}} dp_{Tc\bar{c}}^2 dy_\gamma dp_{T\gamma}^2 d\phi_\gamma} &= \frac{1}{(8\pi)^4} \int d\Omega \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - p_{c\bar{c}} - p_\gamma) \times \\ &\times \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{M_{c\bar{c}}^2} \frac{|M(gg \rightarrow c\bar{c}\gamma)|^2}{x_1 x_2 s}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь используется ковариантный способ интегрирования по относительному 4-импульсу k^μ между c и \bar{c} кварками, когда квадрат модуля амплитуды подпроцесса $gg \rightarrow c\bar{c}\gamma$, усредненный по поляризациям начальных партонов и просуммированный по поляризациям конечных частиц, представляется как функция релятивистских инвариантов и углов Коллинза – Сопера ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$) в системе центра масс $c\bar{c}$ -пары:

$$|M(gg \rightarrow c\bar{c}\gamma)|^2 = \Phi(\hat{s}, M_{c\bar{c}}^2, \hat{t}, \hat{u}, W_1, W_2, \theta, \phi, m_c), \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (q_1 + q_2)^2, & M_{c\bar{c}}^2 &= (p_c + p_{\bar{c}})^2, \\ \hat{t} &= (q_1 - p_\gamma)^2, & \hat{u} &= (q_2 - p_\gamma)^2, \\ W_1 &= (q_1 - p_c)^2, & W_2 &= (q_2 - p_{\bar{c}})^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

При этом

$$p_c^\mu = \frac{p_{c\bar{c}}^\mu}{2} + k^\mu, \quad p_{\bar{c}}^\mu = \frac{p_{c\bar{c}}^\mu}{2} - k^\mu$$

и

$$k^\mu = \frac{1}{2} \sqrt{M_{c\bar{c}}^2 - 4m_c^2} (X^\mu \sin\theta \cos\phi + Y^\mu \sin\theta \sin\phi + Z^\mu \cos\theta). \quad (3.11)$$

В системе центра масс сталкивающихся протонов базисные единичные 4-векторы заданы следующим образом:

$$X^\mu = \frac{1}{M_{c\bar{c}}} \left(|\mathbf{p}_{Tc\bar{c}}| \cosh(y), \sqrt{|\mathbf{p}_{Tc\bar{c}}|^2 + M_{c\bar{c}}^2}, 0, |\mathbf{p}_{Tc\bar{c}}| \sinh(y) \right)^\mu, \quad (3.12)$$

$$Y^\mu = \text{sgn}(y)(0, 0, 1, 0)^\mu, \quad (3.13)$$

$$Z^\mu = \text{sgn}(y)(\sinh(y), 0, 0, \cosh(y))^\mu. \quad (3.14)$$

4. Результаты расчетов

В первую очередь был проведен расчет сечений рождения и спектров по поперечному импульсу прямых J/ψ -мезонов в области $0 < p_{T\psi} < 3$ ГэВ при энергиях $\sqrt{s} = 200$ ГэВ [19] и $\sqrt{s} = 19.4$ ГэВ [20] в ОПМ и МЦС. При этом были фиксированы параметры моделей: параметра a в гауссовском распределении глюонов и кварков по поперечному импульсу и вероятности адронизации $c\bar{c}$ -пары в J/ψ -мезон \mathcal{F}^ψ . Результаты фита представлены в таблице. Полученные значения параметров при энергии NA3 используются ниже при расчетах сечения и различных спектров при энергии эксперимента SPD NICA.

Таблица

Результаты фитирования параметров ОПМ и МИЦ

Table

The results of fitting the parameters of OPM and MIC

Эксперимент	Энергия, \sqrt{s} , ГэВ	\mathcal{F}^ψ	$\langle q_T^2 \rangle_g$, ГэВ ²	$\langle q_T^2 \rangle_q$, ГэВ ²
PHENIX [19]	200	0.05	$2.09_{-0.07}^{+0.13}$	$0.45_{-0.18}^{+0.48}$
NA3 [20]	19.4	0.33	$0.96_{-0.04}^{+0.05}$	$0.29_{-0.03}^{+0.04}$

На рис. 4.1–4.10 серым выделены области неопределенности теоретических расчетов в зависимости от выбора жесткого масштаба $\mu_F = \xi m_\psi$, где $\xi = 0.5, 1.0, 2.0$. Как видно, на рисунках 4.1 и 4.2 в ОПМ экспериментальные данные для p_T -спектров прямых J/ψ -мезонов очень хорошо описываются, если область фитирования параметров моделей ограничена областью $0 < p_T < 3$ ГэВ. Причем параметр a для глюонных и кварковых функций распределения получается разным и сильно зависящим от энергии сталкивающихся протонов. Расчеты показывают, что при энергии 200 ГэВ вкладом кварк-антикварковой аннигиляции можно пренебречь (см. рис. 4.1), но при энергии 19.4 ГэВ вклад кварк-антикварковой аннигиляции в рождение J/ψ -мезонов становится существенным, особенно в области малых поперечных импульсов.

На рис. 4.3 показаны предсказания для зависимости дифференциального сечения ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ как функции суммарного поперечного импульса J/ψ -мезона и фотона в МИЦ и МЦС, а на рис. 4.4 как функции инвариантной массы системы $J/\psi + \gamma$, $M_{\psi\gamma}$. Наблюдается хорошее согласие между результатами расчетов в различных моделях адронизации.

На рис. 4.5 и 4.6 показаны, соответственно, дифференциальные спектры по разности быстрот $\Delta y_{\psi\gamma} = |y_\psi - y_\gamma|$ и разности азимутальных углов $\Delta\phi_{\psi\gamma} = |\phi_\psi - \phi_\gamma|$. Угловые корреляции особенно чувствительны к выбору зависящих от поперечного импульса ПФР.

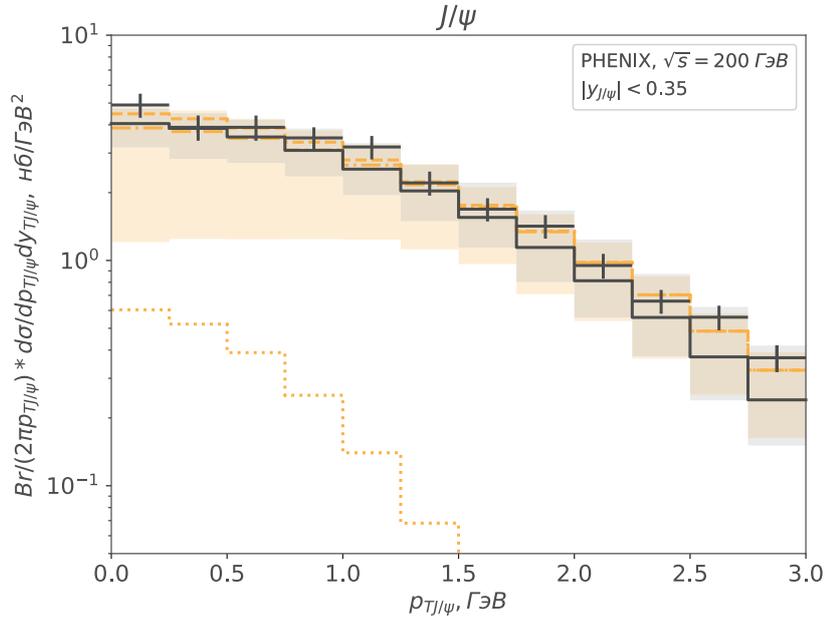


Рис. 4.1. Дифференциальное сечение рождения J/ψ -мезонов как функция поперечного импульса при энергии $\sqrt{s} = 200$ ГэВ, $|y| < 0.35$ [19]. Сплошная кривая – в МЦС, штрих-пунктирная – в МИЦ, пунктирная – вклад кварк-антикварковой аннигиляции

Fig. 4.1. Differential cross-section of the J/ψ -mesons production as a function of the transverse momentum, at an energy of $\sqrt{s} = 200$ GeV, $|y| < 0.35$ [19]. Solid curve – in CSM, dashed – in iCEM, the dotted line – the contribution of quark-antiquark annihilation

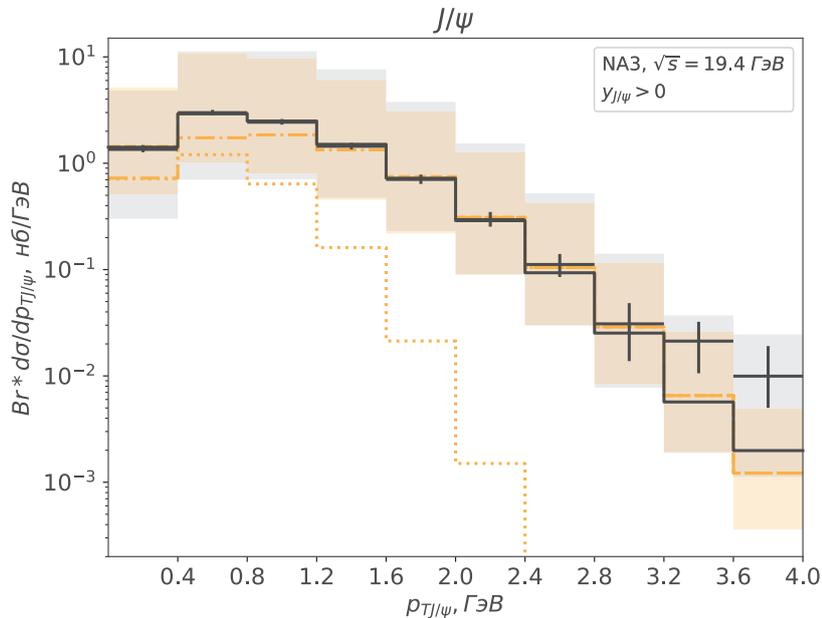


Рис. 4.2. Дифференциальное сечение рождения J/ψ -мезонов как функция поперечного импульса при энергии $\sqrt{s} = 19.4$ ГэВ, $y > 0$ [20]. Сплошная кривая – в МЦС, пунктирная – в МИЦ, пунктирная – вклад кварк-антикварковой аннигиляции

Fig. 4.2. Differential cross-section of the J/ψ -mesons production as a function of the transverse momentum, at an energy of $\sqrt{s} = 19.4$ GeV, $y > 0$ [20]. Solid curve – in CSM, dashed – in iCEM, the dotted line – the contribution of quark-antiquark annihilation

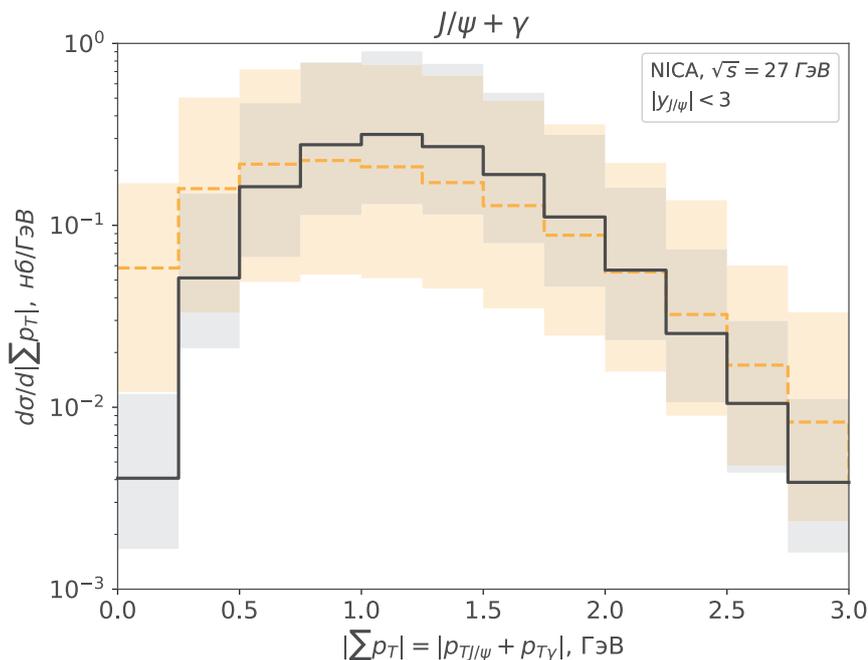


Рис. 4.3. Дифференциальное сечение рождения $J/\psi + \gamma$ пары как функция их суммарного поперечного импульса при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ. Сплошная кривая – в МЦС, пунктирная – в МИЦ

Fig. 4.3. Differential cross-section of the $J/\psi + \gamma$ pairs production as a function of their total transverse momentum, at an energy of $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ GeV. Solid curve – in CSM, dashed – in iCEM

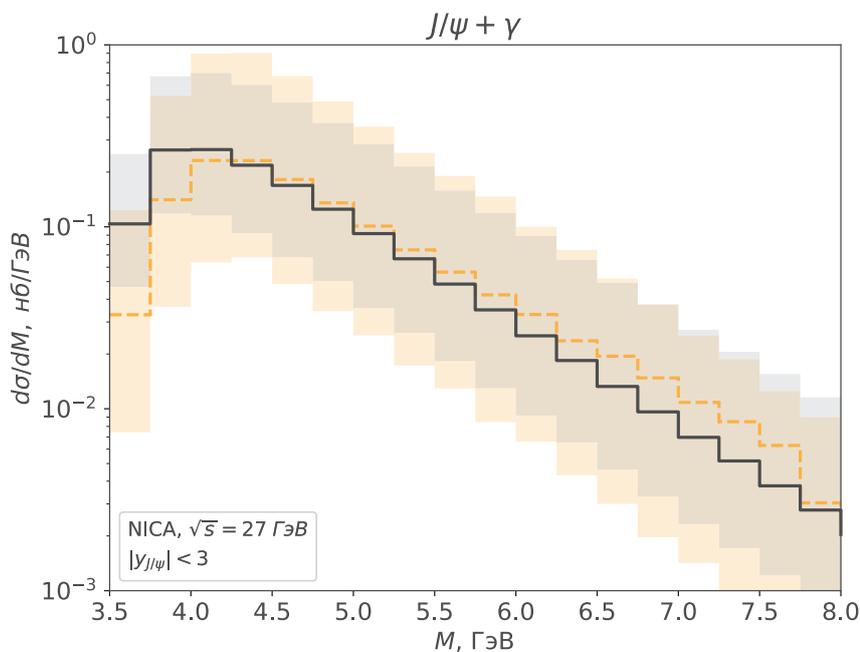


Рис. 4.4. Дифференциальное сечение рождения $J/\psi + \gamma$ пары как функция инвариантной массы пары $M_{\psi\gamma}$ при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ. Сплошная кривая – в МЦС, пунктирная – в МИЦ

Fig. 4.4. Differential cross-section of the $J/\psi + \gamma$ pairs production as a function of the invariant mass of a pair $M_{\psi\gamma}$, at an energy of $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ GeV. Solid curve – in CSM, dashed – in iCEM

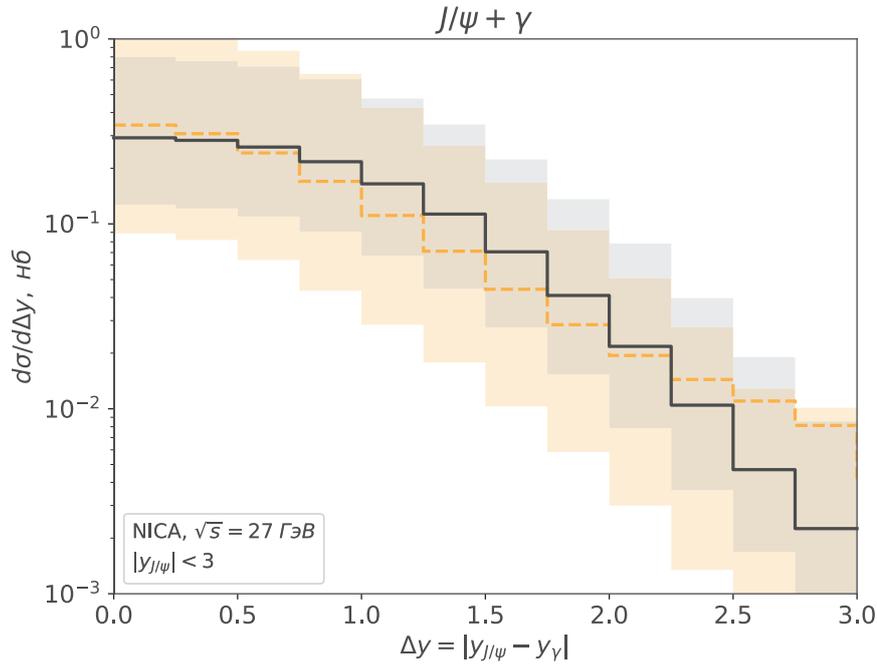


Рис. 4.5. Дифференциальное сечение рождения $J/\psi + \gamma$ пары как функция разности быстрот $\Delta y_{\psi\gamma}$ при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_{\psi}| < 3$, $|y_{\gamma}| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ. Сплошная кривая – в МЦС, пунктирная – в МИЦ
 Fig. 4.5. Differential cross-section of the $J/\psi + \gamma$ pairs production as a function of the rapidity difference $\Delta y_{\psi\gamma}$, at an energy of $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_{\psi}| < 3$, $|y_{\gamma}| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ GeV. Solid curve – in CSM, dashed – in iCEM

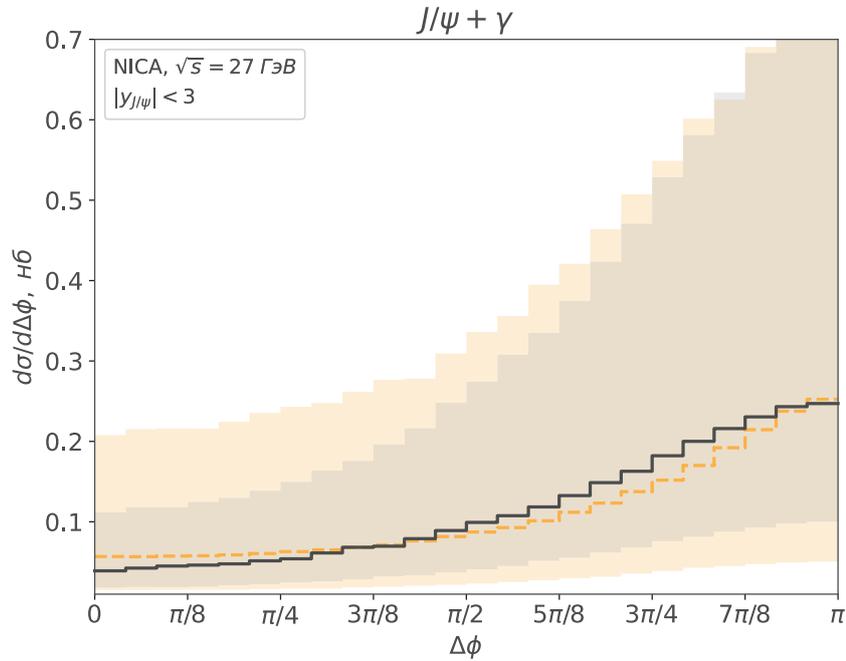


Рис. 4.6. Дифференциальное сечение рождения $J/\psi + \gamma$ пары как функция разности азимутальных углов $\Delta\phi_{\psi\gamma}$ при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_{\psi}| < 3$, $|y_{\gamma}| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ. Сплошная кривая – в МЦС, пунктирная – в МИЦ
 Fig. 4.6. Differential cross-section of the $J/\psi + \gamma$ pairs production as a function of the azimuthal angles difference $\Delta\phi_{\psi\gamma}$, at an energy of $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_{\psi}| < 3$, $|y_{\gamma}| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ GeV. Solid curve – in CSM, dashed – in iCEM

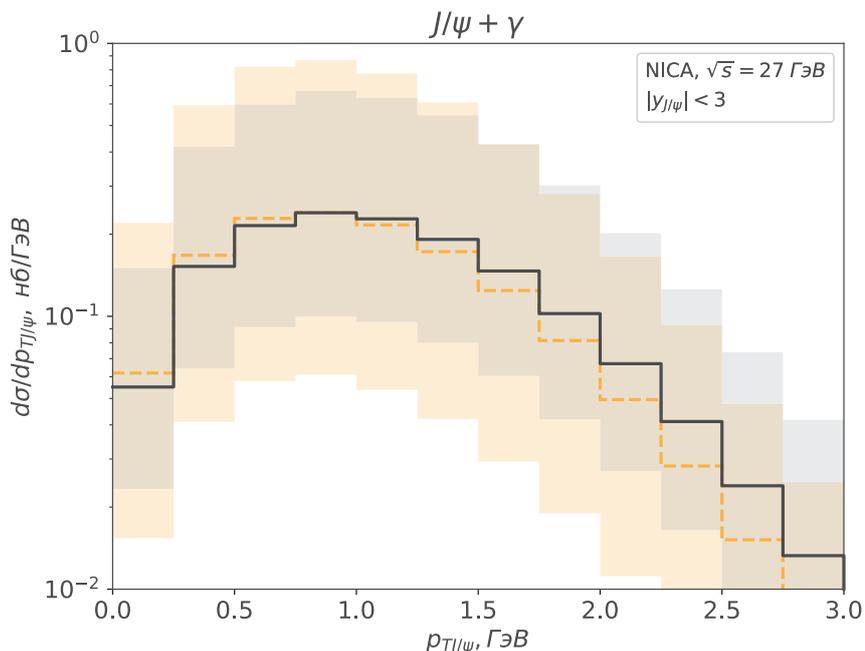


Рис. 4.7. Дифференциальные сечения рождения $J/\psi + \gamma$ пары как функции поперечных импульсов $p_{T\psi}$ при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ. Сплошная кривая – в МЦС, пунктирная – в МИЦ
 Fig. 4.7. Differential cross-section of the $J/\psi + \gamma$ pairs production as a function of the J/ψ -meson transverse momentum $p_{T\psi}$, at an energy of $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ. Solid curve – in CSM, dashed – in iCEM

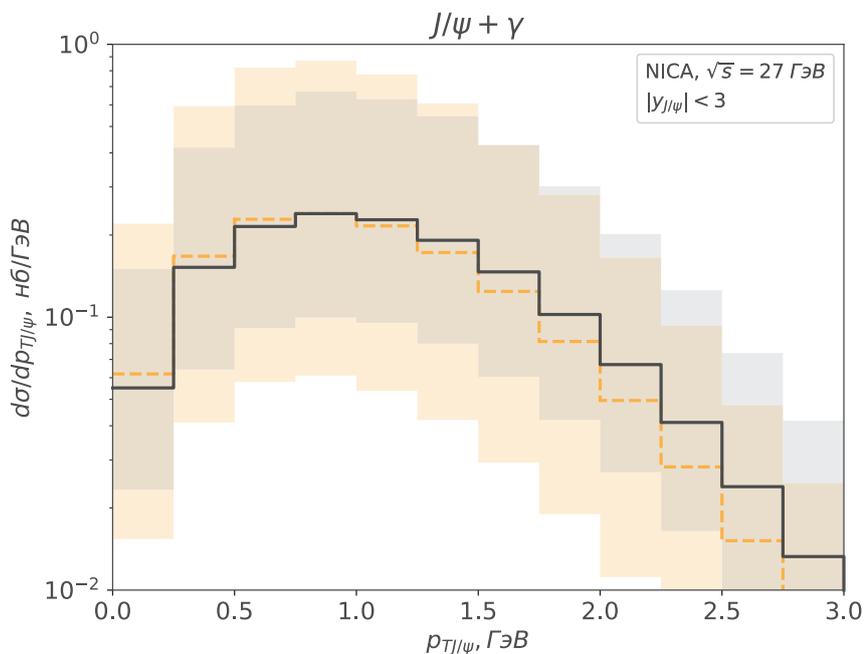


Рис. 4.8. Дифференциальные сечения рождения $J/\psi + \gamma$ пары как функции поперечных импульсов $p_{T\gamma}$ при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ. Сплошная кривая – в МЦС, пунктирная – в МИЦ
 Fig. 4.8. Differential cross-section of the $J/\psi + \gamma$ pairs production as a function of the photon transverse momentum $p_{T\gamma}$, at an energy of $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ. Solid curve – in CSM, dashed – in iCEM

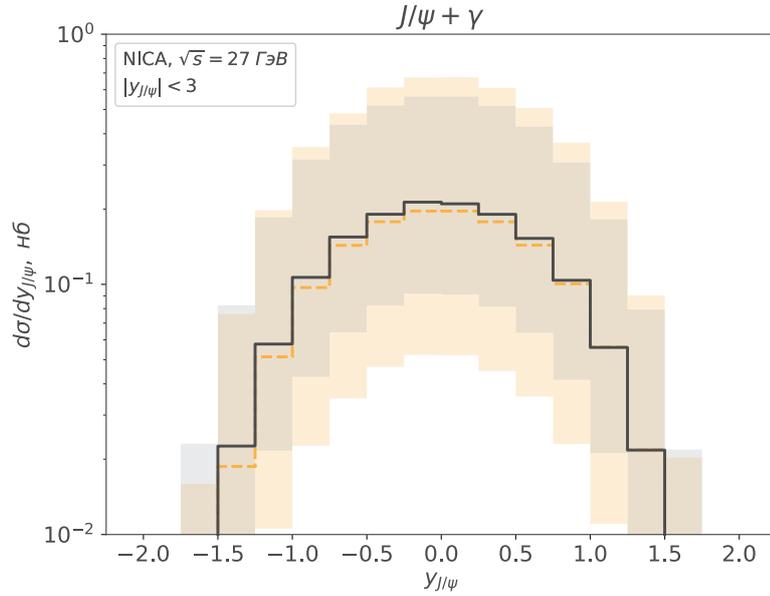


Рис. 4.9. Дифференциальные сечения рождения $J/\psi + \gamma$ пары как функции быстроты y_ψ при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ. Сплошная кривая – в МЦС, пунктирная – в МИЦ
 Fig. 4.9. Differential cross-section of the $J/\psi + \gamma$ pairs production as a function of the J/ψ -meson rapidity y_ψ , at an energy of $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ GeV. Solid curve – in CSM, dashed – in iCEM

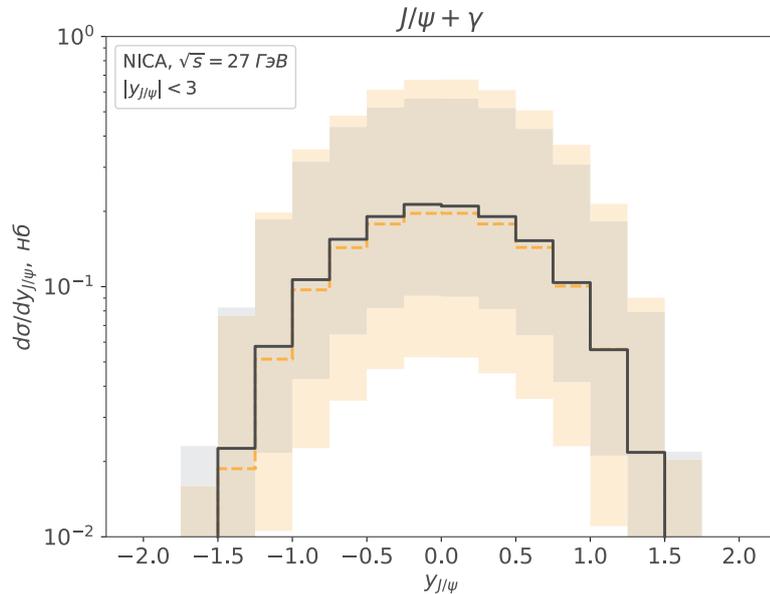


Рис. 4.10. Дифференциальные сечения рождения $J/\psi + \gamma$ пары как функции быстроты y_γ при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ. Сплошная кривая – в МЦС, пунктирная – в МИЦ
 Fig. 4.10. Differential cross-section of the $J/\psi + \gamma$ pairs production as a function of the photon rapidity y_ψ , at an energy of $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_\psi| < 3$, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} > 0.5$ GeV. Solid curve – in CSM, dashed – in iCEM

Спектры по поперечному импульсу J/ψ -мезонов и фотонов в процессах ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ показаны на рис. 4.7 и 4.8. На рис. 4.9 и 4.10 изображены спектры по быстройте J/ψ -мезона и фотона, соответственно. При расчетах предполагалось, что на поперечные импульсы фотонов наложено ограничение $p_{T\gamma} > 0.5$ ГэВ, которое связано с возможностью экспериментальной регистрации прямых фотонов.

Заключение

При энергиях коллайдера NICA проведен расчет дифференциальных сечений ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов в ОПМ и в рамках моделей адронизации МЦС и МИЦ. Параметры моделей были фиксированы из сравнения с экспериментальными данными по спектрам прямых J/ψ -мезонов при энергиях экспериментов PHENIX [19] и NA3 [20]. Рассчитанные спектры для ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ слабо зависят от выбора модели адронизации, МЦС или МИЦ. Основная погрешность теоретических расчетов, как это обычно наблюдается в расчетах в ЛП по константе сильного взаимодействия, обусловлена неопределенностью в выборе жесткого масштаба и может достигать 100 %. Однако предсказываемые нами величины сечения ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ при энергии эксперимента SPD NICA достаточно велики, что позволяет надеяться на возможность их экспериментального измерения, т. к. рождения прямых J/ψ -мезонов и прямых фотонов характеризуются по отдельности достаточными для выделения сигнала отношениями "сигнал-фон". Анализ этого отношения в случае совместного рождения $J/\psi + \gamma$ требует специального исследования, которое планируется сделать в будущем.

Литература

- [1] Drees M., Kim C. S. Associate $J/\psi + \gamma$ production: a clean probe of gluon densities // Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields. 1992. Vol. 53, № 4. P. 673–678. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01559746>.
- [2] Mehen T. Testing quarkonium production with photoproduced $J/\psi + \gamma$ // Physical Review D. 1997. Vol. 55, Issue 7. P. 4338–4343. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/9611321>.
- [3] Doncheski M.A., Kim C.S. Associated $J/\psi + \gamma$ production as a probe of the polarized gluon distribution // Physical Review D. 1994. Vol. 49, Issue 9. P. 4463–4468. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/9303248>.
- [4] Den Dunnen W.J. et al. Accessing the Transverse Dynamics and Polarization of Gluons inside the Proton at the LHC // Physical Review Letters. 2014. Vol. 112, Issue 21. Article number 212001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.212001>.
- [5] Butenschoen M., Kniehl B.A. Next-to-leading order tests of non-relativistic-QCD factorization with J/ψ yield and polarization // Modern Physics Letters A. 2013. Vol. 28, № 9. Article number 1350027. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1212.2037>.
- [6] Baier R., Ruickl R. Hadronic collisions: a quarkonium factory // Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields. 1983. Vol. 19. Pp. 251–266. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01572254>.
- [7] Berger E.L., Jones D. Inelastic photoproduction of J/ψ and Upsilon by gluons // Physical Review D. 1981. Vol. 23, Issue 7. Article number 1521. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.1521>.
- [8] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium // Physical Review D. 1995. Vol. 51, Issue 3. Article number 1125. DOI: <https://doi.org/10.1103/physrevd.51.1125>.
- [9] Fritzsche H. Producing Heavy Quark Flavours in Hadronic Collisions: A Test of Quantum Chromodynamics // Physics Letters B. 1977. Vol. 67, № 2. P. 217–221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90108-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90108-3).
- [10] Halzen F. CVC for gluons and hadroproduction of quark flavours // Physics Letters B. 1977. Vol. 69, № 1. P. 105–108.
- [11] Collins J. Foundations of perturbative QCD. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 624 p. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511975592>.
- [12] Collins J.C., Soper D.E., Serman G. Factorization of hard processes in QCD // Perturbative QCD. 1989. P. 1–91. DOI: http://dx.doi.org/10.1142/9789814503266_0001.
- [13] Arbuzov A. et al. On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD // Progress in Particle and Nuclear Physics. 2021. Vol. 119. P. 103858. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103858>. EDN: <https://elibrary.ru/buwwww>.
- [14] Vogelsang W., Whalley M. R. A compilation of data on single and double prompt photon production in hadron-hadron interactions // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. 1997. Vol. 23, № 7A. P. A1–A69. DOI: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/23/7A/001>.
- [15] Echevarria M.G. et al. Matching factorization theorems with an inverse-error weighting // Physics Letters B. 2018. Vol. 781. P. 161–168. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.075>.
- [16] Wong C.Y., Wang H. Effects of parton intrinsic transverse momentum on photon production in hard-scattering processes // Physical Review C. 1998. Vol. 58, Issue 1. Article number 376. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.58.376>.

- [17] Martin A.D., Stirling W.J., Thorne R.S. The role of FL (x , Q^2) in parton analyses // Physics Letters B. 2006. Vol. 635, № 5–6. P. 305–312. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.03.013>.
- [18] Karpishkov A.V., Saleev V.A., Nefedov M.A. Estimates for the single-spin asymmetries in the $p \uparrow p \rightarrow J/\psi X$ process at PHENIX RHIC and SPD NICA // Physical Review D. 2021. Vol. 104, № 1. P. 016008. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.016008>. EDN: <https://elibrary.ru/tenvgt>.
- [19] Adare A. et al. Ground and excited state charmonium production in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV // Physical Review D. 2012. Vol. 85, Issue 9. P. 092004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.092004>.
- [20] NA3 Collaboration. Experimental J/ψ hadronic production from 150 to 280 GeV/c // Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields. 1983. Vol. 20. P. 101–116.
- [21] Cho P., Leibovich A.K. Color-octet quarkonia production // Physical Review D. 1996. Vol. 53, Issue 1. P. 150. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.150>.
- [22] Ma Y.Q., Vogt R. Quarkonium production in an improved color evaporation model // Physical Review D. 2016. Vol. 94, Issue 11. P. 114029. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.114029>.
- [23] Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F. FeynCalc 9.3: New features and improvements // Computer Physics Communications. 2020. Vol. 256. P. 107478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107478>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-48-61

Submitted: 12.04.2023

Revised: 22.05.2023

Accepted: 30.06.2023

L.E. Alimov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: alimov.le@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4259-6707>

V.A. Saleev

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: saleev@samsu.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-5564>

ASSOCIATIVE PRODUCTION OF J/ψ -MESONS AND DIRECT PHOTONS AT THE ENERGY OF THE NICA COLLIDER

ABSTRACT

The article considers the associated production of J/ψ -mesons and direct photons at the energy of the NICA collider, $\sqrt{s} = 27$ GeV, in the Generalized Parton Model in the leading order of perturbation theory of the quantum chromodynamics. Hadronization of a pair of $c\bar{c}$ -quarks to a J/ψ -meson is described in terms of two approaches: the color singlet model and the color evaporation model. Nonperturbative parameters of the models are fixed from comparison with the available experimental data on inclusive production of J/ψ -mesons obtained at energies from $\sqrt{s} = 19$ up to $\sqrt{s} = 200$ GeV. It is shown that the processes of the associative production of $J/\psi + \gamma$ can be used to study of gluon distribution functions depending on the transverse momentum in a proton.

Key words: NICA; charmonium; J/ψ -meson; color singlet model; color evaporation model; hard process; generalized parton model; quantum chromodynamics.

Citation. Alimov L.E., Saleev V.A. Associative production of J/ψ -mesons and direct photons at the energy of the NICA collider. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 48–61. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-48-61>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Alimov L.E., Saleev V.A., 2023

Lev E. Alimov — Master's Degree Student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

Vladimir A. Saleev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Drees M., Kim C.S. Associate $J/\psi + \gamma$ production: a clean probe of gluon densities. *Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields*, 1992, vol. 53, no. 4, pp. 673–678. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01559746>.
- [2] Mehen T. Testing quarkonium production with photoproduced $J/\psi + \gamma$. *Physical Review D*, 1997, vol. 55, issue 7, pp. 4338–4343. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/9611321>.
- [3] Doncheski M.A., Kim C.S. Associated $J/\psi + \gamma$ production as a probe of the polarized gluon distribution. *Physical Review D*, 1994, vol. 49, issue 9. P. 4463–4468. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/9303248>.
- [4] Den Dunnen W.J. et al. Accessing the Transverse Dynamics and Polarization of Gluons inside the Proton at the LHC. *Physical Review Letters*, 2014, vol. 112, issue 21, article number 212001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.212001>.
- [5] Butenschoen M., Kniehl B.A. Next-to-leading order tests of non-relativistic-QCD factorization with J/ψ yield and polarization. *Modern Physics Letters A*, 2013, vol. 28, no. 9, article number 1350027. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.1212.2037>.
- [6] Baier R., Ruckl R. Hadronic collisions: a quarkonium factory. *Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields*, 1983, vol. 19, pp. 251–266. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01572254>.
- [7] Berger E.L., Jones D. Inelastic photoproduction of J/ψ and Upsilon by gluons. *Physical Review D*, 1981, vol. 23, issue 7, article number 1521. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.1521>.
- [8] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium. *Physical Review D*, 1995, vol. 51, issue 3, article number 1125. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.1125>.
- [9] Fritzsche H. Producing Heavy Quark Flavours in Hadronic Collisions: A Test of Quantum Chromodynamics. *Physics Letters B*, 1977, vol. 67, issue 2, pp. 217–221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90108-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90108-3).
- [10] Halzen F. CVC for Gluons and Hadroproduction of Quark Flavours. *Physics Letters B*, 1977, vol. 69, issue 1, pp. 105–108. DOI: [http://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90144-7](http://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90144-7).
- [11] Collins J. Foundations of perturbative QCD. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 624 p. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511975592>.
- [12] Collins J.C., Soper D.E., Sterman G. Factorization of hard processes in QCD. *Perturbative QCD*, 1989, pp. 1–91. DOI: http://dx.doi.org/10.1142/9789814503266_0001.
- [13] Arbuzov A. et al. On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2021, vol. 119, p. 103858. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103858>. EDN: <https://elibrary.ru/buwvww>.
- [14] Vogelsang W., Whalley M.R. A compilation of data on single and double prompt photon production in hadron-hadron interactions. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 1997, vol. 23, no. 7A, pp. A1–A69. DOI: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/23/7A/001>.
- [15] Echevarria M.G. et al. Matching factorization theorems with an inverse-error weighting. *Physics Letters B*, 2018, vol. 781, pp. 161–168. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.075>.
- [16] Wong C.Y., Wang H. Effects of parton intrinsic transverse momentum on photon production in hard-scattering processes. *Physical Review C*, 1998, vol. 58, issue 1, article number 376. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevC.58.376>.
- [17] Martin A.D., Stirling W.J., Thorne R.S. The role of FL (x, Q²) in parton analyses. *Physics Letters B*, 2006, vol. 635, no. 5–6, pp. 305–312. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.03.013>.
- [18] Karpishkov A.V., Saleev V.A., Nefedov M.A. Estimates for the single-spin asymmetries in the $p \uparrow p \rightarrow J/\psi X$ process at PHENIX RHIC and SPD NICA. *Physical Review D*, 2021, vol. 104, issue 1, p. 016008. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.016008>. EDN: <https://elibrary.ru/tenvgt>.
- [19] Adare A. et al. Ground and excited state charmonium production in $p+p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV. *Physical Review D*, 2012, vol. 85, issue 9, p. 092004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.092004>.
- [20] NA3 Collaboration. Experimental J/ψ hadronic production from 150 to 280 GeV/c. *Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields*. 1983. Vol. 20. P. 101–116. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01573213>.
- [21] Cho P., Leibovich A.K. Color-octet quarkonia production. *Physical Review D*, 1996, vol. 53, issue 1, p. 150. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.150>.
- [22] Ma Y.Q., Vogt R. Quarkonium production in an improved color evaporation model. *Physical Review D*, 2016, vol. 94, issue 11, p. 114029. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.114029>.
- [23] Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F. FeynCalc 9.3: New features and improvements. *Computer Physics Communications*, 2020, vol. 256, p. 107478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107478>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-62-71

УДК 517.9; 519.7; 530.145.83

Дата: поступления статьи: 25.04.2023
после рецензирования: 06.06.2023
принятия статьи: 30.06.2023

Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ ДВУХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ЗАРЯДОВЫХ КУБИТОВ

АННОТАЦИЯ

В настоящей статье исследована динамика перепутывания двух идентичных зарядовых кубитов с джозефсоновскими переходами в случае, когда на один из кубитов действует микроволновое поле в когерентном или тепловом состоянии. Найдено точное решение квантового временного уравнения эволюции рассматриваемой системы для статистического оператора в случае начальных сепарабельных и перепутанных состояний кубитов. Точное решение для полного статистического оператора использовано для вычисления критерия перепутывания кубитов – согласованности. Результаты численного моделирования временной зависимости согласованности в случае когерентного поля показали, что при определенном выборе параметров модели в системе возможна реализация долгоживущих перепутанных состояний. Также показано, что для теплового состояния поля и перепутанного начального состояния кубитов они сохраняют определенную степень перепутывания в процессе эволюции даже в случае весьма интенсивных полей. При этом для любых интенсивностей теплового шума отсутствует эффект мгновенной смерти перепутывания.

Ключевые слова: зарядовые кубиты; микроволновое поле; когерентное состояние; тепловое состояние; перепутывание; согласованность; мгновенная смерть перепутывания.

Цитирование. Башкиров Е.К. Перепутывание двух сверхпроводящих зарядовых кубитов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 62–71. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-62-71>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Башкиров Е.К., 2023

Евгений Константинович Башкиров — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Квантовые перепутанные состояния естественных и искусственных двухуровневых атомов (кубитов) в настоящее время являются незаменимым ресурсом для различных квантовых информационных процессов [1–5]. В настоящее время перепутанные состояния получены экспериментально для кубитов различной физической природы: нейтральных атомов, ионов в магнитных ловушках, примесных спинов, квантовых точек и др. При этом особое внимание уделяется теоретическому и экспериментальному изучению перепутанных состояний сверхпроводящих колец с джозефсоновским переходом, поскольку именно они оказались наиболее удобными квантовыми объектами при использовании в качестве логических элементов квантовых компьютеров [1]. Среди сверхпроводящих кубитов одним из наиболее интересных

объектов для изучения являются зарядовые сверхпроводящие кольца с джозефсоновскими переходами [6–8]. Важным свойством сверхпроводящих кубитов является возможность контролируемого изменения ширины энергетической щели между основным и первым возбужденным энергетическим уровнями кубита. В частности, в случае зарядового сверхпроводящего кубита таким воздействием являются напряжение на емкостном порте и постоянный магнитный момент. Динамика перепутывания многокубитных систем исследовалась в большом количестве работ [6–14]. Строгие количественные критерии перепутывания в настоящее время удалось ввести только для двухкубитных систем. К таким критериям относятся согласованность (критерий Вуутерса) [15] и отрицательность (критерий Переса — Хорощеких) [16; 17]. Поэтому в настоящее время при теоретическом описании динамики систем сверхпроводящих кубитов особое внимание уделяется рассмотрению двухкубитных систем. Так, в работе [18] рассмотрена интересная модель, состоящая из двух связанных посредством большого джозефсоновского перехода сверхпроводящих зарядовых кубитов, при наличии не только постоянного магнитного поля, но и микроволнового электромагнитного поля. При этом микроволновое поле действует на один кубит и большой джозефсоновский переход. При выполнении условия $\omega = \omega_1 + \omega_2$ где ω — частота микроволнового поля, а ω_1 и ω_2 — резонансные частоты переходов в кубитах (в этом случае оба кубита могут одновременно совершать "перевороты", т. е. одновременно переходить из основного состояния в первое возбужденное и обратно), рассматриваемой системе можно сопоставить достаточно простую модель, допускающую аналитическое решение. Представляет интерес рассмотреть особенности перепутывания кубитов в рамках такой модели.

В настоящей статье исследована динамика перепутывания двух идентичных сверхпроводящих зарядовых кубитов, связанных большим джозефсоновским переходом, в предположении, что магнитный поток, пронизывающий контур, включающий первый кубит и большой джозефсоновский переход, состоит из постоянного магнитного потока и магнитного потока, создаваемого микроволновым полем с варьируемой частотой. Рассмотрены когерентное и тепловое начальные состояния микроволнового поля.

1. Модель и ее точное решение

Рассмотрим два идентичных сверхпроводящих зарядовых кубита Q_1 и Q_2 , связанных между собой большим джозефсоновским переходом. Предположим, что магнитный поток, пронизывающий контур, включающий первый кубит и большой джозефсоновский переход, состоит из двух частей: статического постоянного магнитного потока и магнитного потока, создаваемого микроволновым полем с варьируемой частотой. Микроволновое поле будем считать квантованным. Положим также, что частота одномодового микроволнового квантованного поля подобрана так, что оба кубита могут одновременно совершать переход из основного в возбужденное состояние и обратно. В этом случае эффективный гамильтониан взаимодействия квантового магнитного потока с двумя зарядовыми кубитами можно представить в виде [18]

$$H = \hbar g_{12} (a^+ \sigma_1^- \sigma_2^- + \sigma_1^+ \sigma_2^+ a), \quad (1)$$

где a^+ (a) — оператор рождения (уничтожения) фотонов моды микроволнового поля, σ_i^+ и σ_i^- — повышающий и понижающий оператор в i -м кубите ($i = 1, 2$) и g_{12} — эффективная константа взаимодействия кубитов с полем.

Обозначим через $|+\rangle_i$ и $|-\rangle_i$ возбужденное и основное состояние i -го кубита. Выберем в качестве начального состояния подсистемы кубитов перепутанное состояние вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = \cos \theta |-, -\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |+, +\rangle, \quad (2)$$

где θ — параметр, определяющий начальную степень перепутывания кубитов и ϕ — относительная фаза для векторов состояния основного и возбужденного состояния кубитов.

В качестве начального состояния микроволнового поля будем выбирать когерентное и тепловое состояние. Заметим, что для когерентного начального состояния микроволнового поля динамика кубитов с гамильтонианом (1) исследовалась ранее в работе [19]. Однако авторы получили неверное решение квантового уравнения Шредингера. Поэтому представляет интерес найти верное решение уравнения эволюции и на его основе исследовать временное поведение параметра перепутывания кубитов — согласованности.

А. Когерентное состояние микроволнового поля

Для рассматриваемого случая начальную волновую функцию микроволнового поля выберем в виде

$$|\Psi(0)\rangle_F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n |n\rangle, \quad (3)$$

где $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — фоковские состояния поля. Весовые коэффициенты F_n для когерентного состояния есть

$$F_n = e^{-\bar{n}/2} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

Решение временного уравнения Шредингера для волновой функции в момент времени t имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (X_{1,n}(t)|+, +, n\rangle + X_{2,n}(t)|-, -, n+1\rangle + X_0(t)|-, -, 0\rangle), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} X_{1,n}(t) &= -iF_{n+1}\sqrt{1+n}\cos\theta\sin(\Omega_n t) + F_n\sin\theta e^{i\phi}(\Omega_n\cos(\Omega_n t)), \\ X_{2,n}(t) &= -iF_n\sqrt{1+n}\sin\theta e^{i\phi}\sin(\Omega_n t) + F_{n+1}\cos\theta(\Omega_n\cos(\Omega_n t)), \end{aligned}$$

$$X_0(t) = \cos\theta F_0$$

и

$$\Omega_n = \sqrt{n+1}g_{12}.$$

В качестве критерия перепутывания кубитов выберем согласованность. Для ее вычисления нам потребуется редуцированная кубит-кубитная матрица плотности. Имея явный вид временной волновой функции (4), мы можем представить временной статистический оператор полной системы "два кубита+поле" как

$$\rho_{Q_1 Q_2 F}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|. \quad (5)$$

Редуцированный двухкубитный статистический оператор мы можем вычислить, усредняя выражение (5) по переменным поля

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = Sp_F \rho_{Q_1 Q_2 F}(t). \quad (6)$$

В базисе двухкубитных состояний

$$|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle$$

двухкубитному статистическому оператору соответствует матрица плотности вида

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |X_{1,n}(t)|^2, & \rho_{44}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |X_{2,n}(t)|^2 + |X_0(t)|^2, \\ \rho_{14}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_{2,n+1}(t)X_{2,n}^*(t) + |X_{1,0}(t)X_0(t)|^2. \end{aligned}$$

Согласованность $C(t)$, введенную Вуутерсом [7], вычисляем стандартным образом как

$$C(t) = \max[0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4],$$

где λ_i — собственные значения в убывающем порядке эрмитовой матрицы

$$[\sqrt{\rho_{Q_1 Q_2}} \tilde{\rho}_{Q_1 Q_2} \sqrt{\rho_{Q_1 Q_2}}]^{1/2}.$$

Здесь

$$\tilde{\rho}_{Q_1 Q_2} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho_{Q_1 Q_2}^* \sigma_y \otimes \sigma_y,$$

где σ_y — матрица Паули.

Согласованность меняется в пределах от 0 до 1. Для сепарабельных состояний $C = 0$. Для перепутанных состояний $0 < C \leq 1$. Для максимально перепутанных состояний $C = 1$. Для двухкубитной системы, описываемой матрицей плотности вида (7), согласованность может быть представлена простой аналитической формулой

$$C(t) = 2|\rho_{14}|. \quad (8)$$

В. Тепловое состояние микроволнового поля

Для рассматриваемого случая начальный статистический оператор для одномодового поля есть

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|. \quad (9)$$

Весовые коэффициенты в (9) равны

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}},$$

где \bar{n} – среднее число тепловых фотонов.

В рассматриваемом случае удобно вначале найти временную волновую функцию системы для фокковского начального состояния поля $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). А затем обобщить результаты на случай теплового поля.

Для числа фотонов в моде $n \geq 1$ решение квантового уравнения Шредингера для волновой функции в момент времени t можно представить как

$$|\Psi(t)\rangle_n = Y_{1,n-1}|-, -n\rangle + Y_{2,n-1}|+, +n-1\rangle + Y_{3,n}|-, -n+1\rangle + Y_{4,n}|+, +, n\rangle, \quad (10)$$

где

$$Y_{1,n} = \cos \theta \cos(\Omega_n t), \quad Y_{2,n} = -i \cos \theta \cos(\Omega_n t),$$

$$Y_{3,n} = -ie^{i\phi} \sin \theta \sin(\Omega_n t), \quad Y_{4,n} = e^{i\phi} \sin \theta \cos(\Omega_n t).$$

Для числа фотонов в моде $n = 0$ соответствующее решение есть

$$|\Psi(t)\rangle_0 = Z_1|-, -0\rangle + Z_2|-, -1\rangle + Z_{3,n}|+, +, 0\rangle, \quad (11)$$

где

$$Z_1 = \cos \theta, \quad Z_{2,n} = -ie^{i\phi} \sin \theta \sin(g_{12}t), \quad Z_3 = e^{i\phi} \sin \theta \cos(g_{12}t).$$

Имея формулы (10), (11), мы можем вычислить временной статистический оператор полной системы в случае теплового поля

$$\rho_{Q_1 Q_2 F}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_n \langle \Psi(t)| + p_0 |\Psi(t)\rangle_0 \langle \Psi(t)|. \quad (12)$$

Духкубитный редуцированный статистический оператор получаем, усредняя (12) по переменным поля:

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = S p_F \rho_{Q_1 Q_2 F}(t). \quad (13)$$

В двухкубитном базисе матрица плотности, соответствующая статистическому оператору (13), также имеет вид (7), где

$$\rho_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |Y_{1,n-1}(t)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n |Y_{3,n}(t)|^2 + p_0 (|Z_1(t)|^2 + |Z_2(t)|^2),$$

$$\rho_{44} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |Y_{2,n-1}(t)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n |Y_{4,n}(t)|^2 + p_0 |Z_3(t)|^2,$$

$$\rho_{14} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n Y_{1,n-1}(t) Y_{4,n}^*(t) + p_0 Z_1(t) Z_3^*(t).$$

Согласованность для рассматриваемого случая также задается аналитической формулой (8).

2. Численное моделирование согласованности и обсуждение результатов

На рис. 1–2 представлена временная эволюция параметра перепутывания двух джозефсоновских кубитов в случае, когда на область, содержащую один из кубитов и большой джозефсоновский переход, действует одномодовое микроволновое поле в когерентном состоянии. Рисунок 1 представляет зависимость согласованности для начального сепарабельного состояния кубитов $|-, -\rangle$ ($|+, +\rangle$) от приведенного времени $g_{12}t$ для коротких и длинных временных интервалов. Вычисления показывают, что в рассматриваемой модели имеет место сильная корреляция состояний двух кубитов в процессе их эволюции. Из рис. 1, а видно, что поведение согласованности, отражающее поведение перепутывания кубитов,

для сепарабельных состояний на коротких временах для любых средних чисел фотонов носит осцилляторный характер, что соответствует процессам поглощения и испускания фотонов. Кроме того, на коротких временах согласованность уменьшается с течением времени и обращается в нуль для некоторых времен. В эти моменты времени состояния двух зарядовых кубита оказываются распутанными. При увеличении среднего числа фотонов в моде распутывание состояний кубитов происходит на меньших временах. На рис. 1, *b* представлена длинновременная эволюция согласованности для тех же сепарабельных состояний кубитов. Среднее число фотонов выбрано равным $\bar{n} = 30$. Из рисунка видно, что осцилляции согласованности быстро распадаются, после чего кубиты оказываются в смешанном состоянии с максимальной степенью перепутывания. Через некоторое время согласованность вновь возвращается в осцилляторный режим, что указывает на то, что информация о начальном состоянии возвращается к кубитам от микроволнового поля. На рис. 2 представлена зависимость согласованности для начального перепутанного состояния кубитов $1/\sqrt{2}(|-, -\rangle + e^{i\phi}|+, +\rangle)$ от приведенного времени $g_{12}t$ для различных значений параметров модели. Рисунок 2, *a* показывает, как временная эволюция параметра перепутывания зависит от относительной фазы ϕ . Для выбрванного начального состояния кубитов начальное значение согласованности для всех значений параметра ϕ равно единице, то есть соответствует максимальной степени перепутывания. Поведение согласованности имеет осцилляторный характер. При этом с течением времени степень перепутывания кубитов уменьшается. Из рисунка также видно, что с ростом относительной фазы от 0 до $\pi/2$ наблюдается существенное увеличение скорости уменьшения степени перепутывания. Для значения относительной фазы $\phi = \pi/2$ состояние двух зарядовых кубитов распутывается для некоторых определенных моментов времени. При уменьшении относительной фазы процесс распутывания происходит для больших времен. Для значения относительной фазы $\phi = 0$ значение согласованности на достаточно длительных временах остается практически равным единице, т. е. для такого значения начальной фазы мы имеем дело с долгоживущим максимально перепутанным состоянием кубитов. Такой результат показывает возможность использования определенных начальных состояний кубитов для контроля и управления степенью перепутывания кубитов. На рис. 2, *b* показана зависимость согласованности для начального перепутанного состояния кубитов $1/\sqrt{2}(|-, -\rangle + |+, +\rangle)$ от приведенного времени $g_{12}t$ для различных значений среднего числа фотонов микроволнового поля. Хорошо видно, что увеличение среднего числа фотонов в поле приводит к уменьшению скорости затухания параметра перепутывания в процессе эволюции. Таким образом, контроль и управление степенью перепутывания кубитов могут быть осуществлены не только с помощью адекватного выбора относительной фазы, но и интенсивности микроволнового поля.

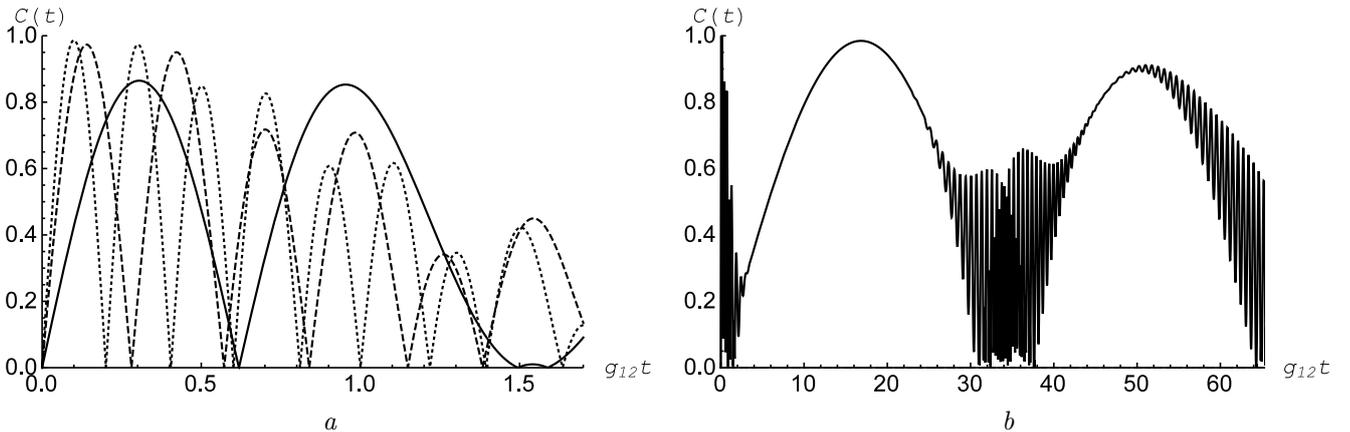


Рис. 1. Зависимость согласованности $C(t)$ от приведенного времени $g_{12}t$ для сепарабельного начального состояния кубитов $|+, +\rangle$ ($|-, -\rangle$) и когерентного состояния микроволнового поля. Случай (a) соответствует коротким приведенным временам. Среднее число фотонов $\bar{n} = 5$ (сплошная линия), $\bar{n} = 30$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 60$ (точечная линия). Случай (b) соответствует длинным приведенным временам. Среднее число фотонов $\bar{n} = 30$

Fig. 1. Concurrence $C(t)$ vs scaled time $g_{12}t$ for initial separable qubits state $|+, +\rangle$ ($|-, -\rangle$) and coherent microwave field. Case (a) corresponds to short scaled times. Mean photon number $\bar{n} = 5$ (solid), $\bar{n} = 30$ (dashed) and $\bar{n} = 60$ (dotted). Case (b) corresponds to long scaled times. Mean thermal photon number $\bar{n} = 30$

На рис. 3 представлена временная эволюция параметра перепутывания двух джозефсоновских кубитов в случае, когда одномодовое микроволновое поле находится в тепловом состоянии. Отметим, что в рассматриваемом случае для кубитов, приготовленных в сепарабельных состояниях $|-, -\rangle$ и $|+, +\rangle$, перепутывание кубитов в процессе эволюции не возникает ни для каких значений среднего числа тепловых

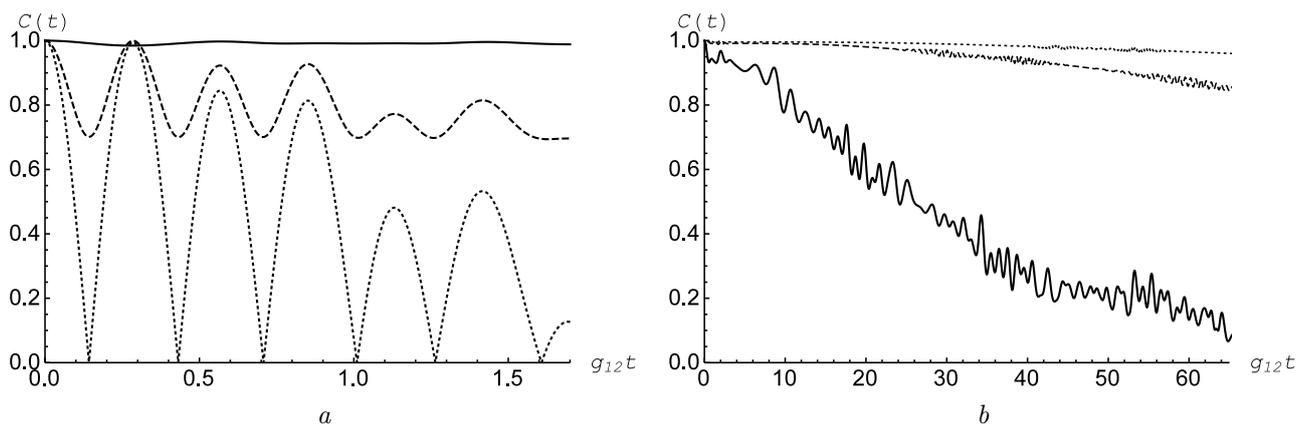


Рис. 2. Зависимость согласованности $C(t)$ от приведенного времени $g_{12}t$ для перепутанного начального состояния кубитов $1/\sqrt{2}(|+, +\rangle + |-, -\rangle)$ и когерентного состояния микроволнового поля. Случай (a) соответствует коротким приведенным временам. Среднее число фотонов $\bar{n} = 30$. Параметр $\phi = 0$ (сплошная линия), $\phi = \pi/4$ (штриховая линия) и $\phi = \pi/2$ (точечная линия). Случай (b) соответствует длинным приведенным временам. Среднее число фотонов $\bar{n} = 10$ (сплошная линия), $\bar{n} = 30$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 60$ (точечная линия)

Fig. 2. Concurrence $C(t)$ vs scaled time $g_{12}t$ for initial entangled qubits state $1/\sqrt{2}(|+, +\rangle + |-, -\rangle)$ and coherent microwave field. Case (a) corresponds to short scaled times. Mean photon number $\bar{n} = 30$. Parameter $\phi = 0$ (solid), $\phi = \pi/4$ (dashed) and $\phi = \pi/2$ (dotted). Case (b) corresponds to long scaled times. Mean thermal photon number $\bar{n} = 10$ (solid), $\bar{n} = 30$ (dashed) and $\bar{n} = 60$ (dotted)

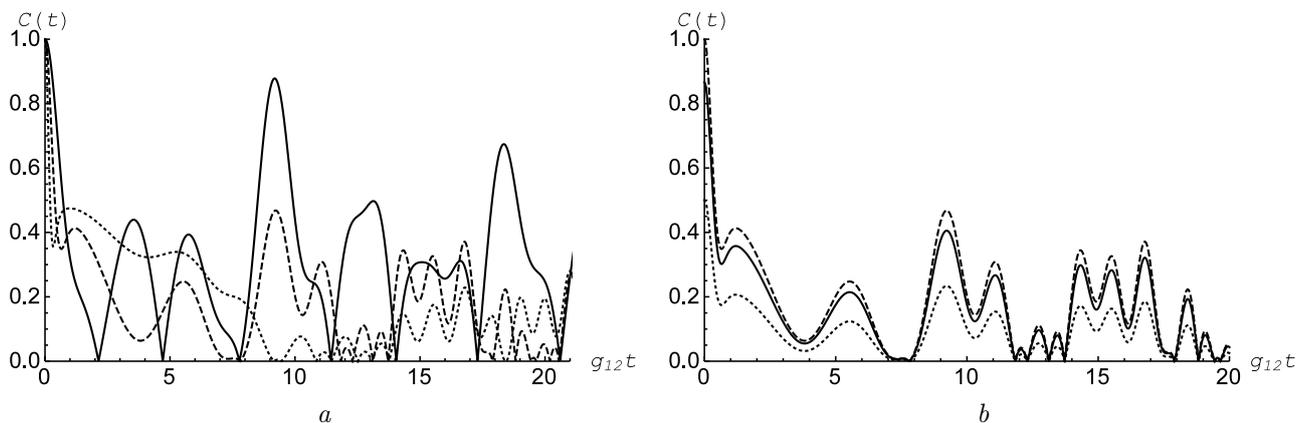


Рис. 3. Зависимость согласованности $C(t)$ от приведенного времени $g_{12}t$ для перепутанного начального состояния кубитов $1/\sqrt{2}(|+, +\rangle + |-, -\rangle)$ и теплового состояния микроволнового поля. Для случая (a) среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 5$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 20$ (точечная линия). Для случая (b) среднее число фотонов $\bar{n} = 5$. Параметр $\theta = \pi/6$ (сплошная линия), $\theta = \pi/4$ (штриховая линия) и $\theta = 5/12\pi$ (точечная линия)

Fig. 3. Concurrence $C(t)$ vs scaled time $g_{12}t$ for initial entangled qubits state $1/\sqrt{2}(|+, +\rangle + |-, -\rangle)$ and thermal microwave field. For case (a) the mean thermal photon number $\bar{n} = 1$ (solid), $\bar{n} = 5$ (dashed) and $\bar{n} = 20$ (dotted). Case (b) the mean thermal photon number $\bar{n} = 5$. Parameter $\theta = \pi/6$ (solid), $\theta = \pi/4$ (dashed) and $\theta = 5/12\pi$ (dotted)

фотонов. Для перепутанных состояний кубитов временная эволюция согласованности не чувствительна к изменениям относительной фазы ϕ , а зависит от среднего числа тепловых фотонов в моде и параметра θ . Рисунок 3, a демонстрирует временную зависимость согласованности. Из него хорошо видно, что с увеличением интенсивности теплового поля для изначально максимально перепутанных кубитов максимальная степень их перепутывания в последующие моменты времени уменьшается с ростом интенсивности теплового поля. Однако следует отметить, что в отличие от модели двух кубитов, которые взаимодействуют с общим тепловым полем [20], для рассматриваемой модели кубиты сохраняют определенную степень перепутывания даже для достаточно больших интенсивностей теплового шума. Еще одной интересной особенностью поведения параметра перепутывания в рассматриваемой модели

является отсутствие паразитного эффекта мгновенной смерти перепутывания [21] для любой интенсивности теплового поля. На рис. 3, *b* показана временная зависимость согласованности для фиксированного среднего числа фотонов $\bar{n} = 5$ и различных значений параметра θ , определяющего начальную степень перепутывания кубитов. Из рисунка видно, что для значений параметра θ вблизи значения $\theta = \pi/4$, соответствующего максимальному начальному перепутыванию, существенно отличаются только начальные значения согласованности. В процессе эволюции различия в значениях параметра перепутывания сглаживаются. Такие различия в поведении согласованности имеют место только при приближении параметра θ к нулю (нулевому значению соответствует сепарабельное состояние $|-, -\rangle$) или к значению $\theta = \pi/2$ (этому значению θ соответствует сепарабельное состояние $|+, +\rangle$). Для сепарабельных состояний, как уже отмечалось выше, перепутывания состояний кубитов в процессе эволюции не возникает.

Выводы

Таким образом, в данной статье нами была найдена точная динамика системы, состоящей из двух идентичных зарядовых кубитов, соединенных большим джозефсоновским переходом. Рассмотрен случай, когда на один из кубитов и большой джозефсоновский переход действует одномодовое микроволновое поле в когерентном или тепловом состоянии. На основе точного решения уравнения эволюции найдена временная матрица плотности рассматриваемой системы. Полученное явное выражение для полной матрицы плотности использовано для вычисления критерия перепутывания кубитов для начальных сепарабельных и перепутанных состояний кубитов. В качестве количественного критерия перепутывания кубитов выбрана согласованность. Результаты численного моделирования временного поведения согласованности показали, что на коротких временах состояния двух зарядовых кубитов оказываются распутанными для некоторых выделенных моментов времени. На длинных временах кубиты вновь оказываются в состоянии с максимальной степенью перепутывания. Для начальных сепарабельных состояний кубитов в случае теплового поля перепутывания кубитов не возникает в процессе эволюции. Для начальных перепутанных состояний кубитов в случае когерентного поля показано, что при уменьшении относительной фазы процесс распутывания состояний кубитов происходит существенно быстрее. Для значения относительной фазы $\phi = 0$ реализуются долгоживущие перепутанные состояния, для которых начальная степень перепутывания остается постоянной. Наиболее интересными результатами для перепутанного начального состояния кубитов и теплового поля является то, что кубиты сохраняют определенную степень перепутывания даже для больших интенсивностей теплового шума. Еще одной интересной особенностью поведения параметра перепутывания в рассматриваемой модели является отсутствие эффекта мгновенной смерти перепутывания [21] для любой интенсивности теплового поля.

В результате показано, что, выбирая определенным образом тип состояния микроволнового поля, среднее число фотонов и начальные состояния кубитов, мы можем контролировать и управлять эволюцией кубитов, а также степенью их перепутывания. Полученные в работе результаты могут быть использованы в области квантовой обработки информации.

Литература

- [1] X. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // *Physics Reports*. 2017. Vol. 718–719. Pp. 1–102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [2] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review // *Reports on Progress in Physics*. 2017. Vol. 80. Number 10. Article number 106001. DOI: <http://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [3] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play // *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*. 2020. Vol. 11. P. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [4] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review. // *Science China Information Sciences*. 2020. Vol. 63. Article number 180501. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>.
- [5] Chen J. Review on Quantum Communication and Quantum Computation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1865. Article number 022008. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1865/2/022008>.
- [6] Pashkin Yu.A., Astafiev O., Yamamoto T., Nakamura Y., Tsai J.S. Josephson charge qubits: a brief review // *Quantum Information Processing*. 2009. Vol. 8. Pp. 55–80. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11128-009-0101-5>.
- [7] Shi J. Entanglement Research for the Coupled Superconducting Phase Qubit and a Two-Level System // *Advances in Condensed Matter Physics*. 2020. Vol. 2020. Article number 3838106. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/3838106>.

- [8] Berrada K., Abdel-Khalek S., Algarni M. Coherence, purity and correlation for superconducting charge qubits // Results in Physics. 2023. Vol. 48. Article number 106414. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106414>.
- [9] Mohamed A.-B.A., Rahman A.U., Eleuch H. Measurement Uncertainty, Purity, and Entanglement Dynamics of Maximally Entangled Two Qubits Interacting Spatially with Isolated Cavities: Intrinsic Decoherence Effect // Entropy. 2022. Vol. 24, Issue 4. Article number 545. DOI: <https://doi.org/10.3390/e24040545>.
- [10] Abdel-Khalek S., Berrada K., Khalil E.M., Eleuch H., Obada A.-S.F., Reda E. Tavis–Cummings Model with Moving Atoms // Entropy. 2021. Vol. 23, Issue 4. Article number 452. DOI: <https://doi.org/10.3390/e23040452>.
- [11] Movahedi R., Afshar D., Jafarpour M. Improvement of the entanglement generation in atomic states using a single-mode field in the Tavis–Cummings model // The European Physical Journal D. 2023. Vol. 77. Article number 59. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/s10053-023-00647-z>.
- [12] Abdel-Khalek S., Berrada K., Khalil E.M., Obada A.-S. F., Reda E., Eleuch H. Quantumness Measures for a System of Two Qubits Interacting with a Field in the Presence of the Time-Dependent Interaction and Kerr Medium // Entropy. 2021. Vol. 23, Issue 5. Article number 635. DOI: <https://doi.org/10.3390/e23050635>.
- [13] Algarni M., Berrada K., Abdel-Khalek S., Eleuch H. Parity Deformed Tavis-Cummings Model: Entanglement, Parameter Estimation and Statistical Properties // Mathematics. 2022. Vol. 10, Issue 17. Article number 3051. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10173051>.
- [14] Ali S.I. Influence of deformed cavity field and atomic dipole interaction on the quantum correlations of two qubit system // Optical and Quantum Electronics. 2023. Vol. 55. Article number 47. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11082-022-04288-1>.
- [15] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80, Issue 10. Pp. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [16] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, Issue 8. Pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [17] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223. Pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [18] He X.-L., Liu Y.-X., You J.Q., Franco Nori F. Variable-frequency-controlled coupling in charge qubit circuits: Effects of microwave field on qubit-state readout // Physical Review A. Atomic, molecular and optical physics. 2007. Vol. 76, Issue 2. Article number 22317. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.022317>.
- [19] Liao Q.-H., Fang G.-Yu, Wang J.-C., Ahmad M.A., Liu S.-T. Control of the Entanglement between Two Josephson Charge Qubits // Chinese Physics Letters. 2011. Vol. 28, Number 6. Article number 060307. DOI: <http://doi.org/10.1088/0256-307X/28/6/060307>.
- [20] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. // Physical Review A. Atomic, molecular and optical physics, 2002, Vol. 65, Issue 4. Article number 040101. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [21] Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement // Science. 2009. Vol. 323, Issue 5914. P. 598–601. DOI: <http://doi.org/10.1126/science.1167343>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-62-71

Submitted: 25.04.2023

Revised: 06.06.2023

Accepted: 30.06.2023

E.K. Bashkirov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

ENTANGLEMENT BETWEEN TWO SUPERCONDUCTING CHARGE QUBITS

ABSTRACT

In this paper, we investigated the dynamics of entanglement of two identical charge qubits with Josephson junctions in the case when one of the qubits is exposed to a microwave field in a coherent or thermal state. We have found the exact solution of the quantum time equation of evolution of the system under consideration for the statistical operator in the case of initial separable and entangled states of qubits. The exact solution for the complete statistical operator is used to calculate the qubit entanglement criterion - concurrence. The

results of numerical simulation of the time dependence of the concurrence in the case of the coherent field showed that, with a certain choice of model parameters, the system can realize long-lived entangled states. It is also shown that for the thermal state of the field and the entangled initial state of qubits, the qubits retain a certain degree of entanglement during evolution even in the case of very intensive fields. In this case, for any intensities of thermal noise, there is no effect of the sudden death of entanglement.

Key words: charge qubits; microwave field; coherent state; thermal state; entanglement; concurrence; sudden death of entanglement.

Citation. Bashkirov E.K. Entanglement between two superconducting charge qubits. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 62–71. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-62-71>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Bashkirov E.K., 2023

Eugene K. Bashkirov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] X. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [2] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, number 10, Article number 106001. DOI: <http://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [3] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play. *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*, 2020, vol. 11, pp. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [4] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review. *Science China Information Sciences*, 2020, vol. 63, Article number 180501. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>.
- [5] Chen J. Review on Quantum Communication and Quantum Computation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1865, Article number 022008. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1865/2/022008>.
- [6] Pashkin Yu.A., Astafiev O., Yamamoto T., Nakamura Y., Tsai J.S. Josephson charge qubits: a brief review. *Quantum Information Processing*, 2009, vol. 8, pp. 55–80. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11128-009-0101-5>.
- [7] Shi J. Entanglement Research for the Coupled Superconducting Phase Qubit and a Two-Level System. *Advances in Condensed Matter Physics*, 2020, vol. 2020, Article number 3838106. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/3838106>.
- [8] Berrada K., Abdel-Khalek S., Algarni M. Coherence, purity and correlation for superconducting charge qubits. *Results in Physics*, 2023, vol. 48, Article number 106414. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106414>.
- [9] Mohamed A.-B.A., Rahman A.U., Eleuch H. Measurement Uncertainty, Purity, and Entanglement Dynamics of Maximally Entangled Two Qubits Interacting Spatially with Isolated Cavities: Intrinsic Decoherence Effect. *Entropy*, 2022, vol. 24, issue 4, Article number 545. DOI: <https://doi.org/10.3390/e24040545>.
- [10] Abdel-Khalek S., Berrada K., Khalil E.M., Eleuch H., Abdel-Shafy F., Obada A.-S.F., Reda E. Tavis–Cummings Model with Moving Atoms. *Entropy*, 2021, vol. 23, issue 4, Article number 452. DOI: <https://doi.org/10.3390/e23040452>.
- [11] Movahedi R., Afshar D., Jafarpour M. Improvement of the entanglement generation in atomic states using a single-mode field in the Tavis–Cummings model. *The European Physical Journal D*, 2023, vol. 77, Article number 59. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/s10053-023-00647-z>.
- [12] Abdel-Khalek S., Berrada K., Khalil E.M., Obada A.-S. F., Reda E., Eleuch H. Quantumness Measures for a System of Two Qubits Interacting with a Field in the Presence of the Time-Dependent Interaction and Kerr Medium. *Entropy*, 2021, vol. 23, issue 5, Article number 635. DOI: <https://doi.org/10.3390/e23050635>.
- [13] Algarni M., Berrada K., Abdel-Khalek S., Eleuch H. Parity Deformed Tavis-Cummings Model: Entanglement, Parameter Estimation and Statistical Properties. *Mathematics*, 2022, vol. 10, issue 17, Article number 3051. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10173051>.
- [14] Ali S.I. Influence of deformed cavity field and atomic dipole interaction on the quantum correlations of two-qubit system. *Optical and Quantum Electronics*, 2023, vol. 55, Article number 47. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11082-022-04288-1>.

- [15] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, issue 10, pp. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [16] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, issue 8, pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.or/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [17] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [18] He X.-L., Liu Y.-X., You J.Q., Franco Nori F. Variable-frequency-controlled coupling in charge qubit circuits: Effects of microwave field on qubit-state readout. *Physical Review A. Atomic, molecular and optical physics*, 2007, vol. 76, issue 2, Article number 22317. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.022317>.
- [19] Liao Q.-H., Fang G.-Yu, Wang J.-C., Ahmad M.A., Liu S.-T. Control of the Entanglement between Two Josephson Charge Qubits. *Chinese Physics Letters*, 2011, vol. 28, number 5, Article number 060307. DOI: <http://doi.org/10.1088/0256-307X/28/6/060307>.
- [20] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Physical Review A. Atomic, molecular and optical physics*, 2002, vol. 65, issue 4, Article number 040101. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [21] Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement. *Science*, 2009, vol. 323, issue 5914, pp. 598–601. DOI: <http://doi.org/10.1126/science.1167343>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-72-80

УДК 517.9; 519.7; 530.145.83

Дата: поступления статьи: 27.04.2023
после рецензирования: 08.06.2023
принятия статьи: 30.06.2023

Р.К. Захаров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: rk.zakharov@yandex.ru ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8450-2248>

Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХКУБИТНОЙ МОДЕЛИ ТАВИСА — КАММИНГСА

АННОТАЦИЯ

В данной статье исследована динамика перепутывания двух идентичных сверхпроводящих кубитов, резонансно взаимодействующих с выделенной модой поля компланарного микроволнового резонатора без потерь посредством однофотонных переходов при наличии нелинейностей третьего и пятого порядков. На основе решения уравнения эволюции системы для фоковских начальных состояний поля резонатора рассчитан критерий перепутанности кубитов – отрицательности. Результаты вычисления отрицательности показывают, что для начальных сепарабельных состояний нелинейность резонатора может приводить к существенному увеличению максимальной степени перепутывания кубитов. Показано, что для начальных перепутанных состояний кубитов и интенсивных полей резонатора учет нелинейностей приводит к стабилизации степени перепутывания кубитов в резонаторе, способствует исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов.

Ключевые слова: кубиты; резонансное взаимодействие; нелинейный резонатор; однофотонные переходы; фоковское состояние поля резонатора; перепутывание; отрицательность; мгновенная смерть перепутывания.

Цитирование. Захаров Р.К., Башкиров Е.К. Перепутывание в нелинейной двухкубитной модели Тависа — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 72–80. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-72-80>

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Захаров Р.К., Башкиров Е.К., 2023

Родион Константинович Захаров — аспирант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Евгений Константинович Башкиров — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Одной из наиболее изученных модельных систем в квантовой оптике является двухуровневый атом, взаимодействующий с выделенной модой электромагнитного поля резонатора без потерь. Эта предельно простая квантовая система имеет тем не менее нетривиальную квантовую динамику, описываемую гамильтонианом Джейнса — Каммингса [1]. Экспериментальная реализация такой модели на микроволновых частотах позволила наблюдать все основные эффекты квантовой оптики, такие как коллапс и восстановление осцилляций Раби, сжатие и антипуассоновскую статистику поля, резонаторы и др. [2]. Многоатомное расширение модели также часто называют моделью Тависа — Каммингса. Новый импульс к изучению модели Джейнса — Каммингса и ее обобщений, в частности многоатомной модели Джейнса — Каммингса, связан с ее использованием в квантовой информатике, а именно для описания динамики сверхпроводящих колец с джозефсоновскими переходами, примесных спинов и других искусственных атомов в резонаторах [3–9]. Такие искусственные атомы могут использоваться в качестве логических элементов квантовых компьютеров и квантовых сетей. Поля резонаторов при этом используются для генерации, контроля и управления перепутанными состояниями сверхпроводящих кубитов и других искусственных атомов. В этой связи представляет большой интерес исследовать случай, когда резонатор, с которым связан кубит, обладает нелинейностью, вызывая неэквидистантность энергетических уровней поля резонатора. Кубиты в нелинейном резонаторе описываются нелинейным гамильтонианом многоатомной модели Джейнса — Каммингса. Включение нелинейности значительно обогащает физику системы, позволяя, в частности, значительно более эффективно использовать поле резонатора для управления степенью перепутывания кубитов. Динамика кубитов в нелинейных резонаторах активно исследовалась в последнее время в большом количестве теоретических и экспериментальных работ [10–17]. В частности, в работе П. Бертега с соавторами [18] теоретически и экспериментально изучена динамика сверхпроводящего кубита в резонаторе с нелинейностями третьего и пятого порядка. Представляет интерес обобщить указанную модель на случай двух кубитов в неидеальном резонаторе. В настоящей статье нами исследована динамика перепутывания двух сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с полем идеального нелинейного компланарного резонатора в рамках нелинейной двухкубитной модели Тависа — Каммингса.

1. Модель и точное решение квантового уравнения Лиувилля

Рассмотрим систему, состоящую из двух джозефсоновских сверхпроводящих кубитов, вставленных в середине линии передачи компланарного резонатора. Джозефсоновские кубиты могут рассматриваться с электротехнической точки зрения как сосредоточенная бездиссипативная нелинейная индуктивность. В результате модовая структура резонатора глубоко модифицируется. В пределе, когда частоты управляющих сигналов генерируют гармоники, резонансные с высшими модами резонатора, резонатор можно аппроксимировать только одной нелинейной модой. В этом случае, следуя работе [18], запишем гамильтониан нашей системы в резонансном приближении в виде

$$H = \hbar\gamma \sum_{i=1}^2 (a^+ \sigma_i^- + \sigma_i^+ a) - K a^{+2} a^2 - \tilde{K} a^{+3} a^3, \quad (1)$$

где a^+ (a^-) — оператор рождения (уничтожения) фотонов резонаторной моды поля, σ_i^+ и σ_i^- — повышающий и понижающий оператор в i -м кубите и γ — константа взаимодействия кубитов с полем резонатора и K и \tilde{K} — константы нелинейности соответственно третьего (постоянная Керра) и пятого порядка, имеющие вид

$$K = \frac{\pi p^3 \omega_r Z e^2}{h},$$

$$\tilde{K} = \frac{2K^2(9 - 10p)}{3p\omega_r}.$$

Здесь $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$, где L_t — полная индуктивность системы, равная $L_t = L_q + L_c$, где L_q и L_c — индуктивности кубитов и резонатора соответственно и $p = L_q/L_t$. Z — импеданс резонатора.

В частности, в работе П. Бертега с соавторами [18] рассматриваемая модель была реализована со следующими параметрами в Гц

$$\frac{K}{2\pi} \approx 7 \cdot 10^5, \quad \frac{\omega_r}{2\pi} \approx 6 \cdot 10^9, \quad \frac{\gamma}{2\pi} \approx 4 \cdot 10^7.$$

Таким образом, отношение константы нелинейности третьего порядка к константе кубит-полевого взаимодействия составляло $K/g \approx 2 \cdot 10^{-2}$. Константа \tilde{K} в работе [18] не измерялась. Проведем оценку

возможных значений константы нелинейности пятого порядка. Индуктивности сверхпроводящих кубитов лежат в интервале от 1 до 10 нГн, а индуктивности компланарных резонаторов в интервале от 100 до 1000 нГн. Тогда значения безразмерного параметра p лежат в интервале от 0.001 до 0.1. В результате для минимального значения параметра p отношение констант пятого и третьего порядков \tilde{K}/K может достигать значений порядка 10^{-2} .

Обозначим через $|+\rangle_i$ и $|-\rangle_i$ возбужденное и основное состояние i -го кубита. Выберем в качестве начальных состояний подсистемы кубитов сепарабельные состояния вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, -\rangle, \quad (2)$$

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, +\rangle, \quad (3)$$

а также перепутанные состояния вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = \cos \theta |+, -\rangle + \sin \theta |-, -\rangle, \quad (4)$$

где параметр θ определяет начальную степень перепутывания кубитов.

В качестве начального состояния поля резонатора выберем фоковские состояния вида

$$|\Psi(0)\rangle_F = |n\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где n — число фотонов в резонаторной моде.

Для исследования динамики перепутывания кубитов найдем вначале временную волновую функцию системы для фоковского начального состояния поля. Для это необходимо решить квантовое уравнение Шрёдингера

$$i \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = [H, |\Psi(t)\rangle] \quad (5)$$

с начальным условием

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} |\Psi(0)\rangle_F.$$

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$|\Psi(t)\rangle_n = X_{1,n}(t)|-, -, n+2\rangle + X_{2,n}(t)|+, -, n+1\rangle + X_{3,n}(t)|-, +, n+1\rangle + X_{4,n}(t)|+, +, n\rangle. \quad (6)$$

Для коэффициентов X_i из (6) получаем уравнения

$$\begin{aligned} i\dot{X}_{1,n}(t) &= -\mu n(n+2)(n+1)X_{1,n}(t) - \chi(n+2)(n+1)X_{1,n}(t) + \sqrt{n+2}X_{2,n}(t) + \sqrt{n+2}X_{3,n}(t), \\ i\dot{X}_{2,n}(t) &= \sqrt{n+2}X_{1,n}(t) - \mu n(n+1)(n-1)X_{2,n}(t) - \chi(n+1)nX_{2,n}(t) + \sqrt{n+1}X_{4,n}(t), \\ i\dot{X}_{3,n}(t) &= \sqrt{n+2}X_{1,n}(t) - \mu n(n+1)(n-1)X_{3,n}(t) - \chi(n+1)nX_{3,n}(t) + \sqrt{n+1}X_{4,n}(t), \\ i\dot{X}_{4,n}(t) &= \sqrt{n+1}X_{2,n}(t) + \sqrt{n+1}X_{3,n}(t) - \mu n(n-2)(n-1)X_{4,n}(t) - \chi n(n-1)X_{4,n}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы уравнений (7) имеет чрезвычайно громоздкий вид. Поэтому мы ограничимся в дальнейшем численным решением.

Имея явный вид временной волновой функции системы (6), мы можем вычислить параметр перепутывания кубитов — отрицательность. Для этого необходимо найти редуцированную двухкубитную матрицу плотности. Найдем вначале временную матрицу плотности полной системы "два кубита+мода поля" стандартным для чистых состояний образом

$$\rho_n(t) = |\Psi(t)\rangle_n \langle \Psi(t)|. \quad (8)$$

Редуцированную матрицу плотности двух кубитов мы можем вычислить, усредняя (8) по переменным поля

$$\rho_{n,qubit-qubit}(t) = Sp_F \rho_n(t).$$

Перейдем к вычислению критерия перепутывания кубитов.

2. Вычисление отрицательности и обсуждение результатов

Определим отрицательность для двух кубитов стандартным образом [19; 20]

$$N(t) = -2 \sum_k w_k^-, \quad (9)$$

где w_k^- — отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности. Для перепутанных состояний $N < 0$. Для

перепутанных состояний $0 < N \leq 1$. Максимальной степени перепутывания соответствует значение $N = 1$.

Для сепарабельных начальных состояний кубитов (2) и (3) и перепутанного состояния (4) двухкубитная редуцированная матрица плотности имеет вид

$$\rho_{n,qubit-qubit}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{n,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{n,22} & \rho_{n,23} & 0 \\ 0 & \rho_{n,23}^* & \rho_{n,33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{n,44} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Матричные элементы (10) для начальных состояний (2)–(4) имеют вид

$$\rho_{n,11}(t) = |X_{1,n}(t)|^2, \quad \rho_{n,22}(t) = |X_{2,n}(t)|^2, \quad \rho_{n,33}(t) = |X_{3,n}(t)|^2, \\ \rho_{n,44}(t) = |X_{4,n}(t)|^2, \quad \rho_{n,23}(t) = X_{2,n}(t)X_{3,n}^*(t).$$

Частично транспонированная по переменным одного кубита редуцированная матрица плотности кубитов для (10) может быть представлена в виде

$$\rho_{n,qubit-qubit}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{n,11} & 0 & 0 & \rho_{n,23}^* \\ 0 & \rho_{n,22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{n,33} & 0 \\ \rho_{n,23} & 0 & 0 & \rho_{n,44} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица (11) имеет всего одно собственное значение, которое может быть отрицательным. В результате отрицательность (9) может быть записана как

$$N(t) = \sqrt{(\rho_{n,44} - \rho_{n,11})^2 + 4 \cdot |\rho_{n,23}|^2} - \rho_{n,11} - \rho_{n,44}.$$

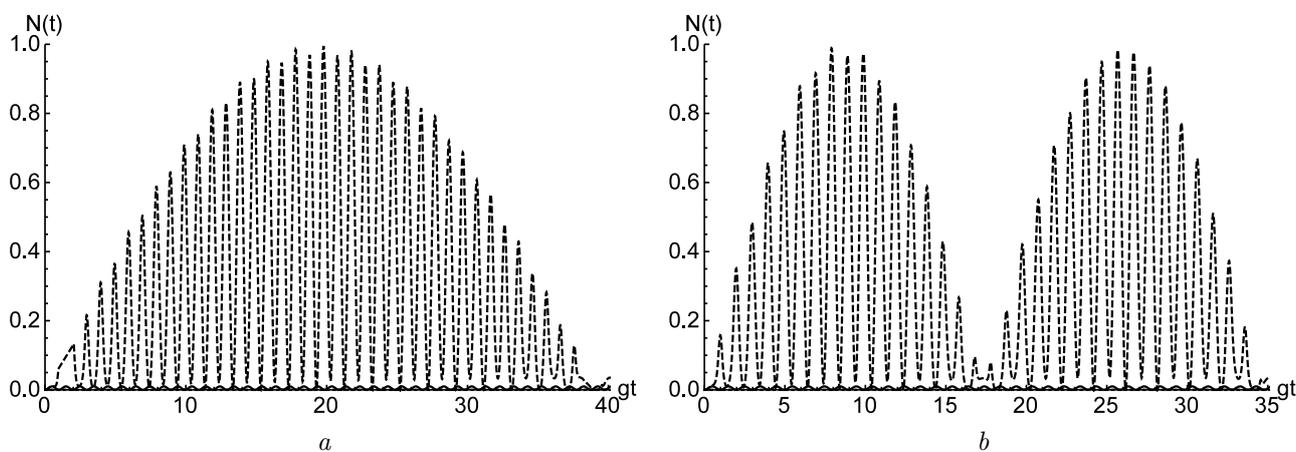


Рис. 1. Зависимость отрицательностей $N(t)$ от приведенного времени gt для начального состояния кубитов $|+, -\rangle$. Число фотонов в моде $n = 2$. Значения нелинейностей $\chi = \mu = 0$ (сплошная линия) и $\chi = 0.1, \mu = 0$ (штриховая линия) (a) и $\chi = \mu = 0$ (сплошная линия) и $\chi = 0, \mu = 0.1$ (штриховая линия) (b)

Fig. 1. The negative dependence $N(t)$ on the time gt for the initial state of qubits $|+, -\rangle$. Number of photons in mode $n = 2$. Mode of nonlinearities $\chi = \mu = 0$ (solid line) and $\chi = 0.1, \mu = 0$ (dashed line) (a) and $\chi = \mu = 0$ (solid line) and $\chi = 0, \mu = 0.1$ (dashed line) (b)

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости отрицательностей $N(t)$ для начального состояния кубитов $|+, -\rangle$ и различных значений параметров нелинейности χ и μ представлены на рис. 1, a, b и рис. 2, a. Число фотонов в резонаторной моде для этих графиков и всех последующих выбрано равным $n = 2$. Из графиков хорошо видно, что при включении нелинейности степень перепутывания кубитов резко возрастает, достигая для некоторых времен максимального значения $N = 1$. Интересно отметить, что такое поведение параметра перепутывания кубитов характерно для любых значений параметров нелинейности. При этом при увеличении параметров нелинейности времена, для которых отрицательность достигает максимального значения, уменьшаются в случае фоковских состояний поля резонатора. Например, для значений параметров нелинейностей, достигнутых в эксперименте П. Бергета с соавторами [18] ($\chi = 0.02, \mu = 0$), время, для которого наблюдается первый максимум

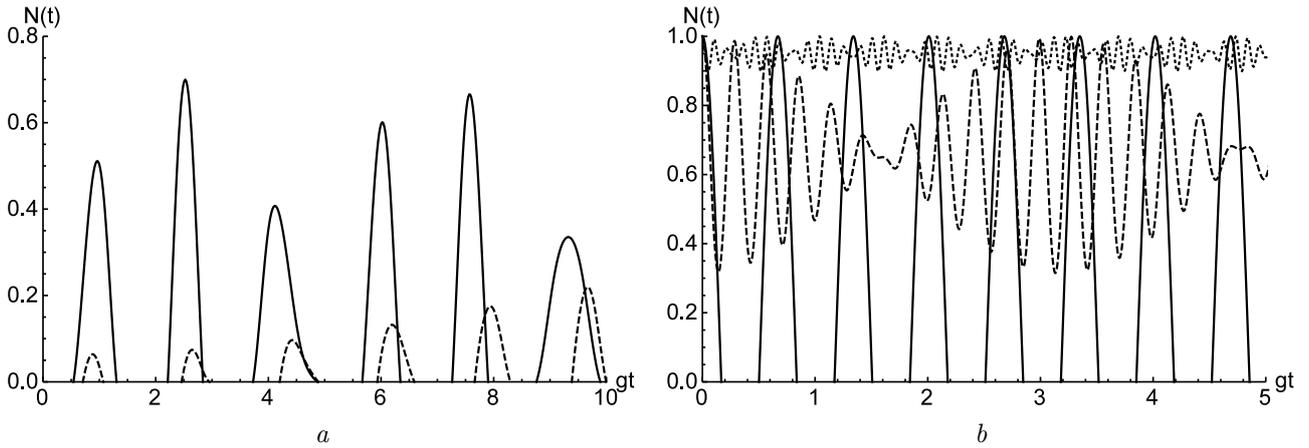


Рис. 2. Зависимость отрицательностей $N(t)$ от приведенного времени gt для начального состояния кубитов $|+, +\rangle$ (a) и перепутанного состояния $1/\sqrt{2}(|+, -\rangle + |- , +\rangle)$ (b). Число фотонов в моде $n = 2$ (a) и $n = 10$ (b). Значения нелинейностей $\chi = 1, \mu = 0$ (сплошная линия) и $\chi = 0, \mu = 0.5$ (штриховая линия) (a) и $\chi = \mu = 0$ (сплошная линия), $\chi = 1, \mu = 0$ (штриховая линия) и $\chi = 0, \mu = 0.2$ (точечная линия)

Fig. 2. The negative dependence $N(t)$ on the time gt for the initial state of qubits $|+, +\rangle$ (a) and entangled state $1/\sqrt{2}(|+, -\rangle + |- , +\rangle)$ (b). Number of photons in mode $n = 2$ and $n = 10$ (b). Meaning of non-linearity $\chi = 1, \mu = 0$ (solid line) and $\chi = 0, \mu = 0.5$ (dashed line) (a) and $\chi = \mu = 0$ (solid line), $\chi = 1, \mu = 0$ (dashed line) and $\chi = 0, \mu = 0.2$ (dotted line)

отрицательности, составляет $t \approx 450 g$, что значительно превосходит время когерентности в рассматриваемых системах кубитов в резонаторе. Таким образом, для наблюдения предсказываемого эффекта необходимо добиться экспериментально увеличения параметров нелинейностей более, чем на порядок. В силу вышесказанного численное моделирование временного поведения отрицательности проводилось для таких значений параметров нелинейности. Заметим также, что с увеличением числа фотонов в резонаторной моде времена, для которых наблюдаются максимумы отрицательности, увеличиваются.

На рис. 2, a представлена временная зависимость отрицательности от приведенного времени gt для начального состояния кубитов $|+, +, -\rangle$ и различных значений параметров нелинейности. Заметим, что в отсутствие нелинейности резонатора для такого начального состояния кубитов перепутывание не возникает ни для каких начальных состояний кубитов [21]. При учете нелинейности появляется перепутывание кубитов. Расчеты показывают, что зависимость максимальной степени перепутывания кубитов от нелинейности третьего порядка χ немонотонная. В интервале значений безразмерного параметра нелинейности $0 < \chi < 1$ с увеличением нелинейности χ максимальная степень перепутывания кубитов растет, а для $\chi > 1$, наоборот, уменьшается. Для нелинейности пятого порядка μ ситуация иная. С увеличением параметра μ растет и максимальная степень перепутывания кубитов, достигая максимальных значений при $\mu \geq 5$. На рис. 2, b показана временная зависимость отрицательности от приведенного времени gt для начального перепутанного состояния кубитов (4) при $\theta = \pi/4$ и различных значений параметров нелинейности. Число фотонов в моде равно $n = 10$. Для выбранного начального состояния кубитов нелинейности третьего и пятого порядков приводят к уменьшению амплитуд колебаний отрицательности и, соответственно, к стабилизации перепутывания кубитов в резонаторе. Кроме того, они способствуют исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов, т. е. исчезновению перепутывания кубитов на временах меньших времени декогеренции [22; 23]. Описанные эффекты характерны для состояний поля с большим числом фотонов. Для малых чисел фотонов влияние нелинейностей на поведение отрицательности незначительно.

Выводы

Таким образом, в данной статье мы рассмотрели динамику системы, состоящей из двух идентичных кубитов, взаимодействующих с модой поля идеального резонатора с нелинейностями третьего и пятого порядков. Для количественной оценки меры перепутывания кубитов использовалась отрицательность. Вычисления отрицательности произведены для сепарабельных и белловских начальных состояний кубитов и фоковского состояния поля резонатора. Показано, что для сепарабельного состояния $|+, -\rangle$ учет нелинейностей как третьего, так и пятого порядков приводит к существенному увеличению степени пе-

репутывания кубитов. Хорошо известно, что для резонансной модели Тависа — Каммингса в случае начального состояния $|+, +\rangle$ перепутывание состояний кубитов не возникает ни для каких начальных состояний поля резонатора [21]. При включении нелинейности резонатора возможно перепутывание кубитов в процессе их дальнейшей эволюции. Для фоковских состояний поля резонатора расчеты показывают, что для малых значений безразмерного параметра нелинейности третьего порядка $\chi < 1$ увеличение параметра нелинейности приводит к увеличению максимальной степени перепутывания кубитов, а для больших значений безразмерного параметра нелинейности $\chi > 1$ имеет место обратная зависимость. С увеличением безразмерного параметра нелинейности пятого порядка μ растет максимальная степень перепутывания кубитов, достигая максимальных значений при $\mu \geq 5$. Для белловского начального перепутанного состояния кубитов (4) учет нелинейностей третьего и пятого порядков приводит к уменьшению амплитуд колебаний отрицательности и, соответственно, к стабилизации перепутывания кубитов в резонаторе. Наличие нелинейностей способствуют также исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов. Указанные эффекты проявляются заметным образом лишь для состояний поля с большим числом фотонов. Для малых чисел фотонов влияние нелинейностей на поведение отрицательности незначительно.

Литература

- [1] Jaynes E.T. Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser // Proceedings of the IEEE. 1963. Vol. 51, Issue 1. P. 89–109. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>.
- [2] Shore B.W., Knight P.L. The Jaynes-Cummings model // Journal of Modern Optics. 1993. Vol. 40, Issue 7. P. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
- [3] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // Reports on Progress in Physics. 2011. Vol. 74, Number 10. Article number 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [4] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems // Reviews of Modern Physics. 2013. Vol. 85, Issue 2. P. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
- [5] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // Physics Reports. 2017. Vol. 718–719. P. 1–102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation // Reviews of Modern Physics. 2014. Vol. 86, Issue 1. P. 153–185. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review // Reports on Progress in Physics. 2017. Vol. 80, Number 10. Article number 106001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting Quantum Computing: A Review // Science China. Information Sciences. 2020. Vol. 63. Article number 180501. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11432-020-2881-9>.
- [9] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang I.-J., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play // Annual Review of Condensed Matter Physics. 2020. Vol. 11. Pp. 369–395. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [10] Du S., Feng H. Dynamics of Entanglement in the Cavity with Nonlinear Medium // Journal of Modern Physics. 2013. Vol. 4. Number 5. Pp. 604–607. DOI: <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2013.45086>.
- [11] De los Santos-Sánchez O., González-Gutiérrez C., Récamier J. Nonlinear Jaynes-Cummings model for two interacting two-level atoms // Journal of Physics B: Atomic Molecular and Optical Physics. 2016. Vol. 49, Number 16. Article number 165503. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/49/16/165503>.
- [12] Gómez-Rosas R., González-Gutiérrez C.A., Torres J.M. Entangling operations in nonlinear two-atom Tavis-Cummings models // Physical Review A. 2021. Vol. 104, Issue 6. Article number 063701. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.063701>.
- [13] Obada A.-S.F., Ahmed M.M.A., Habeba H.F. Some Statistical Properties for a Non-Linear Tavis — Cummings Model // Applied Mathematics & Information Sciences. 2017. Vol. 11, Issue 1. Pp. 147–154. DOI: <http://dx.doi.org/10.18576/amis/110117>.
- [14] Yu D., Kwek L.C., Amico L., Dumke R. Nonlinear circuit quantum electrodynamics based on the charge-qubit-resonator interface // Physical Review A. 2018. Vol. 98, Issue 3. Article number 033833. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.033833>.
- [15] Chen Q., Wen J., Yang W.L., Feng M., Du J. Nonlinear coupling between a nitrogen-vacancy-center ensemble and a superconducting qubit // Optics Express. 2015. Vol. 23, Issue 2. Pp. 1615–1626. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.23.001615>.

- [16] Bashkirov E.K. Entanglement in Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise // Proc. SPIE 11846, Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 118460W (4 May 2021). DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2588673>.
- [17] Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis-Cummings models with Kerr media // Proc. SPIE 12193, Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 121930Q (29 April 2022). DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2625838>.
- [18] Bertet P., Ong F. R., Boissonneault M., Bolduc A., Mallet F., Doherty A.C., Blais A., Vion D., Esteve D. Circuit quantum electrodynamics with a nonlinear resonator // arXiv:1111.0501v1 [quant-ph]. 2011. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1111.0501>
- [19] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, Issue 8. Pp. 1413–1415. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [20] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223, Issue 1. Pp. 1–8. DOI: [https://www.doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://www.doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [21] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // Physical review A. Atomic, molecular, and optical physics. 2002. Vol. 65. Issue 4. Article number 040101(R). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [22] Yu T., Eberly J.H. Environment-Induced Sudden Death of Entanglement // Physical Review Letters. 2004. Vol. 93. Article number 140104.
- [23] Sadiq G., Al-Drees W., Abdallah M.S. Manipulating entanglement sudden death in two coupled two-level atoms interacting off-resonance with a radiation field: an exact treatment // Optics Express. 2019. Vol. 27, Issue 23. Pp. 33799–33825. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.27.033799>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-72-80

Submitted: 27.04.2023

Revised: 08.06.2023

Accepted: 30.06.2023

R.K. Zakharov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8450-2248>

E.K. Bashkirov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

ENTANGLEMENT IN NONLINEAR TWO-QUBIT TAVIS — CUMMINGS MODEL

ABSTRACT

In this work, we have studied the dynamics of entanglement of two identical superconducting qubits resonantly interacting with the one-mode field of a coplanar microwave cavity without loss through single-photon transitions in the presence of third- and fifth-order nonlinearities. Based on the solution of the equation of evolution of the system for the Fock initial states of the cavity field, the criterion of qubits entanglement – negativity is calculated. The results of the negativity calculation show that for the initial separable states, the cavity nonlinearity can lead to a significant increase in the maximum degree of qubit entanglement. It is shown that for the initial entangled states of qubits and intense cavity fields, taking into account nonlinearities leads to stabilization of the degree of entanglement of qubits in the cavity and contributes to the disappearance of the effect of the entanglement sudden death of qubits.

Key words: qubits; resonant interaction; nonlinear cavity; fock state of the cavity field; entanglement; negativity; sudden death of entanglement.

Citation. Zakharov R.K., Bashkirov E.K. Entanglement in nonlinear two-qubit Tavis — Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 72–80. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-72-80>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Zakharov R.K., Bashkirov E.K., 2023

Rodion K. Zakharov — postgraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Bashkirov E.K., 2023

Eugene K. Bashkirov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Jaynes E.T. Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 1963, vol. 51, issue 1, pp. 89–109. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>.
- [2] Shore B.W., Knight P.L. The Jaynes-Cummings model. *Journal of Modern Optics*, 1993, vol. 40, issue 7, pp. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
- [3] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, 2011, vol. 74, no. 10, Article number 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [4] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, 2013, vol. 85, issue 2, pp. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
- [5] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation. *Review of Modern Physics*, 2014, vol. 86, issue 1, pp. 153–185. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, number 10, Article number 106001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting Quantum Computing: A Review. *Science China. Information Sciences*, 2020, vol. 63, Article number 180501. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11432-020-2881-9>.
- [9] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang I.-J., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play. *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*, 2020, vol. 11, pp. 369–395. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [10] Du S., Feng H. Dynamics of Entanglement in the Cavity with Nonlinear Medium. *Journal of Modern Physics*, 2013, vol. 4, no. 5, pp. 604–607. DOI: <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2013.45086>.
- [11] De los Santos-Sánchez O., González-Gutiérrez C., Récamier J. Nonlinear Jaynes–Cummings model for two interacting two-level atoms. *Journal of Physics B: Atomic Molecular and Optical Physics*, 2016, Vol 49, Number 16, Article number 165503. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/49/16/165503>.
- [12] Gómez-Rosas R., González-Gutiérrez C.A., Torres J.M. Entangling operations in nonlinear two-atom Tavis-Cummings models. *Physical Review A*, 2021, Vol. 104, Issue 6, Article number 063701. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.063701>.
- [13] Obada A.-S.F., Ahmed M.M.A., Habeba H.F. Some Statistical Properties for a Non-Linear Tavis – Cummings Model. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 2017, vol. 11, issue 1, pp. 147–154. DOI: <http://dx.doi.org/10.18576/amis/110117>.
- [14] Yu D., Kwek L.C., Amico L., Dumke R. Nonlinear circuit quantum electrodynamics based on the charge-qubit–resonator interface. *Physical Review A*, 2018, vol. 98, issue 3, Article number 033833. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.033833>.
- [15] Chen Q., Wen J., Yang W.L., Feng M., Du J. Nonlinear coupling between a nitrogen-vacancy-center ensemble and a superconducting qubit. *Optics Express*, 2015, vol. 23, issue 2, pp. 1615–1626. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.23.001615>.
- [16] Bashkirov E.K. Entanglement in Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise. *Proc. SPIE 11846, Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 118460W (4 May 2021)*. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2588673>.
- [17] Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis-Cummings models with Kerr media. *Proc. SPIE 12193, Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 121930Q (29 April 2022)*. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2625838>.
- [18] Bertet P., Ong F.R., Boissonneault M., Bolduc A., Mallet F., Doherty A.C., Blais A., Vion D., Esteve D. Circuit quantum electrodynamics with a nonlinear resonator. *arXiv:1111.0501v1 [quant-ph]*, 2011. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1111.0501>.
- [19] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, issue 8, pp. 1413–1415. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [20] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, issue 1, pp. 1–8. DOI: [https://www.doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://www.doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).

- [21] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Physical review A. Atomic, molecular, and optical physics*, 2002, vol. 65, issue 4, article number 040101(R). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [22] Yu T., Eberly J.H. Environment-Induced Sudden Death of Entanglement. *Physics Review Letters*, 2004, vol. 93, article 140104.
- [23] Sadiek G., Al-Drees W., Abdallah M.S. Manipulating entanglement sudden death in two coupled two-level atoms interacting off-resonance with a radiation field: an exact treatment. *Optics Express*, 2019, Vol. 27, Issue 23, Pp. 33799–33825. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.27.033799>.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://vestnik.samsu.ru> <http://journals.ssau.ru/index.php/est>. Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронная (e-mail: nvestnik@ssau.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы L^AT_EX₂_ε с использованием стиля `samgu.cls`. Стил `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций T_EX'a крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами L^AT_EX'a. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("—"), двойной дефис ("--")¹, тройной дефис ("---")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек ("") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала