Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 697–711
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.95+517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-697-711
EDN: ZCQCLC

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАСТЯЖЕНИЕМ И ПОВОРОТОМ АРГУМЕНТОВ

Л. Е. Россовский[1], **А. А. Товсултанов**[2,3]

[1] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[2] *Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова, Грозный, Россия*
[3] *Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия*

Аннотация. Статья посвящена задаче Дирихле в плоской ограниченной области для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка в дивергентной форме с растяжением, сжатием и поворотом аргумента старших производных искомой функции. Вопросы существования, единственности и гладкости обобщенного решения исследованы при всевозможных значениях коэффициентов и параметров преобразований в уравнении.

Ключевые слова: эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, краевая задача.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проекта № FSSF-2023-0016).

Для цитирования: *Л. Е. Россовский, А. А. Товсултанов.* Краевая задача для эллиптического функционально-дифференциального уравнения с растяжением и поворотом аргументов// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 697–711. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-697-711`

1. Введение. Основные обозначения

В теории упругости [4, 19, 23], теории многомерных диффузионных процессов [12], а также в связи с нелокальными краевыми задачами типа А. В. Бицадзе, А. А. Самарского [2, 10, 11] возникает необходимость рассматривать эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованиями аргументов старших производных, которые могут отображать некоторые точки границы внутрь области. Так, например, упругие модели конструкций, содержащих многослойные оболочки и пластины с гофрированным заполнителем, могут быть сведены к сильно эллиптическим системам дифференциально-разностных уравнений. В работах А. Л. Скубачевского была построена общая теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений: получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева и весовых пространствах, а также гладкости обобщенных решений. Показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться в области даже при бесконечно дифференцируемой правой части и сохраняется лишь в некоторых подобластях. Был обнаружен эффект появления степенных особенностей у производных решений в некоторых точках как на границе, так и внутри области. Наиболее полно эти результаты представлены в [13, 22]. Кроме того, в [13] обсуждаются приложения эллиптических функционально-дифференциальных уравнений к лазерным системам с обратной связью, а также к известной гипотезе Т. Като о квадратном корне из оператора.

Краевые задачи для эллиптических уравнений, содержащих в старшей части сжатия и растяжения независимых переменных, рассматривались в работах [5, 20] (изотропные, т. е. одинаковые по всем координатам, сжатия или растяжения), а также в [6, 7] (ортотропные сжатия: например, сжатие по одной координате и растяжение по другой). При этом краевые задачи рассматривались в областях, содержащих начало координат — неподвижную точку преобразования сжатия. Это предположение не позволяло воспользоваться уже имеющейся теорией нелокальных задач, например, свести задачу к нелокальной краевой задаче для эллиптического уравнения, а также напрямую переносить методы, развитые для дифференциально-разностных уравнений. Кроме того, в указанной ситуации не работает известный принцип локализации, основанный на разбиении единицы и широко используемый в теории краевых задач для исследования гладкости решений, доказательства априорных оценок, «замораживания» переменных коэффициентов. Переход от уравнений с изотропными сжатиями к уравнениям с ортотропными сжатиями также потребовал применения существенно иной техники. У таких уравнений был обнаружен ряд новых свойств в зависимости от структуры орбит точек области под действием соответствующей группы преобразований.

Эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, содержащее комбинацию сжатия и сдвигов аргумента, было изучено в [8]. Уравнениям, содержащим комбинацию сжатий (растяжений) и поворотов аргумента в старших производных искомой функции, посвящены работы [9, 14]. В статье [14] рассматривалась краевая задача

$$\mu u + \operatorname{div}(T(P, R_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.2}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{C}$, $f \in L_2(\Omega)$, а $T(P, R_\alpha)$ — функциональный оператор с растяжениями (сжатиями) и поворотами. Он определяется следующим образом. Вводятся унитарные в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор P, действующий по формуле

$$Pu(x) = p^{-1}u(p^{-1}x) = p^{-1}u(p^{-1}x_1, p^{-1}x_2)$$

при $p > 1$, и оператор R_α, определенный при $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой

$$R_\alpha u(x) = u(x_\alpha) = u(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha, x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha).$$

Если число α несоизмеримо с π, то полагаем $T(P, R_\alpha) = \sum a_{mk}P^mR_\alpha^k$, где суммирование производится по произвольному конечному набору целых индексов m и k (которые могут принимать значения обоих знаков) Если же α соизмеримо с π и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π, то полагаем

$$T(P, R_\alpha) = \sum a_{m0}P^m + \sum a_{m1}P^mR_\alpha + \ldots + \sum a_{m,n-1}P^mR_\alpha^{n-1},$$

где суммы берутся по произвольным конечным наборам целых индексов m. Коэффициенты a_{mk} в суммах — комплексные числа. Для корректного определения оператора $T(P, R_\alpha)$ функция, на которую действует оператор, считается продолженной нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Обозначим $\tilde{a}_{mk} = a_{mk}\cos k\alpha$ и введем функцию

$$\tilde{t}(\lambda, w) = \sum \tilde{a}_{mk}\lambda^m w^k \quad (\lambda, w \in \mathbb{C})$$

в случае, если число α несоизмеримо с π, либо функции

$$\tilde{t}_k(\lambda) = \sum \tilde{a}_{m0}\lambda^m + \sum \tilde{a}_{m1}e^{i2\pi k/n}\lambda^m + \ldots + \sum \tilde{a}_{m,n-1}e^{i2\pi(n-1)k/n}\lambda^m$$

$$(\lambda \in \mathbb{C};\ k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

если α соизмеримо с π.

Был получен следующий результат: *для всякой ограниченной области* Ω, *содержащей начало координат, условие*

$$\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda, w) > 0 \quad (|\lambda| = |w| = 1) \quad (\alpha \text{ несоизмеримо с } \pi)$$

либо

$$\operatorname{Re}\tilde{t}_k(\lambda) > 0 \quad (|\lambda| = 1;\ k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (\alpha \text{ соизмеримо с } \pi)$$

является необходимым и достаточным для существования постоянных $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ *таких, что при всех* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *выполнено неравенство*

$$\operatorname{Re}\,(T(P, R_\alpha)\nabla u, \nabla u)_{L_2^2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{1.3}$$

Неравенства, подобные (1.3), принято называть *неравенствами типа Гординга*, а соответствующие уравнения в этом случае *сильно эллиптическими.*

Пространство Соболева $H^s(\Omega)$ для натурального s состоит из всех (комплекснозначных) функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с обобщенными производными до порядка s включительно. Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \int_\Omega D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}\,dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad D^\alpha = (-i\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (-i\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}.$$

Через $\mathring{H}^s(\Omega)$ обозначается замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^s(\Omega)$. В $\mathring{H}^s(\Omega)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(u, v)'_{\mathring{H}^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=s} \int_\Omega D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}\,dx.$$

В частности, при $s = 1$ и $n = 2$,

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Big(u\bar{v} + \sum_{j=1}^2 u_{x_j}\bar{v}_{x_j}\Big)\,dx, \quad (u, v)_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{j=1}^2 u_{x_j}\bar{v}_{x_j}\,dx.$$

Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) называется функция $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\mu(u, v)_{L_2(\Omega)} - (T(P, R_\alpha)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Для сильно эллиптического уравнения (1.1) краевая задача (1.1), (1.2) фредгольмова, а ее спектр состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и располагается внутри симметричного угла с вершиной в нуле, охватывающего положительную вещественную полуось, раствора меньше π. Доказательство этих фактов, опирающееся на неравенство (1.3), проводится стандартными методами функционального анализа (подобного сорта рассуждения можно найти, например, в [5, с. 78]). Иллюстрируя полученный результат на примере уравнения

$$-\sum_{j=1}^2 \Big(u_{x_j}(x) + ap^{-1}u_{x_j}(p^{-1}x) + bu_{x_j}(-(x_1 + \sqrt{3}x_2)/2, (\sqrt{3}x_1 - x_2)/2)\Big)_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

или, коротко,

$$-\operatorname{div}((I + aP + bR_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

в котором $\alpha = 2\pi/3$, а $b \in \mathbb{R}$, получаем существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле при условии $|a| - b/4 < 1$, если $b < 0$, и при условии $|a| + b/2 < 1$, если $b > 0$. Таким образом, условия однозначной разрешимости могут быть связаны не только с абсолютной величиной коэффициента в уравнении, но и с его сигнатурой.

Для уравнения

$$-\sum_{j=1}^2 (u_{x_j}(x) + ap^{-1}u_{x_j}(p^{-1}(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha), p^{-1}(x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha))_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

или, коротко,

$$-\operatorname{div}((I + aPR_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1.4}$$

получаем следующее: каков бы ни был угол α, если $|a\cos\alpha| < 1$, то задача Дирихле имеет единственное обобщенное решение при всех $f \in L_2(\Omega)$. В частности, при $\alpha = \pi/2$ задача однозначно разрешима для любых $p > 1$ и $a \in \mathbb{C}$. То, что в данном случае условие на a и p пропадает, имеет элементарное объяснение: при формальном дифференцировании получаем

$$\sum_{j=1}^{2}(u_{x_j}(x) + ap^{-1}u_{x_j}(-x_2/p, x_1/p))_{x_j} = \Delta u(x).$$

Настоящая статья посвящена уравнению (1.4) и некоторым его модификациям. Эти уравнения будут рассмотрены более подробно и при всех значениях коэффициентов, не только в условиях сильной эллиптичности. Однако на область Ω будет наложено дополнительное условие геометрического характера. Отметим, что при отсутствии поворотов (есть только сжатия и растяжения аргументов) соответствующие результаты приведены в [5, гл. 1].

В классе функционально-дифференциальных уравнений с аффинными преобразованиями имеется прототип: уравнение пантографа $\dot y = ay(\lambda t) + by(t)$. Это уравнение и различные его обобщения в одномерном случае находят применение в самых разных областях: астрофизике [1], нелинейных колебаниях [18], биологии [15] и др. Они активно изучаются, начиная с 1970-х годов, см., например, [3, 16, 17].

2. Уравнение со сжатием и поворотом аргумента

Композицию PR_α, являющуюся унитарным оператором в $L_2(\mathbb{R}^2)$, будем обозначать P_α,

$$P_\alpha u(x) = p^{-1}u(p^{-1}x_\alpha) = p^{-1}u(p^{-1}(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha), p^{-1}(x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)).$$

Очевидно,

$$P_\alpha^* u(x) = P_\alpha^{-1}u(x) = pu(px_{-\alpha}).$$

Кроме того, для функций в $\mathbb{R}^2$ имеют место соотношения

$$\nabla P_\alpha u = p^{-1}P_\alpha \nabla_{-\alpha} u, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}(P_\alpha \nabla u) = p\cos\alpha\, \Delta P_\alpha u = p^{-1}\cos\alpha\, P_\alpha \Delta u. \tag{2.2}$$

В формуле (2.1) используется краткое обозначение $\nabla_{-\alpha}u$ для операции поворота вектора градиента на угол $(-\alpha)$:

$$\nabla_{-\alpha} u = \begin{pmatrix} u_{x_1}\cos\alpha + u_{x_2}\sin\alpha \\ -u_{x_1}\sin\alpha + u_{x_2}\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Равенства (2.1), (2.2) можно понимать как для гладких функций, так и в смысле обобщенных функций. Они проверяются непосредственно. Формула (2.2), в частности, выражает тот факт, что оператор Лапласа инвариантен относительно ортогональных преобразований вектора независимых переменных. Аналогичные формулы справедливы с участием P_α^{-1} вместо P_α:

$$\nabla P_\alpha^{-1} u = pP_\alpha^{-1}\nabla_\alpha u, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div}(P_\alpha^{-1}\nabla u) = p^{-1}\cos\alpha\, \Delta P_\alpha^{-1} u = p\cos\alpha\, P_\alpha^{-1}\Delta u. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ однородной задачи Дирихле для уравнения*

$$-\operatorname{div}((I + aP_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{2.5}$$

— то же, что обобщенное решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

Доказательство. Действительно, при $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$, интегрируя по частям и используя формулу (2.4), будем иметь

$$((I + aP_\alpha)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla u, (I + \overline{a}P_\alpha^{-1})\nabla v)_{L_2^2(\Omega)} =$$

$$= -(u, \operatorname{div}((I + \overline{a}P_\alpha^{-1})\nabla v))_{L_2(\Omega)} = -(u, (I + \overline{a}p\cos\alpha\, P_\alpha^{-1})\Delta v))_{L_2(\Omega)}.$$

В силу плотности $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$ это равенство распространяется, очевидно, на все функции $\in \mathring{H}^1(\Omega)$. С другой стороны,

$$(\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = -((I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \Delta v))_{L_2(\Omega)} = -(u, (I + \overline{a}p\cos\alpha\, P_\alpha^{-1})\Delta v))_{L_2(\Omega)}$$

при всех $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Остается полученное для $v \in C_0^\infty(\Omega)$ равенство

$$((I + aP_\alpha)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)}$$

продолжить на все функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$. □

Спектр оператора $P_\alpha : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, так же, как и оператора P, совпадает со всей единичной окружностью [5, с. 17]. При $|\lambda| > 1$ для его резольвенты справедливо представление

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}P_\alpha)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}P_\alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-(k+1)}P_\alpha^k,$$

поскольку $\|\lambda^{-1}P_\alpha\| < 1$. Таким образом,

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1}u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-(k+1)}p^{-k}u(p^{-k}x_{k\alpha}), \text{ если } |\lambda| > 1. \tag{2.6}$$

При $|\lambda| < 1$, наоборот, имеем

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1} = -P_\alpha^{-1}(I - \lambda P_\alpha^{-1})^{-1} = -P_\alpha^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k P_\alpha^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}P_\alpha^{-k},$$

поскольку $\|\lambda P_\alpha^{-1}\| < 1$. Получаем

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1}u(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}p^k u(p^k x_{-k\alpha}), \text{ если } |\lambda| < 1. \tag{2.7}$$

На основе формул (2.6), (2.7) может быть получен следующий результат, связанный с действием оператора $\lambda I - P_\alpha$ в пространствах Соболева $H^s(\Omega)$.

Лемма 2.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, инвариантная относительно преобразования координат $x \mapsto p^{-1}x_\alpha$, а именно,*

$$\Omega \subset p\Omega_{-\alpha} = \{px_{-\alpha} \in \mathbb{R}^2 : x \in \Omega\}. \tag{2.8}$$

Тогда:

а) *если $|\lambda| > 1$, то оператор $\lambda I - P_\alpha : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$ является изоморфизмом (линейным гомеоморфизмом) для всех $s = 0, 1, \ldots$;*

б) *если $|\lambda| < p^{-s}$ для некоторого $s = 0, 1, \ldots$, то изоморфизмом будет оператор $\lambda I - P_\alpha : \mathring{H}^s(\Omega) \to \mathring{H}^s(p\Omega_{-\alpha})$.*

Доказательство.

а) Очевидно, оператор $\lambda I - P_\alpha : H^s(\mathbb{R}^2) \to H^s(\mathbb{R}^2)$ ограничен для любого $s = 0, 1, \ldots$. Рассмотрим ограниченный обратный оператор $(\lambda I - P_\alpha)^{-1} : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, действующий на функции $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$ по формуле (2.6). При $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ первые производные общего члена ряда (2.6) имеют вид $\lambda^{-(k+1)}\nabla P_\alpha^k u = \lambda^{-(k+1)}p^{-k}P_\alpha^k\nabla_{-k\alpha}u$. Получаем

$$\left\||\lambda^{-(k+1)}\nabla P_\alpha^k u|\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = |\lambda|^{-(k+1)}p^{-k}\left\||P_\alpha^k\nabla u|\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = |\lambda|^{-(k+1)}p^{-k}\,\||\nabla u|\|_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

откуда следует, что оператор в (2.6) является ограниченным и в $H^1(\mathbb{R}^2)$. Аналогично обстоит дело с производными высших порядков: при каждом следующем дифференцировании члена ряда (2.6) возникает улучшающий сходимость ряда множитель p^{-k}. Итак, $\lambda I - P_\alpha$ непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^2)$ на себя для любого $s = 0, 1, \ldots$ при $|\lambda| > 1$. Далее, для $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$ положим $v = (\lambda I - P_\alpha)u \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Благодаря условию (2.8) сужение образа $v|_\Omega$ однозначно определяется сужением $u|_\Omega$, так что $\lambda I - P_\alpha$ корректно определен и как ограниченный линейный оператор в $H^s(\Omega)$ для таких областей Ω. При этом формула (2.6), построенная лишь на неотрицательных степенях оператора P_α, показывает, что сужение прообраза $u|_\Omega$ также однозначно определяется сужением $v|_\Omega$. Тем самым показано, что ограниченный оператор в (2.6) является обратным к оператору $\lambda I - P_\alpha : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$.

б) Условие $|\lambda| < p^{-s}$, в свою очередь, обеспечивает возможность s-кратного почленного дифференцирования ряда в формуле (2.7). Для таких λ оператор $\lambda I - P_\alpha$ также непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^2)$ на себя. Далее, если функция $u \in \mathring{H}^s(\Omega)$ продолжена нулем в $\mathbb{R}^2$, то она принадлежит $H^s(\mathbb{R}^2)$, ее образ $v = (\lambda I - P_\alpha)u$ из $H^s(\mathbb{R}^2)$ равен нулю вне $p\Omega_{-\alpha}$, а сужение v на $p\Omega_{-\alpha}$ принадлежит $\mathring{H}^s(p\Omega_{-\alpha})$ в силу условия (2.8). Наоборот, если v — продолженная нулем в $\mathbb{R}^2$ функция из $\mathring{H}^s(p\Omega_{-\alpha})$, то, как показывает формула (2.7), ее прообраз u из $H^s(\mathbb{R}^2)$ равен нулю вне Ω (суммирование в (2.7) начинается с $k = 1$) и сужение u на Ω принадлежит $\mathring{H}^s(\Omega)$. Лемма доказана. $\square$

При $|\lambda| = 1$, как показывает следующее утверждение, свойства оператора $\lambda I - P_\alpha$, действующего на функции в ограниченной области, близки в некотором смысле к ситуации, описанной в пункте а) леммы 2.2 (случай $|\lambda| > 1$).

Лемма 2.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (2.8)*, $|\lambda| = 1$, $u \in L_2(\Omega)$ и $v = (\lambda I - P_\alpha)u$. Тогда для функции $u(x)$ в Ω справедливо представление*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} p^{-k} v(p^{-k} x_{k\alpha}) \quad (x \in \Omega), \tag{2.9}$$

где ряд сходится в $L_2(\Omega)$. При этом, если $v \in H^s(\Omega)$, то и $u \in H^s(\Omega)$.

Доказательство. Запишем частичную сумму ряда (2.9), подставляя вместо $v(x)$ выражение $\lambda u(x) - p^{-1}u(p^{-1}x_\alpha)$:

$$\lambda^{-1}(\lambda u(x) - p^{-1}u(p^{-1}x_\alpha)) + \lambda^{-2}p^{-1}(\lambda u(p^{-1}x_\alpha) - p^{-1}u(p^{-2}x_{2\alpha})) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^{-M}p^{-M+1}(\lambda u(p^{-M+1}x_{(M-1)\alpha}) - p^{-1}u(p^{-M}x_{M\alpha})) = u(x) - (p\lambda)^{-M}u(p^{-M}x_{M\alpha}).$$

Оценим второе слагаемое:

$$\|\lambda^{-M} P_\alpha^M u\|^2_{L_2(\Omega)} = p^{-2M} \int\limits_\Omega |u(p^{-M}x_{M\alpha})|^2\, dx = \int\limits_{p^{-M}\Omega_{M\alpha}} |u(y)|^2\, dy \to 0, \quad M \to \infty,$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и очевидного соотношения $\operatorname{mes}(p^{-M}\Omega_{M\alpha}) = p^{-2M}\operatorname{mes}(\Omega)$. Второе утверждение леммы получается почленным дифференцированием ряда (2.9). $\square$

Нам понадобится также векторный вариант части утверждений леммы 2.3 и пункта а) леммы 2.2.

Лемма 2.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (2.8)*. Тогда:*

a) *если $|\lambda| > 1$, то оператор $\mathbf{u} \mapsto \lambda\mathbf{u} - P_\alpha \mathbf{u}_{-\alpha}$ является изоморфизмом пространства вектор-функций $L_2^2(\Omega)$;*

b) *если $|\lambda| = 1$, $\mathbf{u} \in L_2^2(\Omega)$ и $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} - P_\alpha\mathbf{u}_{-\alpha} \in L_2^2(\Omega)$, то $\mathbf{u}$ представляется сходящимся в $L_2^2(\Omega)$ рядом*

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} P_\alpha^k \mathbf{v}_{-k\alpha}(x) \quad (x \in \Omega).$$

Доказательство. Достаточно заметить, что и в этом случае при $|\lambda| > 1$ оператор $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v} := \lambda\mathbf{u} - P_\alpha\mathbf{u}_{-\alpha}$ имеет ограниченный обратный в $L_2^2(\mathbb{R}^2)$, действующий по формуле

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} P_\alpha^k \mathbf{v}_{-k\alpha}$$

($\|P_\alpha \mathbf{u}_{-\alpha}\|_{L_2^2(\mathbb{R}^2)} = \|\mathbf{u}\|_{L_2^2(\mathbb{R}^2)}$). Переход от $\mathbb{R}^2$ к области Ω, а также к значениям $|\lambda| = 1$ вполне аналогичен изложенному при доказательстве лемм 2.2 и 2.3. $\square$

Приведенное ниже утверждение уточняет полученный в [14] для уравнения (1.1) результат и, кроме того, содержит алгоритм решения краевой задачи. Формально, решение сводится к тому, что в уравнении (2.5) следует «продифференцировать» функциональный оператор $I + aP_\alpha$, а затем применить к обеим частям ограниченный оператор $(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1}$. Однако, имея дело с обобщенным решением, соответствующие выкладки приходится проводить в интегральном тождестве.

Предложение 2.1. *Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (2.8) *и* $0 \neq |a\cos\alpha| \leqslant 1$. *Тогда задача Дирихле для уравнения* (2.5) *имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ при любой функции $f \in L_2(\Omega)$. Это решение является обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона*

$$-\Delta u(x) = (I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1} f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Доказательство. В силу леммы (2.1) обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ задачи Дирихле для уравнения (2.5) определяется из интегрального тождества

$$(\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)). \tag{2.10}$$

Обозначим $\omega = (I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u$, тогда $\nabla\omega = \nabla u + a\cos\alpha P_\alpha \nabla_{-\alpha} u$. По лемме 2.4 с учетом неравенства $0 \neq |a\cos\alpha| \leqslant 1$ будем иметь

$$\nabla u = \sum_{k=0}^{\infty} (-a\cos\alpha)^k P_\alpha^k \nabla_{-k\alpha}\,\omega. \tag{2.11}$$

Вместе с каждой функцией $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ подставим в интегральное тождество (2.10) функцию $P_\alpha^{-k} v$ $(k = 1, 2, \ldots)$: в силу условия (2.8) последняя также принадлежит $\mathring{H}^1(\Omega)$. В соответствии с (2.3) получим

$$(\nabla\omega, p^k P_\alpha^{-k} \nabla_{k\alpha} v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, P_\alpha^{-k} v)_{L_2(\Omega)},$$

или, перенося вращение вектора градиента и функциональный оператор P_α^{-k} с ∇v на $\nabla\omega$ (в виде сопряженных преобразований),

$$(P_\alpha^k \nabla_{-k\alpha}\,\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p^{-k}(P_\alpha^k f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Умножая полученные равенства на $(-a\cos\alpha)^k$, суммируя по всем индексам $k = 0, 1, \ldots$ и принимая во внимание (2.11), приходим к тождеству

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (g, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)), \tag{2.12}$$

определяющему обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u = g$ в области Ω с функцией

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} (-ap^{-1}\cos\alpha)^k P_\alpha^k f = (I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1} f \in L_2(\Omega).$$

В обратную сторону при помощи подобных выкладок тождество (2.10) выводится из тождества (2.12). Утверждение теоремы следует теперь из существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с правой частью из $L_2(\Omega)$. □

Замечание 2.1. В предложении 2.1 неявно содержится и утверждение о гладкости обобщенного решения u, поскольку исходная задача сведена к задаче Дирихле для уравнения Пуассона. В условиях предложения 2.1 функциональный оператор $(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1}$ ограничен по лемме 2.2 не только в $L_2(\Omega)$, но и во всей шкале пространств Соболева $H^s(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$, так что для гладкости u в Ω остается наложить соответствующие требования на $\partial\Omega$. Так, хорошо известно, что если $g \in H^s(\Omega)$ и $\partial\Omega \in C^{s+2}$, то $u \in H^{s+2}(\Omega)$ и выполняется оценка

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leqslant c_1 \|g\|_{H^s(\Omega)} \leqslant c_2 \|f\|_{H^s(\Omega)}.$$

Стоит отметить также, что при $|a\cos\alpha| = 1$ уравнение (2.5) уже не является сильно эллиптическим. Тем не менее, как показывает предложение 2.1, и в этом случае краевая задача однозначно разрешима. Существенным дополнением к предложению 2.1 является результат ниже. Оказывается, при $|a\cos\alpha| > 1$ краевая задача перестает быть корректной и становится «сильно» недоопределенной.

Предложение 2.2. *Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая усиленному условию инвариантности*

$$\overline{\Omega} \subset p\Omega_{-\alpha} \tag{2.13}$$

и $|a\cos\alpha| > 1$. Тогда задача Дирихле для уравнения (2.5) имеет обобщенные решения для любой функции $f \in L_2(\Omega)$, причем при $f = 0$ существует бесконечно много линейно независимых обобщенных решений соответствующей однородной задачи.

Доказательство. С учетом леммы 2.1 речь идет об обобщенных решениях задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

Поскольку в условиях теоремы $|ap\cos\alpha|^{-1} < p^{-1}$, оператор

$$I + ap\cos\alpha\, P_\alpha = ap\cos\alpha\,((ap\cos\alpha)^{-1}I + P_\alpha)$$

в силу пункта б) леммы 2.2 непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $\mathring{H}^1(\Omega)$ на все пространство $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$.

Построим теперь функцию ω в $p\Omega_{-\alpha} \supset \overline{\Omega}$ следующим образом. Пусть $\omega_1 \in \mathring{H}^1(\Omega)$ — решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta\omega_1 = f$ в Ω, а ω_2 — произвольная функция из $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega})$. Положим

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x), & x \in \Omega, \\ \omega_2(x), & x \in p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Очевидно, что $w \in \mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$. Проверим, что лежащая в $\mathring{H}^1(\Omega)$ функция $u = (I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)^{-1}\omega$ есть обобщенное решение рассматриваемой задачи. Действительно, для любой функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ справедлива цепочка

$$(\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla\omega_1, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что на Ω функция ω совпадает с ω_1. Мы показали, что для всякой функции f существует как минимум целое семейство обобщенных решений рассматриваемой задачи, «параметризованное» произвольной функцией из $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega})$. □

Замечание 2.2. В отличие от ситуации, описанной в предложении 2.1, построенные в предложении 2.2 решения не обязаны быть гладкими. Действительно, если посмотреть в этом случае на вид обратного оператора

$$(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(ap\cos\alpha)^{-k}P_\alpha^{-k},$$

то получается, что в части $\Omega \setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha$ области Ω построенное обобщенное решение $u = (I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)^{-1}\omega$ совпадает с функцией $(ap\cos\alpha)^{-1}\omega_2(px_{-\alpha})$. Таким образом, если $\omega_2 \notin H^2(p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega})$ (локально), то и сужение u на $\Omega \setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha$ не принадлежит $H^2(\Omega \setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha)$ (локально). То же самое относится к сужению u на $p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha \setminus p^{-2}\overline{\Omega}_{2\alpha}$ и т. д.

Такое «щепетильное» отношение к вопросу о перестановке операции дивергенции и функционального оператора в уравнении (2.5) обосновано. Так, предположим, что $|a\cos\alpha| \leqslant p$, но нас интересуют только гладкие решения краевой задачи, $u \in \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Такие решения удовлетворяют уравнению (2.5) почти всюду, и его теперь можно переписать в виде

$$-(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)\Delta u = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

В силу неравенства на коэффициенты по-прежнему существует ограниченный обратный оператор $(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, и мы приходим к эквивалентному уравнению $-\Delta u = (I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1}f$, для которого задача Дирихле имеет единственное решение $u \in$

$\mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ и $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L_2(\Omega)}$ (считаем, что граница области обладает нужной гладкостью). Получается, что при $1 < |a\cos\alpha| \leqslant p$ одновременно с бесконечномерным многообразием негладких обобщенных решений существует единственное гладкое решение краевой задачи для уравнения 2.5, непрерывно зависящее от правой части f.

3. Уравнение с растяжением, сжатием и поворотом аргумента

Рассмотрим теперь аналогичную задачу Дирихле для уравнения

$$-\operatorname{div}((I + bP_\alpha^{-1})\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{3.1}$$

$b \in \mathbb{C}$, с оператором P_α^{-1} вместо оператора P_α. Необходимое и достаточное условие сильной эллиптичности уравнения (3.1) выглядит следующим образом: $|b\cos\alpha| < 1$. Эквивалентной (с точки зрения обобщенного решения) записью уравнения (3.1) будет

$$-\Delta(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})u = f(x) \quad (x \in \Omega)$$

(проверяется аналогично лемме 2.1). Здесь ситуация с разрешимостью в определенном смысле обратная по отношению к уравнению (2.5): обобщенное решение всегда единственно, но при $|b\cos\alpha| \geqslant 1$ задача становится «сильно» переопределенной.

Предложение 3.1. *Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (2.13). *Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения* (3.1) *единственно, при этом*

а) *если $0 < |b\cos\alpha| < 1$, то всякое обобщенное решение имеет вид*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-b\cos\alpha)^k\omega(p^k x_{-\alpha}), \tag{3.2}$$

где w есть решение задачи Дирихле для уравнения $-\Delta\omega(x) = f(x)$ в Ω;

б) *если $|b\cos\alpha| \geqslant 1$, то задача разрешима тогда и только тогда, когда функция f ортогональна бесконечномерному подпространству в $L_2(\Omega)$.*

Отметим, что при использовании формулы (3.2) функцию ω следует считать продолженной нулем вне Ω.

Доказательство.

а) Рассмотрим оператор

$$I + bp^{-1}\cos\alpha\, P_\alpha^{-1} = P_\alpha^{-1}(bp^{-1}\cos\alpha\, I + P_\alpha).$$

По лемме 2.2, пункт б), оператор $bp^{-1}\cos\alpha I + P_\alpha$ осуществляет изоморфизм пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$ на пространство $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$. Но в таком случае, очевидно, сам оператор $I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1}$ является изоморфизмом пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$, а обратный имеет вид

$$(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})^{-1} = (bp^{-1}\cos\alpha I + P_\alpha)^{-1}P_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}(-bp^{-1}\cos\alpha)^k P_\alpha^{-k},$$

что соответствует формуле (3.2). Итак, замена $(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})u = \omega$ сводит исходную задачу к эквивалентной задаче Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta\omega(x) = f(x)$ в Ω.

б) В этой ситуации замена $P_\alpha^{-1}u = \omega$ сводит вопрос нахождения обобщенного решения $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ задачи Дирихле для уравнения (3.1) к определению функции $\omega \in \mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$ из интегрального тождества

$$(\nabla(I + p(b\cos\alpha)^{-1}P_\alpha)\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p(b\cos\alpha)^{-1}(f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

которое, как видно из доказательства предложения 2.1, равносильно тождеству

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (g, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega))$$

с новой функцией $g = p^2(pb\cos\alpha\, I + P_\alpha)^{-1}f \in L_2(\Omega)$. Здесь мы учли, что $|b\cos\alpha|^{-1} \leqslant 1$. Стоит подчеркнуть, что функция ω, являющаяся обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta\omega = g$ в Ω, принадлежит пространству $\mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$ и тождественно равна нулю вне $p^{-1}\Omega_\alpha$. Тогда, очевидно, и функция g должна обращаться в ноль в $\Omega \setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha$. Кроме того, равенство

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(p^{-1}\Omega_\alpha)} = (g, v)_{L_2(p^{-1}\Omega_\alpha)} \tag{3.3}$$

фактически выполнено уже для любой функции $v \in H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$. Нетрудно видеть (см., например, [5, с. 30]), что для существования функции $\omega \in \mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$, удовлетворяющей (3.3) при любой $v \in H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы функция g была ортогональна в скалярном произведении в $L_2(p^{-1}\Omega_\alpha)$ всем гармоническим функциям, принадлежащим $H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$. Итак, в случае $|b\cos\alpha| \geqslant 1$ задача Дирихле для уравнения (3.1) разрешима при тех и только тех $f \in L_2(\Omega)$, для которых функция $g = p^2(pb\cos\alpha\, I + P_\alpha)^{-1} f \in L_2(\Omega)$ обращается в нуль вне $p^{-1}\Omega_\alpha$, а в $L_2(p^{-1}\Omega_\alpha)$ ортогональна всем гармоническим функциям из $H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$. Понятно, что для функции f это означает выполнение бесконечного числа условий ортогональности в $L_2(\Omega)$ (их можно записать при помощи сопряженного к $p^2(pb\cos\alpha\, I + P_\alpha)^{-1}$ оператора).

При $f = 0$ имеем $g = 0$, а значит, и ω вместе с $u = P_\alpha\omega$ равны нулю, т. е. обобщенное решение для уравнения (3.1) всегда единственно. □

Замечание 3.1. В условиях пункта a) предложения 3.1 обобщенное решение существует и единственно, но не обязательно принадлежит $H^2(\Omega)$, и непрерывная зависимость решения от правой части гарантируется лишь относительно H^1-нормы, поскольку обратный оператор $(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})^{-1}$ (формула (3.2)), вообще говоря, неограничен в $H^2(\Omega)$.

Наконец, в области Ω, удовлетворяющей усиленному условию инвариантности (2.13), рассмотрим уравнение

$$-\mathrm{div}\left((I + \gamma_1 P_\alpha + \gamma_{-1}P_\alpha^{-1})\nabla u\right) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{3.4}$$

естественным образом обобщающее уравнения (2.5) и (3.1). По аналогии с предыдущим уравнение (3.4) можно записывать в виде

$$-\Delta(I + \gamma_1 p\cos\alpha\, P_\alpha + \gamma_{-1}p^{-1}\cos\alpha\, P_\alpha^{-1})u = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

Считаем, что $0 \neq \gamma_{\pm1} \in \mathbb{C}$ и $\cos\alpha \neq 0$. Согласно сказанному во введении, уравнение (3.4) является сильно эллиптическим тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Re}(1 + \gamma_1\cos\alpha\, z + \gamma_{-1}\cos\alpha\, z^{-1}) > 0 \quad (z \in \mathbb{C},\ |z| = 1)$$

(через z мы обозначили произведение λw; z также пробегает всю единичную окружность). Отметим, что из условия (2.13) вытекает $0 \in \Omega$.

Нетрудно выписать соответствующие ограничения на коэффициенты в явном виде ($\varphi_1 := \arg\gamma_1$, $\varphi_{-1} := \arg\gamma_{-1}$):

$$\mathrm{Re}\,(1 + \gamma_1\cos\alpha\, z + \gamma_{-1}\cos\alpha\, z^{-1}) = 1 + \cos\alpha\big[|\gamma_1|\cos(\varphi + \varphi_1) + |\gamma_{-1}|\cos(\varphi - \varphi_{-1})\big] =$$
$$= 1 + \cos\alpha\big[(|\gamma_1|\cos\varphi_1 + |\gamma_{-1}|\cos\varphi_{-1})\cos\varphi + (|\gamma_{-1}|\sin\varphi_{-1} - |\gamma_1|\sin\varphi_1)\sin\varphi\big] =$$
$$= 1 + \cos\alpha\sqrt{|\gamma_1|^2 + |\gamma_{-1}|^2 + 2|\gamma_1\gamma_{-1}|\cos(\varphi_1 + \varphi_{-1})}\,\sin(\varphi + \varphi_0) > 0$$

для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ (здесь φ_0 — некоторый фиксированный угол, зависящий от $\gamma_{\pm1}$). Таким образом, необходимым и достаточным условием сильной эллиптичности уравнения (3.4) будет неравенство

$$|\cos\alpha|\sqrt{|\gamma_1|^2 + |\gamma_{-1}|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\gamma_1\gamma_{-1})} < 1.$$

Для более детального изучения уравнения (3.4) факторизуем функциональный оператор под знаком лапласиана:

$$I + \gamma_1 p\cos\alpha\, P_\alpha + \gamma_{-1}p^{-1}\cos\alpha\, P_\alpha^{-1} = \gamma_1 p\cos\alpha(\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}.$$

Здесь λ_1, λ_2 — корни квадратного уравнения

$$(\gamma_1 p\cos\alpha)\lambda^2 + \lambda + \gamma_{-1}p^{-1}\cos\alpha = 0.$$

Без ограничения общности считаем $0 < |\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$. Поведение решений краевой задачи для уравнения (3.4) описывается в терминах этих корней: все зависит от расположения $\lambda_{1,2}$ на комплексной плоскости относительно окружности $|\lambda| = p^{-1}$.

Теорема 3.1.

а) *Пусть* $|\lambda_1| \geqslant p^{-1}$, $|\lambda_2| < p^{-1}$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *задачи Дирихле для уравнения* (3.4) (*корректная задача*).

б) *Пусть* $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_1| < p^{-1}$. *Тогда обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения* (3.4) *существует для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$, *при этом соответствующая однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых обобщенных решений* (*недоопределенная задача*).

в) *Пусть* $p^{-1} \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$. *Тогда обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения* (2.5) *единственно, а для существования решения необходимо и достаточно, чтобы функция* f *была ортогональна некоторому бесконечномерному подпространству в пространстве* $L_2(\Omega)$ (*переопределенная задача*).

Доказательство.

а) По лемме 2.2 оператор $(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}$ есть изоморфизм пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$. Поэтому замена $(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}u = \omega$ сводит исходную задачу к интегральному тождеству

$$(\nabla(\lambda_1 I - P_\alpha)\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\gamma_1 p \cos\alpha)^{-1}(f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

которое при $|\lambda_1| \geqslant p^{-1}$ равносильно тождеству

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p(\gamma_1 \cos\alpha)^{-1} \left((p^2\lambda_1 I - P_\alpha)^{-1} f, v\right)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega))$$

(см. доказательство предложения 2.1). Последнее единственным образом определяет $\omega \in \mathring{H}^1(\Omega)$ с оценкой $\|\omega\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1\|(p^2\lambda_1 I - P_\alpha)^{-1} f\|_{L_2(\Omega)}$. Тогда для единственного обобщенного решения $u = P_\alpha(\lambda_2 I - P_\alpha)^{-1}\omega \in \mathring{H}^1(\Omega)$ рассматриваемой задачи имеет место оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2\|\omega\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_3\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

(регулярность границы гарантирует для функции ω и более сильную оценку $\|\omega\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_4\|f\|_{L_2(\Omega)}$, но для функции u соответствующую оценку в H^2-норме записать уже нельзя).

б) В этом случае по лемме 2.2 весь оператор $\gamma_1 p \cos\alpha(\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}$ осуществляет изоморфизм пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$ на пространство $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$. Поэтому исходная задача сводится к нахождению функции

$$\omega = \gamma_1(\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}u \in \mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$$

в области $p\Omega_{-\alpha} \supset \overline{\Omega}$ из интегрального тождества

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

которое отвечает строго внутренней подобласти Ω более широкой области $p\Omega_{-\alpha}$. Получается недоопределенная задача. Построение бесконечномерного нуль-пространства такой задачи проведено в предложении 2.2.

в) Здесь мы осуществляем замену $P_\alpha^{-1}u = \omega \in \mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$, и для функции ω, равной нулю вне $p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha \subset \Omega$, имеем тождество

$$(\nabla(\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha)\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\gamma_1 p\cos\alpha)^{-1}(f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

эквивалентное тождеству

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p^4(\gamma_1 p\cos\alpha)^{-1}\left((p^2\lambda_2 I - P_\alpha)^{-1}(p^2\lambda_1 I - P_\alpha)^{-1} f, v\right)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= p^3\left((\gamma_1 \cos\alpha\, P_\alpha^2 + pP_\alpha + p^2\gamma_{-1}\cos\alpha I)^{-1} f, v\right)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

Получается, что обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в Ω тождественно равно нулю в части $\Omega \setminus p^{-1}\Omega_\alpha$. Это переопределенная задача. Бесконечномерное ортогональное дополнение к (замкнутому) образу оператора такой краевой задачи построено в доказательстве пункта б) предложения 3.1. □

Непосредственным вычислением можно убедиться, что сильно эллиптическому уравнению (3.4) отвечает следующее расположение корней $\lambda_{1,2}$: $|\lambda_1| > p^{-1}$, $|\lambda_2| < p^{-1}$.

Источником краевой задачи в обобщенной постановке для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения в дивергентной форме с симметричным оператором может быть задача на поиск минимума квадратичного функционала. Проиллюстрируем подобную связь на примере.

Пример 3.1. Рассмотрим задачу поиска минимума функционала

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} ((T\nabla u, \nabla u) - 2fu)\, dx$$

на пространстве функций $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Здесь Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $T = I + aP_\alpha$, скобки $(.,.)$ означают скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^2$, $f \in L_2(\Omega)$, а функция u считается продолженной нулем вне Ω. Коэффициент a и все пространства в этом примере — вещественные.

Из вышеизложенного следует, что условие $|a\cos\alpha| < 1$ обеспечивает оценку (коэрцитивность функционала)

$$J_0(u) := \int\limits_{\Omega} (T\nabla u, \nabla u)\, dx \geqslant (1 - |a\cos\alpha|) \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx \quad (u \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

Запишем первую вариацию (производную Гато) функционала J в элементе u. Для этого зафиксируем произвольную функцию $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ и подставим $u + \tau v$, $\tau \in \mathbb{R}$, вместо u в функционал J. Получим

$$J(u + \tau v) = J(u) + \tau B(u, v) + \tau^2 J_0(v),$$

где билинейная форма $B(u, v)$ на $\mathring{H}^1(\Omega)$ имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} ((T\nabla u, \nabla v) + (T\nabla v, \nabla u) - 2fv)\, dx = ((T + T^*)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} -$$

$$- 2(f, v)_{L_2(\Omega)} = ((2I + aP_\alpha + aP_\alpha^{-1})\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} - 2(f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Условие

$$\frac{d}{d\tau} J(u + \tau v)\Big|_{\tau=0} = B(u, v) = 0 \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega))$$

является необходимым, а при $|a\cos\alpha| < 1$, очевидно, и достаточным условием строгого глобального минимума функционала J. С другой стороны, это условие определяет обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ краевой задачи

$$-\mathrm{div}\left((I + (a/2)(P_\alpha + P_\alpha^{-1}))\nabla u\right) = f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Эта задача при дополнительном условии (2.13) на область исследована в теореме 3.1 для всевозможных значений параметров, но сильно эллиптическим соответствующее уравнение будет только при $|a\cos\alpha| < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян В. А.* К теории флуктуаций яркости в млечном пути// Докл. АН СССР. — 1944. — *44.* — С. 244–247.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
3. *Дерфель Г. А., Молчанов С. А.* Спектральные методы в теории дифференциально-функциональных уравнений// Мат. заметки. — 1990. — *47.* — С. 42–51.
4. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Прикл. мех. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.
5. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54.* — С. 3–138.

6. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 5. — С. 733–748.
7. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Об однозначной разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 12. — С. 1679–1692.
8. *Россовский Л. Е., Товсултанов А. А.* О задаче Дирихле для эллиптического функционально-дифференциального уравнения с аффинным преобразованием аргумента// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 4. — С. 347–350.
9. *Россовский Л. Е., Товсултанов А. А.* Функционально-дифференциальные уравнения с растяжением и симметрией// Сиб. мат. ж. — 2022. — *63*, № 4. — С. 911–923.
10. *Скубачевский А. Л.* О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 4. — С. 548–558.
11. *Скубачевский А. Л.* Нелокальные краевые задачи со сдвигом// Мат. заметки. — 1985. — *38*, № 4. — С. 587–598.
12. *Скубачевский А. Л.* О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов// Докл. АН СССР. — 1989. — *307*, № 2. — С. 287–292.
13. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
14. *Товсултанов А. А.* Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и поворотом// Владикавказ. мат. ж. — 2021. — *23*, № 1. — С. 77–87.
15. *Hall A. J., Wake G. C.* A functional differential equation arising in the modeling of cell growth// J. Aust. Math. Soc. Ser. B. — 1989. — *30*. — С. 424–435.
16. *Iserles A.* On neutral functional-differential equation with proportional delays// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — *207*. — С. 73–95.
17. *Kato T., McLeod J. B.* Functional differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77*. — С. 891–937.
18. *Ockendon J. R., Tayler A. B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive// Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1971. — *322*. — С. 447–468.
19. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1996. — *3*. — С. 491–500.
20. *Rossovskii L.* Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*. — С. 226–239.
21. *Rossovskii L. E., Tovsultanov A. A.* Elliptic functional differential equations with affine transformations// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *480*. — 123403.
22. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional-Differential Equations and Applications. — Basel: Birkhäuser, 1997.
23. *Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*. — С. 192–207.

Л. Е. Россовский
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `lrossovskii@gmail.com`

А. А. Товсултанов
Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова, Грозный, Россия;
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия
E-mail: `a.tovsultanov@mail.ru`

UDC 517.95+517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-697-711
EDN: ZCQCLC

Boundary-value problem for an elliptic functional differential equation with dilation and rotation of arguments

L. E. Rossovskii[1] **and A. A. Tovsultanov**[2,3]

[1] *RUDN University, Moscow, Russia*
[2] *Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia*
[3] *North Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS, Vladikavkaz, Russia*

Abstract. The paper is devoted to the Dirichlet problem in a flat bounded domain for a linear second-order functional differential equation in the divergent form with dilation, contraction and rotation of the argument of the higher-order derivatives of the unknown function. We study the existence, the uniqueness and the smoothness of the generalized solution for all possible values of the coefficients and parameters of transformations in the equation.

Keywords: elliptic functional differential equation, boundary-value problem.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of a state assignment (project № FSSF-2023-0016).

For citation: L. E. Rossovskii, A. A. Tovsultanov, "Boundary-value problem for an elliptic functional differential equation with dilation and rotation of arguments," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 697–711. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-697-711`

REFERENCES

1. V. A. Ambartsumyan, "K teorii fluktuatsiy yarkosti v mlechnom puti" [To the theory of brightness fluctuations in the Milky Way], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1944, **44**, 244–247 (in Russian).
2. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On some simple generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
3. G. A. Derfel' and S. A. Molchanov, "Spektral'nye metody v teorii differentsial'no-funktsional'nykh uravneniy" [Spectral methods in the theory of differential-functional equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1990, **47**, 42–51 (in Russian).
4. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, "Differentsial'nye uravneniya s otklonyayushchimisya argumentami v statsionarnykh zadachakh mekhaniki deformiruemogo tela" [Differential equations with deviating arguments in stationary problems of mechanics of deformable body], *Prikl. mekh.* [Appl. Mech.], 1979, **15**, No. 5, 39–47 (in Russian).
5. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
6. L. E. Rossovskii and A. L. Tasevich, "Pervaya kraevaya zadacha dlya sil'no ellipticheskogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s ortotropnymi szhatiyami" [The first boundary-value problem for a strongly

elliptic functional differential equation with orthotropic compressions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2015, **97**, No. 5, 733–748 (in Russian).
7. L. E. Rossovskii and A. L. Tasevich, "Ob odnoznachnoy razreshimosti funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s ortotropnymi szhatiyami v vesovykh prostranstvakh" [On the unique solvability of a functional differential equation with orthotropic contractions in weighted spaces], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 12, 1679–1692 (in Russian).
8. L. E. Rossovskii and A. A. Tovsultanov, "O zadache Dirikhle dlya ellipticheskogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s affinnym preobrazovaniem argumenta" [On the Dirichlet problem for an elliptic functional differential equation with an affine transformation of the argument], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **489**, No. 4, 347–350 (in Russian).
9. L. E. Rossovskii and A. A. Tovsultanov, "Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya s rastyazheniem i simmetriey" [Functional differential equations with dilation and symmetry], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2022, **63**, No. 4, 911–923 (in Russian).
10. A. L. Skubachevskii, "O spektre nekotorykh nelokal'nykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On the spectrum of some nonlocal elliptic boundary-value problems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **117**, No. 4, 548–558 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii, "Nelokal'nye kraevye zadachi so sdvigom" [Nonlocal boundary-value problems with shift], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1985, **38**, No. 4, 587–598 (in Russian).
12. A. L. Skubachevskii, "O nekotorykh zadachakh dlya mnogomernykh diffuzionnykh protsessov" [On some problems for multidimensional diffusion processes], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **307**, No. 2, 287–292 (in Russian).
13. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
14. A. A. Tovsultanov, "Funktsional'no-differentsial'noe uravnenie s rastyazheniem i povorotom" [Functional differential equation with dilation and rotation], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz. Math. J.], 2021, **23**, No. 1, 77–87 (in Russian).
15. A. J. Hall and G. C. Wake, "A functional differential equation arising in the modeling of cell growth," *J. Aust. Math. Soc. Ser. B*, 1989, **30**, 424–435.
16. A. Iserles, "On neutral functional-differential equation with proportional delays," *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, **207**, 73–95.
17. T. Kato and J. B. McLeod, "Functional differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, 891–937.
18. J. R. Ockendon and A. B. Tayler, "The dynamics of a current collection system for an electric locomotive," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1971, **322**, 447–468.
19. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, "On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory," *Russ. J. Math. Phys.*, 1996, **3**, 491–500.
20. L. Rossovskii, "Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, 226–239.
21. L. E. Rossovskii and A. A. Tovsultanov, "Elliptic functional differential equations with affine transformations," *J. Math. Anal. Appl.*, 2019, **480**, 123403.
22. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel, 1997.
23. A. L. Skubachevskii, "Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, 192–207.

L. E. Rossovskii
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `lrossovskii@gmail.com`

A. A. Tovsultanov
Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia
North Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS, Vladikavkaz, Russia
E-mail: `a.tovsultanov@mail.ru`