УДК 514.862

МЕТОД РАСЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПИИ ТОНКОСТЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО АРМИРОВАНИЯ

Мисюра Н.Е.*, Митюшов Е.А., Раскатов Е.Ю.

Уральский федеральный университет

*****_n_misura@mail.ru_

Аннотация. Предлагается метод расчета параметров анизотропии эллипсоидальных ортотропных оболочек геодезического армирования, позволяющий при прогнозировании упругих макроскопических характеристик ввести в определяющие соотношения явным образом соответствующие параметры армирования при любых геометрических характеристиках тонкостенной оболочки.

Ключевые слова: тонкостенные оболочки, ортотропные оболочки, геодезическое армирование, параметры анизотропии, анизотропия

METHOD OF CALCULATION OF GEOMETRICAL PARAMETERS OF ANISOTROPY OF THIN-WALLED ORTHOTROPIC ELLIPSOIDAL SHELLS OF GEODESIC REINFORCEMENT

Misyura N.E., Mityushov E.A., Raskatov E.Yu.

Ural Federal University

Abstract. *We propose a method for calculating the anisotropy parameters of ellipsoidal orthotropic shells of geodesic reinforcement, which makes it possible to introduce the corresponding reinforcement parameters explicitly into the defining relations for any geometrical characteristics of a thin-walled shell when predicting its elastic macroscopic characteristics.*

Keywords: thin-walled shells, orthotropic shells, geodesic reinforcement, anisotropy parameters, anisotropy

Введение

Традиционным методом определения деформационных характеристик пространственно-армированного композита по известным механическим свойствам его компонент является метод осреднения жесткостей отдельных однонаправленно-армированных элементарных объемов в модели композита [1, 2]:

$$A_{ijkl} = \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N} V_n A_{ijkl}^{(n)}, \qquad V = \sum_{n=1}^{N} V_n , \tag{1}$$

где A_{ijkl} – компоненты тензора жесткости пространственно-армированного композита; V_n – объем n-го направления армирования; $A_{ijkl}^{(n)}$ – компоненты тензора жесткости однонаправленно-армированного композита n-го направления в осях координат, совпадающих с главными осями симметрии макрообъема; N – количество дискретных направлений армирования.

Компоненты тензора жесткости $A_{ijkl}^{(n)}$ определяются по правилам преобразования компонент тензора четвертого ранга:

$$A_{ijkl}^{(n)} = l_{ip} l_{jq} l_{kr} l_{ls} A_{pqrs}^{*}. \quad (2)$$

где A_{pqrs}^{*} – компоненты тензора жесткости однонаправленно-армированного композита с тем же объемным коэффициентом армирования, l_{ip} – косинусы углов между главными осями симметрии пространственно-армированного композита и локальной системой координат, связанной с направлением армирования элементарного объема; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3.

Подобный подход к осреднению тензора жесткости (или тензора податливости) при определении упругих макроскопических характеристик использовался разными авторами [3-10] для некоторых частных случаев армирования. Получить же достаточно общие соотношения в рамках классической теории армирования до сих пор не удавалось. В работе [11], при сохранении общепринятых допущений, были выведены определяющие соотношения теории армирования, позволяющие для ортотропных материалов независимо от схемы армирования прямолинейными или криволинейными волокнами прогнозировать их упругие характеристики. Общности описания удается добиться благодаря введению шести безразмерных параметров армирования, учитывающих пространственное распределение волокон в композиционном материале.

В настоящей работе этот метод применяется для определения параметров анизотропии эллипсоидальных ортотропных оболочек геодезического армирования. Геодезическая намотка является классическим видом намотки, при которой армирующий материал (нити, жгуты, ленты) укладывается на поверхность оправки по геодезическим линиям с расчетным углом укладки.

Определяющие соотношения

В качестве модели пространственно-армированного композита рассматривается трехуровневая модель неоднородной среды, составленной из элементарных объемов, каждый из которых представляет собой однонаправленно-армированный композит с различной ориентацией. Суммарная доля элементарных объемов с одинаковой ориентацией волокон пропорциональна их количественному содержанию в реальном композиционном материале, а объемный коэффициент армирования во всех элементарных объемах одинаков. Необходимо получить макроскопические модули упругости и податливости такого материала по свойствам компонент, их объемному содержанию и характеру пространственного распределения армирующих волокон. Для этого применяется процедура последовательного осреднения по фазам и ориентациям.

На первом этапе определяются упругие макроскопические характеристики однонаправленно-армированного композита, общие формулы для вычисления которых были получены разными авторами, исходя из различных предположений [3–10]. Все они дают близкие или тождественные результаты и в качестве наиболее удобных формул можно рекомендовать соотношения работы [10]. На втором этапе проводится осреднение по ориентациям с использованием соотношений (1) и (2):

$$A_{ijkl} = \langle l_{ip} l_{jq} l_{kr} l_{ls} \rangle A_{pqrs}^{*}. \quad (3)$$

где $\langle ... \rangle$ – знак осреднения по ансамблю случайных ориентаций волокон.

В силу предположения об эргодичности рассматриваемой модели [9] осреднение по объему композита и ансамблю случайных ориентаций совпадают, что позволяет при вычислении упругих макроскопических характеристик пространственное распределение волокон описывать с помощью плотности распределения сферических углов, задающих положение случайно ориентированного волокна в осях координат, связанных с композитом. В дальнейшем предполагается, что изотропные или трансверсально-изотропные волокна распределены в изотропной матрице таким образом, что через каждую точку материала проходят три ортогональные плоскости упругой симметрии, т. е. композит является ортотропным и характеризуется девятью независимыми упругими постоянными [12]. Введем в рассмотрение две системы координат: лабораторную $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями упругой симметрии ортотропного материала, и локальную $Ox'_1 x'_2 x'_3$, ось Ox'_3, которая совпадает с направлением отдельного случайно ориентированного волокна.

Операцию осреднения по множеству ориентаций удобно проводить с использованием сверток трансерсально-изотропного тензора A^*_{pqrs} по двум индексам, являющимися тензорами второго ранга:

$$A^*_{pqrr} = \left(A^*_{1111} + A^*_{1122} + A^*_{1133}\right) + \left(A^*_{3333} + A^*_{1133} - A^*_{1111} - A^*_{1122}\right)\delta_{p3}\delta_{q3},$$

$$A^*_{prqr} = \left(\frac{3}{2}A^*_{1111} - \frac{1}{2}A^*_{1122} + A^*_{2323}\right) + \left(A^*_{3333} - \frac{3}{2}A^*_{1111} + A^*_{2323} + \frac{1}{2}A^*_{1122}\right)\delta_{p3}\delta_{q3}$$ δ_{ij} – символ Кронекера, равный 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$.

Переходя в этих формулах к лабораторной системе координат по правилам преобразования компонент тензора второго ранга и проводя осреднение по множеству ориентаций, получаем:

$$\begin{aligned}
A_{11rr} &= \left(A^*_{1111} + A^*_{1122} + A^*_{1133}\right) + \left(A^*_{3333} + A^*_{1133} - A^*_{1111} - A^*_{1122}\right)\langle l_{13}^2\rangle,\\
A_{22rr} &= \left(A^*_{1111} + A^*_{1122} + A^*_{1133}\right) + \left(A^*_{3333} + A^*_{1133} - A^*_{1111} - A^*_{1122}\right)\langle l_{23}^2\rangle,\\
A_{33rr} &= \left(A^*_{1111} + A^*_{1122} + A^*_{1133}\right) + \left(A^*_{3333} + A^*_{1133} - A^*_{1111} - A^*_{1122}\right)\langle l_{33}^2\rangle,\\
A_{1r1r} &= \left(\frac{3}{2}A^*_{1111} - \frac{1}{2}A^*_{1122} + A^*_{2323}\right) + \left(A^*_{3333} - \frac{3}{2}A^*_{1111} + A^*_{2323} + \frac{1}{2}A^*_{1122}\right)\langle l_{13}^2\rangle,\\
A_{2r2r} &= \left(\frac{3}{2}A^*_{1111} - \frac{1}{2}A^*_{1122} + A^*_{2323}\right) + \left(A^*_{3333} - \frac{3}{2}A^*_{1111} + A^*_{2323} + \frac{1}{2}A^*_{1122}\right)\langle l_{23}^2\rangle\\
A_{3r3r} &= \left(\frac{3}{2}A^*_{1111} - \frac{1}{2}A^*_{1122} + A^*_{2323}\right) + \left(A^*_{3333} - \frac{3}{2}A^*_{1111} + A^*_{2323} + \frac{1}{2}A^*_{1122}\right)\langle l_{33}^2\rangle.
\end{aligned} \tag{4}$$

Помимо этого, непосредственно из соотношения (3), при равенстве всех индексов у компонент тензора макроскопических упругих характеристик, находим:

$$\begin{aligned}
A_{1111} &= A^*_{1111} - \left(2A^*_{1122} - 2A^*_{1133} + 4A^*_{1212} - 4A^*_{2323}\right)\langle l_{13}^2\rangle +\\
&\quad + \left(A^*_{1111} + A^*_{3333} - 4A^*_{2323} - 2A^*_{1133}\right)\langle l_{13}^4\rangle,\\
A_{2222} &= A^*_{1111} - \left(2A^*_{1122} - 2A^*_{1133} + 4A^*_{1212} - 4A^*_{2323}\right)\langle l_{23}^2\rangle +\\
&\quad + \left(A^*_{1111} + A^*_{3333} - 4A^*_{2323} - 2A^*_{1133}\right)\langle l_{23}^4\rangle,\\
A_{3333} &= A^*_{1111} - \left(2A^*_{1122} - 2A^*_{1133} + 4A^*_{1212} - 4A^*_{2323}\right)\langle l_{33}^2\rangle +\\
&\quad + \left(A^*_{1111} + A^*_{3333} - 4A^*_{2323} - 2A^*_{1133}\right)\langle l_{33}^4\rangle.
\end{aligned} \tag{5}$$

Выражения (4) и (5) образуют систему алгебраических уравнений для определения девяти независимых коэффициентов жесткости ортотропного композита. В матричных обозначениях [1, 9, 12] ее решение записывается в виде

$$A_{11} = A^*_{11} - \left(2A^*_1 + 4A^*_2\right)\Delta_1 + A^*_3\Delta_4,\quad A_{22} = A^*_{11} - \left(2A^*_1 + 4A^*_2\right)\Delta_2 + A^*_3\Delta_5,$$

$$A_{33} = A^*_{11} - \left(2A^*_1 + 4A^*_2\right)\Delta_3 + A^*_3\Delta_6,\quad A_{23} = A^*_{13} + \left(A^*_1 - A^*_3\right)\Delta_1 + \frac{A^*_3}{2}\left(1 + \Delta_4 - \Delta_5 - \Delta_6\right),$$

$$A_{13} = A^*_{13} + \left(A^*_1 - A^*_3\right)\Delta_2 + \frac{A^*_3}{2}\left(1 + \Delta_5 - \Delta_6 - \Delta_4\right), \tag{6}$$

$$A_{12} = A_{13}^* + \left(A_1^* - A_3^*\right)\Delta_3 + \frac{A_3^*}{2}\left(1 + \Delta_6 - \Delta_4 - \Delta_5\right),$$

$$A_{44} = A_{44}^* + \left(A_2^* - A_3^*\right)\Delta_1 + \frac{A_3^*}{2}\left(1 + \Delta_4 - \Delta_5 - \Delta_6\right),$$

$$A_{55} = A_{44}^* + \left(A_2^* - A_3^*\right)\Delta_2 + \frac{A_3^*}{2}\left(1 + \Delta_5 - \Delta_6 - \Delta_4\right),$$

$$A_{66} = A_{44}^* + \left(A_2^* - A_3^*\right)\Delta_3 + \frac{A_3^*}{2}\left(1 + \Delta_6 - \Delta_4 - \Delta_5\right),$$

где введены следующие обозначения для материальных констант: $A_1^* = A_{12}^* - A_{13}^*$, $A_2^* = A_{66}^* - A_{44}^*$, $A_3^* = A_{11}^* + A_{33}^* - 2A_{13}^* - 4A_{44}^*$; и параметров армирования: $\Delta_1 = \langle l_{13}^2 \rangle$, $\Delta_2 = \langle l_{23}^2 \rangle$, $\Delta_3 = \langle l_{33}^2 \rangle$, $\Delta_4 = \langle l_{13}^4 \rangle$, $\Delta_5 = \langle l_{23}^4 \rangle$, $\Delta_6 = \langle l_{33}^4 \rangle$.

Из шести параметров армирования независимыми являются пять, так как в силу условия ортогональности, которому удовлетворяют направляющие косинусы, выполняется соотношение: $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 1$.

Изложенный метод осреднения жесткостей пространственно-армированного композита аналогичен вычислению упругих характеристик текстурированных поликристаллов с гексагональной симметрией структуры в приближении Фойгта [13]. Таким же способом можно получить значения коэффициентов податливости по схеме Ройса.

Как правило, анизотропию упругих свойств материала связывают с изменением модуля Юнга от направления. В плоскости Ox_1x_2 эта зависимость, например, определяется соотношением

$$E^{-1}(\alpha) = a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha + (2a_{12} + a_{66})\cos^2\alpha\sin^2\alpha,$$

где α – угол между направлением растяжения и осью Ox_1.

Угловая зависимость коэффициента Пуассона при этом находится из выражения

$$\nu(\alpha) = \frac{a_{12} + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66})\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{a_{11}\cos^4\alpha + a_{22}\sin^4\alpha + (2a_{12} - a_{66})\cos^2\alpha\sin^2\alpha}.$$

Таким образом, проблема прогнозирования упругих характеристик пространственно-армированных композитов сводится к определению параметров армирования по данным о характере пространственного распределения армирующих волокон. Рассмотрим последовательно некоторые пути решения этой задачи на примере армирования линейными и криволинейными волокнами с дискретным и непрерывным распределением их в пространстве.

Параметры анизотропии эллипсоидальной оболочки геодезического армирования

Математическая модель геодезической намотки эллипсоидальной оболочки находится с использованием уравнений геодезических линий для поверхности эллипсоида.

Известно [14], что семейство геодезических линий на поверхности, заданной уравнением в параметрической форме $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, находятся из решения дифференциального уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dv^2} = -\Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)\frac{du}{dv} + (2\Gamma_{12}^2 - 2\Gamma_{11}^1)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 - \Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{dv}\right)^3. \quad (7)$$

где Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля второго порядка.

В частности, для эллипсоида вращения, заданного уравнениями в параметрической форме

$$x = a\cos u\cos v,\ y = a\cos u\sin v,\ z = c\sin u$$

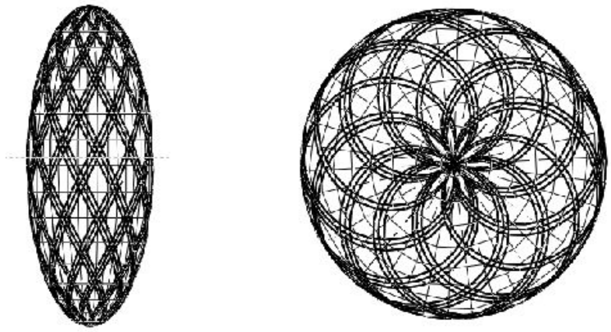
матрицы символов Кристоффеля второго рода имеют вид:

$$\Gamma_{ij}^{1}=\begin{pmatrix}\dfrac{(a^2-c^2)\sin 2u}{2(a^2\sin^2 u+c^2\cos^2 u)} & 0\\ 0 & \dfrac{a^2\sin 2u}{2(a^2\sin^2 u+c^2\cos^2 u)}\end{pmatrix},\ \Gamma_{ij}^{2}=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{\sin 2u}{2\cos^2 u}\\ -\dfrac{\sin 2u}{2\cos^2 u} & 0\end{pmatrix}$$

Интегрирование уравнения (7) позволяет получить уравнение геодезической линии в явном виде:

$$x=a\cos u(v)\cos v,\qquad y=a\cos u(v)\sin v,\qquad z=c\sin u(v)$$

Результаты численного интегрирования уравнения (3.1) при значениях параметров эллипсоида вращения $a=1$ и $c=3$ представлены на *рисунке 1*.



а) б)

Рисунок 1 – Траектории нитей при геодезическом армировании эллипсоида вращения, а – вид сбоку, б – вид сверху

Как видно из *рисунка 2*, геодезическое армирование приводит к неоднородности свойств. Параметры анизотропии такой локально ортотропной оболочки зависят от меридиональной координаты *u* и определяются углом $\alpha(u)$ между геодезической линией и меридианом в данной точке поверхности.

Переменный угол $\alpha(u)$ между геодезической линией и меридианом (*рисунок 2*) определяется из равенства.

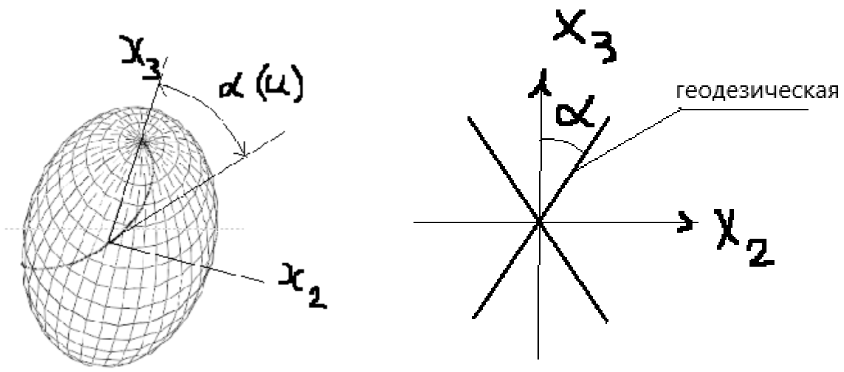


Рисунок 2 – Параметры анизотропии при этом определяются равенствами $\Delta_1=0$, $\Delta_2=\sin^2\alpha(u)$, $\Delta_3=\cos^2\alpha(u)$, $\Delta_4=0$, $\Delta_5=\sin^4\alpha(u)$, $\Delta_6=\cos^4\alpha(u)$

Заключение

В работе представлена трехуровневая модель неоднородной среды пространственно-армированного композита, составленной из элементарных объемов, каждый из которых представляет собой однонаправленно-армированный композит с различной ориентацией. В результате процедуры последовательного осреднения по фазам и ориентациям получены макроскопические модули упругости и податливости такого материала по свойствам компонент, их объемному содержанию и характеру пространственного распределения армирующих волокон.

Библиография

1. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс В.Г. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.

2. Крегер А.Ф., Мелбардис Ю.Г. Определение деформируемости пространственно-армированных композитов методом осреднения жесткостей // Механика полимеров. 1978. № 1. С. 3–8.

3. Иванова В.С., Копьев И.М., Ботвина Л.Р., Шермергор Т,Д. Упрочнение металлов волокнами. М.: Наука, 1973. 208 с.

4. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. Минск: Изд-во БГУ, 1978. 206 с.

5. Хорошун Л.П., Маслов Б.П. Методы автоматизированного расчета физико- механических постоянных композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1980. 156 с.

6. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

7. Пространственно-армированные композиционные материалы: справочник / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. М.: Машиностроение, 1987. 227 с.

8. Hill R. Theory of mechanical properties of fibre-strengsened materials 1 // J. Mech. and Phys. Solids. 1964. V. 1, N 4. P. 199–212.

9. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.

10. Аболиньш Д.С. Тензор податливости однонаправленного армированного упругого материала // Механика полимеров. 1965. № 4. С. 52–59.

11. Митюшов Е.А. Теория армирования // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6, № 2. С. 151–161.

12. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

13. Митюшов Е.А., Гельд П.В., Адамеску Р.А. Обобщенная проводимость и упругость макрооднородных гетерогенных материалов. М.: Металлургия, 1992. 145 с.

14. Жукова Н.И., Багаев А.В. Геодезические линии на поверхностях. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2008. 54 с.