

## МОДЕЛЬ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ «ПОРАЖАЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ – ПРЕГРАДА»

А. И. Годунов<sup>1</sup>, П. С. Суздальцев<sup>2</sup>, Н. А. Кузин<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

<sup>2</sup> Филиал Военной академии материально-технического обеспечения  
имени генерала армии А. В. Хрулева в г. Пензе, Пенза, Россия

<sup>3</sup> Московский автодорожный институт (технический университет), Москва, Россия  
<sup>1</sup> avitelpgu@mail.ru, <sup>2</sup> Suzdal.1990@bk.ru, <sup>3</sup> sputnik1985nk3y@mail.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* В современных условиях развитие математических моделей играет ключевую роль в исследовании и проектировании технических систем. Создание адекватных моделей позволяет повысить точность прогнозирования поведения объектов и оптимизировать их характеристики. *Материалы и методы.* Построена математическая модель исследуемого объекта с применением современных вычислительных методов. Используются численные методы расчета и программное обеспечение для моделирования динамических процессов. *Результаты.* Разработанная модель позволяет провести анализ основных параметров системы, определить ее динамические характеристики и влияние внешних факторов на поведение исследуемого объекта. *Выводы.* Предложенный подход к математическому моделированию обеспечивает высокую точность и надежность результатов, что может быть полезно при разработке и совершенствовании технических систем.

**Ключевые слова:** математическая модель, метод конечных элементов, высокоскоростное взаимодействие

**Для цитирования:** Годунов А. И., Суздальцев П. С., Кузин Н. А. Модель высокоскоростного взаимодействия в системе «поражающий элемент – преграда» // Надежность и качество сложных систем. 2025. № 2. С. 26–33. doi: 10.21685/2307-4205-2025-2-3

## A MODEL OF HIGH-SPEED INTERACTION IN THE «STRIKING ELEMENT – BARRIER» SYSTEM

A.I. Godunov<sup>1</sup>, P.S. Suzdaltsev<sup>2</sup>, N.A. Kuzin<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Penza State University, Penza, Russia

<sup>2</sup> Branch of the Military Academy of Logistics named after Army General A.V. Khrulev in Penza, Penza, Russia

<sup>3</sup> Moscow Road Institute (Technical University), Moscow, Russia

<sup>1</sup> avitelpgu@mail.ru, <sup>2</sup> Suzdal.1990@bk.ru, <sup>3</sup> sputnik1985nk3y@mail.ru

**Abstract.** *Background.* In modern conditions, the development of mathematical models plays a key role in the research and design of technical systems. The creation of adequate models makes it possible to increase the accuracy of predicting the behavior of objects and optimize their characteristics. *Materials and methods.* The paper builds a mathematical model of the object under study using modern computational methods. Numerical calculation methods and software for modeling dynamic processes are used. *Results.* The developed model makes it possible to analyze the main parameters of the system, determine its dynamic characteristics and the influence of external factors on the behavior of the object under study. *Conclusions.* The proposed approach to mathematical modeling ensures high accuracy and reliability of the results, which can be useful in the development and improvement of technical systems.

**Keywords:** mathematical model, finite element method, high-speed interaction

**For citation:** Godunov A.I., Suzdaltsev P.S., Kuzin N.A. A model of high-speed interaction in the «striking element – barrier» system. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems.* 2025;(2):26–33. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2025-2-3

### Введение

Модель основана на методе конечных элементов с использованием эволюционирующего во времени алгоритма адаптивного сгущения сетки и учитывает различные механизмы разрушения материала преграды, такие как хрупкое разрушение, пластическое течение и сдвиговую локализацию.

Исследование демонстрирует точность и эффективность модели и показывает ее способность предсказывать механизмы разрушения преграды и кинематические поля деформаций и напряжений. Модель имеет важное значение для разработки и оптимизации высокоскоростных средств поражения и конструкций преград.

### Модель высокоскоростного взаимодействия

Для описания процесса соударения барражирующего боеприпаса (ББ) с объектом поражения, как правило, используются модели сжимаемого упругопластического тела. Основные соотношения, описывающие движение сжимаемой упругопластической среды, базируются на законах сохранения массы, импульса и энергии, замыкаются соотношениями Прандтля – Рейсса при условии текучести Мизеса [1]. Условия разрушения зависят от температуры, скорости нагружения, прочностных свойств материалов. Рассмотрим основные уравнения, описывающие процесс соударения (рис. 1) [2].

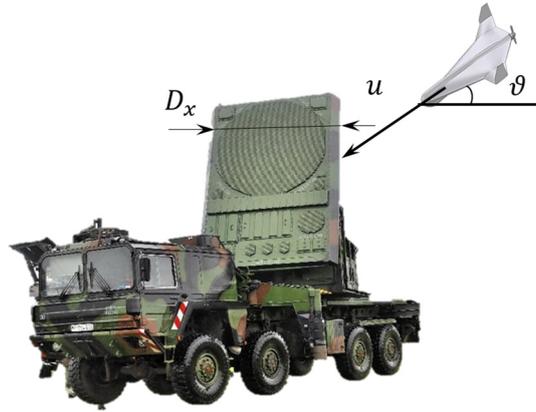


Рис. 1. Схема динамического взаимодействия ББ с объектом поражения

Законы сохранения импульса, массы и энергии представим в виде [3]:

$$\frac{du_a}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{a\beta}}{\partial x_\beta} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dp}{dt} + p \frac{du_a}{dx_a} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{a\beta} \dot{\epsilon}_{a\beta}, \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность;  $u_a$  – компоненты скорости деформации;  $\sigma_{a\beta}$  – компоненты тензора напряжений;  $\dot{\epsilon}_{a\beta}$  – компоненты тензора скоростей деформации;  $E$  – внутренняя энергия;  $x_a$  и  $x_\beta$  – составляющие вектора координат;  $\alpha, \beta, \gamma$  – индексы координатного вектора, указание индексов  $\alpha, \beta, \gamma$  означает, что берется его соответствующая координата,  $\alpha, \beta, \gamma \in \{x, y, z\}$ ;  $\frac{d}{dt}$  – субстанциональная производная по времени [4].

Здесь для сокращения записи используется форма с немymi индексами, которая означает, что если в произведении встречаются величины с одинаковыми индексами, то по ним ведется суммирование. Например, из уравнения (2) имеем

$$\frac{du_a}{dx_a} = \frac{du_x}{dx_x} + \frac{du_y}{dx_y} + \frac{du_z}{dx_z} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

для случая трехмерного пространства, а из уравнения (3) следует

$$\sigma_{a\beta} \dot{\epsilon}_{a\beta} = \sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} + \sigma_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + \sigma_{xz} \dot{\epsilon}_{xz} + \sigma_{yx} \dot{\epsilon}_{yx} + \sigma_{yy} \dot{\epsilon}_{yy} + \sigma_{yz} \dot{\epsilon}_{yz} + \sigma_{zx} \dot{\epsilon}_{zx} + \sigma_{zy} \dot{\epsilon}_{zy} + \sigma_{zz} \dot{\epsilon}_{zz}.$$

Реологические соотношения запишем в гиперупругой форме в следующем виде [5]:

$$\frac{dS_{\alpha\beta}}{dt} = 2G_0 \left( \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \right) + S_{\alpha\gamma} R_{\beta\gamma} + S_{\gamma\beta} R_{\alpha\gamma}, \quad (4)$$

где  $S_{\alpha\beta}$  – девиатор тензора напряжений для координатных составляющих  $\alpha$  и  $\beta$ , определяющий напряжения в точке, не связанные с гидростатическим напряжением (всесторонним давлением);

$$G_0 \text{ – модуль сдвига; } R_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha} \right); \delta_{\alpha\beta} \text{ – символ Кронекера, } \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Для описания пластических течений используется теория Прандтля – Рейсса. В этой теории для определения начала пластического течения используется критерий Мизеса [1]. При  $q_{\text{II}} = S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 2K^2$  ( $K$  – предел текучести на сдвиг) считается, что имеет место пластическое течение. При  $2q_{\text{II}} < 2K^2$  движение среды считается упругим. Для учета эффекта пластичности в правую часть уравнения (3) необходимо добавить член  $\theta(q_{\text{II}})(S_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}) S_{\alpha\beta}$ , где

$$\theta(q_{\text{II}}) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{\text{II}} < 2K^2, \\ 0, & \text{если } q_{\text{II}} = 2K^2, S_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \leq 0, \\ \frac{G_0}{K^2}, & \text{если } q_{\text{II}} = 2K^2, S_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} > 0. \end{cases} \quad (5)$$

В этом случае выражение  $S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$  не выходит за границы поверхности Мизеса. В качестве уравнения состояния моделируемой среды использовано уравнение состояния [2]:

$$p = p_{\text{н}} + \Gamma p (E - E_{\text{н}}); \quad (6)$$

$$p_{\text{н}} = \frac{p_0 c_0 \mu (1 + \mu)}{[1 - (-1)\mu]^2}; \quad (7)$$

$$E_{\text{н}} = \frac{P_{\text{н}}}{2p_0} \left( \frac{\mu}{1 + \mu} \right); \quad (8)$$

$$p\Gamma = p_0 \Gamma_0 = \text{const}; \quad (9)$$

$$\mu = \frac{p}{p_0} - 1, \quad (10)$$

где  $p$  – полное давление системы;  $p_{\text{н}}$  – давление в начальном состоянии;  $\Gamma$  – коэффициент Грюнайзена в текущий момент времени;  $\Gamma_0$  – коэффициент Грюнайзена при нормальных условиях, который характеризует термическое давление со стороны колеблющихся атомов;  $E_{\text{н}}$  – внутренняя энергия в начальном состоянии;  $p_0$  – плотность материала при нормальных условиях;  $c_0$  – скорость звука в материале;  $\mu$  – изменение плотности в процессе исследования;  $\chi$  – параметр, отражающий свойства материала. Константы  $\Gamma_0$ ,  $c_0$ ,  $\chi$  определяются экспериментальным путем [5].

Достаточно интенсивное ударное нагружение преград часто приводит к возникновению нарушений сплошности материала в результате разрушения. Например, при ударе пластиной происходит откол (рис. 2,а), под которым понимают образование макроскопической полости внутри материала преграды, которая может быть замкнутой либо выходить на поверхность преграды, а в некоторых случаях возможно отделение тыльной части преграды (рис. 2,б) [6].

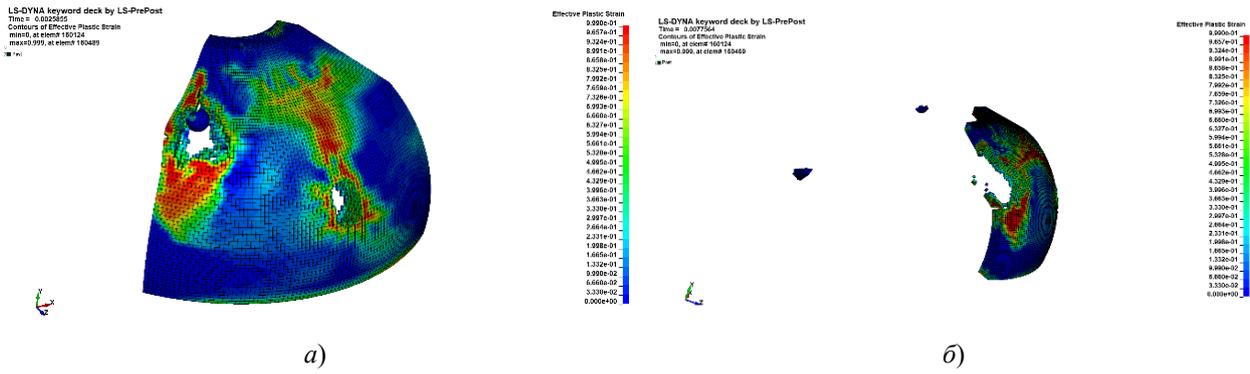


Рис. 2. Схема динамического взаимодействия ББ с объектом поражения

Численное моделирование процессов разрушения можно осуществлять несколькими путями. В континуальном подходе определяется область поврежденной среды и корректируется напряженно-деформированное состояние материала в этой области. В качестве критерия разрушения могут быть выбраны различные модели. В настоящей работе используется модель Джонсона – Кука, согласно которой предел текучести определяется формулой (5).

Рассмотрим метод сглаженных частиц, он является бессточным лагранжевым численным методом для расчетов процессов высокоскоростного соударения, а также иного интенсивного динамического нагружения тел, в особенности, когда имеет место существенное изменение топологии моделируемых объектов (разлет вещества). Производные вычисляются с помощью сплайн-интерполяции, в соответствии с чем каждая гладкая частица является точкой интерполяции, в которой известны параметры деформируемой среды. Численное решение во всей области интегрирования получается с помощью интерполяционных функций, для которых эти частицы являются интерполяционными узлами. Таким образом, вычисление градиентов сводится к аналитическому дифференцированию гладких функций [8].

Основная суть метода заключается в приближении формулы следующей цепочкой преобразований:

$$a(x) = \int_R a(\tilde{x}) \delta(\tilde{x} - x) d\tilde{x}, \quad (11)$$

где  $a(x)$  – некоторое свойства материала, на месте данной величины может быть плотность, скорость, положение в пространстве;  $\tilde{x}$  – конкретное значение координаты;  $\delta(\tilde{x} - x) \sim$  – дельта-функция (функция Дирака):

$$\delta(\tilde{x} - x) = \begin{cases} +\infty, & x = \tilde{x}, \\ 0, & x \neq \tilde{x}; \end{cases}$$

$R$  – некоторая область, где представляет интерес определение величины  $a(x)$ . Сначала обобщенная функция  $\delta(x)$  заменяется аналитической функцией  $\omega(\tilde{x} - x, h)$ , которую называют ядром сглаживания, а  $h$  – радиусом сглаживания. В результате получаем

$$a^*(x) = \int_R a(\tilde{x}) \omega(\tilde{x} - x, h) d\tilde{x}. \quad (12)$$

В случае если рассматривается среда плотности  $\rho(x)$ , то удобна бывает запись с использованием нормировки. Ядро  $\omega(\tilde{x} - x, h)$  должно удовлетворять условиям

$$\int_R \omega(x, h) d\tilde{x} = 1; \quad (13)$$

$$\omega(x, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \delta(x). \quad (14)$$

В работе Моногана установлено, что при соблюдении этих условий и выборе  $\omega(x, h) = e^{-\left(\frac{x}{h}\right)^2}$  аппроксимация обеспечивает порядок  $O(h^2)$ .

Далее требуется рассмотреть численные методы вычисления этих интегралов. Будем полагать, что среда разбита на маленькие, по сравнению с характерными размерами рассчитываемой модели, элементы. Каждый такой элемент имеет свое значение аппроксимируемого параметра  $a(x)$  равное  $a^i$ . Также будем считать известными его плотность –  $p^i$ , место положения –  $x^i$  и массу –  $m^i$ . Здесь и далее, если не оговорено другое, верхний индекс у параметра будет обозначать его принадлежность конкретному дискретному элементу. Вопрос расположения этих элементов (далее частиц), так, чтобы наиболее лучше аппроксимировать параметр  $a(x)$ , пока является открытым. Будем использовать самое простое и очевидное начальное расположение – кубическую равномерную решетку [9].

Заменой интегрирования суммированием по частицам-соседям получаем выражение

$$a^*(x) = \sum_i \frac{m^i a^i}{p^i} \omega(x^i - x, h). \quad (15)$$

Использование такой аппроксимации существенно упрощает вычисление градиента функции  $\frac{\partial a(x)}{\partial x_a}$ , так как достаточно аналитически продифференцировать ядро сглаживания, что даст

$$\frac{\partial a^*}{\partial x_a} = \sum_i \frac{m^i a^i}{p^i} \frac{\partial \omega(x^i - x, h)}{\partial x_a}. \quad (16)$$

Рассмотрим более подробно ядро сглаживания. Важно, чтобы носитель функции  $\omega(x, h)$  был конечным, так как в сплошной среде все взаимодействия короткодействующие. Однако  $e^{-\left(\frac{x}{h}\right)^2}$  этим свойством не обладает. Из-за вышперечисленных причин удобно использовать следующий сплайн:

$$\omega(x, h) = \begin{cases} \frac{1 - 1,75\varphi^2 + 0,75\varphi^3}{\pi h^3}, \varphi \in [0, 1]; \\ \frac{(2 - \varphi)^3}{4\pi h^3}, \varphi \in [1, 2]; \\ 0, \varphi \in [2, \infty], \end{cases} \quad (17)$$

где  $\varphi = \frac{|x - \tilde{x}|}{h}$ .

Численные аппроксимации уравнений механики деформируемого тела построены с помощью метода конечных элементов, пример такого объемного восьмиузлового элемента представлен на рис. 3, а описан следующим образом:

$$f_1^i = -\sum_k m^k (\dot{u}_a^k - \dot{u}_a^i) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_a^i}, \quad (18)$$

$$f_{2,a}^i = \sum_k m^k \left( \frac{\sigma_{a\beta}^i}{(p^i)^2} + \frac{\sigma_{a\beta}^k}{(p^k)^2} \right) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_\beta^i}; \quad (19)$$

$$f_3^i = \sum_k m^k (\dot{u}_a^i - \dot{u}_a^k) \left( \frac{\sigma_{a\beta}^i}{(p^i)^2} + \frac{\sigma_{a\beta}^k}{(p^k)^2} \right) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_\beta^i}; \quad (20)$$

$$f_{4,a\beta}^i = 2G_0 \left( \dot{\epsilon}_{a\beta}^i - \frac{1}{3} \delta_{a\beta} \dot{\epsilon}_{a\beta}^i \right) + S_{a\gamma}^i R_{\beta\gamma}^i + S_{\gamma\beta}^i R_{a\gamma}^i; \quad (21)$$

$$\dot{\epsilon}_{a\beta}^i = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m^k}{p^k} \left[ (\dot{u}_a^i - \dot{u}_a^k) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_\beta^i} + (\dot{u}_\beta^k - \dot{u}_\beta^i) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_a^i} \right]; \quad (22)$$

$$R_{a\beta}^i = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m^k}{p^k} \left[ (\dot{u}_a^k - \dot{u}_a^i) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_\beta^i} - (\dot{u}_\beta^k - \dot{u}_\beta^i) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_a^i} \right]. \quad (23)$$

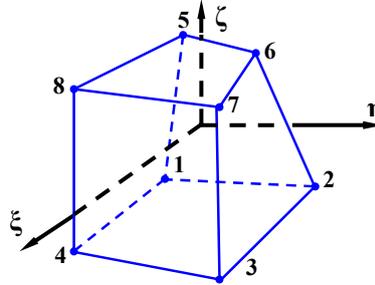


Рис. 3. Объемный восьмиузловой элемент в параметрических координатах

Производные типа  $\frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_\beta^i}$  и  $\frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_a^i}$  берутся от аналитической весовой функции, поэтому справа от знака равенства в уравнениях (18)–(23) стоят алгебраические выражения. Интегрирование уравнений для  $i$ -й частицы производится, как правило, по явной схеме Эйлера:

$$\begin{cases} \vec{x}^{i,n+1} = \vec{x}^{i,n} + \Delta t \left( \vec{u}^{i,n} + \frac{1}{2} \Delta t \vec{f}_2^{i,n} \right); \\ E^{i,n+1} = E^{i,n} + \Delta t \vec{f}_3^{i,n}; \\ p^{i,n+1} = p^{i,n} + \Delta t f_1^{i,n}; \\ \vec{u}^{i,n+1} = \vec{u}^{i,n} + \Delta t \vec{f}_2^{i,n}; \\ \hat{S}^{i,n+1} = \hat{S}^{i,n} + \Delta t \vec{f}_4^{i,n}; \\ \hat{\sigma}^{i,n+1} = -\hat{\delta} p(p^{i,n+1}, E^{i,n+1}) + \hat{S}^{i,n+1}, \end{cases} \quad (24)$$

где  $\hat{S}$ ,  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\sigma}$ , – тензорные величины;  $\vec{u} = (\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z)$  – вектор скорости деформации;  $\Delta t$  – шаг по времени; значение  $p$  вычисляется по формуле (7); индексы  $n$  и  $n+1$  указывают на предыдущий и текущий временные слои.

Видно, что значение компонента тензора напряжений  $\hat{\sigma}^{i,n+1}$  вычисляется с помощью уравнения состояния по вычисленным значениям плотности  $p^{i,n+1}$  и дивергента  $S^{i,n+1}$ .

Шаг интегрирования выбирается следующим образом:

$$\Delta t = \min_i \frac{ah^i}{\sqrt{\max(c^i, u^i)^2 + \left( \frac{h^i p^i}{p^i} \right)^2}}, \quad a = 0, 1 \div 0, 4, \quad (25)$$

где  $u^i$  – скорость  $i$ -й частицы;  $c^i$  – скорость звука в  $i$ -й частице;  $h^i$  – радиус сглаживания  $i$ -й частицы;  $p^i$  – плотность  $i$ -й частицы;  $p^i = f_1^i$  – производная по времени  $i$ -й частицы;  $\alpha$  зависит от используемого метода.

Так как в задачах возможно возникновение сверхзвуковых течений, то в знаменателе содержится максимум скорости частицы и продольной скорости звука в этой частице. При наличии

сверхзвуковых течений возможно сильное увеличение плотности и в этом случае существенную роль

играет член  $\left(\frac{h^i p^i}{p^i}\right)^2$  [10].

### Заключение

Разработана новая модель высокоскоростного взаимодействия в системе «поражающий элемент – преграда», основанная на методе конечных элементов с использованием эволюционирующего во времени алгоритма адаптивной сетки. Модель учитывает различные механизмы разрушения материала преграды, включая хрупкое разрушение, пластическое течение и сдвиговую локализацию. Исследование демонстрирует точность и эффективность модели, ее способность предсказывать механизмы разрушения преграды и кинематические поля деформаций и напряжений. Модель может быть использована для анализа различных сценариев высокоскоростного взаимодействия и оптимизации конструкций средств поражения и преград. Разработанная модель имеет важное значение для понимания механизмов разрушения при высокоскоростном взаимодействии. Она предоставляет исследователям и инженерам мощный инструмент для анализа и оптимизации конструкций средств поражения и преград. Модель может способствовать разработке более эффективных средств защиты от высокоскоростных поражающих элементов.

### Список литературы

1. LS-DYNA Theory Mnuual. Livermore : LSTC, 2019. 686 p.
2. Бабкин А. В., Селиванов В. В. Механика разрушения деформируемого тела. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 424 с.
3. Cai, S., Feng J., Xu H. [et al.]. The concentration of deformation caused by the closed end contributes to the destruction of the sleeve in the lower part[J] // Defence Technology. 2020. Vol. 16, № 6. P. 1151–1159.
4. Басов К. А. ANSYS справочник пользователя. М. : Изд-во ДМК-Пресс, 2005. 640 с.
5. Бабкин А. В., Колпаков В. Н., Охитин В. Н. [и др.]. Численные методы в задачах физики быстропротекающих процессов. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 518 с.
6. Велданов В. А. Прикладная теория удара. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. 44 с.
7. Галлагер Р. М., Метод конечных элементов. Основы : пер. с англ. М. : Мир, 1984. 428 с.
8. Герасимов А. В. Высокоскоростной удар. Моделирование и эксперимент. Томск : НТЛ, 2016. 568 с.
9. Зарубин В. С., Селиванов В. В. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1993. 508 с.
10. Зенкевич О. В., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М. : Мир, 1974. 239 с.

### References

1. *LS-DYNA Theory Mnuual*. Livermore: LSTC, 2019:686.
2. Babkin A.V., Selivanov V.V. *Mekhanika razrusheniya deformiruemogo tela = Mechanics of destruction of a deformable body*. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 2005:424. (In Russ.)
3. Cai S., Feng J., Xu H. et al. The concentration of deformation caused by the closed end contributes to the destruction of the sleeve in the lower part[J]. *Defence Technology*. 2020;16(6):1151–1159.
4. Basov K.A. *ANSYS spravochnik pol'zovatelya = ANSYS user's guide*. Moscow: Izd-vo DMK-Press, 2005:640. (In Russ.)
5. Babkin A.V., Kolkpakov V.N., Okhitin V.N. et al. *Chislennyye metody v zadachakh fiziki bystroprotekayushchikh protsessov = Numerical methods in problems of physics of fast-flowing processes*. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 2005:518. (In Russ.)
6. Veldanov V.A. *Prikladnaya teoriya udara = Applied theory of impact*. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 2016:44. (In Russ.)
7. Gallager R.M. *Metod konechnykh elementov. Osnovy: per. s angl. = The finite element method. Fundamentals : translated from English*. Moscow: Mir, 1984:428. (In Russ.)
8. Gerasimov A.V. *Vysokoskorostnoy udar. Modelirovanie i eksperiment = High-speed impact. Modeling and experiment*. Tomsk: NTL, 2016:568. (In Russ.)
9. Zarubin V.S., Selivanov V.V. *Variatsionnye i chislennyye metody mekhaniki sploshnoy sredy = Variational and numerical methods of continuum mechanics*. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 1993:508. (In Russ.)

10. Zenkevich O.V., Chang I. *Metod konechnykh elementov v teorii sooruzheniy i v mekhanike sploshnykh sred = The finite element method in the theory of structures and in continuum mechanics*. Moscow: Mir, 1974:239. (In Russ.)

**Информация об авторах / Information about the authors**

**Анатолий Иванович Годунов**

доктор технических наук, профессор,  
заслуженный деятель науки РФ,  
профессор кафедры автоматизации и телемеханики,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: avitelpgu@mail.ru

**Павел Сергеевич Суздальцев**

адъюнкт,  
Филиал Военной академии  
материально-технического  
обеспечения имени генерала армии  
А. В. Хрулева в г. Пензе  
(Россия, г. Пенза, Военный городок)  
E-mail: Suzdal.1990@bk.ru

**Николай Андреевич Кузин**

студент,  
Московский автодорожный институт  
(технический университет)  
(Россия, г. Москва, Ленинградский пр-т, 64)  
E-mail: sputnik1985nk3y@mail.ru

**Anatoly I. Godunov**

Doctor of technical sciences, professor,  
honored scientist of the Russian Federation,  
professor of the sub-department  
of automation and telemechanics,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Pavel S. Suzdaltsev**

Adjunct,  
Branch of the Military Academy  
of Logistics named after Army General  
A.V. Khrulev in Penza  
(Military town, Penza, Russia)

**Nikolai A. Kuzin**

Student,  
Moscow Road Institute (Technical University)  
(64 Leningradsky avenue, Moscow, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /**

**The authors declare no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию/Received 05.04.2025**

**Поступила после рецензирования/Revised 24.04.2025**

**Принята к публикации/Accepted 05.05.2025**