



Численная схема для одной интегро-дифференциальной системы, связанной с задачей космического динамо

*Е. А. Казаков**

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, с. Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, Российская Федерация

Аннотация. Статья посвящена описанию разработанной численной схемы для моделирования эредитарной динамической системой, являющейся моделью двумодового гидромагнитного динамо. Модели включают в себя два генератора магнитного поля — крупномасштабный и турбулентный (α -эффект). Влияние магнитного поля на движения среды представлено через подавление α -эффекта функционалом от компонент поля, что вводит в модель память (эредитарность). Модель описывается интегро-дифференциальной системой уравнений. В работе представлена сама численная схема и исследован порядок точности на вложенных сетках. Численная схема состоит из двух частей, для дифференциальной части используется метод трапеций, а для интегральной — квадратурная формула трапеций. В результате сопряжения схем получаем нелинейную алгебраическую систему уравнений. Для решения такой системы необходимо привлечение методов для нелинейных алгебраических систем. В работе был выбран метод Ньютона. Показано, что в случае экспоненциального ядра функционала подавления модель может быть сведена к классической системе Лоренца. Известный характер динамики системы Лоренца при различных параметрах позволил верифицировать численную схему. Показано, что численная схема позволяет решать на качественном уровне интегро-дифференциальную систему уравнений, которая является моделью космического динамо. Данная численная схема была разработана для конкретной модели, но может быть легко обобщена для других квадратично-нелинейных интегро-дифференциальных систем.

Ключевые слова: гидромагнитное динамо, системы с памятью, эредитарность, интегро-дифференциальные уравнения, численная схема, векторное уравнение Вольтерра.

Получение: 31.10.2024; Исправление: 14.11.2024; Принятие: 22.11.2024; Публикация онлайн: 28.11.2024

Для цитирования. Казаков Е. А. Численная схема для одной интегро-дифференциальной системы, связанной с задачей космического динамо // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 49. № 4. С. 85-98. EDN: WIIDTB. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-85-98>.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-11-0064 «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности» <https://rscf.ru/project/22-11-00064/>).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция:  E-mail: Kazakov@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License



© Казаков Е. А., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)



Numerical Scheme for one Integro-Differential System Related to the Problem of Space Dynamo

*E. A. Kazakov**

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
684034, Paratunka, Mirnaya srt.,7, Russia

Abstract. The article is devoted to the description of the developed numerical scheme for modeling a hereditary dynamic system, which is a model of a two-mode hydromagnetic dynamo. The models include two magnetic field generators - large-scale and turbulent (α -effect). The influence of the magnetic field on the motion of the medium is presented through the suppression of the α -effect by the functional of the field components, which introduces memory into the model (hereditary). The model is described by an integro-differential system of equations. The paper presents the numerical scheme itself and investigates the order of accuracy on nested grids. The numerical scheme consists of two parts, the trapezoid method is used for the differential part, and the trapezoid quadrature formula is used for the integral part. As a result of conjugation of the schemes, we obtain a nonlinear algebraic system of equations. To solve such a system, it is necessary to involve methods for nonlinear algebraic systems. In this paper, the Newton method was chosen. It is shown that in the case of an exponential kernel of the suppression functional, the model can be reduced to the classical Lorenz system. The known nature of the dynamics of the Lorenz system for various parameters allowed us to verify the numerical scheme. It is shown that the numerical scheme allows us to qualitatively solve the integro-differential system of equations, which is a model of a cosmic dynamo. This numerical scheme was developed for a specific model, but can be easily generalized for other quadratic-nonlinear integro-differential systems.

Key words: hydromagnetic dynamo, systems with memory, heredity, integro-differential equations, numerical scheme, Volterra vector equation.

Received: 31.10.2024; Revised: 14.11.2024; Accepted: 22.11.2024; First online: 28.11.2024

For citation. Kazakov E. A. Numerical scheme for one integro-differential system related to the problem of space dynamo. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 49: 4, 85-98. EDN: WIIDTB. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-85-98>.

Funding. This research was funded by Russian Science Foundation grant number 22-11-00064 <https://rscf.ru/project/22-11-00064/>.

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. Author is solely responsible for providing the final version of the article in print.

*Correspondence:  E-mail: Kazakov@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Kazakov E. A., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

Для развития теории космических динамо-систем актуальным направлением работ является разработка и исследование малоразмерных динамических систем с памятью, моделирующих на феноменологическом уровне процесс генерации магнитных полей. По сложившейся в теории динамических систем терминологии, модели с памятью называют эредитарными.

Феноменологически эредитарная модель космического динамо может быть представлена в интегро-дифференциальном виде [1, 2]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\mu x + (\mu - \phi \int_0^t K(t-\tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau) y, \\ \frac{dy}{dt} &= (D - \int_0^t K(t-\tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau) x - y.\end{aligned}\quad (1)$$

В работе будем использовать компактную форму записи системы (1), которая имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\eta - ps^2z) y - \eta x, \\ \frac{dy}{dt} &= (D - z)x - y, \\ z &= \int_0^t K(t-\tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau.\end{aligned}\quad (2)$$

Формально, любая интегро-дифференциальная система может быть в эквивалентном виде представлена в чистой интегральной системе Вольтерра, но имеющая специфическую структуру [3]. Поэтому использовать общие методы для систем нелинейных систем Вольтерра нецелесообразно, ввиду большой громоздкости расчетов, более разумным является разработка метода исследования изначально адаптированную под изучаемую модель.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t), \quad x(0) = a.$$

Любое такое дифференциальное уравнение может быть записано в эквивалентном виде

$$x(t) = a + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Такая конструкция представляет из себя, как говорилось ранее, частный случай интегрального уравнения Вольтерра [4–6]. В общем виде интегрального уравнения Вольтерра предполагается, что подынтегральная функция f зависит не только от τ но и от t . Если функция f зависит только от τ , то можно свести такое интегральное уравнение к дифференциальному уравнению. Если же функция f явно зависит не только от τ , но и от t , то вообще говоря, не факт, что можно свести интегральное уравнение к дифференциальному уравнению или системе дифференциальных уравнений.

Рассмотрим на примере нашей систем (2). Перепишем уравнения системы в интегральную форму:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} (\eta^T - \phi z) y - \eta^T x, \\ (D - z)x - y \\ K(t - \tau)Q(x(\tau)y(\tau)) \end{pmatrix} dt. \quad (3)$$

Численно решить такую систему используя стандартные методы будет достаточно проблематично, из-за того, что численные методы которые используя в математических пакетах являются универсальными и обрабатывают колоссальный объём данных. В связи с этим была решена задача разработка численного метода для решения конкретной задачи вида (1).

Разностные схемы

Для начала в системе (2) введем следующие замены:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mu \\ \phi \\ D \end{bmatrix} - \text{вектор параметров.}$$

И перепишем систему в векторном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= f(\mathbf{x}, z, \mathbf{a}), \\ z &= \int_0^t K(t - \tau)Q(\mathbf{x}(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Вводим временную сетку T с шагом Δt , ведем расчет для t_k равно отстоящих. Через $\mathbf{x}[k]$ и $z[k]$ обозначаем значения функции в эти самые моменты времени:

$$\begin{aligned} t_k &= k\Delta t, \\ \mathbf{x}[k] &= \mathbf{x}(t_k), \\ z[k] &= z(t_k). \end{aligned}$$

Для численного исследования модели необходимо совмещение разностных схем для дифференциальной части и квадратурной формы для интегральной части.

В качестве разностной схемы для дифференциальной части возьмем метод трапеции [7–9].

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{x}[k] + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_1 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_2, \\ \mathbf{m}_1 &= f(\mathbf{x}[k], z[k], \mathbf{a}), \\ \mathbf{m}_2 &= f(\mathbf{x}[k] + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_1 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_2, z[k+1], \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (5)$$

В расчетных целях его удобнее записать в следующем виде:

$$x[k+1] = x[k] + \frac{\Delta t}{2} (f(x[k], z[k], a) + f(x[k+1], z[k+1], a)). \quad (6)$$

В качестве квадратурной формы для интегрального члена – квадратурная формула трапеции [3, 11]:

$$z[k+1] = \frac{h}{2} \hat{K}[k+1] Q(x[0]) + h \sum_{i=1}^k \hat{K}[\Delta t(k-i)] Q(x[i]) + \frac{h}{2} \hat{K}[0] Q(x[k+1]). \quad (7)$$

Расчет состояния системы в $k+1$ момент времени сводиться к тому, что из данной системы уравнений мы должны найти чему равняется $x[k+1]$ и $z[k+1]$. В тоже самое время хорошо видно, что переменные $x[k+1]$ и $z[k+1]$ фигурируют в правых частях равенства. Таким образом имеет дело не с явными формулами рекуррентного типа, которые позволяют легко и просто просчитывать значения, а с неявными уравнениями решение данной системы уравнений, размерность которой определяется размерностью фазового пространства данной системы и позволит рассчитать состояние системы в следующий шаг. Конечно расчет по явным схемам имеет большие преимущества с точки зрения быстродействия, однако хорошо известно, что неявные схемы имеют меньшие ограничения по выбору шага, с точки зрения устойчивости. Поскольку в изучаемых моделях можно ожидать появление хаотических режимов, очень чувствительных к расчетным ошибкам предпочтение было отдано неявным схемам. Поэтому полученную систему нелинейных уравнений относительно $x[k+1], y[k+1]$ будем решать с помощью метода Ньютона [6, 10].

Метод Ньютона для систем:

$$X[n+1] = X[n] - W^{-1}(X)F(X), \quad (8)$$

где $W(X)$ – Якобиан матрицы $F(X)$.

Для начала к системе, к дифференциальной части, применим метод, получим уравнения:

$$\begin{aligned} x[n+1] &= x[n] + \\ &+ \frac{h}{2} (-\eta x[n] + (\eta - \phi z[n])y[n] \eta x[n+1] + (\eta - \phi z[n+1])y[n+1]), \\ y[n+1] &= y[n] + \frac{h}{2} ((D - z[n])x[n] - y[n] + D - z[n+1])x[n+1] - y[n+1]. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь в каждое уравнение вместо $z[n+1]$ подставим

$$z[n+1] = \frac{h}{2} K[0] (q_{11}x^2[n+1] + 2q_{12}x[n+1]y[n+1] + q_{22}y^2[n+1]) + L[n],$$

где q_{11}, q_{22} – коэффициенты при функции подавления энергией q_{12} – коэффициент при функции подавления спиральностью, $K[0]$ – ядро функционала подавления.

$$L[n] = K[n]Q(x[0], y[0]) + \sum_{k=1}^n K[n+1-k]Q(x[k], y[k]),$$

$Q(x, y) = q_{11}x^2[n+1] + 2q_{12}x[n+1]y[n+1] + q_{22}y^2[n+1]$ – квадратичная форма функции подавления (общий вид).

$$\begin{aligned} x[n+1] &= x[n] + \frac{h}{2}(-\eta x[n] + (\eta - \phi z[n])y[n] - \eta x[n+1] + \\ &+ (\eta - \phi) \frac{h}{2} K[0](q_{11}x^2[n+1] + 2q_{12}x[n+1]y[n+1] + q_{22}y^2[n+1]) + L[n])y[n+1]), \\ y[n+1] &= y[n] + \frac{h}{2}((D - z[n])x[n] - y[n] + \\ &+ (D - \frac{h}{2}K[0](q_{11}x^2[n+1] + 2q_{12}x[n+1]y[n+1] + q_{22}y^2[n+1]) + \\ &+ L[n])x[n+1] - y[n+1]). \end{aligned} \quad (10)$$

Мы получили систему нелинейных алгебраических уравнений неизвестными в которой являются $x[n+1]$ и $y[n+1]$.

Перенесем левую часть уравнения в правую.

$$\begin{aligned} F_1 &= -x[n+1] + x[n] + \frac{h}{2}(-\eta x[n] + (\eta - \phi z[n])y[n] - \eta x[n+1] + \\ &+ (\eta - \phi) \frac{h}{2} K[0](q_{11}x^2[n+1] + 2q_{12}x[n+1]y[n+1] + q_{22}y^2[n+1]) + L[n])y[n+1]), \\ F_2 &= -y[n+1] + y[n] + \frac{h}{2}((D - z[n])x[n] - y[n] + \\ &(D - \frac{h}{2}K[0](q_{11}x^2[n+1] + 2q_{12}x[n+1]y[n+1] + q_{22}y^2[n+1]) + \\ &+ L[n])x[n+1] - y[n+1]). \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь вычислим Якобианы системы по следующей формуле:

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x[n+1]} & \frac{\partial F_1}{\partial y[n+1]} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x[n+1]} & \frac{\partial F_2}{\partial y[n+1]} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Получим:

$$\begin{aligned} W_{11} &= -\frac{1}{2}\phi h^2 K[0]q_{11}x[n+1]y[n+1] - \frac{1}{2}\phi h^2 K[0]q_{11}y^2[n+1] - 1 - \frac{1}{2}\eta h, \\ W_{12} &= -\frac{1}{4}\phi h^2 K[0]q_{11}x[n+1]^2 - \phi h^2 K[0]q_{12}x[n+1]y[n+1] - \\ &-\frac{3}{4}\phi h^2 K[0]q_{22}y^2[n+1] + \frac{1}{2}h(\eta - \phi L[n]), \end{aligned}$$

$$W_{12} = W_{21} = -\frac{3}{4}h^2K[0]q_{11}x^2[n+1] - h^2K[0]q_{12}x[n+1]y[n+1] - \\ -\frac{1}{4}h^2K[0]q_{22}y^2[n+1] + \frac{1}{2}h(D - L[n]),$$

$$W_{22} = -\frac{1}{2}h^2K[0]q_{12}x^2[n+1] - \frac{1}{2}h^2K[0]q_{22}x[n+1]y[n+1] - 1 - \frac{1}{2}h.$$

Алгоритм решения:

1. Зададим начальные условия $x[0] = y[0]$.
2. На текущий момент времени t (шаг i) пусть будут известны значения $x[i], y[i]$.
3. Вычисляем функции $L[n]$ и $z[n]$.
4. Вычисляем Якобиан системы W .
5. находим обратную матрицу к нашему Якобиану W^{-1} .
6. Считаем значение функции F_1 и F_2 (11) в текущий момент времени.
7. По формуле метода Ньютона (8) считаем $i+1$ значения для x и y .
8. Увеличим временной индекс t на значение h (шаг i на 1) и переходим на шаг алгоритма 2.

Сопоставление с динамикой известной системы

Интегральный член является признаком эредитраности модели (2). В то же время его можно исключить для некоторых типов ядер с экспоненциальной асимптотикой за счет расширения размерности фазового пространства модели. Точнее говоря, если ядро является решением линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, то система (2) равносильна некоторой дифференциальной системе, с начальными условиями на дополнительные фазовые переменные. А именно справедлива теорема [12]:

ТЕОРЕМА. Если ядро $K(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$a_0K^{(n)}(t) + a_1K^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}K'(t) + a_nK(t) = 0 \quad (13)$$

с постоянными коэффициентами a_i , то интегральное равенство

$$z(t) = \int_0^t K(t-\tau)Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau.$$

равносильно следующей задаче Коши для функции $z(t)$:

$$a_0 \frac{d^n z}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \dots + a_n z = \sum_{l=1}^n a_{n-l} \sum_{s=0}^{l-1} K^{(s)}(0) \frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}} Q(x(t), y(t)),$$

$$z(0) = 0,$$

$$\left. \frac{d^l z(t)}{dt^l} \right|_{t=0} = \sum_{s=0}^{l-1} K^{(s)}(0) \left. \frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}} Q(x(t), y(t)) \right|_{t=0}, \quad l = 1, \dots, n-1.$$
(14)

Рассмотрим процесс верификации на нашей системе (2), в возьмем в качестве параметров следующие $\phi = 0$, $Q(x(\tau)y(\tau)) = xy$, $K(t-\tau) = e^{-bt}$, $\eta^T = 10$ и $b = 8/3$. Воспользуемся условием теоремы об исключении интегрально члена из системы (2), получим систему вида:

Получим систему вида:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (y-x)\eta^T, \\ \frac{dy}{dt} &= (D-z)x-y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy-bz, \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$
(15)

Эта система $\alpha\omega$ -динамо, соответствующая системе Лоренца. Динамика такой системы прекрасно известна [13].

Будем варьировать параметр D и будем получать различные режимы системы. Для $D = 20$ получим асимптотически устойчивый режим рис. 1,2.

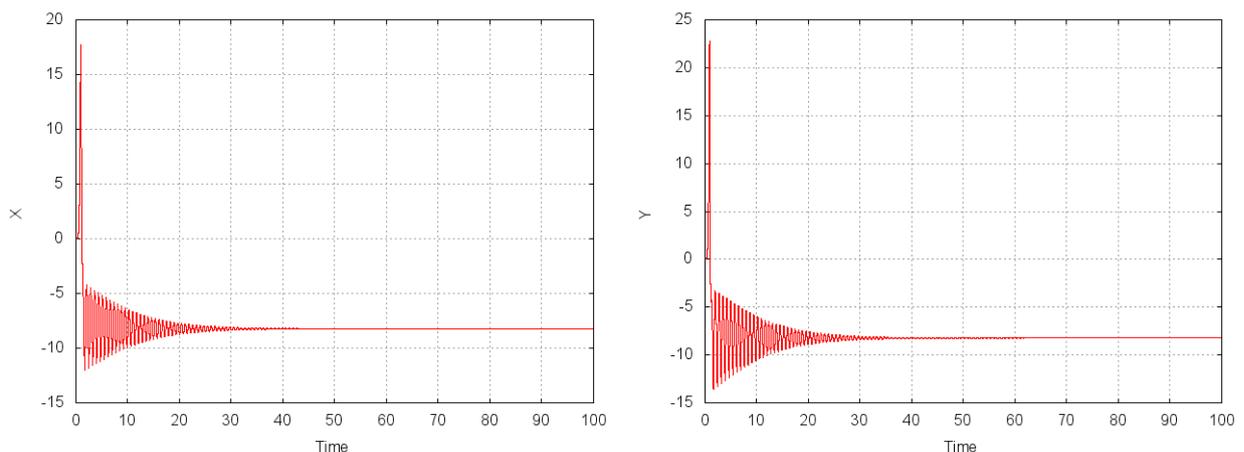


Рис. 1. Фазовая координаты: (а) X при $D = 20$; (б) Y при $D = 20$.
[Figure 1. Phase coordinates: (a) X at $D = 20$; (b) Y for $D = 20$.]

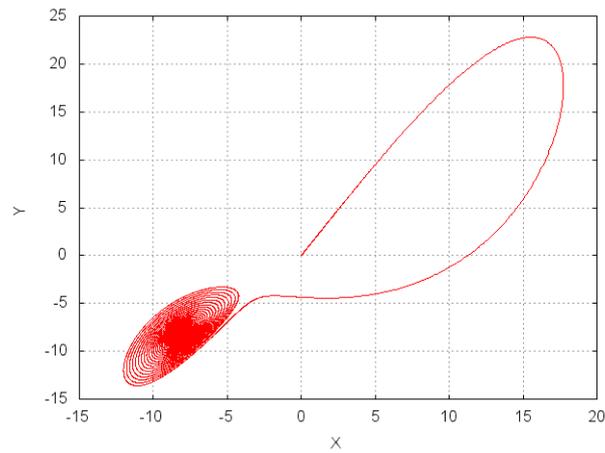


Рис. 2. Фазовый портрет системы при $D = 20$.
 [Figure 2. Phase portrait of the system at $D = 20$.]

$D = 220$ получим периодический режим рис. 3,4.

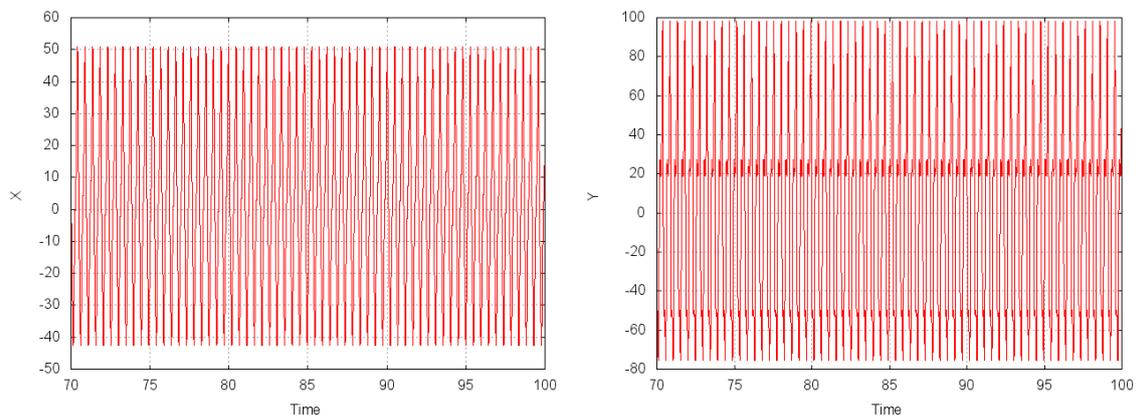


Рис. 3. Фазовые координаты: (a) X при $D = 220$; (b) Y при $D = 220$.
 [Figure 3. Phase coordinates: (a) X at $D = 220$; (b) Y for $D = 220$.]

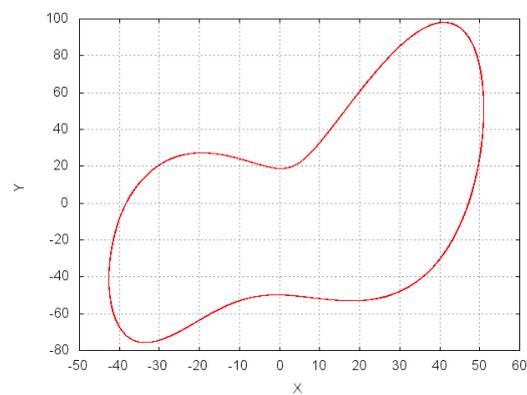


Рис. 4. Фазовый портрет системы при $D = 220$.
 [Figure 4. Phase portrait of the system at $D = 220$.]

Если же $D = 28$ получим хаотический режим рис. 5,6.

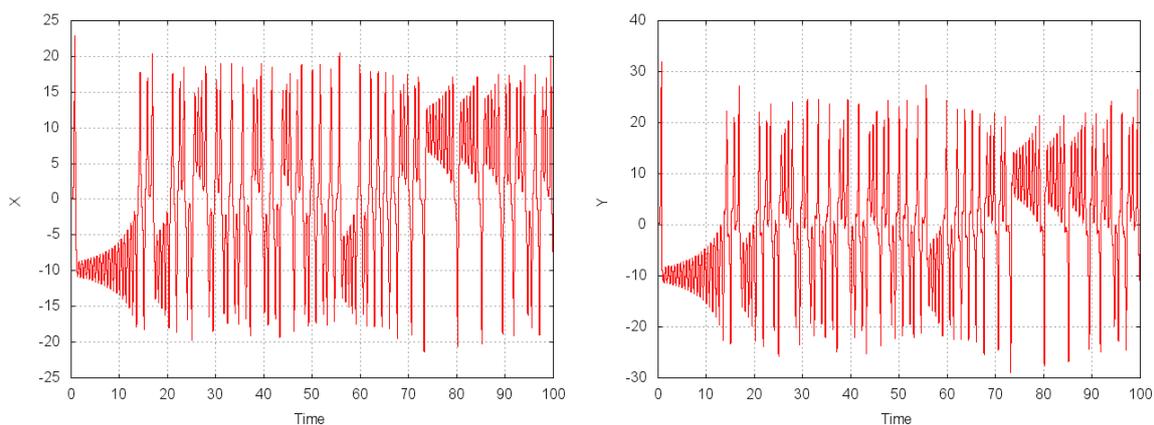


Рис. 5. Фазовая координаты: (а) X при $D = 28$; (б) Y при $D = 28$.
[Figure 5. Phase coordinates: (a) X at $D = 28$; (b) Y for $D = 28$.]

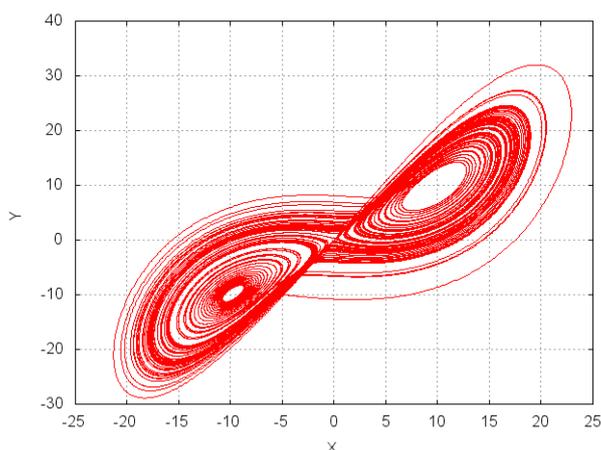


Рис. 6. Фазовый портрет системы при $D = 28$.
[Figure 6. Phase portrait of the system at $D = 28$.]

Порядок точности численной схемы

При использовании любой приближенной схемы важно иметь представление о её точности. Часто, в ходе работы бывает целесообразно изменять шаг сетки по ходу расчета, контролируя, тем самым погрешность на шаге.

Погрешность в результате вычислений может возникнуть по следующим причинам:

1. погрешность при моделировании, любое разностное уравнение не является абсолютным эквивалентом дифференциальному уравнению, это основной источник погрешности.

2. округление чисел при вычислении.
3. погрешность в значениях правой части $f(x, y)$, погрешность вызвана тем фактом, что рассматривается некоторое приближение функции к правой части дифференциального уравнения. Так же в ходи вычисления на ЭВМ функция $f(x, y)$ может быть приближена другими функциями, что в свою очередь вносит дополнительную погрешность в решение уравнения.
4. y_{i+1} определяется и уравнения которое эквивалентно исходному, но не может быть разрешимо в явном виде.

Исследование порядка точности по правилу Рунге заключается в следующем: берется решение на сетки h и сравнивается с решением на сетке с шагом в 2 раза меньше т.е. $h/2$. И в дальнейшем рассмотрении разностей погрешностей для этих двух вычислений по формуле [14, 15]:

$$\epsilon = \frac{|y_h - y_{h/2}|}{2^p - 1} \quad (16)$$

Формула Рунге справедлива для всех вычислительных процессов, для которых выполняется степенной закон. Для определения порядка метода p необходимо проведение априорной оценки погрешности, что не всегда легко осуществить [16]

Английский математик Эйткен предложил способ оценки погрешности для случая, когда порядок метода неизвестен. Более того, алгоритм Эйткена позволяет опытным путем определить и порядок метода. Для этого необходимо третий раз вычислить значение величины y с шагом $h/4$ [17].

Для удобства введем переменную k , которая в данном случае равна $\frac{1}{2}$. Для вычисление порядка p используем формулу Эйткена:

$$k^p = \frac{y_{kh} - y_{k^2h}}{y_h - y_{kh}} \quad (17)$$

Из формулы (17) получаем следующее соотношение:

$$p = \frac{\log W}{\log k}, \quad (18)$$

где $W = \frac{y_{kh} - y_{k^2h}}{y_h - y_{kh}}$.

Были проведены численные эксперименты при шагах h , $h/2$, $h/4$, $h/8$, $h/16$, $h/32$. Управляющие параметры исследуемой системы (2) были выбраны следующие:

$$\eta^T = 10 \quad D = 15 \quad b = \frac{8}{3} \quad K(t - \tau) = e^{-bt} \quad Q(x, y) = xy.$$

Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Для выбранного вычислительного процесса алгоритм Эйткена достаточно применить только один раз определения порядка метода, а затем использовать формулу Рунге, требующую только двукратного вычисления искомой величины.

Таблица 1

Расчет порядка точности по формуле Эйткена [Calculation of the order of accuracy using the Aitken formula]

$h = 0.001$	W	$\log W$	p
$h/4$	0.4994309359	-0.6942859569	1.001642907
$h/8$	0.5003558056	-0.6924358225	0.9989737273
$h/16$	0.5001269831	-0.6928932467	0.9996336509
$h/32$	0.5000846339	-0.6929779271	0.9997558189

Априорный и апостериорный порядки должны получаться совпадающими для численных схем. Конечно, это совпадение будет приближенным, так как при получении алгоритмов Рунге и Эйткена учитывались только главные члены погрешности.

Таким образом можно утверждать, что разностная схема имеет глобальный 1 порядок точности. О локальном порядке (порядок точности на шаге) для интегро-дифференциальной системы говорить бессмысленно.

Заключение

Предложенная численная схема позволяет проводить моделирование интегро-дифференциальных систем являющимися моделями гидромагнитного динамо. Поскольку исследуемая система является интегро-дифференциальной необходимо было совместить разностные схемы для дифференциальной части и квадратурной формы для интегральной части. В качестве разностной схемы для дифференциальной части был взят метод трапеции. А в качестве квадратурной формы для интегрального члена квадратурная формула трапеций.

Исследования порядка точности предложенной численной схемы проводилось при помощи метода Эйткена. Полученный порядок равен 1.

В целом, численный метод может быть применен, с незначительными изменениями, для исследования широкого класса задач связанных с системами интегро-дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Vodinchar G. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale $\alpha\omega$ -Dynamo // *Mathematics*, 2020. vol. 8(11), pp. 2065 DOI: 10.3390/math8112065.
2. Казаков Е. А. Эредитарная маломодовая модель динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2021. Т. 35(2), С. 40-47 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47.
3. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. *Интегральные уравнения*. М.: Физматлит, 2002.
4. Бандурин Н. Г. Численное решение существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // *Вычислительные технологии*, 2010. Т. 15(3), С. 31–38.
5. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. *Интегральные уравнения*. М.: Наука, 1968.
6. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченкова Н. В.. *Численные методы для инженеров*. М.: Высшая школа, 1994.

7. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. М.: Наука, 1968.
8. Калиткин Н. Н. *Численные методы*. М.: Наука, 1978.
9. Эльсгольц Л. Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М.: Наука, 1969.
10. Griffiths D. V., Smith I. M. *Numerical methods for engineers*. Chapman and Hall: CRC, 2006.
11. Moheuddin M.M., Titu M.A.S., Hossai S.A New Analysis of Approximate Solutions for Numerical Integration Problems with Quadrature-based Methods // *Pure and Applied Mathematics Journal*, 2020. vol. 9, no. 3, pp. 46-54 DOI: 0.11648/j.pamj.20200903.11.
12. Водинчар Г. М., Казаков Е.А. Исключение интегрального члена в уравнениях одной эредитарной системы, связанной с задачей гидромагнитного динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2023. Т. 42(1), С. 180-190 DOI: doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190.
13. Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory // *E3S Web of Conf*, 2018. vol. 62 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202011.
14. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. *Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения*. М.: Наука, 1967.
15. Деккер К., Вервер Я. *Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений*. М.: Мир, 1988.
16. Хашин С. И. Оценка погрешности классических методов Рунге-Кутты // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2014. Т. 54, № 5, С. 746–754.
17. Gautschi W. *Numerical analysis*. Springer: Science & Business Media, 2011.

Информация об авторе



Казаков Евгений Анатольевич ✉ – младший научный сотрудник лаборатории электромагнитных излучений Института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0001-7235-4148.

References

- [1] Vodinchar G. M. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale $\alpha\omega$ -Dynamo. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 11, p. 2065. DOI: 10.3390/math8112065
- [2] Kazakov E. A. Hereditary low-mode dynamo model. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2021, 35: 2, 40-47. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47 (In Russian).
- [3] Vasilyeva A. B., Tikhonov N. A. *Integralnie uravneniay [Integral equations]* Moscow. Fizmatlit, 2002. (In Russian).
- [4] Bandurin N. G. Numerical solution of essentially nonlinear integro-differential problems equations with a retarded argument. *Computational technologies*, 2010. vol 15, no 3, pp 31–38. (In Russian).
- [5] Zabreiko P. P., Koshelev A. I., Krasnoselsky M. A. *Integralnie uravneniay [Integral equations]* Moscow. Nauka, 1968. (In Russian)
- [6] Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlay nauchnih rabotikov i ingenerov [Handbook of mathematics for scientists and engineers]*. Moscow. Nauka, 1968. (In Russian).
- [7] Amosov A. A., Dubinsky Yu. A., Kopchenova N. V. *Chislennye metody dlya inzhenerov [Numerical methods for engineers.]* Moscow. Higher School, 1994. (In Russian)
- [8] Kalitkin N. N. *Numerical methods*. Moscow. Nauka. 1978. 512. (In Russian).
- [9] Elsgolts L. E. *Differencialnie uravneniay i variacionnoe vichislenie [Differential equations and calculus of variations]*. Moscow. Nauka, 1969. (In Russian)
- [10] Griffiths D. V., Smith I. M. *Numerical methods for engineers*. Chapman and Hall: CRC, 2006.
- [11] Moheuddin M.M., Titu M.A.S., Hossain S. A New Analysis of Approximate Solutions for Numerical Integration Problems with Quadrature-based Methods. *Pure and Applied Mathematics Journal*. vol. 9, no. 3, 2020, pp. 46-54. DOI: 10.11648/j.pamj.20200903.11
- [12] Vodinchar G. M., Kazakov E. A. Elimination of the integral term in the equations of one hereditary system related to the hydromagnetic dynamo. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2023, vol. 42. no. 1, 180-190. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190.
- [13] Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memor. *E3S Web of Conf*. 2018, vol. 62. p. 02011. DOI: 10.1051/e3sconf/20186202011
- [14] Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z. *Chislennye metody analiza. Priblizhenie funkciy, differencial'nye i integral'nye uravneniya. [Numerical methods of analysis. Approximation functions, differential and integral equations.]* Moscow. Nauka, 1967.
- [15] Dekker K., Verwer J. *Ustojchivost' metodov Runge- Kuty dlya zhestkih nelinejnyh differencial'nyh uravnenij [Stability of Runge-Kutta methods for rigid nonlinear differential equations.]* Moscow. Mir, 1988.
- [16] Khashin S.I. Ocenka pogreshnosti klassicheskikh metodov Runge–Kutty [Error estimation of classical Runge–Kutta methods]. *Comput. Math. Math. Phys. fiz.*, 2014. T. 54, No. 5, pp. 746–754.
- [17] Gautschi W. *Numerical analysis*. Springer: Science & Business Media, 2011.

Information about the author



Kazakov Evgeny Anatolevich ✉ – Junior Researcher, Laboratory of electromagnetic propagation, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia,
 ORCID 0000-0001-7235-4148.