



## Угловое движение наноспутника с модулем на рельсовой платформе при переходе в положение гравитационного равновесия

- А. В. Дорошин** | доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической механики;  
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, г. Самара;  
doran@inbox.ru
- А. В. Ерёмченко** | аспирант кафедры теоретической механики;  
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, г. Самара;  
yeryomenko.a@bk.ru

*Рассматривается динамика углового движения наноспутника с подвижным модулем, скользящим на рельсовой платформе относительно главного тела. Траекторное движение центра масс наноспутника рассматривается как движение по круговой орбите. Скольжение подвижного модуля в поперечном направлении меняет расположение центра масс и величины моментов инерции системы. Предполагается, что скольжение модуля происходит в присутствии сил трения, а также может выполняться в соответствии с выбранными законами управления. Наличие внутреннего трения позволяет осуществлять диссипацию кинетической энергии, а взаимодействие с внешним полем гравитации обеспечивает сброс кинетического момента, что позволяет наноспутнику осуществлять переход в положение устойчивого гравитационного равновесия в орбитальной системе координат. Управление положением модуля увеличивает темпы перехода в положение гравитационного равновесия.*

**Ключевые слова:** наноспутник; подвижный модуль; рельсовая платформа; внутреннее трение; управляемое перемещение модуля; положение гравитационного равновесия

**Цитирование:** Дорошин, А. В. Угловое движение наноспутника с модулем на рельсовой платформе при переходе в положение гравитационного равновесия / А. В. Дорошин, А. В. Ерёмченко // Динамика и виброакустика. – 2024. – Т. 10, №4. – С. 92-108. DOI: 10.18287/2409-4579-2024-10-4-92-108

---

### Введение

Динамика углового движения спутников и космических аппаратов в центральном гравитационном поле является одной из важных проблем механики космического полёта [1–3]. В настоящей работе рассматривается динамика углового движения наноспутника с одним подвижным модулем, скользящим на рельсовой платформе относительно главного тела.

Траекторное движение центра масс наноспутника будем рассматривать как движение по круговой орбите. Орбиты, исследуемые в статье, относятся к классу LEO|VLEO, который приобретает в последнее время особую актуальность, в т.ч. в проектах коммерческих фирм,

например Skeyeon, Albedo, EOI Space, Thales Alenia Space и др. Подобные орбиты имеют высоты от 100 до 350 км.

Скольжение подвижного модуля относительно главного тела спутника происходит в поперечном направлении (рисунок 1), что меняет расположение центра масс и величины моментов инерции системы. Предполагается, что скольжение модуля происходит в присутствии сил трения, а также может выполняться в соответствии с выбранными законами управления. Наличие внутреннего трения в рельсовой платформе, возникающего при линейном перемещении подвижного модуля, позволяет осуществлять диссипацию кинетической энергии, а момент гравитационных сил будет стремиться перевести наноспутник в положение гравитационного равновесия в орбитальной системе координат [2–5]. Более того, управление положением модуля позволяет увеличивать темпы перехода в положение гравитационного равновесия.

Стоит отметить, что внутренняя диссипация энергии может осуществляться различными способами, например с помощью гравитационных демпферов в классической (модель М. А. Лаврентьева) [6, 7] или обобщённой [3–5] форме. Также для выполнения сброса кинетической энергии и кинетического момента могут использоваться иные подходы и устройства, основанные на взаимодействии с геомагнитным полем [8, 9], использующие внутреннее жидкостное наполнение (торовые кольца с вязкой жидкостью) [10, 11], а также содержащие внутренние маятниковые системы с демпфированием [12, 13]. В настоящей статье диссипация энергии, как уже отмечено, осуществляется посредством инициации внутреннего трения в рельсовой платформе при относительном перемещении подвижного модуля по ней – подобный подход, во-первых, характеризуется новизной и, во-вторых, позволяет использовать относительную подвижность элементов спутника для управления его угловым движением в связи с возникающей возможностью управляемого изменения положения центра масс системы и её моментов инерции. Другими словами, имеющаяся подвижность модуля может использоваться как для диссипации кинетической энергии, так и для осуществления управления угловым движением.

В рассматриваемом случае наноспутник состоит из двух частей (рисунок 1), одна из которых является основным телом-носителем (тело №1), а вторая – подвижным модулем (тело №2), скользящим по рельсовой платформе (элемент №3) в поперечном направлении относительно основного тела. Диссипация энергии в этом случае происходит за счёт внутреннего трения в рельсовой платформе, причём в рамках решаемой задачи используется модель жидкостного трения, предполагающего пропорциональность величины силы трения от скорости относительного движения модуля по рельсовой платформе. Стоит отметить, что также возможен учёт эффектов сухого трения, однако в настоящем исследовании этот аспект не изучается. Переход в положение гравитационного равновесия происходит, таким образом, под действием сил центрального поля тяготения при наличии диссипации кинетической энергии в системе. Действие внешнего гравитационного поля позволяет сбросить кинетический момент системы, а внутреннее трение обеспечивает диссипацию энергии. Совместное действие этих факторов в итоге приводит к постепенному переходу наноспутника в гравитационное положение равновесия с полным затуханием пространственных колебаний относительно него. Как результат, спутник займёт свое устойчивое положение в орбитальной системе координат в соответствии с принципом гравитационной стабилизации [1], когда ось наибольшего момента инерции выйдет на нормаль к плоскости орбиты, ось наименьшего момента инерции совместится с направлением на притягивающий центр, а средняя ось инерции окажется направленной вдоль касательной к орбите (рисунок 2).

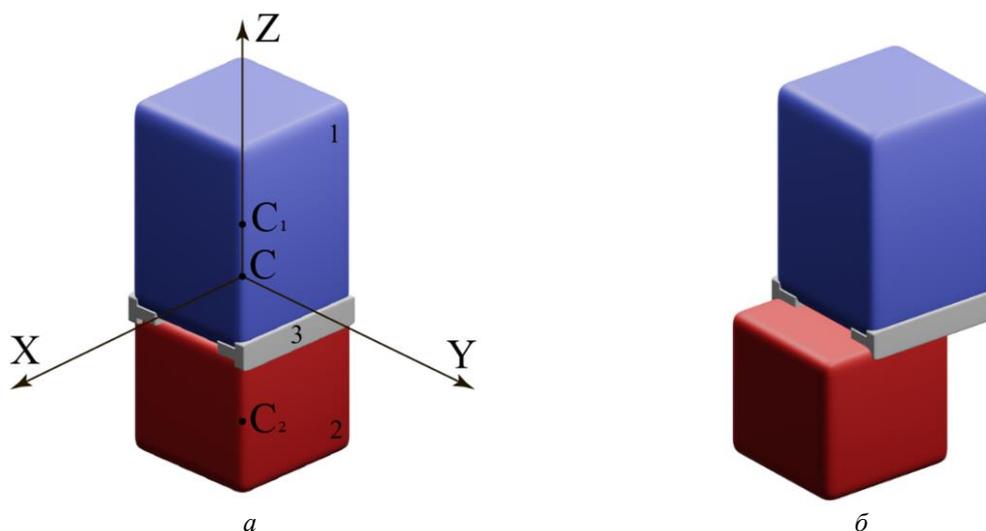


Рисунок 1 – Наноспутник с подвижным модулем на рельсовой платформе (СXYZ – связанная с основным модулем система координат с началом в центре масс наноспутника С):  
 а – общий вид; б – вид с поперечным смещением подвижного модуля вдоль рельсовой платформы

### 1 Математическая модель углового движения наноспутника

Для получения динамических уравнений движения составного наноспутника воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента:

$$\frac{dK}{dt} + \omega \times K = M_g, \quad (1)$$

где  $K$  – кинетический момент наноспутника,  $\omega$  – абсолютная угловая скорость наноспутника,  $M_g$  – гравитационный момент сил, действующий на наноспутник. Поскольку подвижный модуль совершает линейное смещение относительно тела-носителя, то в кинетическом моменте необходимо учитывать моменты количеств движения центров масс тела-носителя и подвижного модуля относительно общего центра масс:

$$K = \sum_{i=1}^2 I_i \omega + m_i V_i \times R_i; \quad V_i = \omega \times R_i, \quad (2)$$

где  $i$  – индекс модуля наноспутника (1 – тело-носитель, 2 – подвижный модуль),  $m_i$  – масса модуля  $i$ ,  $R_i$  – радиус-вектор центра масс тела  $i$  от общего центра масс системы,  $V_i$  – линейная скорость центра масс тела  $i$  относительно общего центра масс,  $I_i$  – собственный центральный главный тензор инерции модуля  $i$ :

$$I_i = \text{diag}[A_i, B_i, C_i], \quad (3)$$

где  $A_i, B_i, C_i$  – главные центральные моменты инерции модуля  $i$ .

Вектор  $R_i$  вычисляется в зависимости от выбранной оси, по которой может совершать движение подвижный модуль, т. к. рельсовую систему можно расположить как вдоль оси X, так и вдоль оси Y (оба случая будут рассмотрены ниже). Для записи выражения для

гравитационного момента сил необходимо знать направление на притягивающий центр, поэтому в этих интересах вводится матрица перехода  $\Theta$  в орбитальную систему координат  $CX_0Y_0Z_0$  (рисунок 2) из связанной системы координат  $CXYZ$  (матрица является ортогональной и, следовательно, обратная к ней может получена путём транспонирования):

$$\Theta = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  – направляющие косинусы осей орбитальной системы координат по отношению к осям связанной системы координат.

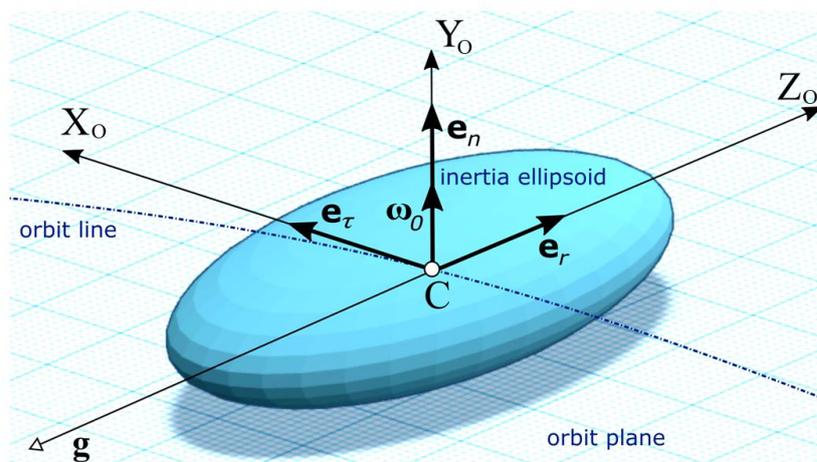


Рисунок 2 – Орбитальная система координат и расположение в ней твёрдого тела в положении устойчивого гравитационного равновесия [1]

Запишем орты осей орбитальной системы координат в проекциях на оси связанной системы координат, выражающихся через направляющие косинусы – элементы матрицы  $\Theta$ :

$$e_\tau = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T; \quad e_n = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T; \quad e_r = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T. \quad (5)$$

С учётом того, что подвижный модуль совершает лишь линейные перемещения относительно главного модуля, не выполняя никаких относительных угловых перемещений, угловая скорость тел-модулей будет одной и той же ( $\omega = [p, q, r]_{OXYZ}^T$ ), а угловое расположение главного тела и подвижного модуля в орбитальных осях будет определяться единым образом посредством направляющих косинусов (5). В этом случае можно записать векторное выражение для суммарного гравитационного момента сил, действующего на модули наноспутника, в следующем виде [1]:

$$M_g = 3\omega_0^2 (e_r \times I_1 e_r + e_r \times I_2 e_r + e_r \times J e_r), \quad (6)$$

где  $\omega_0$  – угловая орбитальная скорость центра масс спутника при движении по круговой орбите,  $J$  – центральный тензор инерции «гравитационной гантели», образованной двумя материальными точками центров масс модулей (главного и подвижного). Тензор

гравитационной гантели аналогично  $R_i$  вычисляется в зависимости от выбрана оси перемещения подвижного модуля (X или Y), поэтому конкретные его значения будут приведены ниже в соответствующих случаях рассмотрения движения.

Для того чтобы система уравнений, описывающих движение наноспутника, стала замкнутой к динамическим уравнениям (1), необходимо добавить кинематические уравнения, записанные для направляющих косинусов осей орбитальной системы координат, а также уравнения, описывающие движение подвижного модуля относительно тела-носителя.

Запишем кинематические уравнения с учётом орбитального движения центра масс по круговой орбите с угловой скоростью  $\omega_0$  [1]:

$$\begin{cases} \frac{de_r}{dt} = e_r \times \omega + \omega_0 e_\tau; \\ \frac{de_n}{dt} = e_n \times \omega; \\ \frac{de_\tau}{dt} = e_\tau \times \omega - \omega_0 e_r. \end{cases} \quad (7)$$

Для определения уравнения, описывающего движение подвижного модуля относительно тела-носителя, воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} - \frac{\partial T}{\partial \delta} = Q_\delta + F_c, \quad (8)$$

где  $Q_\delta$  – есть обобщённая сила, действующая по линейной координате смещения модуля  $\delta$ , а  $F_c$  – есть управляющая сила, создаваемая системой управления в линейном виде по координате и скорости смещения модуля:

$$F_c = -k_{c1} \dot{\delta} - k_{c2} \delta, \quad (9)$$

где  $k_{c1}$  – коэффициент усиления по каналу скорости модуля,  $k_{c2}$  – коэффициент усиления по каналу координаты модуля. Отметим здесь, что ниже будут рассмотрены два случая перемещения модуля, когда в качестве координаты  $\delta$  будет использоваться поперечная координата X, либо Y.

Выражения (1), (7) и (8) полностью описывают динамику и кинематику составного наноспутника с подвижным модулем на рельсовой платформе.

Для оценки устойчивости и самого алгоритма, и положения итогового гравитационного равновесия можно использовать идеологию функции Ляпунова. Для этого введём так называемую относительную (относительно орбитальной системы координат) угловую скорость:

$$\tilde{\omega} = \omega - \omega_0 e_n. \quad (10)$$

Для построения функции Ляпунова можно использовать интеграл В. В. Белецкого [1]:

$$V = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\omega} \cdot I_C \cdot \tilde{\omega} + 3\omega_0^2 e_r \cdot I_C \cdot e_r - \omega_0^2 e_n \cdot I_C \cdot e_n \right], \quad (11)$$

где  $I_C = I_1 + I_2 + J$  – есть момент инерции «замороженной монотельной системы» относительно общего центра масс в предположении неподвижности модуля. В случае использова-

ния первого интеграла (11) при моделировании реальной системы с движущимся модулем при наличии трения и управления, конечно же, будет иметь место нарушение консервативности системы, и интеграл не будет сохраняться, однако квадратическая форма этого выражения позволит применить её в качестве функции Ляпунова. Как видно из (11), функция  $V$  является скалярной функцией переменных  $\{\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \beta_i, \gamma_i\}_{i=(1,2,3)}$ . Важным путём понижения размерности функции является использование следующих очевидных свойств направляющих косинусов:

$$\begin{cases} \gamma_3^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2; \\ \beta_2^2 = 1 - \beta_1^2 - \beta_3^2. \end{cases} \quad (12)$$

При подстановке (12) в функцию  $V$  мы исключим переменные  $\{\gamma_3, \beta_2\}$ , а для придания свойств положительно-определённой функции можно вычесть из выражения скаляр, равный её величине в нулевых значениях переменных. Таким образом, можно ввести следующую функцию Ляпунова, которая будет описывать главные свойства устойчивости системы и используемого управления в основных аспектах:

$$L(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \beta_1, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2) = V - V(0). \quad (13)$$

Далее поставленная задача будет состоять в проведении численного моделирования динамики и оценки сравнительной эффективности перехода в положение гравитационного равновесия в двух случаях реализации относительного смещения подвижного модуля: по оси  $X$  (когда модуль перемещается в плоскости, ортогональной оси наибольшего момента инерции системы) и по оси  $Y$  (когда модуль перемещается в плоскости, ортогональной оси среднего момента инерции).

## 2 Численное моделирование динамики движения

Проведём численное моделирование углового движения наноспутника с подвижным модулем в двух случаях при одинаковых начальных условиях (таблица 1).

Таблица 1 – Начальные условия

Параметр	Единицы измерения	Значение
$p$	рад/с	0,0012
$q$	рад/с	0,001
$r$	рад/с	-0,0025
$\alpha_2 = \alpha_3$	рад	0
$\beta_1 = \beta_3$	рад	0
$\gamma_1 = \gamma_2$	рад	0
$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3$	рад	1
$\omega_0$	рад/с	0,0012
высота орбиты	км	170

Численное моделирование будем проводить в известной системе символьной алгебры «Maple» на основе дифференциальных уравнений (1), (7) и (8) путём численного интегрирования методом Розенброка, учитывающего переменную жёсткость дифференциальной системы в смысле автоматической оценки величин собственных чисел якобиана правых частей

в текущей точке интегрирования. Отметим здесь, что соответствующие скалярные уравнения система «Marle» формирует автоматически из векторных уравнений (1), (7) и (8), что дополнительно гарантирует корректность построения математической модели. Первый случай будет соответствовать движению при перемещениях подвижного модуля по рельсовой платформе, установленной вдоль оси X, соответствующей средней оси эллипсоида инерции (таблица 2). Второй случай моделирования будет проводиться для схемы перемещения подвижного модуля вдоль оси Y, соответствующей оси наибольшего момента инерции (таблица 2).

Таблица 2 – Параметры системы

Параметр	Ед. измерения	Значение
$A_1$	$кг \cdot м^2$	0,0045
$B_1$	$кг \cdot м^2$	0,0055
$C_1$	$кг \cdot м^2$	0,0035
$A_2$	$кг \cdot м^2$	0,0025
$B_2$	$кг \cdot м^2$	0,0035
$C_2$	$кг \cdot м^2$	0,0015
$m_1$	$кг$	2
$m_2$	$кг$	1
$k_1$	$кг/с$	0,0015
$k_{2c}$	$кг/с^2$	0,000003
$l$	$м$	0,14
$z$	$м$	0,04

### 2.1 Случай перемещения подвижного модуля вдоль оси X

Рассмотрим случай, когда подвижный модуль скользит с трением по рельсовой платформе, установленной вдоль оси X. В этом случае уравнение (8) запишется следующим конкретизированным образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x; \quad Q_x = Q_{xg} + F_c. \quad (14)$$

Обобщённая сила  $Q_{xg}$  определится из анализа элементарной работы активных сил и моментов сил, способных с учётом наложенных связей (рельсовая платформа) осуществлять относительные смещения подвижного модуля при формальной фиксации положения основного твёрдого тела. Так как наложенные связи разрешают перемещаться модулю, всегда оставаясь в плоскости XZ, то в линейном приближении бесконечно малое линейное смещение модуля ( $dx$ ) можно рассмотреть как результат бесконечно малого углового смещения вокруг центра масс подвижного модуля (дуга  $d\psi$ ) под действием Y-вой проекции гравитационного момента сил. В этом случае можно вычислить следующую элементарную работу момента гравитационных сил и сил трения на бесконечно малом перемещении  $dx$ :

$$dA_x = M_{2y} d\psi - v \dot{x} dx = \left( \frac{M_{2y}}{z} - v \dot{x} \right) dx, \quad (15)$$

где  $M_{2Y}$  – есть Y-вая проекция момента гравитационных сил, действующих на модуль  $M_2 = 3\alpha_0^2 e_r \times I_2 e_r$ ,  $\nu$  – коэффициент трения,  $z$  – расстояние от центра масс подвижного модуля до плоскости контакта с рельсовой платформой. Из выражения для элементарной работы следует, что обобщённая сила имеет вид:

$$Q_{xg} = \left( \frac{M_{2Y}}{z} - \nu \dot{x} \right). \quad (16)$$

В этом случае правая часть уравнения (14) запишется в виде:

$$Q_x = M_{2Y}/z - k_1 \dot{x} - k_{2c} x, \quad (17)$$

где  $k_1 = \nu + k_{1c}$  – есть суммарный коэффициент трения (табл.2).

Также для рассматриваемого случая необходимо конкретизировать величины, участвующие в выражениях (2) и (6). Для определения величин  $R_i$  и  $J$  формально вычислим положение центра масс наноспутника в системе координат с осями, параллельными связанной системе координат  $SXYZ$ , но расположенной в центре масс тела-носителя  $C_1$ . В системе  $C_1XYZ$  радиус-вектор тела-носителя будет нулевым, а радиус-вектор центра масс всего наноспутника запишется следующим образом:

$$R_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} C_1 C_2, \quad (18)$$

где  $C_1 C_2$  – радиус-вектор центра масс подвижного модуля:

$$C_1 C_2 = [x(t), 0, l]^T, \quad (19)$$

где  $l$  – расстояние от центра масс тела-носителя до центра масс подвижного модуля по оси Z. С учётом (18) радиус-векторы  $R_i$  в основной связанной системе координат  $SXYZ$  примут вид:

$$R_1 = -R_c; \quad R_2 = C_1 C_2 - R_c. \quad (20)$$

Тензор инерции гравитационной гантели  $J$  в этом случае будет иметь следующие компоненты:

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} J_{xx} &= m_1(R_{1y}^2 + R_{1z}^2) + m_2(R_{2y}^2 + R_{2z}^2); & J_{yy} &= m_1(R_{1x}^2 + R_{1z}^2) + m_2(R_{2x}^2 + R_{2z}^2); \\ J_{zz} &= m_1(R_{1y}^2 + R_{1x}^2) + m_2(R_{2y}^2 + R_{2x}^2); & J_{xz} &= -m_1(R_{1x}R_{1z}) - m_2(R_{2x}R_{2z}); \\ J_{xy} &= -m_1(R_{1x}R_{1y}) - m_2(R_{2x}R_{2y}); & J_{yz} &= -m_1(R_{1y}R_{1z}) - m_2(R_{2y}R_{2z}), \end{aligned} \quad (22)$$

причём при выбранной схеме движения подвижного модуля в плоскости XZ ( $R_{1y} = 0$ ) центробежные моменты  $J_{yz} = J_{xy} \equiv 0$ .

Располагая конкретизированными выражениями (18)–(22), можно провести численное моделирование динамики системы с подвижным вдоль оси  $X$  модулем на основе динамических уравнений (1), (14) и кинематических уравнений для направляющих косинусов орбитальных осей (7). Результаты моделирования приведены ниже на рисунках 3 и 4.

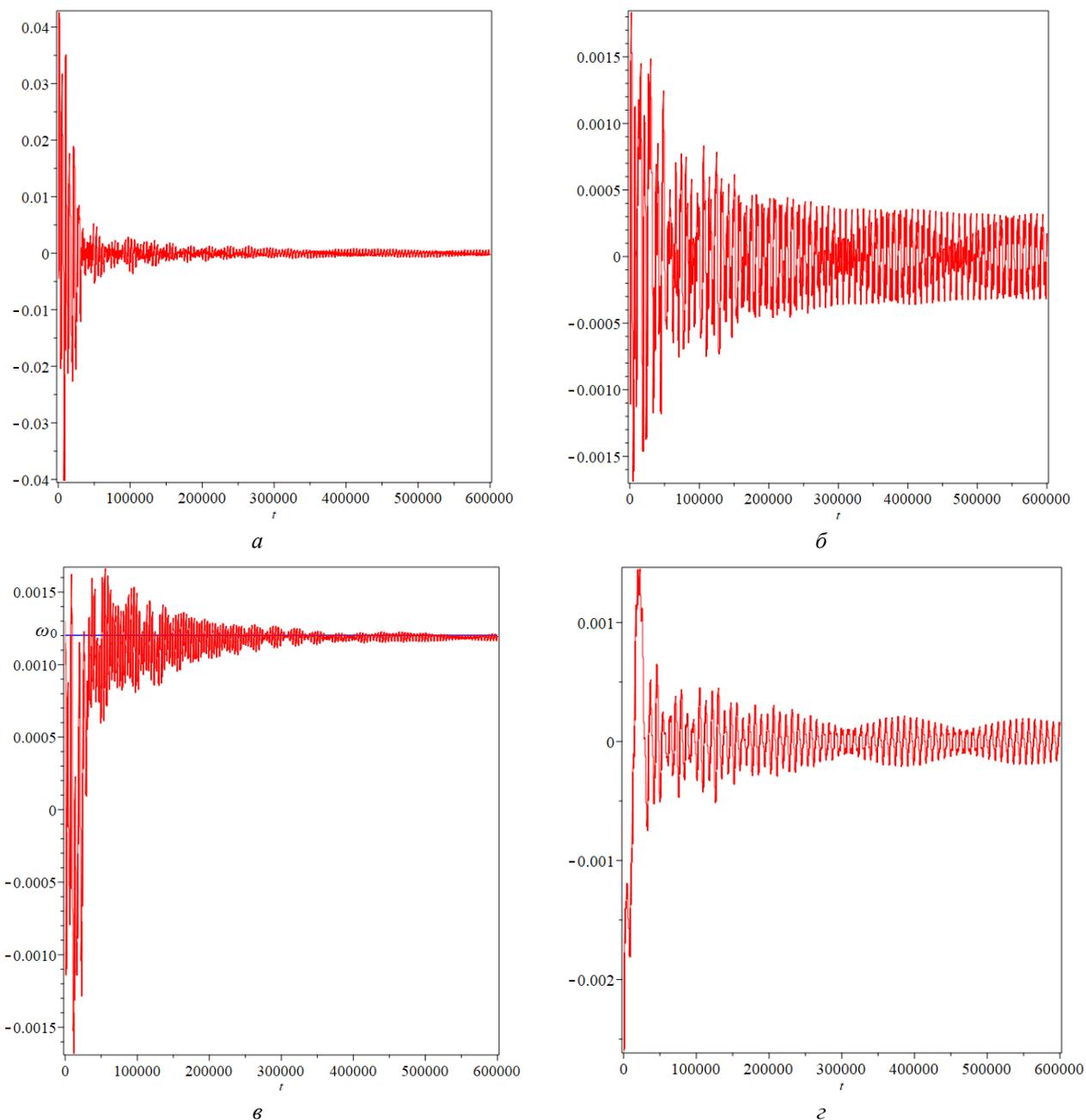


Рисунок 3 – Результаты численного моделирования динамики:  
 $a$  – зависимость положения подвижного модуля  $X$  [м] от времени [с];  
 $б$  – зависимость угловой скорости от времени  $p(t)$ ;  
 $в$  – зависимость угловой скорости от времени  $q(t)$ ;  
 $г$  – зависимость угловой скорости от времени  $r(t)$

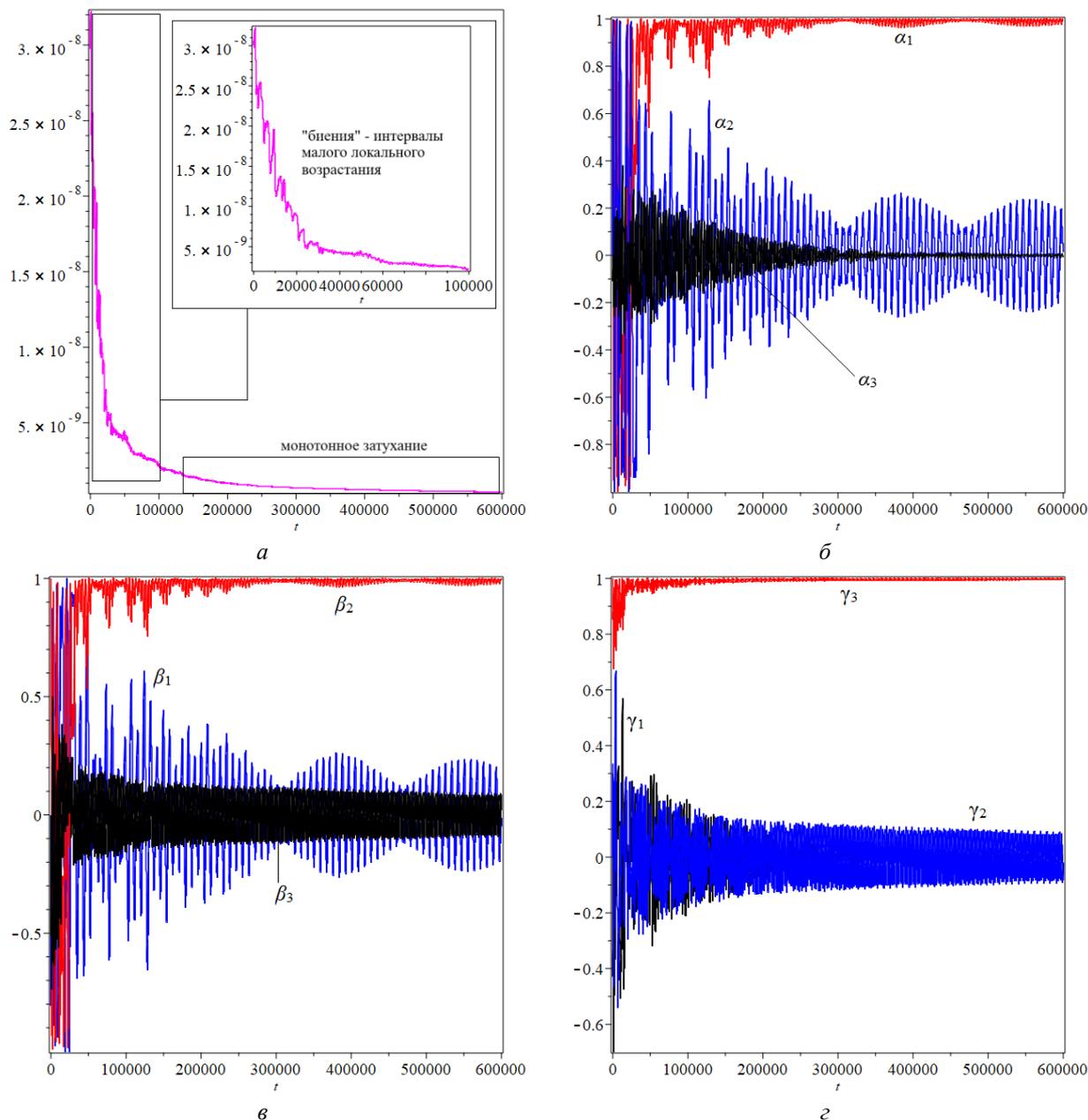


Рисунок 4 – Результаты численного моделирования динамики:  
 а – зависимость функции Ляпунова (13) от времени;  
 б – зависимости направляющих косинусов от времени  $\alpha_i(t)$ ;  
 в – зависимости направляющих косинусов от времени  $\beta_i(t)$ ;  
 г – зависимости направляющих косинусов от времени  $\gamma_i(t)$

Из анализа результатов моделирования следует, что выбранная схема демпфирования путём использования внутреннего трения при линейном смещении подвижного модуля по оси X, а также законы управления линейным перемещением модуля позволяют реализовать постепенный переход наноспутника в положение устойчивого гравитационного равновесия на круговой орбите. Гашение угловой скорости наноспутника (рисунок 3) практически до величины орбитальной угловой скорости (это теоретический предел) с точностью порядка 0,0005 рад/с осуществляется за время порядка 600 000 секунд ( $\approx 7$  суток), что вполне прием-

лемо для космических программ, использующих наноспутники с ограниченным функционалом управления, либо при использовании пассивных схем стабилизации движения.

Достижение положения устойчивого гравитационного равновесия (рисунок 2) подтверждается величинами направляющих косинусов орбитальных осей: совпадение осей связанной системы координат с осями орбитальной системы в целом достигнуто, при этом особенно важный аспект ориентации наноспутника – расположение продольной оси наноспутника (CZ) вдоль гравитационной «вертикали»  $CZ_0$  свидетельствуется практически единичным значением направляющего косинуса  $\gamma_3$  (рисунок 4, з).

Функция Ляпунова (рисунок 4, а) имеет однозначный тренд на монотонное (в средней своей величине) убывание, что особенно заметно на завершающем этапе стабилизации (после 100000 секунд). На начальном этапе функция Ляпунова имеет «биения» – интервалы слабого локального возрастания с локальными положительными значениями производной. Эти «биения» имеют место в связи с тем, что выбранный вид функции Ляпунова соответствует «замороженной монотельной системе» с неподвижным модулем при отсутствии трения и управления, действие которых вторгается в естественную динамику и разрушают её консервативность. Однако средний тренд функции Ляпунова имеет очевидную отрицательную производную, что численно доказывает устойчивость движения, схемы управления и итогового положения гравитационного равновесия.

Таким образом, линейное перемещение модуля с трением и соответствующие законы управления представляют собой вполне действенный алгоритм выполнения гравитационной стабилизации наноспутника и могут быть рекомендованы для использования в последующих космических программах.

## 2.2 Случай перемещения подвижного модуля вдоль оси Y

Рассмотрим случай, когда подвижный модуль скользит с трением по рельсовой платформе, установленной вдоль оси Y. В этом случае уравнение (8) запишется следующим конкретизированным образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_Y; \quad Q_Y = Q_{Yg} + F_c. \quad (23)$$

Вычисляя по аналогии с первым случаем обобщённую силу, можно записать следующую правую часть уравнения:

$$Q_Y = M_{2X} / z - k_1 \dot{y} - k_{2c} y, \quad (24)$$

где  $M_{2X}$  – есть X-вая проекция момента гравитационных сил, действующих на модуль  $M_2 = 3\omega_0^2 e_r \times I_2 e_r$ . Выражения для  $R_i$  и  $J$  вычисляются на основе (20) и (21), но с тем учётом, что

$$C_1 C_2 = [0, y(t), I]^T, \quad (25)$$

причём компоненты тензора инерции  $J_{xz} = J_{xy} = 0$ , а компонент  $J_{yz}$  уже будет отличен от нуля в соответствии с выражениями (22).

Располагая конкретизированными выражениями (24)–(25), можно провести численное моделирование динамики системы с подвижным вдоль оси Y модулем на основе динамических уравнений (1), (14) и кинематических уравнений для направляющих косинусов орбитальных осей (7). Результаты моделирования приведены ниже на рисунках 5 и 6.

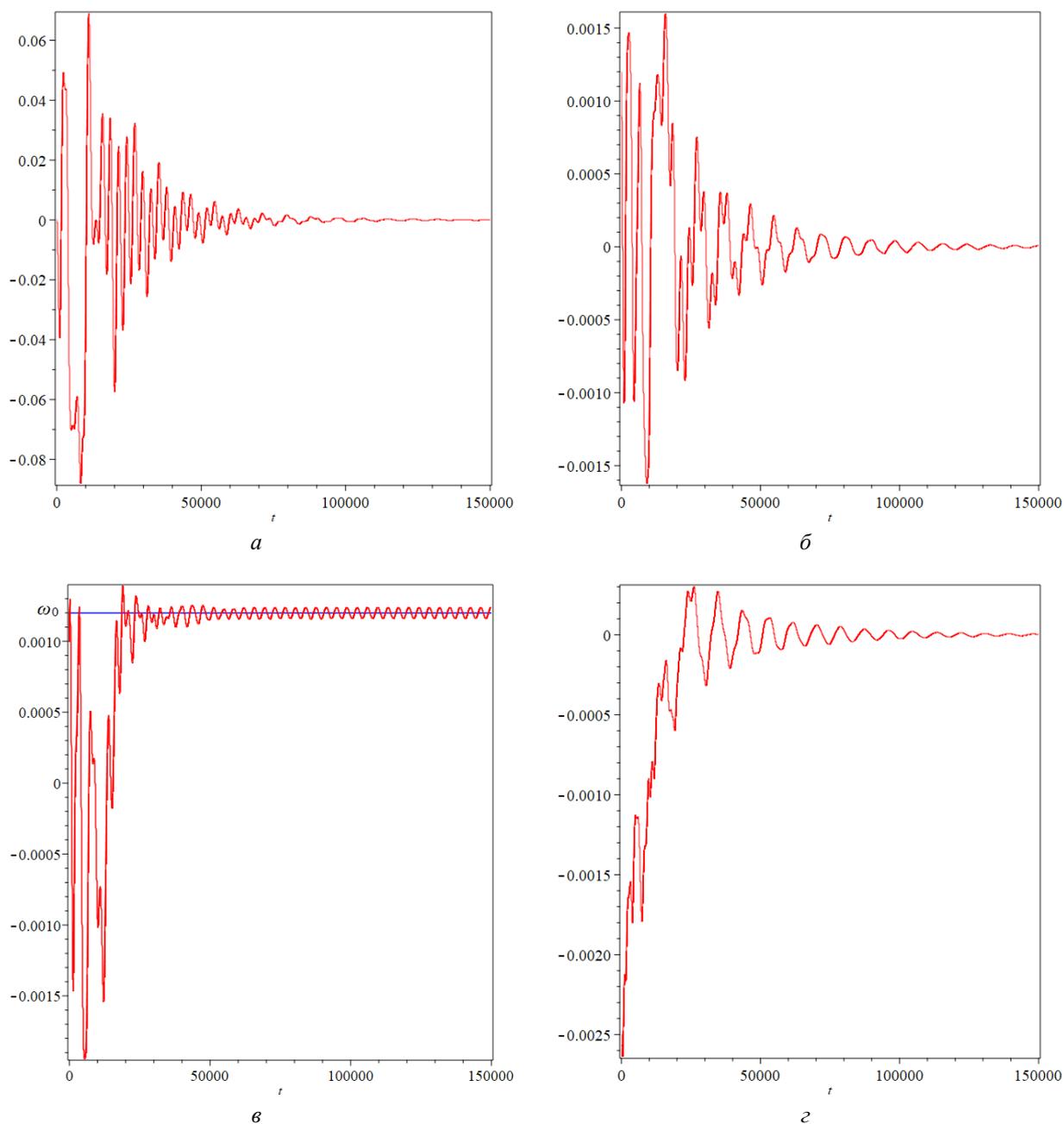


Рисунок 5 – Результаты численного моделирования динамики:  
 а – зависимость положения подвижного модуля  $Y$  [м] от времени [с];  
 б – зависимость угловой скорости от времени  $p(t)$ ;  
 в – зависимость угловой скорости от времени  $q(t)$ ;  
 г – зависимость угловой скорости от времени  $r(t)$

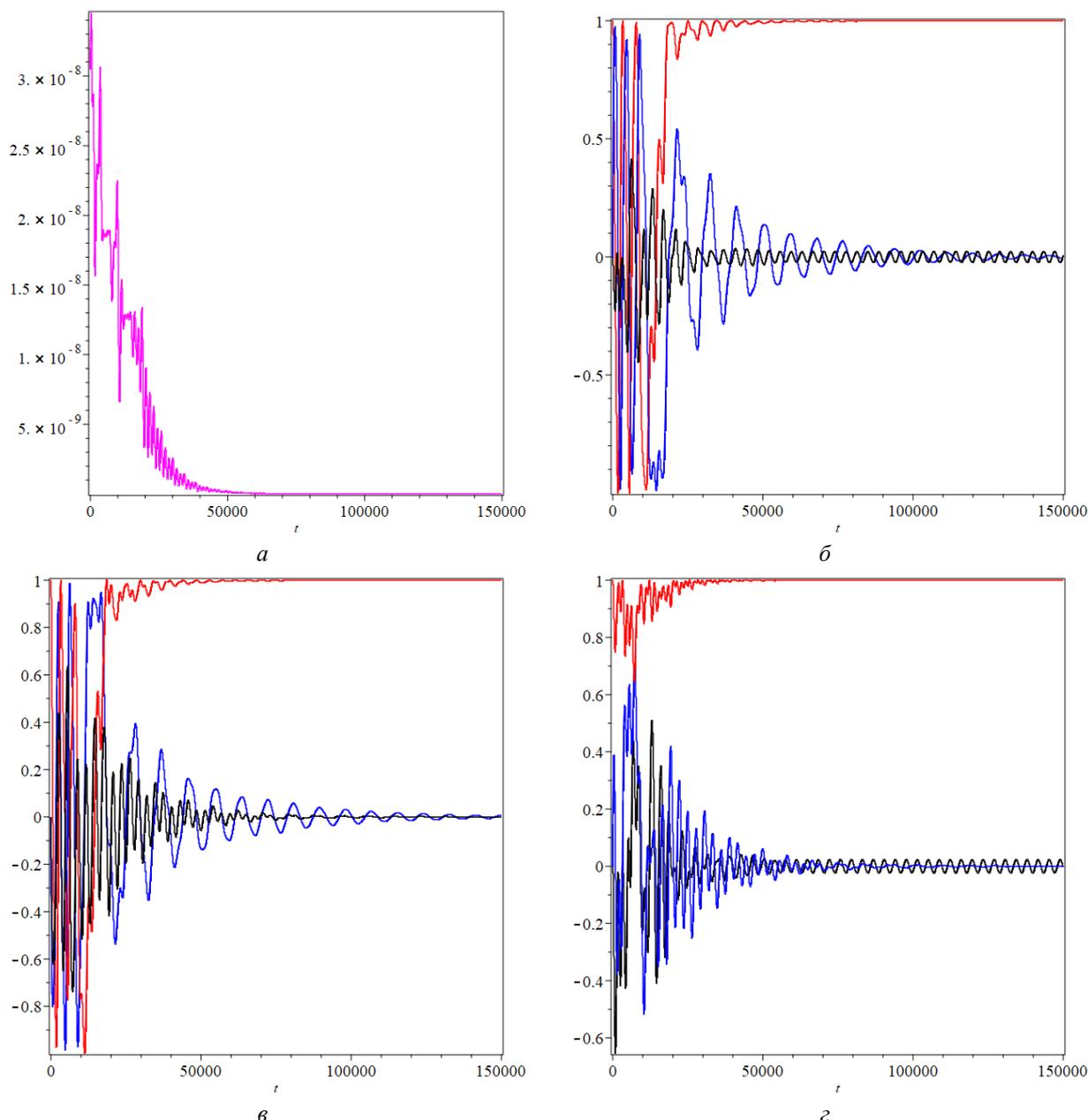


Рисунок 6 – Результаты численного моделирования динамики:  
 а – зависимость функции Ляпунова (13) от времени;  
 б – зависимости направляющих косинусов от времени  $\alpha_i(t)$ ;  
 в – зависимости направляющих косинусов от времени  $\beta_i(t)$ ;  
 г – зависимости направляющих косинусов от времени  $\gamma_i(t)$

Из анализа результатов моделирования (рисунки 5 и 6) следует, что схема демпфирования путём использования внутреннего трения при линейном смещении подвижного модуля по оси Y и выбранные законы управления, во-первых, действительны в смысле диссипации энергии и перехода в гравитационное положение равновесия и, во-вторых, работают существенно лучше по сравнению с предыдущей версией схемы с перемещением модуля вдоль оси X. Так, в целом видно, что задача гашения угловых скоростей и достижения орбитальной ориентации осей осуществляется в четыре раза быстрее. Гашение угловой скорости наноспутника (рисунок 5) до величины орбитальной угловой скорости с точностью порядка

0,0005 рад/с осуществляется за время порядка 150 000 секунд ( $\approx 1,7$  суток) по сравнению с 600 000 секунд предыдущего случая. Достижение положения гравитационного равновесия видно по графикам для направляющих косинусов (рисунок 6, в соответствии величин своим прежним цветам аналогично рисунку 4), которые демонстрируют еще более существенную точность совпадения связанных осей с орбитальными осями.

Функция Ляпунова (рисунок 6, *a*) имеет те же самые нюансы, что и её предыдущая версия (рисунок 4, *a*), однако переход к существенному однозначному затуханию осуществляется ещё более быстро – практически с 50 000 секунды движения.

Таким образом, линейное перемещение модуля с трением вдоль оси  $Y$  является более эффективным по сравнению со схемой движения модуля вдоль оси  $X$  и представляет собой предпочтительную версию для реализации на практике.

### Заключение

В настоящей статье рассмотрено угловое движение наноспутника с подвижным модулем, совершающим линейные перемещения относительно главного тела вдоль рельсовой платформы при наличии жидкостного трения. Подобная схема позволяет за счёт диссипативных свойств трения и за счёт взаимодействия наноспутника с внешним гравитационным полем сбрасывать кинетическую энергию и кинетический момент спутника и в итоге осуществлять переход в устойчивое гравитационное положение равновесия на орбите. Использование линейного перемещения модуля как механизм обеспечения требуемых режимов движения характеризуется своей научной новизной, конструкционной простотой и возможностью практического использования в современных космических миссиях.

Сформулированы законы управления перемещением модуля, увеличивающие темпы перехода в гравитационно-стабилизированное положение равновесия. В сравнительном плане рассмотрены два случая реализации линейных перемещений, соответствующих движениям модуля вдоль разных осей инерции (средней и максимальной) наноспутника.

Таким образом, в работе показано, что линейное перемещение модуля с трением и соответствующие законы управления представляют собой вполне действенный алгоритм выполнения гравитационной стабилизации наноспутника и могут быть рекомендованы для использования в последующих космических программах.

Более того, в исследованиях показано, что схема перемещения модуля вдоль оси  $Y$  (в плоскости, ортогональной оси среднего момента инерции) является более эффективной по сравнению со схемой перемещения модуля вдоль оси  $X$  (в плоскости, ортогональной оси наибольшего момента инерции).

### Список использованных источников

1. Белецкий, В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле / В. В. Белецкий. – Москва : МГУ, 1975. – 308 с.
2. Ashenberg, J. Active gravity-gradient stabilization of a satellite in elliptic orbits / J. Ashenberg, E. C. Lorenzini // *Acta Astronautica*. – 1999. – no. 45 (10). – pp. 619-627.
3. Doroshin, A. V. Attitude dynamics of a dual-spin nanosatellite with a gravitational damper / A. V. Doroshin, A. V. Eremenko // *Advances in Space Research*. – 2024. – no.73. – pp. 3166–3178. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2023.12.063>.
4. Doroshin, A. V. Gravitational Dampers for Unloading Angular Momentum of Nanosatellites / A.V. Doroshin // In: Lacarbonara W., Balachandran B., Leamy M.J., Ma J., Tenreiro Machado J.A., Stepan G. (eds) *Advances in Non-linear Dynamics. NODYCON Conference Proceedings Series*. Springer, Cham. – 2022. – pp. 257-266. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-81162-4\\_23](https://doi.org/10.1007/978-3-030-81162-4_23)
5. Асланов, В. С. Динамика малых спутников с трехосным гравитационным демпфером / В. С. Асланов, А. В. Дорошин // *Прикладная математика и механика*. – 2023. – Т. 87, №5. – С.729–741.

6. Черноусько, Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость / Ф. Л. Черноусько. – Москва : ВЦ АН СССР, 1968.
7. Amelkin, N. I. Stability of the steady rotations of a satellite with internal damping in a central gravitational field / N. I. Amelkin, V. V. Kholoshchak // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2014. – Vol.81. – no. 2. – pp. 85-94.
8. Ovchinnikov, M. Y. A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites / M. Y. Ovchinnikov, D. S. Roldugin // *Progress in Aerospace Sciences*. – 2020. – Vol. 109. – DOI: 10.1016/j.paerosci.2019.05.006.
9. Arduini, C. Active magnetic damping attitude control for gravity gradient stabilized spacecraft / C. Arduini, P. Baiocco // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 1997. – Vol. 20. – no. 1. – pp. 117-122.
10. Nobari, N. A. Attitude dynamics and control of satellites with fluid ring actuators / N. A. Nobari, A. K. Misra // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2012. – Vol. 35. – no. 6. – pp. 1855-1864. – DOI 10.2514/1.54599.
11. Kumar, K. D. Satellite attitude stabilization using fluid rings / K. D. Kumar // *Acta Mechanica*. – 2009. – no. 208(1-2). – pp. 117-131.
12. Sandfry, R. A. Steady spins and spinup dynamics of axisymmetric dual-spin satellites with dampers / R. A. Sandfry, C. D. Hall // *Journal of spacecraft and rockets*. – 2004. – no. 41(6). – pp. 948-955.
13. Ayoubi, M. A (2011). Attitude motion of a spinning spacecraft with fuel sloshing and nutation damping / M. A. Ayoubi, F. A. Goodarzi, A. Banerjee // *The Journal of the Astronautical Sciences*. – 2011. – no. 58(4) – pp. 551-568.

## Attitude motion of a nanosatellite with a movable module on a rail platform during gravity-gradient stabilization process

**A. V. Doroshin** | Doctor of Science (D.Sc. in Physics and Mathematics),  
Head of the Theoretical Mechanics Department;  
Samara National Research University, Samara, Russian  
Federation;  
doran@inbox.ru

**A. V. Eremenko** | Postgraduate Student of the Theoretical Mechanics  
Department;  
Samara National Research University, Samara, Russian  
Federation;  
yeryomenko.a@bk.ru

*The dynamics of the angular motion of a nanosatellite with a moving unit sliding on a rail platform relative to the main body is considered. The trajectory motion of the center of mass of a nanosatellite is considered as motion in a circular orbit. Sliding of the moving unit in the transverse direction changes the location of the center of mass and the magnitude of the moments of inertia of the system. It is assumed that the sliding of the unit occurs in the presence of friction forces, and can also be performed in accordance with the selected control laws. The presence of internal friction allows performing the dissipation of kinetic energy, and interaction with the external gravitational field ensures the release of the kinetic momentum. This makes it possible the transition of the nanosatellite to a position of stable gravitational equilibrium in the orbital coordinate system. Controlling the position of the unit increases the rate of transition to the gravitational equilibrium position.*

**Keywords:** nanosatellite; movable unit; rail platform; internal friction; controlled unit displacement; gravitational equilibrium position

*Citation:* Doroshin, A. V. and Eremenko, A. V. (2024), "Attitude motion of a nanosatellite with a movable module on a rail platform during gravity-gradient stabilization process", *Journal of Dynamics and Vibroacoustics*, vol. 10, no. 4, pp. 92-108. DOI: 10.18287/2409-4579-2024-10-4-92-108. (In Russian; abstract in English).

---

### References

1. Beletsky, V. V. (1975), *Dvizhenie Sputnika Otnositel'no Tsentra Mass v Gravitatsionnom Pole* [Satellite Motion Relative to the Center of Mass in a Gravitational Field], Mosk. Gos. Univ, Moscow, Russia. (In Russian).
2. Ashenberg, J. and Lorenzini, E. C. (1999), "Active gravity-gradient stabilization of a satellite in elliptic orbits", *Acta Astronautica*, vol. 45 (10), pp. 619-627.
3. Doroshin, A. V. and Eremenko, A. V. (2024), "Attitude dynamics of a dual-spin nanosatellite with a gravitational damper", *Advances in Space Research*, no. 73, pp. 3166–3178, <https://doi.org/10.1016/j.asr.2023.12.063>.
4. Doroshin, A. V. (2022), "Gravitational Dampers for Unloading Angular Momentum of Nanosatellites", In: *Lacarbonara W., Balachandran B., Leamy M.J., Ma J., Tenreiro Machado J.A., Stepan G. (eds) Advances in Nonlinear Dynamics. NODYCON Conference Proceedings Series. Springer, Cham*, pp. 257-266. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-81162-4\\_23](https://doi.org/10.1007/978-3-030-81162-4_23)
5. Aslanov, V. S. and Doroshin, A. V. (2023), "The Dynamics of Small Satellites with a Three-Axial Gravitational Damper", *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, vol. 87, no. 5, pp. 729–741. (In Russian).
6. Chernous'ko, F. L. (1968), "Motion of a Solid with Cavities Containing a Viscous Fluid", *Vych. Tsent. SSSR Akad. Nauk, Moscow*, 1968 (In Russian).
7. Amelkin, N. I. and Kholoshchak, V. V. (2017), "Stability of the steady rotations of a satellite with internal damping in a central gravitational field", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 81, no. 2, pp. 85-94.
8. Ovchinnikov, M. Y. and Roldugin, D. S. (2020), "A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites", *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 109, DOI: 10.1016/j.paerosci.2019.05.006.

9. Arduini, C. and Baiocco, P. (1997), "Active magnetic damping attitude control for gravity gradient stabilized spacecraft", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 20, no. 1, pp. 117-122.
10. Nobari, N. A. and Misra, A. K. (2012), "Attitude dynamics and control of satellites with fluid ring actuators", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 35, no. 6, pp. 1855-1864, DOI: 10.2514/1.54599.
11. Kumar, K. D. (2004), "Satellite attitude stabilization using fluid rings", *Acta Mechanica*, no. 208(1-2), pp. 117-131.
12. Sandfry, R. A. and Hall, C. D. (2004), "Steady spins and spinup dynamics of axisymmetric dual-spin satellites with dampers", *Journal of spacecraft and rockets*, no. 41(6), pp. 948-955.
13. Ayoubi, M. A., Goodarzi, F. A. and Banerjee, A. (2011), "Attitude motion of a spinning spacecraft with fuel sloshing and nutation damping", *The Journal of the Astronautical Sciences*, no. 58(4), pp. 551-568.