 Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-32-39

УДК 517.928

Дата: поступления статьи: 12.09.2022
после рецензирования: 25.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

В.А. Соболев
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация;
ФИЦ "Информатика и управление" РАН РФ, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: v.sobolev@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7327-7340

РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СЛЕЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМОВ[1]

АННОТАЦИЯ

В статье метод декомпозиции, основанный на применении теории быстрых и медленных интегральных многообразий, применяется для анализа задачи оптимального слежения. Рассматривается сингулярно возмущенная задача оптимального слежения с заданной эталонной траекторией в случае неполной информации о векторе состояния при наличии случайных внешних возмущений.

Ключевые слова: сингулярные возмущения; интегральные многообразия; оптимальное слежение; редукция; асимптотическое разложение; дифференциальные уравнения; быстрые переменные; медленные переменные.

Цитирование. Соболев В.А. Редукция задачи оптимального слежения при наличии шумов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 32–39. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-32-39.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Владимир Андреевич Соболев — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Известно, что линейно-квадратичная задача слежения ставится следующим образом (см., например, [1]). Рассматривается управляемая система вида

$$\dot{X} = \mathbb{A}(t)X + \mathbb{B}(t)u + F(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

$$Y = \mathbb{C}(t)X. \tag{2}$$

Здесь X — вектор состояния системы, вектор Y — вектор наблюдаемых параметров, u — вектор управляющих параметров, F — вектор внешних возмущений. Эталонное движение задается в явном виде $\xi = \xi(t)$, а функционал качества имеет вид

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\left(\mathbb{C}(t)X(t)) - \xi(t)\right)^T \mathbb{Q}(t) \left(\mathbb{C}(t)X(t)) - \xi(t)\right) + u^T(t)\mathbb{R}(t)u(t) \right] dt \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 21-11-00202, https://rscf.ru/project/21-11-00202.

или

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[(Y(t) - \xi(t))^T \, \mathbb{Q}(t) \, (Y(t) - \xi(t)) + u^T(t)\mathbb{R}(t)u(t) \right] dt. \tag{4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что все матричные функции, входящие в (1)–(3) непрерывно дифференцируемы при $t \in [t_0, t_1]$, тогда решение данной задачи дается следующей формулой для оптимального управления

$$u_{opt} = -\mathbb{R}^{-1}\mathbb{B}^T(Px + \chi).$$

Здесь P – решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} + P\mathbb{A} + \mathbb{A}^T P - P\mathbb{S}P + \mathbb{M} = 0, \quad P(t_1) = 0,$$

$\mathbb{S} = \mathbb{B}\mathbb{R}^{-1}\mathbb{B}^T$, $\mathbb{M} = \mathbb{C}^T\mathbb{Q}\mathbb{C}$, а χ – решение линейной дифференциальной системы

$$\dot{\chi} = -(\mathbb{A} - \mathbb{S}P)^T\chi + \mathbb{C}^T\mathbb{Q}\xi - PF = 0, \quad \chi(t_1) = 0.$$

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\varepsilon\ddot{x} - A(t)x - H(t)\dot{x} = B(t)u + f(t).$$

$$y = C(t)x, \quad x(t_0) = x_{10}, \quad \dot{x}(t_0) = x_{20}.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, эталонное движение задается функцией $\xi = \xi(t)$, а функционал качества имеет вид

$$J = \int\limits_{0}^{t_1} \left[(C(t)x(t) - \xi(t))^T \, Q(t) \, (C(t)x(t) - \xi(t)) + u^T(t)R(t)u(t) \right] dt. \tag{5}$$

Полагая $\dot{x} = x_1$, приходим к задаче вида (1)–(3) при

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \varepsilon^{-1}A & \varepsilon^{-1}H \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}B \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2}S \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}f \end{pmatrix}, \quad S = BR^{-1}B^T, \quad M = C^TQC.$$

Представим P и χ в следующем виде:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^T & \varepsilon P_3 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \varepsilon\chi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда для матриц P_1, P_2, P_3 получается нелинейная система матричных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= -P_2A - A^TP_2^T + P_2SP_2^T - M_1 = F_1(P_1, P_2, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{P}_2 &= -P_1 - P_2H - A^TP_3 + P_2SP_3 = f(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{P}_3 &= -P_3H - A_4^TP_3 + P_3SP_3 - \varepsilon(P_2^T + P_2) = F_3(P_2, P_3, t, \varepsilon) \end{aligned} \tag{6}$$

с граничными условиями

$$P_1(t_1) = 0, \;\; P_2(t_1) = 0, \;\; P_3(t_1) = 0,$$

а система уравнений для χ_1 и χ_2 имеет вид

$$\dot{\chi}_1 = -(A - SP_2^T)^T\chi_2 + C_1^TQ\xi - P_2f, \tag{7}$$

$$\varepsilon\dot{\chi}_2 = -\chi_1 - (H - SP_3)^T\chi_2 - P_3f \tag{8}$$

с граничными условиями

$$\chi_1(t_1) = 0, \;\; \chi_2(t_1) = 0.$$

Для анализа задач управления с сингулярными возмущениями обычно применяется метод пограничных функций Васильевой (см. обзоры [2–4]). В настоящей статье будет применен метод декомпозиции [5]. Суть метода декомпозиции состоит в следующем. При некоторых естественных предположениях о гладкости и нормальной гиперболичности сингулярно возмущенная система

$$\dot{X} = F(X, Y, t, \varepsilon), \varepsilon\dot{Y} = G(X, Y, t, \varepsilon)$$

преобразованием

$$Y = Z + L(X, t, \varepsilon), \quad X + V + \varepsilon\Pi(V, Z, t, \varepsilon) \quad (\Pi(V, 0, t, \varepsilon) \equiv 0)$$

приводится к виду

$$\dot{V} = F(V, L(V, t, \varepsilon), \quad \varepsilon\dot{Z} = W((V, Z, t, \varepsilon) \quad (W(V, 0, t, \varepsilon) \equiv 0),$$

в котором первое уравнение не зависит от быстрой переменной, а решениями второго уравнения являются так называемые правые пограничные функции, для которых справедливы оценки типа $\|Z(t, \varepsilon)\| \leqslant \leqslant C \exp\left(c(t - t_1)/\varepsilon\right)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ при не зависящих от малого параметра числах c и C $(0 < c,\ 1 \leqslant C\ )$. При этом L соответствует медленному интегральному многообразию исходной системы, а $\varepsilon\Pi$ — быстрому многообразию некоторой вспомогательной системы. При этом переменная V соответствует регулярной составляющей решения исходной системы, а переменная Z — погранслойной составляющей. Важно отметить, что если $Z = O(\varepsilon)$ при $t = t_1$, то и функция Z содержит в качестве множителя малый параметр. Матричная функция L удовлетворяет так называемому *уравнению инвариантности*

$$\varepsilon\frac{\partial L}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial L}{\partial X}F(X, L, t, \varepsilon) = G(X, L, t, \varepsilon).$$

Следует отметить, что применение в реальных системах управления управляющих воздействий с использованием пограничных функций далеко не всегда целесообразно, так как предполагает резкое изменение напряжения в цепях управления на очень коротком промежутке времени. С другой стороны, отказ от использования таких функций может незначительно сказываться на погрешности функционала качества. Ниже будет показано, что субоптимальное управление, не содержащее правых пограничных функций, приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале (5), что вполне приемлемо с прикладной точки зрения.

1. Оценка погрешности функционала

Для оценки погрешности при построении субоптимального управления функционал (3) можно представить в следующем виде:

$$J = \int_0^{t_f} \left[(C(t)x(t) - \xi(t))^T Q(t) \left(C(t)x(t)) - \xi(t)\right) + u^T(t)R(t)u(t) \right] dt =$$

$$= \int_0^{t_f} \left[\left(u + R^{-1}B^T(t)P(t)x(t) + R^{-1}B^T(t)\chi(t)\right)^T R(t) \left(u + R^{-1}B^T(t)P(t)x(t) + R^{-1}B^T(t)\chi(t)\right) \right] dt +$$

$$+ x^T(0)P(0)x(0) + 2x^T(0)\chi(0) + \kappa(0).$$

Здесь

$$\dot{\kappa} = \chi^T S \chi - \xi^T Q \xi - 2f^T \chi$$

с условием на конце рассматриваемого промежутка $\kappa(t_f) = 0$, т. е.

$$\kappa(0) = -\int_0^{t_f} \left[\chi^T S \chi - \xi^T Q \xi - 2f^T \chi\right] dt.$$

Для доказательства этого факта достаточно использовать непосредственно проверяемое равенство

$$(C(t)x(t) - \xi(t))^T Q(t) \left(C(t)x(t)) - \xi(t)\right) + u^T(t)R(t)u(t) =$$

$$= \left(u + R^{-1}B^T(t)x(t) + R^{-1}B^T(t)\chi(t)\right)^T R(t) \left(u + R^{-1}B^T(t)x(t) + R^{-1}B^T(t)\chi(t)\right) -$$

$$-\frac{d}{dt}\left(x^T(t)P(t)x(t) + 2x^T(t)\chi(t) + \kappa(t)\right).$$

Легко видеть, что минимальное значение J_{opt} определяется равенством

$$J_{opt} = x^T(0)P(0)x(0) + 2x^T(0)\chi(0) + \kappa(0).$$

Пусть каким-либо способом построено субоптимальное управление

$$u_s = -R^{-1}B^T(P_s x_s + \chi_s)$$

с соответствующими приближенными выражениями для вектора состояния (x_s), коэффициента усиления (P_s) и вектора χ (χ_s) (вместо индекса $_{subopt}$ используется индекс $_s$). Введем следующие обозначения:

$$\Delta x = x_s - x_{opt},\ \ \Delta P = P_s - P_{opt},\ \ \Delta\chi = \chi_s - \chi_{opt},\ \ \Delta J = J_s - J_{opt}.$$

Отсюда следует, что если вместо оптимального управления используется приближенное (субоптимальное) управление

$$u = -R^{-1}B^T(P_s x_s + \chi_s),$$

то возникающая при этом погрешность функционала качества ΔJ представима в следующем виде:

$$\Delta J = J_s - J_{opt} = \int\limits_0^{t_f} [(R^{-1}B^T(\Delta P x_s + \Delta\chi))^T R(R^{-1}B^T(\Delta P x_s + \Delta\chi))]dt+$$

$$+x_s^T(0)P_s(0)x_s(0) + 2x_s^T(0)\chi_s(0) + \kappa_s(0)-$$

$$-[x_0^T(P_s(0) - \Delta P(0))x_0 + 2x_0^T(\chi_s(0) - \Delta\chi(0)) + \kappa_s(0) - \Delta\kappa_s(0)].$$

Для краткости аргументы у функций под знаком интеграла опущены.

Полагая $x_s(0) = x_0$ и используя выражение для κ, получаем

$$\begin{gathered} \Delta J = \int\limits_0^{t_f} (\Delta P x_s + \Delta\chi))^T S(\Delta P x_s + \Delta\chi))]dt+ \\ +x_0^T\Delta P(0)x_0 + 2x_0^T\Delta\chi(0) + \int\limits_0^{t_f}\left[2\chi^T S\Delta\chi - 2f^T\Delta\chi\right]dt. \end{gathered} \tag{9}$$

Следует заметить, что полученная формула не связана с конкретным выбором приближений и может применяться для оценки погрешности при применении как асимптотических, так и численных методов приближенного анализа.

Если, например, рассмотреть случай регулярной зависимости матричных и векторных функций, входящих в (1), (2) и (3) от малого параметра, в предположении, что эти функции достаточное число раз дифференцируемы по своим аргументам, то можно применить эту формулу для оценки погрешности функционала при применении простейшего варианта метода малого параметра. При этом проявляется некоторое отличие от задач оптимального управления, связанное с зависимостью погрешности от $\Delta\chi$.

В рассматриваемом случае формула (9) с учетом выражений

$$\Delta P x_s = \begin{pmatrix} \Delta P_1 x_{1s} + \varepsilon\Delta P_2 x_{2s} \\ \varepsilon\Delta P_2 x_{1s} + \varepsilon\Delta P_3 x_{2s} \end{pmatrix}, \quad \Delta\chi = \begin{pmatrix} \Delta\chi_1 \\ \varepsilon\Delta\chi_2 \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{gathered} \Delta J = \int\limits_0^{t_f} \Delta_2^T S\Delta_2 dt + x_{10}^T\Delta P_1(0)x_{10} + \varepsilon(x_{20}^T\Delta P_2(0)^T x_{10} + x_{10}^T\Delta P_2(0)x_{20}+ \\ +x_{20}^T\Delta P_3(0)x_{20}) + 2x_{10}^T\Delta\chi_1(0) + 2\varepsilon x_{20}^T\Delta\chi_2(0) + 2\int\limits_0^{t_f}(\chi_2^T S\Delta\chi_2 - \varepsilon f^T\Delta\chi_2)dt. \end{gathered} \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что пренебрежение регулярными членами порядка $O(\varepsilon^2)$ и правыми пограничными функциями, содержащими в качестве множителя малый параметр, в представлении переменных P_1, P_2, P_3 и χ_1, χ_2 приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале качества.

2. Декомпозиция системы уравнений Риккати

Будем предполагать, что все собственные числа матрицы H на рассматриваемом отрезке имеют положительные вещественные части. Полагая в последних двух уравнениях системы матричных дифференциальных уравнений (6) малый параметр равным нулю, получим уравнения

$$0 = -P_1 - P_2H - A^TP_3 + P_2SP_3, \quad 0 = -P_3H - H^TP_3 + P_3SP_3.$$

Отсюда следует, что медленное интегральное многообразие этой системы имеет вид

$$P_2 = \Phi(P_1, t, \varepsilon) = -P_1H^{-1} + \varepsilon\Phi_1(P_1, t) + \varepsilon^2\dots, \quad P_3 = \varepsilon\Psi(P_1, t, \varepsilon) = \varepsilon\Psi_1(P_1, t) + \varepsilon^2\dots.$$

Приравнивая в соответствующих уравнениях инвариантности члены, содержащие множителем первую степень малого параметра, получим соотношения для определения матричных функций $\Phi_1(P_1,t)$

$$-F_1(P_1,-P_1H^{-1},t,0)-P_1\frac{d}{dt}\left(H^{-1}\right)=-\Phi_1H-A^T\Psi_1-P_1H^{-1}S\Psi_1,$$

и $\Psi_1(P_1,t)$

$$0=-\Psi_1H-H^T\Psi_1+P_1H^{-1}+\left(P_1H^{-1}\right)^T. \tag{11}$$

Последнее равенство представляет собой однозначно разрешимое матричное уравнение Ляпунова. После подстановки найденного решения Ψ_1 в предыдущее уравнение матрица Φ_1 находится путем умножения на H^{-1} соответствующих слагаемых, т. е.

$$\Phi_1=\left(F_1(P_1,-P_1H^{-1},t,0)+P_1\frac{d}{dt}\left(H^{-1}\right)-A^T\Psi_1-P_1H^{-1}S\Psi_1\right)H^{-1}. \tag{12}$$

При необходимости аналогичным образом определяются соответствующие матричные коэффициенты при более высоких степенях малого параметра.

Важно отметить, что при $t=t_1$ матричные функции P_1,P_2,P_3 обращаются в нуль. Отсюда следует, что правые пограничные функции Z_2, Z_3 в представлении матриц P_2, P_3 должны содержать в качестве множителя малый параметр. Это означает, что если при построении закона управления пренебречь правыми пограничными функциями, то в силу формулы (10) погрешность функционала качества не превысит величину $O(\varepsilon^2)$.

3. Декомпозиция линейной системы уравнений

Обратимся к системе (7)–(8) и сначала рассмотрим соответствующую однородную систему, не содержащую правых пограничных функций Z_1, Z_2, Z_3 и членов порядка $o(\varepsilon)$ у регулярных матричных функций V_2, V_3:

$$\dot\chi_1=-(A-SV_2^T)^T\chi_2,\quad \varepsilon\dot\chi_2=-\chi_1-(H-V_3)^T\chi_2,$$

где $V_2=\Phi(V_1,t,\varepsilon)=-V_1H^{-1}+\varepsilon\Phi_1(V_1,t))+O(\varepsilon^2)$, $V_3=\varepsilon\Psi(V_1,t,\varepsilon)=\varepsilon\Psi_1(V_1,t)+O(\varepsilon^2)$.

Для декомпозиции этой линейной системы можно применить известный метод приведения к блочно-диагональной форме. С этой целью сначала вводится новая быстрая переменная $y_2=\chi_2-l\chi_1$. Используемая в этой формуле матричная функция $l=l(t,\varepsilon)$ удовлетворяет несимметричному матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\varepsilon\dot l+\varepsilon l[-(A-S\Phi^T)^Tl]=I-(H-\varepsilon\Psi S)^Tl,$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра

$$l=l_0(t)+\varepsilon l_1(t)+\varepsilon^2\ldots,$$

где

$$l_0=-(H^T)^{-1},\quad l_1=(H^T)^{-1}\left[\frac{dl_0}{dt}-l_0(A^T+(H^T)^{-1}V_1S)l_0-\Psi_1S\right].$$

Для переменных χ_1, y_2 получаем систему

$$\dot\chi_1=[-(A-S\Phi^T)^T](l\chi_1+y_2),$$
$$\varepsilon\dot y_2=-[(H-\varepsilon\Psi S)^T+\varepsilon l(A-S\Phi^T)^T]y_2$$

или после выполнения транспонирования

$$\dot\chi_1=[-(A^T-\Phi S)](l\chi_1+y_2),$$

$$\varepsilon\dot y_2=-[(H^T-\varepsilon S\Psi)+\varepsilon l(A-\Phi S)]y_2.$$

На следующем шаге вводится новая медленная переменная $y_1=\chi_1-\varepsilon py_2$. При этом матричная функция $p=p(t,\varepsilon)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$\varepsilon\dot p-p[(H^T-\varepsilon S\Psi)+\varepsilon l(A-\Phi S)]=-(A^T-\Phi S)-\varepsilon(A^T-\Phi S)lp,$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра $p = p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2 \ldots$, где $p_0(t) = -(A^T - \Phi S)H^{-1}$.

В результате получаются две независимые подсистемы

$$\dot{y}_1 = [-(A^T - \Phi S)l]y_1,$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(H^T - \varepsilon S\Psi) + \varepsilon l(A - \Phi S)]y_2.$$

Для матричных функций l и p, пренебрегая членами второго и более высоких порядков в разложении по степеням малого параметра, получаем следующие представления:

$$l = l_0 + \varepsilon l_1 + O(\varepsilon^2), \quad p = p_0 + O(\varepsilon).$$

Здесь

$$p_0 = -[A + SV_1H^{-1}]^T (H^T)^{-1}.$$

Применение преобразования

$$y_2 = \chi_2 - l\chi_1, \quad y_1 = \chi_1 - \varepsilon p y_2 \tag{13}$$

к неоднородной системе (7), (8) приводит к уравнениям

$$\dot{y}_1 = [-(A + S\Phi(V_1, t, \varepsilon))^T l]y_1 + f_1 \tag{14}$$

и

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(H - \varepsilon S\Psi_1)^T + \varepsilon l_0(A - S\Phi_0(t)^T)^T]y_2 + f_2.$$

Здесь

$$f_1 = (I + \varepsilon p_0 L_0)(C^T Q\xi - \Phi(V_1, t, \varepsilon)f) - p_0(-\varepsilon\Psi_1(V_1, t)f),$$

$$f_2 = -\varepsilon\Psi_1(V_1, t, \varepsilon)f - \varepsilon L_0(C^T Q\xi - \Phi_0(t)f).$$

В этих уравнениях и выражениях для функций f_1 и f_2 опущены правые пограничные функции Z_1, Z_2, Z_3 и члены порядка $o(\varepsilon)$ у регулярных функций. Принимая во внимание, что функция f_2 содержит малый параметр в качестве множителя, получаем следующее приближенное выражение для y_2:

$$y_2 = -\varepsilon H^{-1} \left(\Psi_1(V_1, t)f - L_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f) \right),$$

в котором учтены только регулярные члены порядка $O(\varepsilon)$, а регулярные члены более высоких порядков и правые пограничные функции, которые содержат в качестве множителя малый параметр, опущены. В рассматриваемом случае формула для оптимального управления принимает вид

$$u_{opt} = -R^{-1}B^T[P_2 x + P_3 \dot{x} + \chi_2].$$

Чтобы получить погрешность порядка $O(\varepsilon^2)$ при вычислении значения функционала качества для субоптимального управления, следует использовать приближенное выражение

$$P_2 = \Phi(V_1, t, \varepsilon) \simeq \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 = -V_1 H^{-1} + \varepsilon\Phi_1(V_1, t), \quad P_3 \simeq \varepsilon\Psi_1(V_1, t). \tag{15}$$

Что касается χ_2, использование представления

$$\chi_2 = l y_1 + (I + \varepsilon l p)y_2,$$

которое вытекает из (13), и полученное выше выражение для y_2 позволяет применять следующее приближенное выражение:

$$\chi_2 = (l_0 + \varepsilon l_1)y_1 - \varepsilon H^{-1} \left(\Psi_1(V_1, t)f - L_0(C^T Q\xi - \Phi_0(t)f) \right).$$

Таким образом, система (6) имеет медленное интегральное многообразие, которое с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ включительно описывается уравнениями (15), где Ψ_1 является решением уравнения Ляпунова (11), Φ_1 задается формулой (12), а матрица V_1 представляет собой решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot{P}_1 = -P_2 A - A^T P_2^T + P_2 S P_2^T - M, \quad P_1(t_1) = 0,$$

в котором P_2 задается выражением (15). Через v_2 обозначим выражение

$$v_2 = (l_0 + \varepsilon l_1)v_1 - \varepsilon H^{-1}\left(\Psi_1(V_1,t)f - l_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f)\right), \tag{16}$$

в котором в качестве v_1 следует взять решение уравнения (14) с граничным условием $y_1(t_1) = 0$.

Суммируя вышесказанное, приходим к следующему утверждению.

Теорема. Применение субоптимального управления

$$u_s = -R^{-1}B^T[V_2 x + V_3\dot{x} + v_2],$$

где V_2 и V_3 заданы выражениями (15), а v_2 – выражением (16), приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале (5).

Выводы

В статье обсуждается возможность применения метода декомпозиции для понижения размерности задачи оптимального слежения с сингулярными и случайными возмущениями. Традиционные методы решения задач оптимального управления с сингулярными возмущениями для таких задач неприменимы, так как основываются на предположении о гладкости правых частей, которое входит в противоречие с наличием случайных возмущений. Метод декомпозиции позволяет избежать этой трудности и получить формулу для субоптимального управления.

Литература

[1] Sontag E. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, Inc., 1998. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0577-7.

[2] Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Сер.: Мат. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–77. URL: https://www.mathnet.ru/rus/intm60.

[3] Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика, 2006. № 1. С. 3–51. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15569476. EDN: https://www.elibrary.ru/ncsjrz.

[4] Naidu D.S. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theory and Applications: An Overview. // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B: Applications & Algorithms. 2002. Vol. 9. Issue 2. Pp. 233–278. Available at: https://www.d.umn.edu/ dsnaidu/Naidu_Survey_DCDISJournal_2002.pdf.

[5] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // System and Control Letters. 1984. Vol. 5. Issue 3. P. 169–179. DOI: http://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-32-39

Submited: 12.09.2022
Revised: 25.11.2022
Accepted: 05.12.2022

V.A. Sobolev

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Moscow, Russian Federation
E-mail: v.sobolev@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7327-7340

REDUCTION OF THE OPTIMAL TRACKING PROBLEM IN THE PRESENCE OF NOISE[2]

[2]The work was carried out with the financial support of the Russian scientific fund within the framework of the scientific project № 21-11-00202, https://rscf.ru/project/21-11-00202.

ABSTRACT
In this paper, the decomposition method based on the theory of fast and slow integral manifolds is used to analyze the optimal tracking problem. We consider a singularly perturbed optimal tracking problem with a given reference trajectory in the case of incomplete information about the state vector in the presence of random external perturbations.

Key words: singular perturbations; integral manifolds; integral manifold; optimal tracking; asymptotic expansion; differential equations; fast variables; slow variables.

Citation. Sobolev V.A. Reduction of the optimal tracking problem in the presence of noise *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 32–39. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-32-39. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Vladimir A. Sobolev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Sontag E. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, Inc., 1998. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0577-7.

[2] Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations in optimal control problems. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 34, issue 4, pp. 1579–1629. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01262406. EDN: https://www.elibrary.ru/xorosl. (In Russ.)

[3] Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. DOI: http://doi.org/10.1134/S0005117906010012. EDN: https://www.elibrary.ru/ljogdl. (in English; Russian original).

[4] Naidu D.S. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theory and Applications: An Overview. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems.* Series B: Applications & Algorithms, 2002, vol. 9, issue 2, pp. 233–278. Available at: https://www.d.umn.edu/ dsnaidu/Naidu_Survey_DCDISJournal_2002.pdf.

[5] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems. *System and Control Letters*, 1984, vol. 5, issue 3, pp. 169–179. DOI: http://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7.