МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 24.07.2023
после рецензирования: 31.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

Я.С. Бунтова
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: ynbuntova@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0009-0003-7786-8019

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается задача с интегральными нелокальными условиями первого рода. Основной целью является доказательство однозначной разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями 1 рода, если ядра этих условий зависят не только от пространственной переменной, но и от времени. Показана эквивалентность нелокальной задачи с интегральными условиями 1 рода и нелокальной задачи с интегральными условиями 2 рода. Получены ограничения на входные данные, обеспечивающие единственность обобщенного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение; нелокальная задача; интегральные условия; обобщенное решение.

Цитирование. Бунтова Я.С. Нелокальная задача с интегральными условиями первого рода для уравнения колебания струны // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 8–17. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Яна Сергеевна Бунтова — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $Q = (0, l) \times (0, T)$, где $l, T < \infty$, уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и нелокальным условиям

$$\int_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx = h_1(t), \int_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx = h_2(t). \tag{3}$$

Будем считать, что $a(x,t) > 0$ в $\overline{Q}_T$.

Особенность поставленной задачи заключается не только в том, что условия (3) являются нелокальными интегральными условиями первого рода, но и в том, что их ядра $K_i(x,t)$ зависят и от переменной t.

Напомним, что нелокальными условиями принято называть соотношения, связывающие значения искомого в области Ω решения на некотором внутреннем многообразии и в точках границы области Ω.

В случае одной пространственной переменной нелокальные интегральные условия могут быть представлены следующим соотношением:

$$\alpha u(x,t) + \beta u_x(x,t) + \lambda \int_0^l K(x,t)u(x,t)dx = 0. \tag{$*$}$$

Если α и β не обращаются в ноль одновременно, то условие называется интегральным условием второго рода.

Если $\alpha = \beta = 0$, то условие называется интегральным условием первого рода. [3]

К настоящему времени имеется значительное количество статей, посвященых исследованию нелокальных задач с интегральными условиями [5–8; 11]. Разработаны методы исследования разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями второго рода [2; 5; 10]. Если в $(*)$ $\beta \neq 0$, то эффективным оказался метод, впервые реализованный в [4] для многомерного уравнения. Если же в $(*)$ $\alpha = \beta = 0$, то есть нелокальные условия первого рода, при обосновании рассуждения возникает много трудностей, отмеченных и в статьях [2; 6; 9]. Одним из способов преодолеть возникающие трудности является сведение условий первого рода к условиям второго рода, причем так, чтобы они оказались эквивалентными. Условия на входные данные, обеспечивающие возможность этой процедуры, отражены в следующей лемме.

Лемма. Пусть

$$\begin{gathered} K_i(x,t) \in C^2(\overline{Q}_T), \phi(x) \in W_2^1(0,l), \psi(x) \in L_2(0,l), h_i(t) \in C^2(0,T), \\ f(x,t) \in L_2(Q_T), \quad a(x,t), a_x(x,t) \in C(Q_T), \\ \triangle \equiv K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t)) \neq 0, \forall t \in [0,T] \end{gathered}$$

и выполняются условия согласования

$$\begin{gathered} \int_0^l K_i(x,0)\phi(x)dx = h_i(0), \\ \int_0^l [K_i(x,0)\psi(x) + K_{it}(x,0)\phi(x)]dx = h_i'(0). \end{gathered} \tag{4}$$

Тогда нелокальные условия первого рода (3) эквивалентны нелокальным условиям второго рода

$$\begin{gathered} u_x(0,t) = \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dx + 2\int_0^l P_2(x,t)u_t(x,t)dx + G_1(t), \\ u_x(l,t) = \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \int_0^l P_3(x,t)u(x,t)dx + 2\int_0^l P_4(x,t)u_t(x,t)dx + G_2(t), \end{gathered} \tag{5}$$

где $\alpha_{ij}, P_i(x,t), G_i(x,t)$ выражаются через $K_i(x,t), a(x,t), f(x,t), h_i(t)$ и их производные.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3). Дифференцируя равенство (3) дважды по t, получим

$$\begin{gathered} \int_0^l (K_1(x,t)u_{tt}(x,t) + 2K_{1t}(x,t)u_t(x,t) + K_{1tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_1(t), \\ \int_0^l (K_2(x,t)u_{tt}(x,t) + 2K_{2t}(x,t)u_t(x,t) + K_{2tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_2(t). \end{gathered} \tag{6}$$

Теперь выразим из уравнения (1) $u_{tt}(x,t)$ и подставим в (6), получим

$$\begin{gathered} \int_0^l (K_1(x,t)(f + (a(x,t)u_x)_x) + 2K_{1t}(x,t)u_t(x,t) + K_{1tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_1(t), \\ \int_0^l (K_2(x,t)(f + (a(x,t)u_x)_x) + 2K_{2t}(x,t)u_t(x,t) + K_{2tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_2(t). \end{gathered} \tag{7}$$

Проинтегрируем теперь слагаемые, содержащие u_{xx} дважды, и получим

$$\begin{gathered}
\int_0^l K_1(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = K_1(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_1(0,t)a(0,t)u_x(0,t)+ \\
+K_{1x}(0,t)a(0,t)u(0,t) - K_{1x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l (K_{1x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx, \\
\int_0^l K_2(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = K_2(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_2(0,t)a(0,t)u_x(0,t)+ \\
+K_{2x}(0,t)a(o,t)u(0,t) - K_{2x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l (K_{2x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx.
\end{gathered} \tag{8}$$

Подставим (8) в (7)

$$\begin{gathered}
\int_0^l K_1(x,t)fdx + K_1(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_1(0,t)a(0,t)u_x(0,t) + K_{1x}(0,t)a(0,t)u(0,t)- \\
-K_{1x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l (K_{1x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx + 2\int_0^l K_{1t}(x,t)u_t(x,t)dx+ \\
+\int_0^l K_{1tt}(x,t)u(x,t)dx = h"_1(t), \\
\int_0^l K_2(x,t)fdx + K_2(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_2(0,t)a(0,t)u_x(0,t) + K_{2x}(0,t)a(0,t)u(0,t)- \\
-K_{2x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l K_{2x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx + 2\int_0^l K_{2t}(x,t)u_t(x,t)dx+ \\
+\int_0^l K_{2tt}(x,t)u(x,t)dx = h"_2(t).
\end{gathered} \tag{9}$$

Так как

$$\triangle \equiv K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t)) \neq 0,$$

то (9) можно разрешить относительно $u_x(0,t)$ и $u_x(l,t)$. Выразим их из (9) и получим нелокальные условия второго рода:

$$\begin{gathered}
u_x(0,t) = \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dx+ \\
+2\int_0^l P_2(x,t)u_t(x,t)dx + G_1(t), \\
u_x(l,t) = \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \int_0^l P_3(x,t)u(x,t)dx+ \\
+2\int_0^l P_4(x,t)u_t(x,t)dx + G_2(t),
\end{gathered}$$

где

$$\alpha_{11} := \frac{1}{\triangle}[K_{1x}(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2x}(0,t)],$$

$$\alpha_{12} := -\frac{a(l,t)}{a(0,t)\triangle}[K_{1x}(l,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2x}(l,t)],$$

$$\begin{gathered}
P_1(x,t) := \frac{1}{a(0,t)\triangle}[a(x,t)K_{1x}(x,t))_x K_2(l,t) - (a(x,t)K_{2x}(x,t))_x K_2(l,t)+ \\
+K_{1tt}(x,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2tt}(x,t)],
\end{gathered}$$

$$P_2(x,t) := \frac{1}{a(0,t)\triangle}[K_{1t}(x,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2t}(x,t)],$$

$$\begin{gathered}
G_1(t) := -\tfrac{1}{a(0,t)\triangle}(\textstyle\int_0^l [K_1(x,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(x,t)]fdx+ \\
+h_{1tt}(t)K_2(l,t) - K_1(l,t)h_{2tt}(t)),
\end{gathered}$$

$$\alpha_{21} := \frac{a(0,t)}{a(l,t)\triangle}[K_{1x}(0,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2x}(0,t)],$$

$$\alpha_{22} := -\tfrac{1}{\triangle}[K_{1x}(l,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2x}(l,t)],$$

$$P_3(x,t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}[(a(x,t)K_{1x}(x,t))_x K_2(0,t) - (a(x,t)K_{2x}(x,t))_x K_1(0,t)+$$
$$+K_{1tt}(x,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2tt}(x,t)],$$

$$P_4(x,t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}[K_{1t}(x,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2t}(x,t)],$$

$$G_2(t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}(\int_0^l [K_1(x,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_2(x,t)]f dx-$$
$$-h_{1tt}(t)K_2(0,t) + K_1(0,t)h_{2tt}(t)).$$

Пусть теперь $u(x,t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (5). Домножим уравнение (1) на $K_1(x,t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,l]$. Аналогичную процедуру проделаем с ядром $K_2(x,t)$, получим

$$\begin{aligned}\int_0^l K_1(x,t)u_{tt}(x,t)dx - \int_0^l K_1(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = \int_0^l K_1(x,t)f dx,\\ \int_0^l K_2(x,t)u_{tt}(x,t)dx - \int_0^l K_2(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = \int_0^l K_2(x,t)f dx.\end{aligned} \tag{10}$$

Подставим (8) в (10). Но тогда выполняются и равенства (6), из которых получены условия (5). Равенства (6) запишем в виде

$$\begin{aligned}\int_0^l (K_1(x,t)u(x,t))_{tt}dx - h''_1(t) = 0,\\ \int_0^l (K_2(x,t)u(x,t))_{tt}dx - h''_2(t) = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Эти условия можно свернуть таким образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx - h_1(t)\right] = 0,\\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx - h_2(t)\right] = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Из условий согласования (4) вытекают начальные условия

$$\begin{aligned}\int_0^l K_i(x,0)u(x,0)dx = h_i(0),\\ \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx|_{t=0} = h_i'(0), \forall i = 1,2.\end{aligned} \tag{13}$$

Задача Коши (12), (13) имеет единственное решение

$$\begin{aligned}\int_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx = h_1(t),\\ \int_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx = h_2(t),\end{aligned}$$

что и означает выполнение условий (3).

2. Единственность решения задачи

Теперь рассмотрим частный случай этой задачи (1)–(3), в которой ядро представлено в виде $K_i(x,t) = \Phi_i(x)\Psi_i(t)$. Тогда условия (3) можно записать таким образом:

$$\int_0^l \Phi_i(x)\Psi_i(t)u(x,t)dx = h_i(t), i = 1,2. \tag{14}$$

Будем считать, что $\Psi_i(t) \neq 0$ всюду в $[0,T]$ и обозначим $\dfrac{h_i(t)}{\Psi_i(t)} = T_i(t)$, тогда (14) можно представить так:

$$\begin{aligned} &\int_0^l \Phi_1(x)u(x,t)dx = T_1(t), \\ &\int_0^l \Phi_2(x)u(x,t)dx = T_2(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Условия (5) для этого частного случая выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x(0,t) = \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dx + G_1(t), \\ u_x(l,t) = \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \int_0^l P_2(x,t)u(x,t)dx + G_2(t), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha_{11} := \frac{1}{\triangle}[\Phi_1'(0)\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2'(0)], \\ \alpha_{12} := -\frac{a(l,t)}{a(0,t)\triangle}[\Phi_1'(l)\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2'(l)], \\ P_1(x,t) := \frac{a_x}{a(0,t)\triangle}[\Phi_1''\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2''], \\ G_1(t) := \frac{1}{a(0,t)\triangle}(\int_0^l [\Phi_1(l)\Phi_2(x) - \Phi_1(x)\Phi_2(l)]fdx - \\ -T_1''(t)\Phi_2(l) + \Phi_1(l)T_2''(t)), \\ \alpha_{21} := \frac{a(0,t)}{a(l,t)\triangle}[\Phi_1'(0)\Phi_2(0) - \Phi_1(0)\Phi_2'(0)], \\ \alpha_{22} := -\frac{1}{\triangle}[\Phi_1'(l)\Phi_2(0) - \Phi_1(0)\Phi_2'(l)], \\ P_2(x,t) := \frac{a_x}{a(l,t)\triangle}[\Phi_1''\Phi_2(0) - \Phi_1(0)\Phi_2''], \\ G_2(t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}(\int_0^l [\Phi_1(0)\Phi_2(x) - \Phi_1(x)\Phi_2(0)]fdx - \\ -T_1''(t)\Phi_2(0) + \Phi_1(0)T_2''(t)), \\ \triangle := \Phi_1(0)\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2(0) \neq 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Введем понятие обобщенного решения. Следуя известной процедуре [1], считая что u — классическое решение, умножим равенство (1) на гладкую функцию, проинтегрируем по области Q_T и, подставляя краевые условия, получим равенство:

$$\begin{gathered} \int_0^T \int_0^l [-u_t v_t + a u_x v_x]dxdt + \int_0^\tau \alpha_{21}v(l,t)a(l,t)v_t(0,t)dt + \\ + \int_0^\tau \alpha_{22}v(l,t)a(l,t)v_t(l,t)dt + \int_0^\tau \int_0^l P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)u(x,t)dxdt - \\ - \int_0^\tau \alpha_{11}v(0,t)a(0,t)v_t(0,t)dt - \int_0^\tau \alpha_{12}v(0,t)a(0,t)v_t(l,t)dt - \\ - \int_0^\tau \int_0^l P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)u(x,t)dxdt = \\ = \int_0^l v(x,0)\psi(x)dx + \int_0^T \int_0^l v(x,t)fdxdt. \end{gathered} \tag{18}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1),(2), (16) будем называть функцию $u(x,t) \in \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = \phi(x)$ и тождеству

$$\begin{gathered} \int_0^T \int_0^l [-u_t v_t + a u_x v_x]dxdt - \int_0^T v(l,t)a(l,t)u_x(l,t)dt + \int_0^T v(0,t)a(0,t)u_x(0,t)dt = \\ = \int_0^l v(x,0)\psi(x)dx + \int_0^T \int_0^l v(x,t)fdxdt \end{gathered} \tag{19}$$

для любой функции $v(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$,

где $\widehat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^1(Q_T), v(x,T) = 0\}$.

Теорема. Если выполнены условия

$$a(x,t), a_t(x,t) \in C(\overline{Q}_T),$$
$$\Phi_i \in C^2[0,l], \Psi_i(t) \neq 0 \qquad \forall t \in [0,T]$$
$$\alpha_{12}a(0,t) + \alpha_{21}a(l,t) = 0,$$
$$\alpha_{11}a(0,0)\xi_1^2 + 2\alpha_{12}a(0,0)\xi_1\xi_2 - \alpha_{22}a(l,0)\xi_2^2 \geqslant 0,$$

то существует не более одного обобщенного решения поставленной задачи.

Доказательство. Покажем, что существует не более одного решения задачи. Предположим, что существует два решения u_1 и u_2. Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет тождеству:

$$\begin{gathered}\int_0^T \int_0^l [-u_t v_t + a u_x v_x] dxdt + \int_0^\tau \alpha_{21} v(l,t) a(l,t) v_t(0,t) dt + \\ + \int_0^\tau \alpha_{22} v(l,t) a(l,t) v_t(l,t) dt + \int_0^\tau \int_0^l P_2(x,t) v(l,t) a(l,t) u(x,t) dxdt - \\ - \int_0^\tau \alpha_{11} v(0,t) a(0,t) v_t(0,t) dt - \int_0^\tau \alpha_{12} v(0,t) a(0,t) v_t(l,t) dt - \\ - \int_0^\tau \int_0^l P_1(x,t) v(0,t) a(0,t) u(x,t) dxdt = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Выберем в тождестве (18) с $f(x,t) = 0$ и $\psi(x) = 0$

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_\tau^t u(x,\eta) d\eta, 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{21}$$

Проинтегрируем по частям некоторые слагаемые:

$$-\int_0^\tau \int_0^l u_t u dxdt = -\frac{1}{2} \int_0^l u^2(x,\tau) dx,$$
$$\int_0^\tau \int_0^l a u_x v_x dxdt = -\frac{1}{2}(\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt + \int_0^l a(x,0) v_x^2(x,0) dx).$$

Подставляя в (20), получим:

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2} \int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0) v_x^2(x,0)] dx = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt + \int_0^\tau \alpha_{21} v(l,t) a(l,t) v_t(0,t) dt + \\ + \int_0^\tau \alpha_{22} v(l,t) a(l,t) v_t(l,t) dt + \int_0^\tau \int_0^l P_2(x,t) v(l,t) a(l,t) u(x,t) dxdt - \\ - \int_0^\tau \alpha_{11} v(0,t) a(0,t) v_t(0,t) dt - \int_0^\tau \alpha_{12} v(0,t) a(0,t) v_t(l,t) dt - \\ - \int_0^\tau \int_0^l P_1(x,t) v(0,t) a(0,t) u(x,t) dxdt.\end{gathered} \tag{22}$$

Проинтегрируем по частям и подставим в (22) такие интегралы:

$$\begin{gathered}\int_0^\tau \alpha_{11} v(0,t) a(0,t) v_t(0,t) dt = -\frac{1}{2} \alpha_{11} a(0,0) v^2(0,0) - \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha_{11} a_t(0,t) v^2(0,t) dt, \\ \int_0^\tau \alpha_{12} v(0,t) a(0,t) v_t(l,t) dt = -\alpha_{12} a(0,0) v(0,0) v(l,0) - \int_0^\tau \alpha_{12} a_t(0,t) v(0,t) v(l,t) dt - \\ - \int_0^\tau \alpha_{12} a(0,t) v_t(0,t) v(l,t) dt, \\ \int_0^\tau \alpha_{22} v(l,t) a(l,t) v_t(l,t) dt = -\frac{1}{2} \alpha_{22} a(l,0) v^2(l,0) - \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha_{22} a_t(l,t) v^2(l,t) dt.\end{gathered}$$

Учитывая условия теоремы $\alpha_{12}a(0,t) + \alpha_{21}a(l,t) = 0$, получим:

$$\begin{gathered}\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0) v_x^2(x,0)] dx = -\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt + [\alpha_{11} a(0,0) v^2(0,0) + \\ + 2\alpha_{12} a(0,0) v(0,0) v(l,0) - \alpha_{22} a(l,0) v^2(l,0)] + \int_0^\tau \alpha_{11} a_t(0,t) v^2(0,t) dt - \\ - \int_0^\tau \alpha_{22} a_t(l,t) v^2(l,t) dt + 2 \int_0^\tau \alpha_{12} a_t(0,t) v(0,t) v(l,t) dt - 2 \int_0^\tau \int_0^l [-P_1(x,t) v(0,t) a(0,t) + \\ + P_2(x,t) v(l,t) a(l,t)] u(x,t) dxdt.\end{gathered} \tag{23}$$

Из равенства (23) вытекает неравенство и, если учесть условие теоремы $\alpha_{11}a(0,0)\xi_1^2 + 2\alpha_{12}a(0,0)\xi_1\xi_2 - \alpha_{22}a(l,0)\xi_2^2 \geqslant 0$, получим:

$$\begin{gathered}\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant \left|\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt\right| + \left|\int_0^\tau \alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)dt\right| + \\ + \left|\int_0^\tau \alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)dt\right| + 2\left|\int_0^\tau \alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)dt\right| + \\ +2\left|\int_0^\tau \int_0^l [-P_1(x,t)v(0,t)a(0,t) + P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)]u(x,t)dxdt\right|.\end{gathered} \tag{24}$$

Обратимся теперь к правой части (24) Коши, Коши — Буняковского и

$$v^2(x_i,t) \leqslant 2l\int_0^l v_x^2(x,t)dx + \frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)dx,$$

вывод которой показан в [3, с. 107]. Учитывая сказанное выше, получим оценки для таких слагаемых правой части неравенства (24):

$$\begin{gathered}\left|\int_0^\tau \alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)dt\right| \leqslant \int_0^\tau \left|\alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)\right| dt \leqslant \int_0^\tau |\alpha_{11}||a_t(0,t)|v^2(0,t)dt \leqslant \\ \leqslant A_1\int_0^\tau v^2(0,t)dt \leqslant 2lA_1\int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x,t)dxdt + \frac{2A_1}{l}\int_0^\tau \int_0^l v^2(x,t)dxdt,\end{gathered}$$

где $A_1 := b_1 \cdot a_2$,

$$\begin{gathered}2\left|\int_0^\tau \alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)dt\right| \leqslant 2\int_0^\tau |\alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)|\,dt \leqslant \\ \leqslant 2\int_0^\tau |\alpha_{12}||a_t(0,t)||v(0,t)||v(l,t)|dt \leqslant A_2\int_0^\tau [v^2(0,t) + v^2(l,t)]dt,\end{gathered}$$

где $A_2 := b_2 \cdot a_2$,

$$\begin{gathered}\left|\int_0^\tau \alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)dt\right| \leqslant \int_0^\tau \left|\alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)\right| dt \leqslant \int_0^\tau |\alpha_{22}||a_t(l,t)|v^2(l,t)dt \leqslant \\ \leqslant A_3\int_0^\tau v^2(l,t)dt \leqslant 2lA_3\int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x,t)dxdt + \frac{2A_3}{l}\int_0^\tau \int_0^l v^2(x,t)dxdt,\end{gathered}$$

где $A_3 := c_2 \cdot a_2$,

$$\begin{gathered}2\left|\int_0^\tau \int_0^l [-P_1(x,t)v(0,t)a(0,t) + P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)]u(x,t)dxdt\right| \leqslant \\ \leqslant 2\int_0^\tau \int_0^l |P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)u(x,t)|dxdt + 2\int_0^\tau \int_0^l |P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)u(x,t)|dxdt \leqslant \\ \leqslant 2\int_0^\tau \int_0^l |P_1(x,t)||v(0,t)||a(0,t)||u(x,t)|dxdt + 2\int_0^\tau \int_0^l |P_2(x,t)||v(l,t)||a(l,t)||u(x,t)|dxdt \leqslant \\ \leqslant D_1 l\int_0^\tau v^2(l,t)dt + D_2 l\int_0^\tau v^2(0,t)dt + (D_1 + D_2)\int_0^\tau \int_0^l u^2(x,t)dxdt,\end{gathered}$$

где $D_1 := d_1 \cdot a_1, D_2 := d_2 \cdot a_1$.

Преобразуем (24), учитывая оценки, написанные выше:

$$\begin{gathered}\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant \left|\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt\right| + 2lA_1\int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+ \\ +\frac{2A_1}{l}\int_0^\tau \int_0^l v^2(x,t)dxdt + A_2\int_0^\tau [v^2(0,t) + v^2(l,t)]dt + 2lA_3\int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+ \\ +\frac{2A_3}{l}\int_0^\tau \int_0^l v^2(x,t)dxdt + D_1 l\int_0^\tau v^2(l,t)dt + D_2 l\int_0^\tau v^2(0,t)dt+ \\ +(D_1 + D_2)\int_0^\tau \int_0^l u^2(x,t)dxdt.\end{gathered} \tag{25}$$

Введем некоторые обозначения:

$$C_1 = 2l(A_1 + A_3), C_2 = A_2 + D_2 l, C_3 = A_2 + D_1 l, C_4 = D_1 + D_2, C_5 = \frac{2}{l}(A_1 + A_3).$$

Преобразуем (25):

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant \left|\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt\right| + C_1\int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+ \\ +C_2\int_0^\tau v^2(0,t)dt + C_3\int_0^\tau v^2(l,t)dt + C_4\int_0^\tau \int_0^l u^2(x,t)dxdt+ \\ +C_5\int_0^\tau \int_0^l v^2(x,t)dxdt. \tag{26}$$

Используя неравенство, полученное в [2], получим:

$$\int_0^\tau v^2(0,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x,t)dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau \int_0^l v^2(x,t)dxdt, \\ \int_0^\tau v^2(l,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x,t)dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau \int_0^l v^2(x,t)dxdt, \\ \int_0^\tau \int_0^l v^2(x,t)dxdt \leqslant \tau^2\int_0^\tau \int_0^l u^2(x,t)dxdt.$$

Учитывая оценки, написанные выше, получим:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant \int_0^\tau \int_0^l \left[(a_2+B_1)v_x^2(x,t)+B_2u^2(x,t)\right]dxdt, \tag{27}$$

где

$$B_1 := C_1 + 2l(C_2+C_3),\ \ B_2 := \max_{[0,T]}\{\frac{2}{l}(C_2+C_3)\tau^2 + C_4 + C_5\tau^2\}.$$

Теперь введем функцию $w(x,t) = \int_0^t u_x d\eta$. Тогда, используя преставления функции v, получим

$$v_x^2(x,0) = w^2(x,\tau),\ \ v_x(x,0) = -w(x,\tau),\ \ v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau).$$

Тогда в (27) $v_x^2(x,t) \leqslant 2w^2(x,t) + 2w^2(x,\tau)$. Подставляя это неравенство, получим:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a(x,0)w^2(x,\tau)]dx \leqslant \int_0^\tau \int_0^l \left[2(a_2+B_1)(w^2(x,t)+w^2(x,\tau))+B_2u^2(x,t)\right]dxdt. \tag{28}$$

Заметим, что $w^2(x,\tau)$ не зависит от t и $a(x,t) \geqslant a_0 > 0 \quad \forall x,t \in \overline{Q}_T$. Тогда

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a_0w^2(x,\tau)]dx \leqslant \int_0^\tau \int_0^l \left[2(a_2+B_1)w^2(x,t)+B_2u^2(x,t)\right]dxdt+ \\ +2\tau(a_2+B_1)\int_0^l w^2(x,\tau)dx. \tag{29}$$

Выберем τ так, чтобы $a_0 - 2\tau(a_2+B_1) > 0$. Тогда последнее слагаемое в (29) можно перенести в левую часть:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+\nu w^2(x,\tau)]dx \leqslant \int_0^\tau \int_0^l \left[2(a_2+B_1)w^2(x,t)+B_2u^2(x,t)\right]dxdt, \tag{30}$$

где $\nu = a_0 - 2\tau(a_2+B_1)$. Выберем в (30) $m = min\{1;\nu\}$ и $M = max\{2(a_2+B_1);B_2\}$, получим

$$m\int_0^l [u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau)]dx \leqslant M\int_0^\tau \int_0^l \left[w^2(x,t)+u^2(x,t)\right]dxdt. \tag{31}$$

Применив к последнему неравенству лемму Гронуолла, получим $u(x,t) = 0$ в $[0,\tau]$, где $\tau < \dfrac{a_0}{2(a_2+B_1)}$. Так же, как и в [1, с. 212], повторяя рассуждения для $t \in [\tau,\tau_1]$, убедимся, что $u(x,t) = 0$ на этом промежутке ($\tau \leqslant \tau_1 < T$). И так в конечное число шагов докажем обращение в нуль для всех $t \in [0,T]$.

Таким образом, доказано утверждение о том, что не может существовать более одного решения поставленной задачи.

Литература

[1] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 407 с. URL: https://djvu.online/file/Rh97R3cVXNcZE?ysclid=lntxmubmb390280080.

[2] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Известия высших учебных заведений. Сер.: Математика. 2012. № 4. С. 74—83. URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm8596.

[3] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений: монография. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2012. 194 с.

[4] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. № 2 (42). С. 15–27. URL: http://vestniksamgu.ssau.ru/est/2006web2/math/200620002.pdf.

[5] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Mathematics. 1963. Vol. 21. Pp. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/QAM/160437.

[6] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de2993.

[7] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024. URL: https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf7694.

[8] Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, 2000. Т. 36, № 2. С. 279–280. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de10101.

[9] Пулькина Л.С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени // Известия высших учебных заведений. Сер.: Математика. 2012. № 10. С. 32–44. URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm8743.

[10] Пулькина Л.С., Савенкова А.Е. Нелокальная задача с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2016. № 1–2. С. 33–45. URL: https://www.mathnet.ru/rus/vsgu499; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345215. EDN: https://www.elibrary.ru/wfyota.

[11] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de11100.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17

Submited: 24.07.2023
Revised: 31.08.2023
Accepted: 30.10.2023

Y.S. Buntova
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: ynbuntova@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0009-0003-7786-8019

A NON-LOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS OF THE FIRST KIND FOR THE STRING VIBRATION EQUATION

ABSTRACT

The article considers a problem with integral nonlocal conditions of the first kind. The main goal is to prove the unique solvability of a nonlocal problem with integral conditions of the 1st kind, if the kernels of these conditions depend not only on the spatial variable, but also on time. The equivalence of a nonlocal problem with integral conditions of the 1st kind and a nonlocal problem with integral conditions of the 2nd kind is shown. Restrictions on the input data are obtained to ensure the uniqueness of a generalized solution to the problem posed.

Key words: hyperbolic equation; nonlocal problem; integral conditions; generalized solution.

Citation. Buntova Y.S. A non-local problem with integral conditions of the first kind for the string vibration equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 8–17. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Yana S. Buntova — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973, 407 p. Available at: https://djvu.online/file/Rh97R3cVXNcZE?ysclid=lntxmubmb390280080. (In Russ.)

[2] Pul'kina L.S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, issue 4, pp. 62-–69. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081. (In English; original in Russian)

[3] Pul'kina L.S. Problems with non-classical conditions for hyperbolic equations: monograph. Samara: Izdatel'stvo "Samarskii universitet", 2012, 194 p. (In Russ.)

[4] Dmitriev V.B. A non-local problem with integral conditions for a wave equation. *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2006, no. 2 (42), pp. 15–27. Available at: http://vestniksamgu.ssau.ru/est/2006web2/math/200620002.pdf. (In Russ.)

[5] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1963, vol. 21, pp. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/QAM/160437.

[6] Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/de2993. (In Russ.)

[7] Kamynin L.I. A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, issue 6, pp. 33—59. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1. (In English; original in Russian)

[8] Pulkina L.S. The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, issue 2, pp. 316-–318. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754219. (In English; original in Russian)

[9] Pulkina L.S. A non-local problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, issue 10, pp. 26–37. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12100039. (in English; original in Russian)

[10] Pulkina L.S., Savenkova A.E. A problem with second kind integral conditions for hyperbolic equation. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2016, no. 1-2, pp. 33–45. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/vsgu499; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345215. EDN: https://www.elibrary.ru/wfyota. (In Russ.)

[11] Pulkina L.S. A Nonlocal Problem with Integral Conditions for a Hyperbolic Equation. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 887–892. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16 (In English; original in Russian)