МЕХАНИКА
MECHANICS

Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-46-54

УДК 531.39

Дата: поступления статьи: 12.04.2022
после рецензирования: 18.05.2022
принятия статьи: 14.11.2022

П.Г. Великанов
Казанский (Приволжский) федеральный университет;
Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ,
г. Казань, Российская Федерация
E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0845-2880
Ю.П. Артюхин
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
г. Казань, Российская Федерация
E-mail: ArtukhinYP@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6243-9145

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК. ЧАСТЬ I

АННОТАЦИЯ

Современное машиностроение ставит задачи расчета тонкостенных конструкций, одновременно сочетающих в себе порой взаимоисключающие свойства: легкость и экономичность, с одной стороны, и высокую прочность и надежность — с другой. В связи с этим использование ортотропных материалов и пластиков представляется вполне оправданным.

В статье продемонстрирована методика комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек, которая позволила в комплексной форме существенно сократить число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений. Особенностью предложенной методики для ортотропных оболочек является появление комплексно-сопряженных неизвестных функций. Несмотря на это, предложенная методика позволяет более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях имеется возможность даже вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

Проверка правильности предложенной методики была продемонстрирована на пологой ортотропной сферической оболочке вращения под действием распределенной нагрузки. В предельном случае были получены результаты и для изотропной оболочки.

Ключевые слова: механика; дифференциальные уравнения; ортотропные пластинки и оболочки; пологие оболочки вращения; осесимметричная деформация; уравнение и функции Бесселя; функция Ломмеля; гипергеометрические функции.

Цитирование. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. Общая теория ортотропных оболочек. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 46–54. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-46-54.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Пётр Геннадьевич Великанов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18; кафедра реактивных двигателей и энергетических установок, Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ, 420111, Российская Федерация, г. Казань, ул. К. Маркса, 10.

Юрий Павлович Артюхин — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

1. Предварительные сведения

Комплексное представление уравнений общей теории изотропных оболочек было сделано В.В. Новожиловым [1]. Представление уравнений в комплексной форме позволило сократить вдвое число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений. Попытка построения аналогичного комплексного представления исходных дифференциальных уравнений ортотропных оболочек натолкнулась на следующую трудность: появление комплексно-сопряженных неизвестных функций, что не позволило сократить число и порядок исходной системы дифференциальных уравнений. Но тем не менее эта запись позволяет более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях имеется возможность вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

2. Постановка задачи

Рассмотрим комплексное преобразование исходных уравнений общей теории ортотропных оболочек (более общее преобразование сделано Ю.П. Артюхиным для многослойной оболочки, составленной из произвольного числа ортотропных слоев [2], а также в [3]). Пусть тонкая ортотропная оболочка постоянной толщины испытывает упругие деформации, малые углы поворота и прогибы. Оси ортотропии параллельны координатным линиям кривизны α_1, α_2. Считаем справедливыми гипотезы Кирхгофа — Лява. Положительными направлениями для тангенциальных усилий (растяжения/сжатия и сдвига) T_j, S и моментов (изгибающих и крутящего) M_j, H считаются направления, принятые в монографии [1].

Уравнения равновесия малого элемента оболочки в линиях кривизны α_1, α_2 имеют следующий вид [1]:

$$\begin{gathered}
L_1\left(T_1, T_2, S\right)+\frac{A_1 A_2 N_1}{R_1}+A_1 A_2 q=0,\ \left(\overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{1,2}}\right); \\
\frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial A_1 N_2}{\partial \alpha_2}\right)-\frac{T_1}{R_1}-\frac{T_2}{R_2}+q_3=0; \\
L_1\left(M_1, M_2, H\right)-A_1 A_2 N_1=0,\ \left(\overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{1,2}}\right),
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $L_1\left(T_1, T_2, S\right)=\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S-\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2$; A_j — коэффициенты Ляме; N_j — перерезывающие силы; R_j — радиусы кривизны; q_j, q_3 — касательные и нормальная нагрузки; $L_j\left(M_j, M_{3-j}, H\right)$, $(j=1,2)$ — операторы, имеющие структуру операторов $L_j\left(T_j, T_{3-j}, S\right)$, в которых вместо T_j, T_{3-j}, S поставлены соответственно M_j, M_{3-j}, S. Символ $\overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{1,2}}$ означает, что последующее выражение получается из предыдущего путем перестановки индексов.

Шестое уравнение равновесия удовлетворяется тождественно с погрешностью, не превышающей погрешности исходных гипотез.

К уравнениям (2.1) следует добавить три уравнения совместности деформаций (ε_j, ω — тангенциальные, κ_j, τ — изгибные деформации):

$$\begin{gathered}
L_1\left(\kappa_2, \kappa_1,-\tau\right)+\frac{1}{R_1} L_1\left(-\varepsilon_2,-\varepsilon_1, \frac{\omega}{2}\right)+\underline{\frac{A_1}{R_1} \frac{\partial(\omega / 2)}{\partial \alpha_2}+\frac{\omega}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}}=0,\ \left(\overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{1,2}}\right); \\
\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} L_1\left(\varepsilon_2, \varepsilon_1,-\frac{\omega}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} L_2\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2,-\frac{\omega}{2}\right)\right]+\frac{\kappa_2}{R_1}+\frac{\kappa_1}{R_2}=0.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Исключим из первых трех уравнений равновесия перерезывающие силы N_j. В соответствующих двух уравнениях совместности деформаций (2.2) опустим часть несущественных (подчеркнутых) членов порядка h/R (h — толщина; R — наименьший радиус кривизны оболочки) по сравнению с 1. Тогда из преобразованных уравнений равновесия (2.1) и совместности деформаций (2.2) следует аналогия [1]:

$$\begin{gathered}
T_1 \leftrightarrow \kappa_2; \quad T_2 \leftrightarrow \kappa_1; \quad S \leftrightarrow -\tau; \\
M_1 \leftrightarrow -\varepsilon_2; \quad M_2 \leftrightarrow -\varepsilon_1; \quad H \leftrightarrow \frac{\omega}{2}.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Соотношения упругости для ортотропных оболочек имеют вид [4]:

$$
\begin{gathered}
T_1 = B_1\left(\varepsilon_1 + \nu_2\varepsilon_2\right),\ \left(\overleftarrow{\underrightarrow{1,2}}\right); \quad S = \widetilde{G}h\omega; \\
M_1 = D_1\left(\kappa_1 + \nu_2\kappa_2\right),\ \left(\overleftarrow{\underrightarrow{1,2}}\right); \quad H = \left(\widetilde{G}h^3/6\right)\tau,
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

где $B_1 = \frac{E_1 h}{1-\nu_1\nu_2}$, $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$, $\widetilde{G}$ — модуль сдвига; E_j, ν_j — модули упругости и коэффициенты Пуассона j-го направления.

Вводя следующие комплексные величины

$$
\begin{gathered}
\widetilde{T}_1 = T_1 - i\mu\kappa_2,\ \left(\overleftarrow{\underrightarrow{1,2}}\right); \quad \widetilde{S} = S + i\mu\tau; \quad i = \sqrt{-1}; \\
\widetilde{M}_1 = M_1 + i\mu\varepsilon_2,\ \left(\overleftarrow{\underrightarrow{1,2}}\right); \quad \widetilde{H} = H - i\mu\left(\omega/2\right); \quad \mu = h^2\sqrt{\tfrac{E_1E_2}{12(1-\nu_1\nu_2)}},
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

можно (2.4) представить следующим образом:

$$
\widetilde{M}_1 = ic\left(\widetilde{T}_2 - \nu_2\overline{\widetilde{T}}_1\right); \quad \widetilde{M}_2 = ic\delta\left(\widetilde{T}_1 - \nu_1\overline{\widetilde{T}}_2\right); \quad \widetilde{H} = -ic\left[\lambda\widetilde{S} + \left(\varepsilon + \nu_2\right)\overline{\widetilde{S}}\right], \quad c = h/K. \tag{2.6}
$$

Здесь $\overline{\widetilde{T}}_1$, $\overline{\widetilde{S}}$ — комплексно-сопряженные величины.

Безразмерные величины δ, λ, ε, K полностью определяют упругие свойства материала:

$$
\delta = \frac{E_2}{E_1}; \quad K = \sqrt{12\left(1-\nu_1\nu_2\right)\delta}; \quad \lambda = \frac{E_2}{4\widetilde{G}} + \frac{\widetilde{G}\left(1-\nu_1\nu_2\right)}{E_1}; \quad \varepsilon = \frac{E_2}{4\widetilde{G}} - \frac{\widetilde{G}\left(1-\nu_1\nu_2\right)}{E_1} - \nu_2. \tag{2.7}
$$

Для изотропного материала эти параметры равны:

$$
\delta = \lambda = 1; \quad \varepsilon = 0; \quad K = \sqrt{12\left(1-\nu^2\right)}. \tag{2.8}
$$

Если допустить, что для ортотропного материала между модулем сдвига и модулями упругости существует связь

$$
\widetilde{G} = \widetilde{G}_0 = \frac{\sqrt{E_1E_2}}{2\left(1+\sqrt{\nu_1\nu_2}\right)}, \tag{2.8$'$}
$$

то $\delta = \lambda^2$; $\varepsilon = 0$; $K = \sqrt{12\left(1-\nu_1\nu_2\right)}\lambda$, и задача путем аффинного преобразования координат может быть сведена к задаче деформирования изотропной оболочки. В этом случае решение будет зависеть только от отношения модулей $\delta = E_2/E_1$. Такое решение может давать неплохие результаты, если сдвиговая деформация мало влияет на другие искомые характеристики интегрального типа.

Для дальнейших преобразований в статических уравнениях с коэффициентами $1/R_j$ используются моменты, выраженные через изменения кривизн, а в геометрических уравнениях аналогичные слагаемые с тангенциальными деформациями выражаются в соответствии с (2.4) через усилия.

Кроме того, в этих малых членах уравнений применяются приближенные равенства:

$$
\begin{gathered}
\tfrac{\partial A_1 S}{\partial\alpha_2} + \tfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}S \approx -\tfrac{\partial A_2 T_1}{\partial\alpha_1} + \tfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_2,\ \left(\overleftarrow{\underrightarrow{1,2}}\right); \\
\tfrac{\partial A_1\tau}{\partial\alpha_2} + \tfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tau \approx \tfrac{\partial A_2\kappa_2}{\partial\alpha_1} - \tfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\kappa_1,\ \left(\overleftarrow{\underrightarrow{1,2}}\right).
\end{gathered}
$$

Такая замена внесет в уравнения погрешность порядка не более $(h/R)^2$ по сравнению с единицей (для грузового члена уравнения погрешность порядка h/R). Итак, согласно этим преобразованиям и введения комплексных усилий (2.5), получим [2]:

$$
\begin{gathered}
L_1\left(\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \widetilde{S}\right) + \tfrac{ic}{R_1}\left[\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(\lambda\widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2 + \varepsilon\overline{\widetilde{T}}_1\right) - \tfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\delta\widetilde{T}_1 + \lambda\widetilde{T}_2 + \varepsilon\overline{\widetilde{T}}_2\right)\right] = -A_1A_2q_1; \\
L_2\left(\widetilde{T}_2, \widetilde{T}_1, \widetilde{S}\right) + \tfrac{ic}{R_2}\left[\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(\delta\widetilde{T}_1 + \lambda\widetilde{T}_2 + \varepsilon\overline{\widetilde{T}}_2\right) - \tfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\lambda\widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2 + \varepsilon\overline{\widetilde{T}}_1\right)\right] = -A_1A_2q_2; \\
\tfrac{\widetilde{T}_1}{R_1} + \tfrac{\widetilde{T}_2}{R_2} - \tfrac{ic}{A_1A_2}\left\{\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\tfrac{1}{A_1}\left[\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(\lambda\widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2 + \varepsilon\overline{\widetilde{T}}_1\right) - \tfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\delta\widetilde{T}_1 + \lambda\widetilde{T}_2 + \varepsilon\overline{\widetilde{T}}_2\right)\right] + \right. \\
\left. + \tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\tfrac{1}{A_2}\left[\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(\delta\widetilde{T}_1 + \lambda\widetilde{T}_2 + \varepsilon\overline{\widetilde{T}}_2\right) - \tfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\lambda\widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2 + \varepsilon\overline{\widetilde{T}}_1\right)\right]\right\} = q_3.
\end{gathered} \tag{2.9}
$$

Полагая в уравнениях (2.9) $\delta = \lambda = 1$; $\varepsilon = 0$, что соответствует случаю изотропной оболочки, получим уравнения, приведенные В.В. Новожиловым в [1]. Комплексные уравнения для ортотропных оболочек, полученные в [5], при переходе к изотропии отличаются некоторыми малыми членами от уравнений, приведенных в [1].

3. Пологие оболочки

Рассмотрим изгиб пологой оболочки нормальной нагрузкой $q_3(\alpha_1, \alpha_2)$. В этом случае в первых двух уравнениях (2.9) можно пренебречь членами уравнения с множителями $1/R_j$ по сравнению с остальными (главными). Упрощенным таким образом двум уравнениям удовлетворим с помощью комплексной функции усилий [1]:

$$\begin{gathered}\widetilde{T}_1 = -\tfrac{1}{A_2}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\tfrac{1}{A_2}\tfrac{\partial\widetilde{F}}{\partial\alpha_2}\right) - \tfrac{1}{A_1^2 A_2}\tfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tfrac{\partial\widetilde{F}}{\partial\alpha_1},\ \big(\overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{1,2}}\big);\\ \widetilde{S} = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{A_2}{A_1}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\tfrac{1}{A_2^2}\tfrac{\partial\widetilde{F}}{\partial\alpha_2}\right) + \tfrac{A_1}{A_2}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\tfrac{1}{A_1^2}\tfrac{\partial\overline{\widetilde{F}}}{\partial\alpha_1}\right)\right];\quad \widetilde{F} = F - i\mu w,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где F — вещественная функция усилий; w — прогиб.

Вводя усилия (3.1) в третье уравнение (2.9), получим:

$$\begin{gathered}\tfrac{ic}{A_1A_2}\left\{\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\tfrac{A_2}{A_1}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\nabla_1^2\widetilde{F} + \tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\tfrac{A_1}{A_2}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\nabla_2^2\widetilde{F} + \tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\tfrac{1}{A_1}\tfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\nabla_1^2\widetilde{F} - \nabla_2^2\widetilde{F}\right)\right] + \right.\\ \left. + \tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[\tfrac{1}{A_2}\tfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\nabla_2^2\widetilde{F} - \nabla_1^2\widetilde{F}\right)\right] + \varepsilon\nabla_3^4\overline{\widetilde{F}}\right\} - D\Big(\widetilde{F}\Big) = q_3,\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{gathered}\nabla_1^2 = \tfrac{1}{A_1A_2}\left\{\lambda\left[\tfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\tfrac{1}{A_1}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\right) + A_1\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\tfrac{1}{A_2}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\right] + \big[\overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{1,2}}\big]\right\};\\ \nabla_2^2 = \tfrac{1}{A_1A_2}\left\{\lambda\left[\tfrac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\tfrac{1}{A_2}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) + A_2\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\tfrac{1}{A_1}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)\right] + \delta\big[\overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{1,2}}\big]\right\};\\ \nabla_3^4 = \tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\tfrac{1}{A_1}\left\{\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\tfrac{1}{A_2}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) + \tfrac{1}{A_1^2}\tfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\right] - \tfrac{1}{A_1}\tfrac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\big[\overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{1,2}}\big]\right\} + \tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\tfrac{1}{A_2}\big\{\overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{1,2}}\big\};\\ D(\,) = \tfrac{1}{A_1A_2}\left[\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\tfrac{A_2}{R_2A_1}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\right) + \tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\tfrac{A_1}{R_1A_2}\tfrac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\right].\end{gathered}$$

Пологие оболочки, прямоугольные в плане, отнесем к декартовой системе координат $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$. Поэтому $A_1 = A_2 = 1$ и уравнение (3.2) примет вид:

$$ic\left(\frac{\partial^4\widetilde{F}}{\partial x^4} + 2\lambda\frac{\partial^4\widetilde{F}}{\partial x^2\partial y^2} + \delta\frac{\partial^4\widetilde{F}}{\partial y^4} + 2\varepsilon\frac{\partial^4\overline{\widetilde{F}}}{\partial x^2\partial y^2}\right) - \nabla_k^2\widetilde{F} = q_3, \tag{3.3}$$

где $\nabla_k^2 = k_2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $k_j = \frac{1}{R_j}$.

Уравнение (3.3) не отличается от уравнения, приведенного в [5].

4. Пологие оболочки вращения

Пусть оболочка получена вращением полого меридиана вокруг полюса. Причем оболочка обладает криволинейной ортотропией: вдоль меридиана и по окружности. Полюс является особой точкой и может быть исключен из рассмотрения. Уравнения равновесия такой оболочки в комплексной форме, отнесенной к полярным координатам ρ, θ, можно получить из (3.2), полагая $\alpha_1 = \rho$; $\alpha_2 = \theta$; $A_1 = 1$; $A_2 = \rho$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\nabla_1^2\widetilde{F} + \left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\nabla_2^2\widetilde{F} + \frac{i}{c}\nabla_R^2\widetilde{F} + \varepsilon\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right)\overline{\widetilde{F}} = -\frac{i}{c}q_3, \tag{4.1}$$

где

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \lambda\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right);\ \nabla_2^2 = \lambda\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \delta\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right);\ \nabla_R^2 = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho}{R_2}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{R_1\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right].$$

Связь между комплексными усилиями и комплексной функцией усилий $\widetilde{F}$ осуществляется следующими соотношениями:

$$\widetilde{T}_1 = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\theta^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho};\quad \widetilde{T}_2 = -\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\rho^2};\quad \widetilde{S} = \frac{1}{2}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\rho\partial\theta}\right]. \tag{4.2}$$

Уравнения (4.1) и соотношения (4.2) справедливы для общего случая деформации оболочки. Для осесимметричной деформации члены уравнения с комплексно-сопряженной функцией $\overline{\widetilde{F}}$ пропадают.

5. Осесимметричная деформация пологой сферической оболочки

Для решения многих задач теории круглых пластин, сферических и конических оболочек вращения эффективно используются гипергеометрические функции.

Плодотворность привлечения для указанной цели теории гипергеометрических функций объясняется тем, что разрешающие дифференциальные уравнения при определенных профилях пластин и законах изменения кривизны оболочек вращения, имеющих практическое значение, приводятся к хорошо изученным гипергеометрическим уравнениям. В то же время использование многочисленных соотношений между этими функциями дает возможность существенно улучшать решения: усиливать сходимость и сокращать число рядов, подлежащих суммированию — операции с успехом реализуемые, например, в пакете символьной математики WolframMathematica [6; 7]. Ниже приведены результаты по применению гипергеометрических функций в теории оболочек.

5.1. Сферическая оболочка под действием распределённой нагрузки

Из уравнения равновесия в комплексной форме (4.1) в силу осевой симметрии задачи получим:

$$\frac{d^4\widetilde{F}}{d\rho^4}+\frac{2}{\rho}\frac{d^3\widetilde{F}}{d\rho^3}+n^2\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\widetilde{F}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho^3}\frac{d\widetilde{F}}{d\rho}\right)+ia^2\left(\frac{d^2\widetilde{F}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\widetilde{F}}{d\rho}\right)=-\frac{i}{c}q_3\left(\rho\right). \tag{5.1}$$

Здесь $n=\nu=\delta=\frac{E_2}{E_1}$; $a^2=\frac{1}{cR}$; $c=\frac{h}{\sqrt{12(1-\nu_1\nu_2)\delta}}$.

Рассмотрим пологую сферическую оболочку под действием равномерно распределенной нагрузки

$$q_3=-q=\mathrm{const}=-\frac{q\rho}{\rho}.$$

Представим уравнение (5.1) в следующем виде:

$$\frac{d}{d\rho}\left\{\rho\left[\frac{d^2\widetilde{f}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\widetilde{f}}{d\rho}+\left(ia^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)\widetilde{f}\right]\right\}=\widetilde{C}\rho, \tag{5.2}$$

где $\widetilde{f}=\frac{d\widetilde{F}}{d\rho}$; $\widetilde{C}=\frac{iq}{c}$.

Найдем решение однородного уравнения (5.2). Так как выражение в прямых скобках есть уравнение Бесселя, то двумя частными решениями однородного уравнения (5.2) будут функции Бесселя первого и второго рода $J_n\left(\sqrt{i}a\rho\right)$ и $Y_n\left(\sqrt{i}a\rho\right)$. Третье частное решение однородного уравнения получим, интегрируя (5.2) при $\widetilde{C}=0$:

$$\frac{d^2\widetilde{f}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\widetilde{f}}{d\rho}+\left(ia^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)\widetilde{f}=\frac{C}{\rho}. \tag{5.3}$$

Полагая в (5.3) $C=\sqrt{i}a$ и делая замену переменной $z=\sqrt{i}a\rho$, приведем (5.3) к виду:

$$\frac{d^2\widetilde{f}}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\widetilde{f}}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)\widetilde{f}=\frac{1}{z}. \tag{5.4}$$

Частным интегралом уравнения (5.4) является функция Ломмеля $s_{0,n}\left(z\right)$ [8]. Функции $J_n\left(z\right)$, $Y_n\left(z\right)$, $s_{0,n}\left(z\right)$ оказываются линейно независимыми [9] и их можно использовать для построения общего решения однородного уравнения (5.2).

Для определения частного решения уравнения (5.2) проинтегрируем его по ρ:

$$\frac{d^2\widetilde{f}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\widetilde{f}}{d\rho}+\left(ia^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)\widetilde{f}=\frac{\widetilde{C}\rho}{2}. \tag{5.5}$$

Уравнению (5.5), когда правая часть представляет любую степенную функцию от ρ, удовлетворяет функция Ломмеля $S_{m,n}\left(z\right)$:

$$w''+\frac{w'}{z}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)w=z^{m-1}. \tag{5.6}$$

Поэтому частным решением уравнения (5.5), а следовательно уравнения (5.2), будет функция Ломмеля $S_{2,n}\left(z\right)$. Функция Ломмеля связана с обобщенной гипергеометрической функцией, которая успешно табулирована в пакете WolframMathematica [6; 7] и вычисляется как обычная тригонометрическая функция:

$$s_{m,n}\left(z\right)=\frac{z^{m+1}}{\left[\left(m+1\right)^2-n^2\right]}\,{}_1F_2\left[\left\{1\right\};\left\{\frac{m-n+3}{2},\frac{m+n+3}{2}\right\};-\frac{z^2}{4}\right]. \tag{5.7}$$

Следовательно, общее решение уравнения (5.1) для равномерной нагрузки примет вид:

$$\widetilde{F}\left(\rho\right)=\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2\int J_n\left(z\right)d\rho+\widetilde{C}_3\int Y_n\left(z\right)d\rho+\widetilde{C}_4\int s_{0,n}\left(z\right)d\rho-\frac{iq}{2}cR^2\int s_{2,n}\left(z\right)dz. \tag{5.8}$$

Рассмотрим теперь пологую сферическую оболочку под действием неравномерной нагрузки.
На оболочку действует неравномерное давление

$$q_3(\rho) = -\frac{q\rho}{\rho}\left(1 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_l\xi^l\right) = -\frac{q\rho}{\rho} f(\xi), \tag{5.9}$$

где $f(\xi)$ — полином степени l, $f(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{l} a_k\xi^k$, $a_0 = 1$, $\xi = \frac{\rho}{b}$, другие коэффициенты a_k — заданы, b — радиус плана оболочки.

При $l = 0$ получим предыдущий случай равномерного нагружения. Для нашего случая (5.9) уравнение (5.5) при $\rho = \frac{z}{\sqrt{i}a}$ примет вид:

$$\widetilde{f}''(z) + \frac{1}{z}\widetilde{f}'(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)\widetilde{f}(z) = \frac{\widetilde{C}}{\left(\sqrt{i}a\right)^3}\sum_{k=0}^{l}\frac{a_k}{(k+2)}\frac{z^{k+1}}{\left(\sqrt{i}g\right)^k}, \tag{5.10}$$

где

$$g = ab = \sqrt[4]{12\left(1 - \nu_1\nu_2\right)\delta}\sqrt{K_R}; \quad K_R = \frac{b^2}{Rh}. \tag{5.11}$$

Сменим немой индекс суммирования k на m из условия $k + 1 = m - 1$. Откуда $k = m - 2$, и сумму перепишем следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{l}\frac{a_k}{(k+2)}\frac{z^{k+1}}{\left(\sqrt{i}g\right)^k} = \sum_{m=2}^{l+2}\frac{a_{m-2}}{m}\frac{z^{m-1}}{\left(\sqrt{i}g\right)^{m-2}}. \tag{5.12}$$

Из (5.6), (5.10) и (5.12) следует частное решение для нагрузки (5.9):

$$f_q(z) = \frac{\widetilde{C}}{\left(\sqrt{i}a\right)^3}\sum_{m=2}^{l+2}\frac{a_{m-2}}{m\left(\sqrt{i}g\right)^{m-2}} s_{m,n}(z) = \frac{\widetilde{C}}{\left(\sqrt{i}a\right)^3} f_{l,n}(z).$$

Окончательно общий интеграл для неравномерного поперечного давления примет вид:

$$\widetilde{F}(\rho) = \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2\int\limits_0^\rho J_n(z)\,d\rho + \widetilde{C}_3\int\limits_0^\rho Y_n(z)\,d\rho + \widetilde{C}_4\int\limits_0^\rho s_{0,n}(z)\,d\rho + \int\limits_0^\rho f_q(z)\,dz. \tag{5.13}$$

Для оболочки без отверстия в полюсе постоянные

$$\widetilde{C}_3 = \widetilde{C}_4 = 0.$$

В случае скользящего защемленного контура

$$\widetilde{F}(b) = \frac{d\widetilde{F}(b)}{d\rho} = 0,$$

получим решение вида:

$$\widetilde{F} = F - i\mu w = \frac{\widetilde{C}}{\left(\sqrt{i}a\right)^3}\left\{\frac{f_{l,n}\left(\sqrt{i}g\right)}{J_n\left(\sqrt{i}g\right)}\int\limits_\rho^b J_n(z)\,d\rho - \int\limits_\rho^b f_{l,n}(z)\,d\rho\right\}. \tag{5.14}$$

Бесселевы и гипергеометрические функции представляют собой сходящиеся ряды, поэтому легко интегрируются:

$$\Phi(\xi, n, g) = \int J_n\left(\sqrt{i}g\xi\right)d\xi = \left(\frac{\sqrt{i}g\xi}{2}\right)^n\frac{\xi}{\Gamma(n+2)}\,{}_1F_2\left\{\left\{\frac{n+1}{2}\right\};\left\{n+1, \frac{n+3}{2}\right\}; -i\left(\frac{g\xi}{2}\right)^2\right\};$$

$$S_{m,n}(\xi, g) = \int S_{m,n}\left(\sqrt{i}g\xi\right)d\xi =$$

$$= \frac{\xi\left(\sqrt{i}g\xi\right)^{m+1}}{(m+2)\left[(m+1)^2 - n^2\right]}\,{}_2F_3\left\{\left\{1, 1 + \frac{m}{2}\right\};\left\{2 + \frac{m}{2}, \frac{3+m+n}{2}, \frac{3+m-n}{2}\right\}; -i\left(\frac{g\xi}{2}\right)^2\right\}.$$

Выделяя мнимую часть уравнения (5.14) с учетом введенных обозначений интегралов, найдем прогиб:

$$\widetilde{w}(\xi) = \tfrac{1}{g^3}\mathrm{Im}\left[i^{3/2}\left\{\tfrac{f_{l,n}\left(\sqrt{i}g\right)}{J_n\left(\sqrt{i}g\right)}\left[\Phi(1,n,g) - \Phi(\xi,n,g)\right] - \sum_{m=2}^{l+2}\tfrac{a_{m-2}}{m\left(\sqrt{i}g\right)^{m-2}}\left[S_{m,n}(1,g) - S_{m,n}(\xi,g)\right]\right\}\right]; \quad \widetilde{w} = \tfrac{wD_1}{qb^4}. \tag{5.15}$$

При $l = 0$, что соответствует равномерному давлению, сумма превращается в один член ряда, а $m = 2$:

$$f_{0,n}\left(\sqrt{i}g\right) = \frac{1}{2}s_{2,n}\left(\sqrt{i}g\right); \quad S_{m,n}(\xi, g)|_{m=2} = S_{2,n}(\xi, g).$$

В этом случае безразмерный прогиб

$$\widetilde{w}(\xi) = \frac{1}{2g^3}\mathrm{Im}\left[i^{3/2}\left\{\frac{s_{2,n}\left(\sqrt{i}g\right)}{J_n\left(\sqrt{i}g\right)}\left[\Phi(1,n,g) - \Phi(\xi,n,g)\right] - \left[S_{2,n}(1,g) - S_{2,n}(\xi,g)\right]\right\}\right], \tag{5.16}$$

а прогиб в вершине оболочки вычисляется по формуле:

$$\widetilde{w}(0) = \frac{1}{2g^3}\mathrm{Im}\left[i^{3/2}\left\{\frac{s_{2,n}\left(\sqrt{i}g\right)}{J_n\left(\sqrt{i}g\right)}\Phi(1,n,g) - S_{2,n}(1,g)\right\}\right]. \tag{5.17}$$

Рассмотрим несколько композитных материалов (однонаправленные композиты на основе эпоксидной смолы) [10] с преобладающей жесткостью армирования волокон по радиусу:

1) углепластик (волокна AS);

2) стеклопластик (Е-волокна);

3) органопластик (кевлар-49);

4) углепластик (волокна IM6);

5) материал, по свойствам близкий к изотропному.

Механические характеристики приведенных в [10] материалов следующие:

1) $n = 0{,}064$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}019$;

2) $n = 0{,}235$, $\nu_1 = 0{,}26$, $\nu_2 = 0{,}061$;

3) $n = 0{,}072$, $\nu_1 = 0{,}33$, $\nu_2 = 0{,}024$;

4) $n = 0{,}056$, $\nu_1 = 0{,}32$, $\nu_2 = 0{,}018$;

5) $n = 0{,}98$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}294$.

Достоверность формул (5.16) и (5.17) исследуем на примере расчета сферической оболочки, изготовленной из материала со свойствами, близкими к изотропному (материал № 5) [10], для параметра кривизны $K_R = 1$.

Согласно (5.17) для этого материала и кривизны $\widetilde{w}(0) = -0{,}01507$. Сопоставим этот результат с численным значением прогиба $\overline{w}(0) = \frac{\zeta}{\overline{q}}$ изотропной сферической оболочки в [11], вычисленным методом конечных разностей (МКР), где $\zeta = \frac{w(0)}{h}$; $\overline{q} = \frac{qb^4}{E_1h^4}$ для такого же параметра кривизны. При $\zeta = 0{,}124$ и $\overline{q} = 0{,}75$ в [11] значение $\widetilde{w}(0) = \frac{\overline{w}(0)}{12(1-\nu_1\nu_2)} = -0{,}01511$, что отличается на 0,3 % от приведенного в настоящей статье значения, вычисленного по формуле (5.17).

Расположим волокна сферической оболочки, изготовленной из композитного материала (материал № 4) [10], сначала вдоль радиуса сферической оболочки, а затем — по окружности. В первом случае жесткость оболочки уменьшится вдвое $\widetilde{w}(0) = -0{,}03808$, а во втором случае увеличится на два порядка $\widetilde{w}(0) = -0{,}0003125$, по сравнению с изотропией.

Выводы

В статье была исследована методика использования комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек, которая позволила существенно сократить число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений, даже несмотря на появление комплексно-сопряженных неизвестных функций. Несмотря на это, предложенная методика позволила более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях появилась возможность даже вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь, поэтому для указанных случаев были исследованы пологие ортотропные сферические оболочки вращения под действием различных нагрузок. В предельном случае были получены результаты и для изотропной оболочки.

Литература

[1] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Москва: Судпромгиз, 1962. 431 с. URL: https://bookree.org/reader?file=661745.

[2] Артюхин Ю.П. Расчет однослойных и многослойных ортотропных оболочек на локальные нагрузки // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во КГУ, 1966. Вып. 4. С. 91–110. URL: http://mi.mathnet.ru/kutpo593.

[3] Артюхин Ю.П., Великанов П.Г. Действие локальных нагрузок на ортотропную сферическую и коническую оболочки вращения // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: материалы Всероссийского семинара. Казань: Изд-во КГУ, 2008. С. 22–23. URL: https://repository.kpfu.ru/?p_id=9408.

[4] Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Физматгиз, 1961. 384 с. URL: https://bookree.org/reader?file=438699.

[5] Стэнеску К., Виссарион В. Статико-геометрическая аналогия для тонких упругих оболочек с ортотропией материала и ее применение к расчету пологих оболочек и цилиндрических оболочек круглого сечения // Revue de Mechanique Appliquee. (RPR), 1958. Vol. 3, № 1.

[6] Артюхин Ю.П., Гурьянов Н.Г., Котляр Л.М. Система Математика 4.0 и ее приложения в механике: учебное пособие. Казань: Казанское математическое общество, Изд-во КамПИ, 2002. 415 с. URL: https://repository.kpfu.ru/?p_id=53958.

[7] Великанов П.Г. Основы работы в системе Mathematica: лабораторный практикум. Казань: Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. 40 с. URL: https://elibs.kai.ru/_docs_file/806166/HTML/.

[8] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с. URL: http://www.vixri.ru/?p=991.

[9] Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Ортотропные пластины и пологие оболочки. Теория, методы решения краевых задач. Казань : КГУ, 2002. 112 с.

[10] Мэттьюз Ф., Роллингс Р. Композитные материалы. Механика и технология. Москва: Техносфера, 2004. 408 с. URL: https://www.technosphera.ru/lib/book/89?read=1.

[11] Корнишин М.С., Исанбаева Ф.С. Гибкие пластины и панели. Москва: Наука, 1968. 260 с.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-46-54

Submited: 12.04.2022
Revised: 18.05.2022
Accepted: 14.11.2022

P.G. Velikanov
Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation,
Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev-KAI, Kazan, Russian Federation
E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0845-2880
Y.P. Artyukhin
Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation
E-mail: ArtukhinYP@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6243-9145

GENERAL THEORY OF ORTHOTROPIC SHELLS. PART I

ABSTRACT

Modern mechanical engineering sets the tasks of calculating thin-walled structures that simultaneously combine sometimes mutually exclusive properties: lightness and economy on the one hand and high strength and reliability on the other. In this regard, the use of orthotropic materials and plastics seems quite justified.

The article demonstrates the complex representation method of the equations of the orthotropic shells general theory, which allowed in a complex form to significantly reduce the number of unknowns and the order of the system of differential equations. A feature of the proposed technique for orthotropic shells is the appearance of complex conjugate unknown functions. Despite this, the proposed technique allows for a more compact representation of the equations, and in some cases it is even possible to calculate a complex conjugate function. In the case of axisymmetric deformation, this function vanishes, and in other cases the influence of the complex conjugate function can be neglected.

Verification of the correctness of the proposed technique was demonstrated on a shallow orthotropic spherical shell of rotation under the action of a distributed load. In the limiting case, results were obtained for an isotropic shell as well.

Key words: mechanics; differential equations; orthotropic plates and shells; shallow shells of rotation; axisymmetric deformation; Bessel equation and functions; Lommel function; hypergeometric functions.

Citation. Velikanov P.G., Artyukhin Y.P. General theory of orthotropic shells. Part I. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 1–5. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-46-54. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Peter G. Velikanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Theoretical Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation; assistant professor of the Department of Jet Engines and Power Plants, Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev-KAI, 10, K. Marx Street, Kazan, 420111, Russian Federation.

Yuri P. Artyukhin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Theoretical Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation.

References

[1] Novozhilov V.V. Theory of thin shells. Moscow: Sudpromgiz, 1962, 431 p. Available at: https://bookree.org/reader?file=661745. (in Russ.)

[2] Artyukhin Y.P. Calculation of single-layer and multilayer orthotropic shells for local loads. *Research on the theory of plates and shells.* Kazan: Izd.-vo KGU, 1966, issue 4, pp. 91–110. Available at: http://mi.mathnet.ru/kutpo593. (in Russ.)

[3] Artyukhin Y.P., Velikanov P.G. Effect of local loads on orthotropic spherical and conical shells of rotation. In: *Analytical mechanics, stability and motion control: materials of the All-Russian seminar.* Kazan: Izd.-vo KGU, 2008, pp. 22–23. Available at: https://repository.kpfu.ru/?p_id=9408. (In Russ.)

[4] Ambartsumyan S.A. General theory of anisotropic shells. Moscow: Fizmatgiz, 1961, 384 p. Available at: https://bookree.org/reader?file=438699. (In Russ.)

[5] Stanescu K., Vissarion V. Static-geometric analogy for thin elastic shells with orthotropy of the material and its application to the calculation of flat shells and cylindrical shells of circular cross-section. *Revue de Mechanique Appliquee (RPR)*, 1958, vol. 3, no. 1. (In Russ.)

[6] Artyukhin Yu.P., Guryanov N.G., Kotlyar L.M. The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics: textbook. Kazan: Kazanskoe matematicheskoe obshchestvo. Izd-vo KamPI, 2002, 415 p. Available at: https://repository.kpfu.ru/?p_id=53958. (In Russ.)

[7] Velikanov P.G. Fundamentals of work in the Mathematics system: laboratory workshop. Kazan: Izd-vo Kazanskogo gos. tekhn. un-ta, 2010, 40 p. Available at: https://elibs.kai.ru/_docs_file/806166/HTML/. (In Russ.)

[8] Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums of series and products. Moscow: Nauka, 1971, 1108 p. Available at: http://www.vixri.ru/?p=991. (In Russ.)

[9] Guryanov N.G., Tyuleneva O.N. Orthotropic plates and flat shells. Theory, methods of solving boundary value problems. Kazan: KGU, 2002, 112 p. (In Russ.)

[10] Matthews F., Rollings R. Composite materials. Mechanics and technology. Moscow: Tekhnosfera, 2004, 408 p. Available at: https://www.technosphera.ru/lib/book/89?read=1. (In Russ.)

[11] Kornishin M.S., Isanbayeva F.S. Flexible plates and panels. Moscow: Nauka, 1968, 260 p. (In Russ.)