УДК 534.17

DOI: 10.18287/2409-4579-2024-10-3-29-38

Асимптотический анализ монотонной устойчивости амплитуды колебаний маятника при малом нелинейном демпфировании

В. В. Любимов доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики;
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, Самара;
lyubimov.vv@ssau.ru

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее свободные колебания маятника с малым демпфированием в виде полинома третьей степени. Цель работы – выполнить анализ монотонной устойчивости амплитуды свободных колебаний маятника с малым демпфированием, имеющего одну степень свободы. Уравнение колебаний маятника записывается в виде системы уравнений амплитуда-фаза. Далее производится усреднение уравнения для амплитуды колебаний, выполняемое по быстрой фазе. Анализируя выражения производных первого и второго порядка для усреднённой амплитуды, выполняется анализ монотонной устойчивости колебаний маятника. В работе получены следующие основные результаты: сформулированы условия монотонной устойчивости амплитуды колебаний маятника, описана область монотонной устойчивости, определено количество качественно различных случаев монотонной устойчивости, рассмотрено условие достижимости маятником устойчивого положения равновесия. Проверка результатов работы подтвердила их корректность. При этом результаты работы имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Например, их можно применить при исследовании устойчивости автоколебаний в маятниковых системах.

Ключевые слова: *маятник; амплитуда; колебания; демпфирование; монотонная устойчивость; метод усреднения*

Цитирование: Любимов, В. В. Асимптотический анализ монотонной устойчивости амплитуды колебаний маятника при малом нелинейном демпфировании / В. В. Любимов // Динамика и виброакустика. – 2024. – Т. 10, №3. – С. 29–38. DOI: 10.18287/2409-4579-2024-10-3-29-38

Введение

Как правило, при качественном анализе механических систем, содержащих малые параметры, применяются известные асимптотические методы нелинейной динамики [1]. В частности, при исследовании монотонной устойчивости при медленном изменении амплитуды колебаний угла атаки космического аппарата, спускаемого в атмосфере Марса, применялся метод усреднения [2]. Кроме того, в работе [3] рассмотрен метод анализа монотонной устойчивости частного решения дифференциального уравнения, позволяющий определить и исследовать область изменения этого решения. Следует отметить, что метод исследования монотонной устойчивости решения, представленный в работах [2-3], может быть применён для различных динамических систем.

Цель данной работы – выполнить анализ монотонной устойчивости амплитуды свободных колебаний маятника с малым демпфированием, имеющего одну степень свободы. В работе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее свободные колебания маятника с малым демпфированием в виде полинома третьей степени. Метод усреднения применяется в данной задаче для приближённого анализа амплитуды колебаний рассматриваемого маятника. При этом дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее колебания маятника, записывается в виде системы уравнений амплитуда-фаза [4]. В дальнейшем производится усреднение уравнения для амплитуды колебаний, выполняемое по быстрой фазе. На основе математического анализа выражений для производных первого и второго порядка от усреднённой амплитуды выполняется исследование монотонной устойчивости колебаний маятника. Рассмотрим подробно метод анализа монотонной устойчивости колебаний маятника.

1 Уравнение движения маятника с малым нелинейным демпфированием

Предположим, что маятник с одной степенью свободы совершает свободные колебания с учётом малого демпфирования, описываемого полиномом третьей степени. Дифференциальное уравнение движения данного маятника имеет вид:

$$x'' + \varepsilon\mu(x)x' + \omega^2 x = 0, \tag{1}$$

где $x = x(t)$ – безразмерное расстояние от положения равновесия до текущего положения центра масс маятника; t – независимая переменная (безразмерное время движения маятника); $x' = \dfrac{dx}{dt}$ – безразмерная первая производная от переменной $x(t)$; $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ – безразмерная вторая производная от переменной $x(t)$; $\varepsilon\mu(x) = \nu_0 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3$ – малый безразмерный коэффициент демпфирования, $\nu_i, i = 0,1,2,3$ – малые безразмерные положительные коэффициенты разложения, ε – безразмерный малый параметр; ω – безразмерная постоянная частота свободных колебаний маятника.

Представим уравнение (1) в виде системы двух уравнений амплитуда-фаза [4]. Учитывая замену переменной $\omega_\alpha = d\alpha / dt$, запишем уравнение (1) в виде системы уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_1, \tag{2}$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\varepsilon\mu(x)\frac{dx}{dt} - \omega^2 x. \tag{3}$$

Система уравнений (2)-(3) полностью эквивалентна уравнению (1).

При отсутствии демпфирования (при ε=0) из уравнения (1) получаем невозмущённое уравнение:

$$x'' + \omega^2 x = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет частное решение:

$$x = A\cos\varphi. \tag{5}$$

Здесь A – постоянная безразмерная амплитуда колебаний, φ – фаза колебаний, $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, ω – постоянная (в невозмущённом случае) частота колебаний, φ_0 – постоянная начальная фаза. Дифференцируя переменную x по времени t с учётом (5), получаем:

$$\omega_1 = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin\varphi\,. \tag{6}$$

Далее для получения уравнений амплитуда-фаза применим метод вариации произвольной постоянной. При этом в возмущённой системе (2)-(3) производится замена переменных x, ω_1 на переменные A, φ. В конечном итоге получим дифференциальные уравнения для новых переменных A, φ. С этой целью выполним подстановку выражений (5)-(6) в систему уравнений (2)-(3). Учитывая переменность величин A, φ, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{dA}{dt}\cos\varphi - A\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = -A\omega\sin\varphi, \tag{7}$$

$$\frac{dA}{dt}\sin\varphi + A\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = A\omega\cos\varphi - \varepsilon A\mu(A,\varphi)\sin\varphi. \tag{8}$$

Решая систему (7)-(8) относительно производных, находим:

$$\frac{dA}{dt} = -\varepsilon A\mu(A,\varphi)\sin^2\varphi, \tag{9}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \varepsilon\mu(A,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi. \tag{10}$$

Следует отметить, что система уравнений (9)-(10) эквивалента уравнению (1). Из системы уравнений (9)-(10) следует, что амплитуда колебаний *A(t)* – медленно изменяющаяся переменная, а фаза колебаний φ – быстро изменяющаяся переменная.

2 Определение усреднённого уравнения амплитуды колебаний маятника

Правые части уравнений (9)-(10) зависят от быстро изменяющейся фазы φ, что затрудняет анализ эволюции этих переменных. С целью упрощения уравнения (9) применим нерезонансную схему усреднения. Эта разновидность метода усреднения применима, если частота ω является немалой величиной. Согласно данному методу усреднения первое приближение для медленно-изменяющейся переменной, которой является амплитуда колебаний, имеет вид:

$$\frac{dA}{dt} = -\varepsilon B_1(A). \tag{11}$$

Выражение для правой части уравнения (11) находится следующим образом:

$$B_1(A) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(A,\varphi)\sin\varphi d\varphi\,, \tag{12}$$

где $f(A,\varphi) = -A\sin^2\varphi(\nu_0 + \nu_1 A\cos\varphi + \nu_2(A\cos\varphi)^2 + \nu_3(A\cos\varphi)^3)$.

Замечание. Последующие за первым высшие приближения метода усреднения можно не учитывать (если первое приближение отлично от нуля), так они имеют порядок малости выше первого и практически не влияют на эволюцию усреднённой амплитуды.

После вычисления интеграла в уравнении (11) получаем следующее усреднённое уравнение для первой производной амплитуды колебаний:

$$\frac{dA}{dt} = -\varepsilon k_0 A - \varepsilon k_2 A^3, \tag{13}$$

где $k_0 = \frac{\nu_0}{2}, k_2 = \frac{\nu_2}{8}$ – известные постоянные величины.

Замечание. Уравнение (13) является дифференциальным уравнением Бернулли. Это уравнение имеет аналитическое решение.

Общее решение уравнения (13) имеет вид:

$$A = \sqrt{\frac{k_0}{e^{2k_0(t+C)} - k_2}}, \tag{14}$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Замечание. Так как слагаемые в правой части уравнения (13) имеют один порядок малости, то увеличение степени амплитудой во втором слагаемом должно учитываться при выборе величин постоянных коэффициентов.

Найдём уравнение для второй производной амплитуды колебаний. Дифференцируя уравнение (9), получаем:

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \varepsilon F(A,\varphi). \tag{15}$$

Здесь $F(A,\varphi) = -\mu(A,\varphi)\sin^2\varphi \frac{dA}{dt} - A\sin^2\varphi \frac{\partial\mu}{\partial A}\frac{dA}{dt} - A\mu(A,\varphi)\sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} - A\sin^2\varphi \frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$. В уравнении (15) предполагается, что все слагаемые в правой части имеют первый порядок малости.

По аналогии с уравнением для первой производной применим метод усреднения для упрощения уравнения для второй производной (15). В первом приближении метода усреднения получаем:

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -\varepsilon B_2(A). \tag{16}$$

Выражение для правой части уравнения (16) находится следующим образом:

$$B_2(A) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(A,\varphi)d\varphi. \tag{17}$$

После интегрирования получаем усреднённое уравнение для второй производной амплитуды колебаний в следующем виде:

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \varepsilon q_0 A + \varepsilon q_2 A^3 + \varepsilon q_4 A^5, \tag{18}$$

где $q_0 = \dfrac{3\nu_0^2}{4}, q_2 = \dfrac{3\nu_0\nu_2}{8}, q_4 = \dfrac{13\nu_2^2}{128}$ – известные постоянные величины.

Замечание. При нахождении выражений (13) и (18) отличными от нуля являются лишь интегралы, что умножаются на нечётные степени амплитуды. При этом, если уравнение (13) имеет общее аналитическое решение, то уравнение (17) общего аналитического решения, выраженного в элементарных функциях, не имеет. Следует отметить, что уравнение (18) имеет общий интеграл.

3 Анализ монотонной устойчивости амплитуды колебаний маятника

Сформулируем определение монотонной устойчивости частного решения $A(t)$ усреднённого уравнения (13), которое при своём изменении на полубесконечном интервале $t \in [0, +\infty)$ при $t \to +\infty$ стремится к нулевому значению $A(+\infty) = 0$. Пусть частное решение $A(t)$ уравнения (13) удовлетворяет на интервале $t \in [0, +\infty)$ следующим условиям:

(i) известная функция $A(t)$, определена и дважды непрерывно-дифференцируема;

(ii) вторая производная $A''(t)$ сохраняют свои строгие знаки на своих интервалах, кроме линейных интервалов, на которых выполняется равенство $A''(t) = 0$;

(iii) при $t \to +\infty$ выполняется равенство $\lim\limits_{t \to +\infty} A(t) = 0$;

(iv) монотонная функция $A(t)$ ограничена снизу нулевым значением (inf $A(t)$ =0).

Определение 1 (монотонная устойчивость амплитуды на полубесконечном интервале). Если функция частного решения $A(t)$ усреднённого уравнения (13) удовлетворяет условиям (i)-(iv), и эта функция строго монотонно уменьшается на интервале $t \in [0, +\infty)$, стремясь к нулевому значению при $t \to +\infty$, то это частное решение называется монотонно устойчивым в среднем на полубесконечном интервале $t \in [0, +\infty)$.

Сформулируем достаточное условие монотонной устойчивости частного решения $A(t)$.

Теорема 1. Если положительная в рамках первой координатной четверти системы координат (t, A) функция $A(t)$, являющаяся частным решением усреднённого уравнения (13), удовлетворяет условиям (i)-(iv), и непрерывная производная $A'(t)$ отрицательна на полубесконечном интервале $t \in [0, +\infty)$, то это частное решение является монотонно устойчивым в среднем на данном интервале.

Доказательство. Пусть положительная в рамках первой координатной четверти функция $A(t)$ имеет непрерывную первую производную $A'(t)$ на интервале $t \in [0, +\infty)$. Пусть первая производная этой функции отрицательна на интервале $t \in [0, +\infty)$, т.е. выполняется условие $A'(t) < 0$. Применим фундаментальное достаточное условие убывания действительной функции одной переменной. При этом знакопостоянная в рамках первой координатной четверти функции $A(t)$ частного решения уравнения (13) удовлетворяет условиям (i)–(iv), и функция $A(t)$ монотонно убывает на интервале $t \in [0, +\infty)$. Следовательно, согласно Определению 1, частное решение $A(t)$ усреднённого уравнения (13) является монотонно устойчивым в среднем на интервале $t \in [0, +\infty)$. Теорема доказана.

Следует отметить, что при дальнейшем анализе монотонной устойчивости будут применяться выражения для первой и второй производных решения $A(t)$. При этом справедлива следующая теорема [3] о количестве качественно различных случаев монотонной устойчивости частного решения $A(t)$ уравнения (13).

Теорема 2 (см. теорему 2 [3]). Если частное решение $A(t)$ уравнения (13) удовлетворяет условиям Определения 1, и количество точек перегиба этого решения принимает все значения 0, 1, 2,…, m, то количество всех качественно различных случаев монотонной устойчивости решений $A(t)$ равно количеству сочетаний C_1^{2m+3}.

Доказательство этой теоремы аналогично исходной теореме и приведено в статье [3].

Пусть имеется C_1^{2m+3} качественно различных частных решения уравнения (13) (т.е. они отличаются характером выпуклости функции $A(t)$), удовлетворяющих условиям монотонной устойчивости, содержащихся в Определении 1, Теореме 1 и Теореме 2.

Найдём границы области монотонной устойчивости данных решений на координатной плоскости (t, A). При этом справедлива следующая теорема [3].

Теорема 3 (см. теорему 4 [3]). Если все частные решения уравнения (13) удовлетворяют условиям Определения 1, то границы области монотонной устойчивости решений $A(t)$ образуют прямоугольник, содержащийся в первой координатной четверти системы координат (t, A) и имеющий две стороны, расположенные на данных координатных осях.

Доказательство. Первая производная любого из частных решений уравнения (1), удовлетворяющих условиям Определения 1 и Теоремы 1, отрицательна на всём интервале $t \in [0, +\infty)$: $A' < 0.$ При этом вторая производная частного решения положительна на всём интервале $t \in [0, +\infty)$: $A''(t) > 0$. Предположим, что имеются следующие начальные и конечные условия: $t_0 = 0$, $A_0 > 0$ и $t_1 = +\infty$, $A_1 = 0$. Выполним переход от декартовых координат (t, A) к полярным координатам (ρ, φ). Здесь $\rho = \sqrt{t^2 + A^2}$, $tg\varphi = A/t$. В результате в начальной точке t=0 получаем $\rho_0 = A_0$. В пределе (при $t \to 0+0$) находим $\max\varphi = \varphi_0 = arctg(+\infty) = \pi/2$. В конечной точке получаем: $A_1 = 0$, $\rho_1 = t_1$, $\min\varphi = \varphi_1 = \mathrm{arctg}(0) = 0$. Следовательно, угол φ при уменьшении от π/2 до нуля последовательно принимает все свои значения в первой четверти. При этом область монотонной устойчивости решений $A(t)$ ограничена следующими значениями: начальным значением $t_0 = 0$, конечным значением $t_1 = +\infty$, начальным значением $A_0 > 0$ и конечным значением $A_1 = 0$. Отметим, что конечное значение $t_1 = +\infty$ и начальное значение $A_0 > 0$ являются ограничениями сверху значений координат (t, A), т.е. значение t является неограниченным. Кроме того, начальное (при $A = A_0$) значение $t_0 = 0$ и конечное значение $A_1 = 0$ являются ограничениями снизу значений координат (t, A). Следовательно, границы области монотонной устойчивости частных решений $A(t)$ уравнения (13) образуют на плоскости (t, A) прямоугольник с вершинами в следующих точках:(0, 0), (t_1, 0), (0, A_0), (t_1, A_0). Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть частное решение усреднённого уравнения (13) имеет вид:

$$A = \frac{1}{5\sqrt{e^{0.08t-0.01} - 0.5}}. \tag{19}$$

Частное решение (19) получено из общего решения (14) при начальном условии: $t_0 = 0$, $A_0 = 0.284$. При этом значения параметров уравнения (1) равны: $\nu_0 = 0.08, \nu_2 = 4, \omega = 1$.

Покажем, что все рассмотренные выше условия монотонной устойчивости для решения (19) выполнены. Для этого найдём первую производную функции (19). В результате получим:

$$A' = -\frac{0.008e^{0.08t-0.01}}{\left(e^{0.08t-0.01}-0.5\right)^{1.5}}. \tag{20}$$

Из выражения (20) следует, что первая производная частного решения (19) отрицательна на полубесконечном интервале $t \in [0,+\infty)$. Следовательно, условие монотонной устойчивости об отрицательности первой производной частного решения выполнено. Далее найдём вторую производную частного решения (19). В результате имеем:

$$A'' = \frac{0.00096e^{0.16t-0.02}}{\left(e^{0.08t-0.01}-0.5\right)^{2.5}} - \frac{0.00064e^{0.08t-0.01}}{\left(e^{0.08t-0.01}-0.5\right)^{1.5}}. \tag{21}$$

Из выражения (21) следует, что вторая производная частного решения (19) положительна на всём полубесконечном интервале $t \in [0,+\infty)$. Следовательно, условие монотонной устойчивости о сохранении неизменным знака второй производной частного решения выполнено. Кроме того, также выполнено условие об определённости и дважды непрерывной дифференцируемости функции (19) на всём полубесконечном интервале $t \in [0,+\infty)$. Вычисляя предел от выражения (19) при $t \to +\infty$, получаем: $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = 0$. Следовательно, данное предельное условие монотонной устойчивости также выполнено. Это предельное равенство представляет собой условие достижимости маятником устойчивого значения. Следует отдельно также отметить, что монотонная функция (19) ограничена снизу нулевым значением ($\inf A(t)=0$). Окончательно получаем, что согласно Определению 1 и Теореме 1, частное решение (19) является монотонно устойчивым в среднем на полубесконечном интервале $t \in [0,+\infty)$. Исходя из Теоремы 2 получаем, что количество качественно различных случаев монотонной устойчивости решений $A(t)$ равно трём. Действительно, так как функция (19) не имеет точек перегиба (m=0), то количество сочетаний C_1^{2m+3} в этом случае равно $C_1^3 = 3$. Однако, из этих трёх случаев в данном частном решении реализуется только один, когда знаки первой и второй производной имеют вид: $A' < 0, A'' > 0$. Два других случая – $A' < 0, A'' = 0$ и $A' < 0, A'' < 0$ – не описываются решением (19). Согласно Теореме 3 область монотонной устойчивости частного решения (19) образована внутренней частью прямоугольника с вершинами:($t = 0$, $A = 0$), ($t = 0$, $A = 0.284$), ($t = +\infty$, $A = 0$), ($t = +\infty$, $A = 0.284$). При этом правая сторона данного прямоугольника стремится к положительной бесконечности.

На рисунке 1 показано монотонное уменьшение амплитуды колебаний маятника, происходящее с неизменной выпуклостью вниз на всём рассматриваемом интервале времени движения. Рисунок 1 описывает изменение амплитуды частного решения (19) . На рисунке 2 представлено изменение отрицательной первой производной амплитуды колебаний маятника при монотонной устойчивости частного решения (19) в зависимости от времени. На рисунке 3 показано изменение положительной второй производной амплитуды колебаний маятника при монотонной устойчивости частного решения (19) в зависимости от времени. Численные результаты на рисунках 1–3 подтверждают выполнение условий монотонной устойчивости усреднённой амплитуды рассматриваемого маятника.

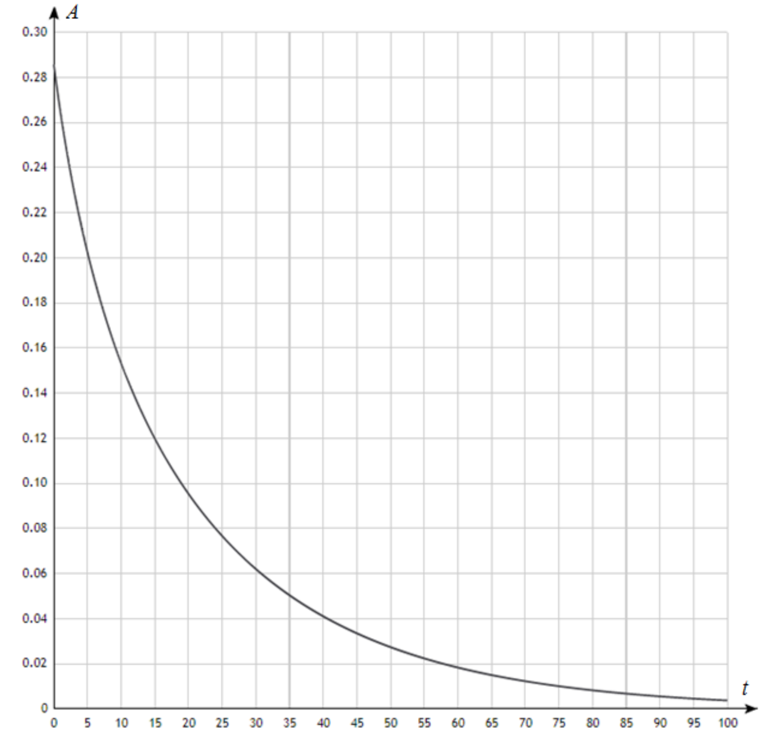

Рисунок 1 – Уменьшение амплитуды колебаний маятника при монотонной устойчивости частного решения в зависимости от времени

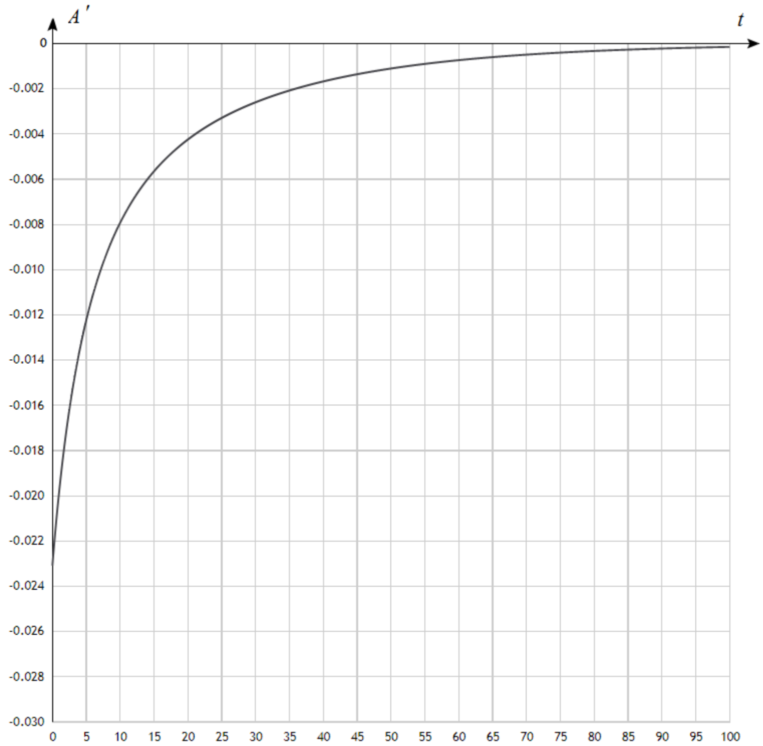

Рисунок 2 – Изменение отрицательной первой производной амплитуды колебаний маятника при монотонной устойчивости частного решения в зависимости от времени

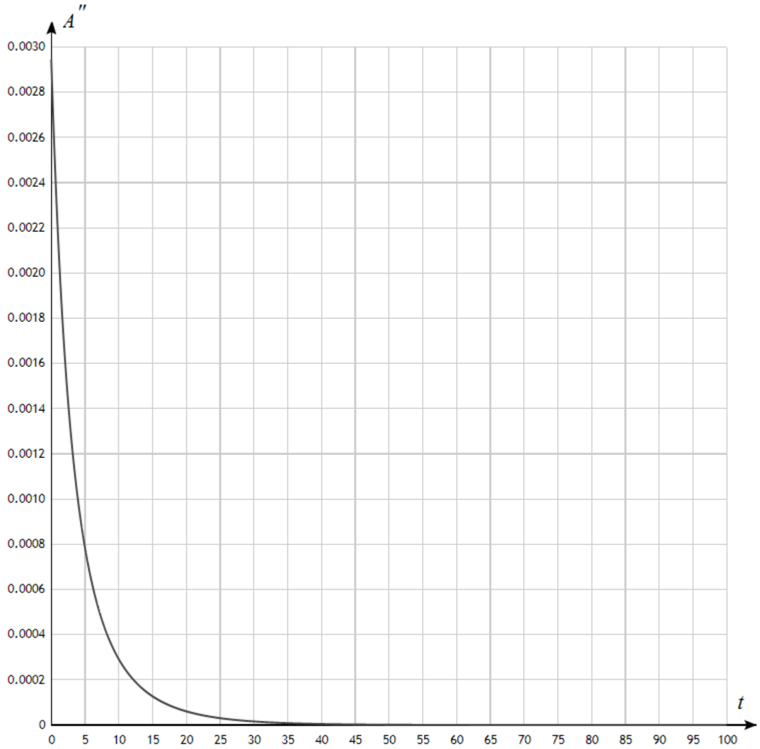

Рисунок 3 – Изменение положительной второй производной амплитуды колебаний маятника при монотонной устойчивости частного решения в зависимости от времени

Заключение

В работе рассмотрено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее свободные колебания маятника с малым демпфированием в виде полинома третьей степени. В результате анализа выражения производных первого и второго порядка для усреднённой амплитуды был выполнен анализ монотонной устойчивости колебаний маятника, имеющего одну степень свободы. В работе получены следующие основные результаты: сформулированы условия монотонной устойчивости амплитуды колебаний маятника, описана область монотонной устойчивости, определено количество качественно различных случаев монотонной устойчивости, рассмотрено условие достижимости маятником устойчивого положения равновесия. Результаты работы имеют как теоретическое, так и прикладное значение.

Список использованных источников

1. Арнольд, В. И. Математические аспекты классической и небесной механики / В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт. – Москва : Эдиториал УРСС, 2009. – 416 с.

2. Lyubimov, V. V. Method of an Asymptotic Analysis of the Nonlinear Monotonic Stability of the Oscillation at the Problem of Damping of the Angle of Attack of a Symmetric Spacecraft / V. V. Lyubimov // Symmetry. – 2022. – vol. 14. DOI: 10.3390/sym14102135

3. Lyubimov, V. V. A Method of Qualitative Analysis of the Monotonic Stability Region of Symmetric Particular Solutions of a Differential Equation / V. V. Lyubimov // Mathematics. – 2023. – vol. 11 / DOI: 10.3390/math11143142

4. Журавлев, В. Ф. Прикладные методы в теории колебаний / В. Ф. Журавлев, Д. М. Климов. – Москва : Наука, 1988. – 328 с.

5. Абрамовский, В. А. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной / В. А. Абрамовский, Г. И. Архипов, О. Н. Найда. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 696 с.

6. Смирнов, В. И. Курс высшей математики : В 5 томах / В. И. Смирнов – Москва : ГИТТЛ, 1951. – 472 с.

Asymptotic analysis of monotonic stability of the amplitude of pendulum oscillations with small nonlinear damping

V. V. Lyubimov Doctor of Science (Engineering), Associate Professor,
Head of the Department of Further Mathematics;
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
lyubimov.vv@ssau.ru

An ordinary differential equation of the second order describing free oscillations of a pendulum with small damping in the form of a third-degree polynomial is considered. The aim of the work is to analyze the monotonic stability of the amplitude of free oscillations of the pendulum with small damping, having one degree of freedom. The equation of the pendulum oscillations is written as a system of amplitude-phase equations. Then, the equation for the oscillation amplitude is averaged over the fast phase. By analyzing the expressions for the first- and second-order derivatives for the averaged amplitude, the monotonic stability of the pendulum oscillations is analyzed. The following main results are obtained in the work: the conditions of the monotonic stability of the pendulum oscillation amplitude are formulated, the region of monotonic stability is described, the number of qualitatively different cases of monotonic stability is determined, the condition for the attainability of a stable equilibrium position by the pendulum is considered. Verification of the results of the work confirmed their correctness. At the same time, they have both theoretical and applied significance. For example, they can be used in studying the stability of self-oscillations of the pendulum systems.

Keywords: *pendulum; amplitude; oscillations; damping; monotonic stability; averaging method*

Citation: Lyubimov, V. V. (2024), "Asymptotic analysis of monotonic stability of the amplitude of pendulum oscillations with small nonlinear damping", *Journal of Dynamics and Vibroacoustics,* vol. 10, no. 3, pp. 29-38. DOI: 10.18287/2409-4579-2024-10-3-29-38. (In Russian; abstract in English).

References

1. Arnold, V. I., Kozlov, V. V. and Neishtadt, A. I. (2009), *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics,* Editorial URSS, Moscow, 416 p. (In Russian).
2. Lyubimov, V. V. (2022), "Method of an Asymptotic Analysis of the Nonlinear Monotonic Stability of the Oscillation at the Problem of Damping of the Angle of Attack of a Symmetric Spacecraft", *Symmetry,* vol. 14, DOI:10.3390/sym14102135
3. Lyubimov, V. V. (2023), "A Method of Qualitative Analysis of the Monotonic Stability Region of Symmetric Particular Solutions of a Differential Equation", *Mathematics,* vol. 11, DOI: 10.3390/math11143142
4. Zhuravlev, V. F. and Klimov, D. M. (1988), *Applied methods in the theory of oscillations*, Nauka, Moscow, 328 p. (In Russian).
5. Abramovsky, V. A., Arkhipov, G. I. and Naida, O. N. (2019), *Differential and integral calculus of a function of one variable,* FIZMATLIT, Moscow, 696 p. (In Russian).
6. Smirnov, V. I. (1951), Course of Higher Mathematics, In 5 volumes, GITTL, Moscow, 472 p. (In Russian).