



Исследование бифуркационных диаграмм дробной динамической системы Селькова

*Р. И. Паровик**

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7, Россия

Аннотация. В статье исследуются динамические режимы дробной системы Селькова с переменной наследственностью (памятью). Эффект переменной наследственности означает, что наследственность изменяется во времени, т.е. зависимость текущего состояния системы от предыдущих также зависит от времени. Переменная наследственность в дробной системе Селькова с точки зрения математики описывается с помощью производных дробных переменных порядков типа Герасимова-Капуто. Дробная динамическая система Селькова исследуется с помощью численного метода Адамса-Вашфорда-Мултона из семейства предиктор-корректор. С помощью численного алгоритма строятся различные бифуркационные диаграммы — зависимости полученного численного решения от различных значений параметров модельных уравнений. Численный алгоритм Адамса-Вашфорда-Мултона и построение бифуркационных диаграмм были реализованы на языке Python в среде PyChart 2024.1. Исследование бифуркационных диаграмм показало наличие не только регулярных режимов: предельных циклов и затухающих колебаний и хаотических колебаний, но и выявило сингулярность — неограниченный рост решения при изменении значений порядков дробных производных в модельном уравнении. Бифуркационные диаграммы могут содержать участки кривой со всплесками и без. Всплески могут указывать на релаксационные колебания или хаотические режимы, отсутствие всплесков соответствует затухающим колебаниям или аперiodическим режимам.

Ключевые слова: математическое моделирование, дробная динамическая система Селькова, осциллограмма, фазовая траектория, бифуркационные диаграммы, статистические характеристики, дробные производные переменного порядка, зредитарность, Python, PyChart.

Получение: XX.11.2024; Исправление: XX.11.2024; Принятие: XX.11.2024; Публикация онлайн: XX.12.2024

Для цитирования. Паровик Р.И. Исследование бифуркационных диаграмм дробной динамической системы Селькова // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 49. № 4. С. 9-19. EDN: ZNIAZE. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-9-19>.

Финансирование. Исследования выполнены в рамках гранта РФФ № 22-11-00064 по теме "Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности"

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция:  E-mail: parovik@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Паровик Р.И., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)





Study of Bifurcation Diagrams of Selkov's Fractional Dynamic System

*R. I. Parovik**

Institute for Cosmophysical Research and Radio Propagation FEB RAS, 684034, v. Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

Abstract. The article studies the dynamic modes of the fractional Selkov system with variable heredity (memory). The effect of variable heredity means that heredity changes over time, i.e. the dependence of the current state of the system on the previous ones also depends on time. Variable heredity in the fractional Selkov system is described from the mathematical point of view using derivatives of fractional variables of the Gerasimov-Caputo type. The fractional dynamic Selkov system is studied using the Adams-Bashforth-Multon numerical method from the predictor-corrector family. Using the numerical algorithm, various bifurcation diagrams are constructed — dependences of the obtained numerical solution on various values of the parameters of the model equations. The Adams-Bashforth-Multon numerical algorithm and the construction of bifurcation diagrams were implemented in Python in the PyCharm 2024.1 environment. The study of bifurcation diagrams showed the presence of not only regular regimes: limit cycles and damped oscillations and chaotic oscillations, but also revealed a singularity — unlimited growth of the solution when changing the values of the orders of fractional derivatives in the model equation. Bifurcation diagrams may contain curve sections with and without spikes. Spikes may indicate relaxation oscillations or chaotic modes, the absence of spikes corresponds to damped oscillations or aperiodic modes.

Key words: mathematical modeling, fractional dynamic Selkov system, oscillogram, phase trajectory, bifurcation diagrams, statistical characteristics, fractional derivatives of variable order, hereditary, Python, PyCharm

Received: XX.11.2024; Revised: XX.11.2024; Accepted: XX.11.2024; First online: XX.12.2024

For citation. Parovik R. I. Study of bifurcation diagrams of Selkov's fractional dynamic system. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 49: 4, 9-19. EDN: ZNIAZE. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-9-19>.

Funding. The research was carried out within the framework of the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00064 on the topic "Modeling of dynamic processes in the geospheres taking into account heredity"

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to the press.

*Correspondence:  E-mail: parovik@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Parovik R. I., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

Динамические системы играют важную роль в различных областях знаний и зачастую бывает так, что одна и также динамическая система может описывать похожие процессы, но разной природы. Это свойство динамической системы иногда называют универсальностью. Не исключением является и динамическая система Селькова. Она часто встречается в биологии при исследовании гликолитических реакций, которые имеют автоколебательные режимы [1].

Далее в статье [2] было предложено использовать динамическую систему Селькова для описания автоколебательных режимов микросейсм — колебаний земной поверхности малой амплитуды, источником которых являются природные и техногенные процессы.

В работе [3] было проведено обобщение динамической системы на случай учета наследственности. Это свойство динамической системы сохранять память о своей эволюции, т.е. текущее состояние системы зависит от предыдущих ее состояний. С точки зрения математики наследственность можно описать в общем случае с помощью интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа [4], а при определенных условиях с помощью производных дробных постоянных или переменных порядков, которые изучаются в рамках теории дробного исчисления [5, 6]. Поэтому мы далее динамическую систему Селькова с учетом наследственности будем называть дробной динамической системой Селькова.

Был проведен количественный и качественный анализ динамической системы Селькова с учетом наследственности, основные результаты которого были отражены не только в статье [3], но и в других работах автора [7, 9, 16].

В настоящей работе предлагается дальнейшее исследование дробной динамической системы Селькова, которое связано с построением бифуркационных диаграмм на основе полученного решения в зависимости от различных значений параметров системы.

Постановка задачи и методика ее решения

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1(t)} x(t) = -v_1(t)x(t) + w_1(t)y(t) + h_1(t)x^2(t)y(t), x(0) = x_0, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2(t)} y(t) = v_2(t) - w_2(t)y(t) - h_2(t)x^2(t)y(t), y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t), y(t) \in C^1[0, T]$ — функции решения, $v_1(t) = \theta^{1-\alpha_1(t)}$, $v_2(t) = v_0\theta^{1-\alpha_2(t)}$, $w_1(t) = w_0\theta^{1-\alpha_1(t)}$, $w_2(t) = w_0\theta^{1-\alpha_2(t)}$, $h_1(t) = h_0\theta^{1-\alpha_1(t)}$, $h_2(t) = h_0\theta^{1-\alpha_2(t)}$ — функции из класса $C[0, T]$, θ — параметр имеющий размерность времени, v_0, w_0, h_0 — заданные константы, $t \in [0, T]$ — текущее время процесса, $T > 0$ — время моделирования; x_0, y_0 — положительные константы, отвечающие за начальные условия; операторы дробных производных имеют вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha_1(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1(t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_1(t)}}, \quad \partial_{0t}^{\alpha_2(t)} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_2(t))} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_2(t)}},$$

понимются в смысле Герасимова-Капуто [10, 11], порядки которых $0 < \alpha_1(t), \alpha_2(t) < 1$ являются функциями из класса $C[0, T]$.

Замечание 1. Отметим, что информацию о производных дробного переменного порядка можно найти в обзорной статье [12].

В настоящей работе мы будем использовать численный алгоритм, основанный на семействе методов предиктор-корректор (метод Адамса-Башфорта-Мултона) [13–16].

$$\begin{cases} x_{k+1}^p = x_0 + \frac{\tau^{\alpha_{1,k}}}{\Gamma(\alpha_{1,k} + 1)} \sum_{j=0}^k \theta_{j,k+1}^1 (-v_{1,j}x_j + w_{1,j}y_j + h_{1,j}x_j^2y_j), \\ y_{k+1}^p = y_0 + \frac{\tau^{\alpha_{2,k}}}{\Gamma(\alpha_{2,k} + 1)} \sum_{j=0}^k \theta_{j,k+1}^2 (v_{2,j} - w_{2,j}y_j - h_{2,j}x_j^2y_j), \\ \theta_{j,k+1}^i = (k - j + 1)^{\alpha_{i,k}} - (k - j)^{\alpha_{i,k}}, i = 1, 2. \end{cases} \quad (2)$$

Для корректора (формула Адамса-Моултона) получим:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_0 + K_{1,k} \left(-v_{1,k+1}x_{k+1}^p + w_{1,k+1}y_{k+1}^p + h_{1,k+1}x_{k+1}^{p2}y_{k+1}^p \right) + \\ + K_{1,k} \left(\sum_{j=0}^k \rho_{j,k+1}^1 (-v_{1,j}x_j + w_{1,j}y_j + h_{1,j}x_j^2y_j) \right), \\ y_{k+1} = y_0 + K_{2,k} \left(v_{2,k+1} - w_{2,k+1}y_{k+1}^p - h_{2,k+1}x_{k+1}^{p2}y_{k+1}^p \right) + \\ + K_{2,k} \sum_{j=0}^k \rho_{j,k+1}^2 (v_{2,j} - w_{2,j}y_j - h_{2,j}x_j^2y_j). \end{cases} \quad (3)$$

где $K_{1,k} = \frac{\tau^{\alpha_{1,k}}}{\Gamma(\alpha_{1,k} + 2)}$, $K_{2,k} = \frac{\tau^{\alpha_{2,k}}}{\Gamma(\alpha_{2,k} + 2)}$, а весовые коэффициенты в (3) определяются по формуле:

$$\rho_{j,k+1}^i = \begin{cases} k^{\alpha_{i,k+1}} - (k - \alpha_{i,k})(k + 1)^{\alpha_{i,k}}, j = 0, \\ (k - j + 2)^{\alpha_{i,k+1}} + (k - j)^{\alpha_{i,k+1}} - 2(k - j + 1)^{\alpha_{i,k+1}}, 1 \leq j \leq k, \\ 1, j = k + 1, \\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Замечание 2. Исследование свойств метода Адамса-Башфорта-Мултона проводилось в статье автора [16].

Результаты моделирования

Численный алгоритм (2), (3) был реализован на языке программирования Python [17] в среде PyCharm 2024.1 с возможностью визуализации результатов моделирования [18].

Пример 1. На рис.1 приведен график 3D поверхностей $x(\alpha_1, \alpha_2)$ и $y(\alpha_1, \alpha_2)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in [0.1, 1]$, $v = 0.6$, $w = 0.03$, $h = 1.3$, $\theta = 1$, $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.1$, $t \in [0, 100]$, $N = 3000$, α_1, α_2 – константы.

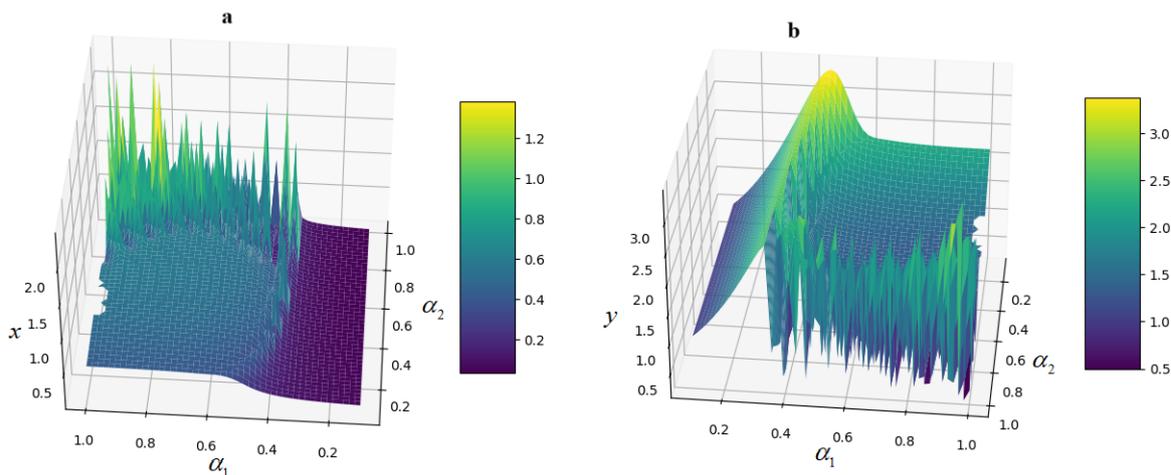


Рис. 1. Поверхности: а) $x = x(\alpha_1, \alpha_2)$; б) $y = y(\alpha_1, \alpha_2)$.
 Figure 1. Surfaces: а) $x = x(\alpha_1, \alpha_2)$; б) $y = y(\alpha_1, \alpha_2)$.

На рис. 1. приведены бифуркационные диаграммы в виде поверхностей искомого решения x и y от значений порядков дробных производных α_1 и α_2 . Отметим, что на поверхностях рис.1а и рис. 1б есть области которые отвечают за регулярные режимы, например, затухающие колебания соответствуют областям без всплесков, в области всплесков могут формироваться предельные циклы, а также предхаотические или хаотические режимы. Кроме того, мы видим область рваные области, что, как мы покажем дальше, связано с сингулярностью.

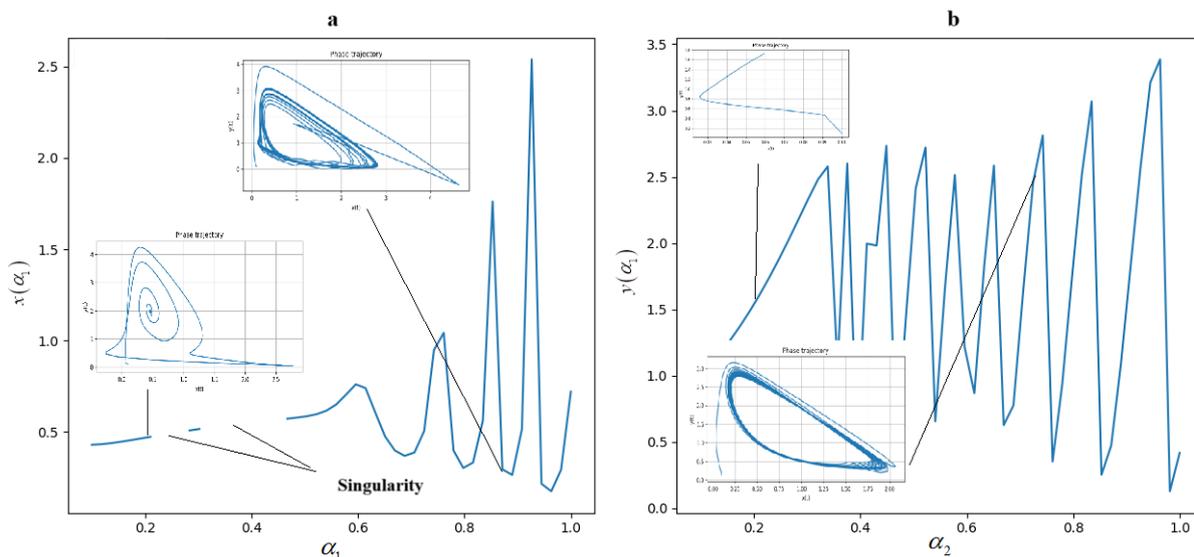


Рис. 2. Расчетные кривые а) $x(\alpha_1), \alpha_2 = 1$; б) $y(\alpha_2), \alpha_1 = 1$.
 Figure 2. Calculated curves а) $x(\alpha_1), \alpha_2 = 1$; б) $y(\alpha_2), \alpha_1 = 1$.

На рис. 2 дается бифуркационная диаграмма — сечение поверхности на рис. 1 при $\alpha_2 = 1$ для решения x (рис.2а) и при $\alpha_1 = 1$ для решения y (рис. 2б). Мы видим на этих бифуркационных диаграммах, например, на рис.2а

три режима, сначала идет затухающий режим вплоть до $\alpha_1 = 0.6$, причем прерывистая линия вначале указывает на сингулярность. Далее идут всплески, которые указывают предельный цикл. Причем на рис.2а всплески с возрастающей амплитудой указывают на то, что орбита предельного цикла увеличивается. Это подтверждается фазовыми траекториями на врезках к рис.2а и рис.2б.

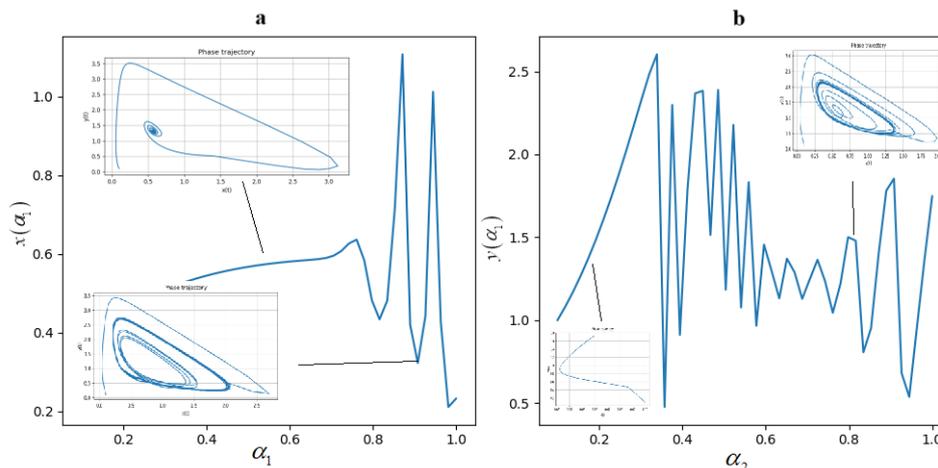


Рис. 3. Расчетные кривые а) $x(\alpha_1)$, $\alpha_2 = 0.8$; б) $y(\alpha_2)$, $\alpha_1 = 0.8$.
Figure 3. Calculated curves a) $x(\alpha_1)$, $\alpha_2 = 0.8$; б) $y(\alpha_2)$, $\alpha_1 = 0.8$.

На рис. 3 приведены бифуркационные диаграммы, построенные при других значениях параметров с врезками фазовых траекторий для различных участков диаграмм. Здесь мы можем отметить, например, на рис. 3а всплески идут с уменьшающейся амплитудой, что указывает на уменьшении орбиты предельного цикла. Здесь сингулярности нет.

На рис. 3б всплески идут сначала с возрастающей амплитудой, потом с убывающей и т.д. Однако если такое чередование будет непоследовательным или иметь хитический характер, то мы будем приходить к хаотическим или предхаотическим режимам.

Отметим, что на рис. 3б мы также видим аperiodический режим – режим при котором отсутствуют колебания, которому на бифуркационной диаграмме соответствует кривая без всплесков.

Рассмотрим теперь другой пример дробной динамической системы Селькова, когда $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ являются функциями от t .

Пример 2. Значения параметров выберем следующими: $N = 10000$, $t \in [0, 1000]$, остальные параметры возьмем из Примера 1. Порядки дробных производных изменяются во времени t по следующим законам:

$$\alpha_1(t) = 0.8 - \frac{1}{100} \cos(0.1\pi t), \quad \alpha_2(t) = 0.8 - \frac{9}{1000} \sin(0.1\pi t). \quad (4)$$

Построим бифуркационные диаграммы в виде поверхностей для решений $x(\alpha_1, \alpha_2)$ и $y(\alpha_1, \alpha_2)$ (Рис. 4).

Мы видим, что на рис. 4 поверхности представляют вполне регулярную фигуру цилиндрической формы.

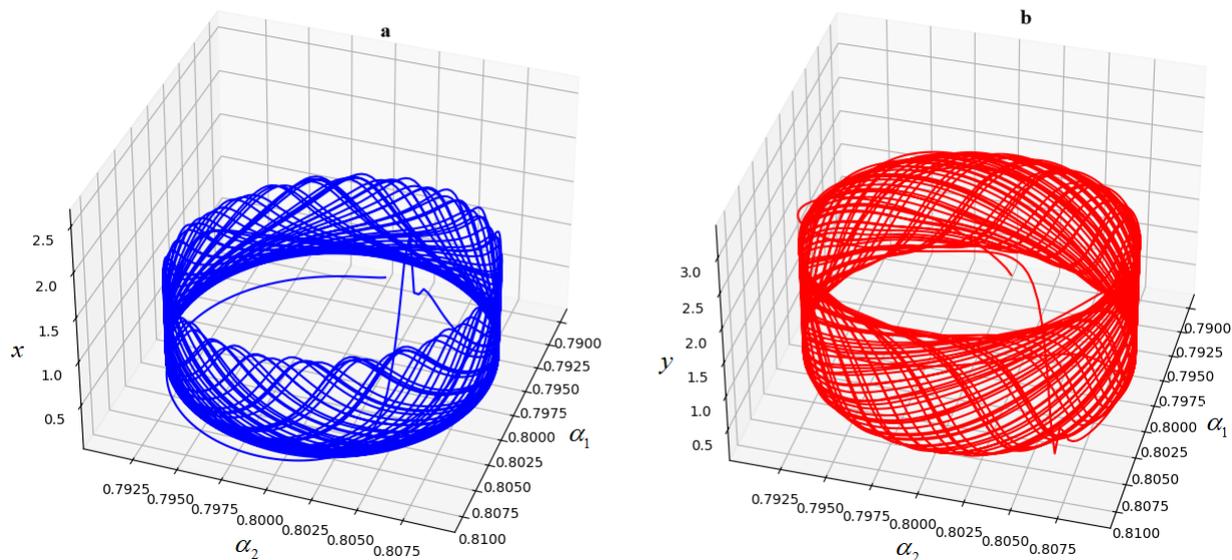


Рис. 4. 3D поверхности а) $x(\alpha_1, \alpha_2)$; б) $y(\alpha_1, \alpha_2)$.
 Figure 4. 3D surfaces а) $x(\alpha_1, \alpha_2)$; б) $y(\alpha_1, \alpha_2)$.

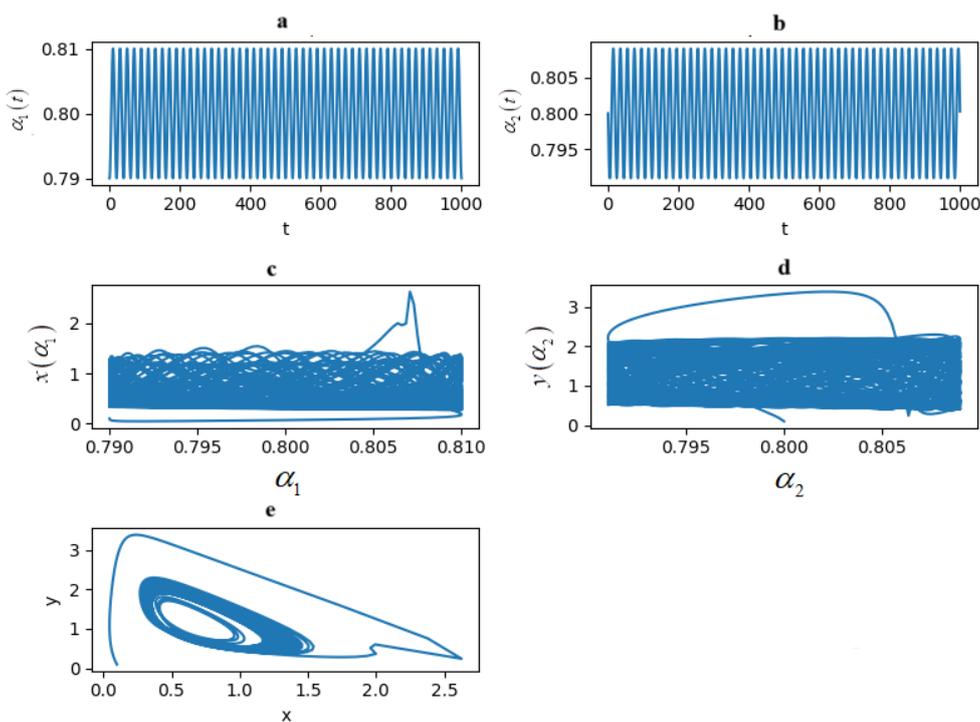


Рис. 5. Расчетные кривые а) $\alpha_1(t)$; б) $\alpha_2(t)$; в) $x(\alpha_1)$; д) $y(\alpha_2)$; е) $y = y(x)$.
 Figure 5. Calculated curves а) $\alpha_1(t)$; б) $\alpha_2(t)$; в) $x(\alpha_1)$; д) $y(\alpha_2)$; е) $y = y(x)$.

На рис. 5 приведены расчетные кривые $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ по формулам (4) (рис.5а,б). Сечения поверхности плоскостями $x(\alpha_1)$ и $y(\alpha_2)$ (рис. 5,с,д), также фазовая траектория (рис. 5е).

В заключение приведем бифуркационные диаграммы других ключевых параметров дробной динамической системы Селькова (рис.6).

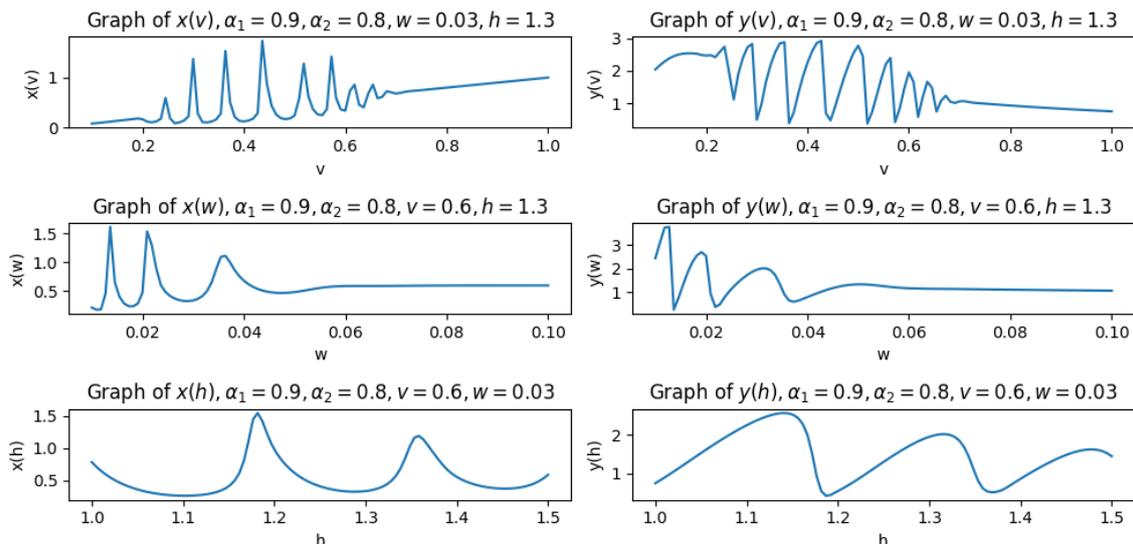


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы зависимостей решения x и y от различных значений параметров модели.
 Figure 6. Bifurcation diagrams of the dependences of the solution x and y on various values of the model parameters.

Здесь мы также видим на бифуркационных диаграммах (рис. 6), что есть "спокойные" участки, а есть участки со всплесками. Все это указывает на наличие различных динамических режимов.

Заключение

Исследованы различные бифуркационные диаграммы для дробной динамической системы Селькова в случае, когда $\theta = 1$. Алгоритм построения бифуркационных диаграмм основан на численном алгоритме Адамса-Башфорта-Мултона (2), (3). Фазовые траектории и осциллограммы были получены с помощью программного комплекса ABMSelkovFracSim [16] написанного на языке программирования Python на в среде PyCharm 2014.1.

Показано, что расчетные кривые зависимостей решения дробной динамической системы Селькова от значений порядков дробных производных характеризуют изменение динамических режимов, т.е. являются бифуркационными диаграммами. Показано, наличие регулярных и хаотических режимов, а также наличие сингулярности.

Дальнейшее изучение бифуркационных диаграмм связано с построением карт динамических режимов [19, 20], а также в случае когда $\theta \neq 1$. Для этих целей необходимо привлекать более мощные вычислительные ресурсы, например, вычислительные серверы с возможностью использования процессоров CPU или GPU.

Список литературы

1. Selkov E. E. Self-oscillations in glycolysis. I. A simple kinetic model, *Eur. J. Biochem.*, 1968. no. 4, pp. 79–86.
2. Маковецкий В. И., Дудченко И. П., Закупин А. С. Автоколебательная модель источников микросейсм, *Геосистемы переходных зон*, 2017. №4(1), С. 37–46.
3. Parovik R.I. Studies of the Fractional Selkov Dynamical System for Describing the Self-Oscillatory Regime of Microseisms. *Mathematics*. 2022. vol. 10. no. 22. 4208. DOI: 10.3390/math10224208.
4. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.
5. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
6. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.
7. Паровик Р.И. Исследование дробной динамической системы Селькова, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2022. Т. 41, №4, С. 146–166 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-146-166.
8. Parovik R. I. Selkov Dynamic System with Variable Heredity for Describing Microseismic Regimes / *Solar-Terrestrial Relations and Physics of Earthquake Precursors*, Proceedings of the XIII International Conference, Paratunka., Cham, Switzerland:, Springer Nature Switzerland AG, 2023, pp. 166-178 DOI:10.1007/978-3-031-50248-4_18.
9. Паровик Р.И. Качественный анализ дробной динамической системы Селькова с переменной памятью с помощью модифицированного алгоритма Тест 0-1, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2023. Т. 45, №4, С. 9-23 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-45-4-9-23..
10. Герасимов А. Н. Обобщение законов линейного деформирования и их применение к задачам внутреннего трения, *АН ССР. Прикладная математика и механика*, 1948. Т. 44, №6, С. 62-78.
11. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II, *Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, pp. 529-539.
12. Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: A review, *Proc. R. Soc. A R. Soc. Publ.*, 2020. №476, 20190498 DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
13. Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, *Nonlinear Dynamics*, 2002. vol. 29, no. 1-4, pp. 3-22 DOI: 10.1023/A:1016592219341.
14. Yang C., Liu F. A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system, *ANZIAM Journal*, 2005. vol. 47, pp. 168-184 DOI: 10.21914/anziamj.v47i0.1037.
15. Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial, *Mathematics*, 2018. vol. 6, no. 2, 016 DOI: 10.3390/math6020016.
16. Паровик Р.И. *ABMSelkovFracSim – программный комплекс для качественного и количественного анализа дробной динамической системы Селькова.*, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024681529 РФ., 2024.
17. Shaw Z. A. *Learn Python the Hard Way*: Addison-Wesley Professional, 2024. 306 pp.
18. Van Horn B. M. II, Nguyen Q. *Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool*. Birmingham, UK: Packt Publishing Ltd., 2023.
19. Bao B. et al. Memristor-induced mode transitions and extreme multistability in a map-based neuron model, *Nonlinear Dynamics*, 2023. vol. 111, no. 4, pp. 3765-3779 DOI: 10.1007/s11071-022-07981-8.
20. Colbrook M. J. et al. Beyond expectations: residual dynamic mode decomposition and variance for stochastic dynamical systems, *Nonlinear Dynamics*, 2024. vol. 112, no. 3, pp. 2037-2061 DOI: 10.1007/s11071-023-09135-w.

Информация об авторе



Паровик Роман Иванович  – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

- [1] Selkov E. E. Self-oscillations in glycolysis. I. A simple kinetic model. *Eur. J. Biochem.* 1968. no. 4. pp. 79–86.
- [2] Makovetsky V.I., Dudchenko I.P., Zakupin A.S. Auto oscillation model of microseism's sources. *Geosist. Perekh. Zon.* 2017. no. 4. pp. 37-46.(In Russian).
- [3] Parovik R.I. Studies of the Fractional Selkov Dynamical System for Describing the Self-Oscillatory Regime of Microseisms. *Mathematics.* 2022. vol. 10. no. 22. 4208. DOI: 10.3390/math10224208.
- [4] Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations.* New York. Dover Publications, 2005. 288 p.
- [5] Nakhushiev A. M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its applications].* Moscow. Fizmatlit. 2003. 272 p.(In Russian).
- [6] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam. Elsevier. 2006. 523 p.
- [7] Parovik R. I. Investigation of the Selkov fractional dynamical systems. *Vestnik. KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022. vol. 41. no. 4. pp. 146-166. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-146-166 (In Russian).
- [8] Parovik R. I. Selkov Dynamic System with Variable Heredity for Describing Microseismic Regimes // *Solar-Terrestrial Relations and Physics of Earthquake Precursors: Proceedings of the XIII International Conference, Paratunka, Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2023.* P. 166-178. DOI 10.1007/978-3-031-50248-4_18.
- [9] Parovik R. I. Qualitative analysis of Selkov's fractional dynamical system with variable memory using a modified Test 0-1 algorithm. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, vol. 45. no. 4, pp. 9-23. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-45-4-9-23 (In Russian).
- [10] Gerasimov A. N. Generalization of the laws of linear deformation and their application to problems of internal friction. *Academy of Sciences of the SSR. Applied Mathematics and Mechanics, 1948.* Vol. 44, No. 6, pp. 62-78. (In Russian.).
- [11] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II. *Geophysical Journal International, 1967.* vol. 13, pp. 529-539.
- [12] Patnaik S., Hollkamp J.P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: A review. *Proc. R. Soc. A R. Soc. Publ.* 2020. vol. 476. 20190498. DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
- [13] Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics.* 2002. vol. 29. no.1-4. pp. 3-22. DOI: 10.1023/A:1016592219341.
- [14] Yang C., Liu F. A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system. *ANZIAM Journal.* 2005. vol. 47. pp. 168-184. DOI: 10.21914/anziamj.v47i0.1037.
- [15] Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. *Mathematics.* 2018. vol. 6. no. 2. 016. DOI: 10.3390/math6020016.
- [16] Parovik R.I. ABMSelkovFracSim – software package for qualitative and quantitative analysis of the fractional dynamic system of Selkov. Certificate of state registration of the computer program No. 2024681529 RF. 2024 (in Russian).
- [17] Shaw Z. A. *Learn Python the Hard Way.* Addison-Wesley Professional. 2024. 306 p.

- [18] Van Horn, B. M., II; Nguyen, Q. Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool; Packt Publishing Ltd.: Birmingham, UK, 2023.
- [19] Bao B. et al. Memristor-induced mode transitions and extreme multistability in a map-based neuron model. *Nonlinear Dynamics*. 2023. vol. 111. issue. 4. pp. 3765-3779. DOI: 10.1007/s11071-022-07981-8.
- [20] Colbrook M. J. et al. Beyond expectations: residual dynamic mode decomposition and variance for stochastic dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*. 2024. vol. 112. no. 3. pp. 2037-2061. DOI: 10.1007/s11071-023-09135-w.

Information about the author



Parovik Roman Ivanovich ✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Leading researcher laboratory of modeling physical processes Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia,  ORCID 0000-0002-1576-1860.