Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. №3. C. 20 - 32. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-20-32

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.946

Первая краевая задача для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка

Ж. А. Балкизов*

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, д. 89 А, Россия

Аннотация. В 1978 году в журнале «Дифференциальные уравнения» была опубликована статья А.М. Нахушева, где дана методика правильной постановки краевой задачи для класса уравнений параболо-гиперболического типа второго порядка в произвольной ограниченной области Ω с гладкой или кусочно-гладкой границей Σ. Исследованная в отмеченной работе краевая задача в настоящее время называется первой краевой задачей для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка. В рамках данной работы в смешанной области сформулирована и исследована первая краевая задача для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в том смысле, в котором она сформулирована и исследована А.М. Нахушевым для уравнений второго порядка. В одной части смешанной области рассматриваемое уравнение совпадает с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода второго порядка, а в другой части является неоднородным уравнением третьего порядка с кратными характеристиками параболического типа. Для различных значений параметра λ, входящих в рассматриваемое уравнение, доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения исследуемой задачи. Для доказательства теоремы единственности применяется метод интегралов энергии в совокупности с методом А.М. Нахушева. Для доказательства теоремы существования применяется метод интегральных уравнений. В терминах функции Миттаг-Леффлера решение задачи найдено и выписано в явном виде.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, вырождающееся гиперболическое уравнение первого рода, первая краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа, интегральные уравнения второго рода, задача и метод Трикоми, метод интегральных уравнений.

Получение: 28.10.2024; Исправление: 11.11.2024; Принятие: 13.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 48. № 3. C. 20-32. EDN: RAQLMI. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-20-32.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМА КБНЦ РАН (рег. № 122041800015-8).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: Giraslan@yandex.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-20-32

Research Article

Full text in Russian

MSC 35M12

The First Boundary Value Problem for a Model Equation of Parabolic-Hyperbolic Type of the Third Order

Zh. A. Balkizov*

Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia

Abstract. In 1978, the journal Differential Equations published an article by A. M. Nakhushev, which provided a technique for correctly formulating a boundary value problem for a class of second-order parabolic-hyperbolic equations in an arbitrary bounded domain Ω with a smooth or piecewise smooth boundary Σ. The boundary value problem investigated in the above-mentioned work is currently called the first boundary value problem for a second-order mixed parabolic-hyperbolic equation. Within the framework of this work, the first boundary value problem for a third-order model parabolic-hyperbolic equation in a mixed domain is formulated and investigated in the sense in which it was formulated and investigated by A. M. Nakhushev for second-order equations. In one part of the mixed domain, the equation under consideration coincides with a degenerate hyperbolic equation of the first kind of the second order, and in the other part it is an inhomogeneous third-order equation with multiple characteristics of parabolic type. For various values of the parameter λ included in the equation under consideration, theorems of existence and uniqueness of a regular solution of the problem under study are proved. To prove the uniqueness theorem, the method of energy integrals is used in conjunction with the method of A.M. Nakhushev. To prove the existence theorem, the method of integral equations is used. In terms of the Mittag-Leffler function, the solution to the problem is found and written out in explicit form.

Key words: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, degenerate hyperbolic equation of the first kind, first boundary value problem for an equation of parabolic-hyperbolic type, integral equations of the second kind, Tricomi problem and method, method of integral equations.

Received: 28.10.2024; Revised: 11.11.2024; Accepted: 13.11.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Balkizov Zh. A. The first boundary value problem for a model equation of parabolic-hyperbolic type of the third order. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **48**: 3, 20-32. EDN: RAQLMI. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-20-32

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the IPMA KBSC RAS (reg. No. 122041800015-8).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. Author is solely responsible for providing the final version of the article in print.

***Correspondence:** E-mail: Giraslan@yandex.ru

1. Введение

Краевые задачи для модельных уравнений параболо-гиперболического типа второго порядка впервые были изучены в работах [1], [2]. Классификация уравнений параболо-гиперболического типов на уравнения с характеристической и нехарактеристической линиями изменения типа была проведена в работе [3]. Причем в работе [1] была изучена задача для модельного уравнения параболо-гиперболического типа с характеристической линией изменения типа, а в работе [2] исследована задача для модельного уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. В работе [4] была дана методика правильной постановки краевой задачи для общего уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка в произвольной ограниченной области Ω с гладкой или кусочно-гладкой границей Σ. Исследованная в работе [4] краевая задача в монографии [5, с. 236] была названа первой краевой задачей для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения второго порядка ранее была исследована в работе [6]. Аналог задачи Трикоми для уравнений параболо-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области его гиперболичности исследованы в работах [7], [8]. Наиболее полный обзор работ по краевым задачам для уравнений параболо-гиперболического типа можно найти в монографиях [5], [9], [10].

В данной работе полученные ранее в работе [4] результаты перенесены на модельное уравнение параболо-гиперболического типа третьего порядка. Пользуясь методикой, предложенной в работах [4], [5, с. 236], в работе сформулирована и исследована первая краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка. Доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения задачи. Решение задачи выписано в явном виде.

2. Постановка задачи

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{(m-2)/2}\, u_x, & y < 0, \\ u_{xxx} + u_y - f, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ, m – заданные числа, причем $m > 0$, $|\lambda| \leq \frac{m}{2}$; $f = f(x, y)$ – заданная функция; $u = u(x, y)$ – искомая функция.

При $y < 0$ уравнение (1) совпадает с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода [11, с. 21]

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda\,(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x = 0, \tag{2}$$

а при $y > 0$ уравнение (1) является неоднородным уравнением третьего порядка с кратными характеристиками [12, с. 9] параболического типа [13, с. 72]

$$u_{xxx} + u_y = f(x, y). \tag{3}$$

Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$, где Ω_1 - это область, ограниченная характеристиками $\sigma_1 = AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$ и $\sigma_2 = CB : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$ уравнения (2) при $y < 0$, выходящими из точки $C = (r/2, y_c)$, $y_c = -\left[\frac{(m+2)\,r}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}$, проходящими через точки $A = (0,\,0)$, $B = (r,0)$ и отрезком $J = AB$ прямой $y = 0$; Ω_2 - это область, ограниченная прямоугольником с вершинами $A = (0,0)$, $A_0 = (0,h)$, $B_0 = (r,h)$ и $B = (r,0)$, $h = const > 0$; $J = \{(x,0) : \; 0 < x < r\}$ – интервал AB прямой $y = 0$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_2)$, $u_x(x,0)$, $u_y(x,0) \in L_1(0,r)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\;\; u(r,y) = \varphi_2(y),\;\; u_x(r,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y < h, \tag{4}$$

$$u\left[\theta_r(x)\right] = \psi(x), \qquad 0 \le x \le r, \tag{5}$$

где $\theta_r(x) = \left(\frac{r+x}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2/(m+2)}(r-x)^{2/(m+2)}\right)$ – аффикс точки пересечения характеристики выходящей из точки $(x,0)$ отрезка $J = AB$ и проходящей параллельно характеристике AC с характеристикой BC; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ – заданные на отрезке $0 \le y < h$ функции; $\psi(x)$ – заданная на отрезке $0 \le x \le r$ функция, причем выполнено условие согласования $\psi(r) = \varphi_2(0)$.

3. Теорема единственности

Пусть существует регулярное в области Ω решение $u = u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ и пусть

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{6}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < r. \tag{7}$$

Тогда переходя в уравнении (1) к пределу при $y \to +0$ с учетом обозначений (6), (7) и условий (4) сразу получим первое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_2 области Ω на линию изменения типа J:

$$\tau'''(x) + \nu(x) = f(x,0), \quad 0 < x < r, \tag{8}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0),\;\; \tau(r) = \varphi_2(0),\;\; \tau'(r) = \varphi_3(0). \tag{9}$$

Далее найдем фундаментальные соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из области гиперболичности Ω_1 уравнения (1) на отрезок J прямой $y = 0$. Для этого сначала заметим, что в характеристических координатах $\xi = x - \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}$, $\eta = x + \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}$ уравнение (2) переходит в уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\beta_1}{\eta-\xi}\,\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{\beta_2}{\eta-\xi}\,\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0$$

где $\beta_1 = \frac{m-2\lambda}{2(m+2)}$, $\beta_2 = \frac{m+2\lambda}{2(m+2)}$. Обозначим дополнительно: $\beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{m}{m+2}$.

Пусть вначале $|\lambda| < \frac{m}{2}$ и пусть $\tau(x) \in C[0,r] \cap C^2(0,r)$, $\nu(x) \in C^1(0,r) \cap L_1(0,r)$. Тогда регулярное в области Ω_1 решение задачи (6), (7) для уравнения (2) выписывается по формуле [14, с. 14]:

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}\int\limits_0^1 \tau\left[x + (1-\beta)(-y)^{1/(1-\beta)}(2t-1)\right]\, t^{\beta_2-1}\,(1-t)^{\beta_1-1}dt +$$

$$+\frac{\Gamma(2-\beta)\,y}{\Gamma(1-\beta_1)\Gamma(1-\beta_2)}\int\limits_0^1 \nu\left[x + (1-\beta)(-y)^{1/(1-\beta)}(2t-1)\right]\, t^{-\beta_1}\,(1-t)^{-\beta_2}dt, \qquad (10)$$

где $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty \exp(-t)\,t^{p-1}dt$ – интеграл Эйлера второго рода (Гамма-функция).

Удовлетворяя (10) условию (5), находим:

$$u\left[\theta_r(x)\right] = u\left[\frac{r+x}{2}, -(2-2\beta)^{\beta-1}\,(r-x)^{1-\beta}\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}\int\limits_0^1 \tau\left[x + (r-x)t\right]\, t^{\beta_2-1}\,(1-t)^{\beta_1-1}dt -$$

$$-\frac{(2-2\beta)^{\beta-1}\,(r-x)^{1-\beta}\,\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\beta_1)\Gamma(1-\beta_2)}\int\limits_0^1 \nu\left[x + (r-x)t\right]\, t^{-\beta_1}\,(1-t)^{-\beta_2}dt = \psi(x).$$

Вводя новую переменную интегрирования $z = x + (r-x)t$, последнее равенство перепишется в виде

$$\frac{\Gamma(\beta)\,(r-x)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}\int\limits_x^r \frac{\tau(z)\,(r-z)^{\beta_1-1}}{(z-x)^{1-\beta_2}}\,dz - \frac{(2-2\beta)^{\beta-1}\,\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\beta_1)\Gamma(1-\beta_2)}\int\limits_x^r \frac{\nu(z)\,(r-z)^{-\beta_2}}{(z-x)^{\beta_1}}\,dz = \psi(x). \qquad (11)$$

Воспользуемся далее следующим определением оператора дробного интегро-дифференцирования [13, с. 9]: оператором дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке c и с концом в точке x называется оператор D^α_{cx}, который действует на абсолютно интегрируемую функцию $\varphi(t) \in L\,[a,b]$ по формуле

$$D^\alpha_{cx}\varphi(t) = \frac{sgn(x-c)}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_c^x |x-t|^{-(\alpha+1)}\,\varphi(t)dt, \quad \alpha < 0,$$

$$D^\alpha_{cx}\varphi(t) = sgn^{[\alpha]+1}(x-c)\frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}}\left\{D^{\alpha-[\alpha]-1}_{cx}\varphi(t)\right\}, \quad \alpha > 0,$$

где символ $sgn(z)$ определяет знак числа z; $[\alpha]$ – целая часть числа α, удовлетворяющая неравенству $[\alpha] \le \alpha < [\alpha]+1$. По определению $D^0_{cx}\varphi(t) \equiv \varphi(x)$, а $D^n_{cx}\varphi(t) \equiv \varphi^{(n)}(x)$ при $n \in N$. Подробное исследование свойств оператора D^α_{cx} приведены в монографиях [15], [16].

В терминах оператора D^α_{cx} равенство (11) перепишется в виде

$$\frac{\Gamma(\beta)(r-x)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta_1)} D_{rx}^{-\beta_2}\left\{\tau(t)\,(r-t)^{\beta_1-1}\right\} -$$

$$-\frac{(2-2\beta)^{\beta-1}\,\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\beta_2)} D_{rx}^{\beta_1-1}\left\{\nu(t)\,(r-t)^{-\beta_2}\right\} = \psi(x). \qquad (12)$$

Применяя к обеим частям соотношения (12) оператор $D^{1-\beta_1}_{rx}$, с учетом закона взвешенной композиции операторов дробного (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования и интегрирования с одинаковыми началами [15, с. 18], находим

$$\nu(x) = \gamma_1\, D^{1-\beta}_{rx}\tau(t) - \gamma_2\,(r-x)^{\beta_2}\, D^{1-\beta_1}_{rx}\psi(t), \qquad (13)$$

где $\gamma_1 = \frac{\Gamma(1-\beta_2)\,\Gamma(\beta)\,(2-2\beta)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta_1)\,\Gamma(2-\beta)}$, $\gamma_2 = \frac{\Gamma(1-\beta_2)(2-2\beta)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$.

Так как $\tau(x)$, $\psi(x) \in C\,[0,r]$, а $\tau'(x), \psi'(x) \in L\,[0,r]$, то пользуясь следующим свойством оператора D^α_{rx} порядка $0 < \alpha \le 1$ [16, с. 43]

$$D^\alpha_{rx}\varphi(t) = \frac{\varphi(r)}{\Gamma(1-\alpha)}\,(r-x)^{-\alpha} - D^{\alpha-1}_{rx}\varphi'(t)$$

с учетом условия согласования $\tau(r) = \psi(r)$, соотношение (13) можно переписать и в следующей форме

$$\nu(x) = -\gamma_1\, D^{-\beta}_{rx}\tau'(t) + \gamma_2\,(r-x)^{\beta_2}\, D^{-\beta_1}_{rx}\psi'(t), \qquad (14)$$

Соотношение, выражаемое одной из равенств (13) или (14) и есть основное фундаментальное соотношение между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1 на линию изменения типа J в случае, когда $|\lambda| < \frac{m}{2}$.

Если $\lambda = -\frac{m}{2}$, то коэффициенты $\beta_1 = \beta = \frac{m}{m+2}$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{(2-2\beta)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$ и решение задачи (6), (7) для уравнения (2) выписывается по формуле [14, с. 15]:

$$u(x,y) = \tau\left[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right] +$$

$$+\frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\right](1-t)^{-\beta}dt. \qquad (15)$$

Удовлетворяя представление (15) условию (5), приходим к фундаментальному соотношению между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ следующего вида

$$\nu(x) = \gamma_1\,\left[D^{1-\beta}_{rx}\tau(t) - D^{1-\beta}_{rx}\psi(t)\right]. \qquad (16)$$

Если же $\lambda = \frac{m}{2}$, то $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta = \frac{m}{m+2}$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 2^{1-\beta}(1-\beta)^{-\beta}$. Решение задачи (6), (7) для уравнения (2) в этом случае имеет вид [14, с. 15]:

$$u(x,y) = \tau\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right] +$$

$$+\frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\right](1-t)^{-\beta}dt. \tag{17}$$

Из (17) при условии (5) сразу находим:

$$\nu(x)=2^{1-\beta}(1-\beta)^{-\beta}\,(r-x)^{\beta}\,\psi'(x). \tag{18}$$

Справедлива следующая теорема о единственности регулярного решения **задачи 1**.

Теорема 3.1. *Задача 1 не может иметь более одного регулярного в области Ω решения.*

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 рассмотрим однородную задачу, соответствующую **задаче 1**, то есть будем считать, что $f(x,y)\equiv 0\ \forall\ (x,y)\in\bar{\Omega}_2$, $\psi(x)\equiv 0\ \forall x\in[0,r]$ и $\varphi_1(y)=\varphi_2(y)=\varphi_3(y)\equiv 0\ \forall y\in[0,h]$. При этом, с учетом того, что $\tau(r)=\varphi_2(0)=\psi(r)=0$ из соотношений (13), (14), (16), (18) для различных значений λ получаем соответствующие равенства

$$\nu(x)=\gamma_1\,D_{rx}^{1-\beta}\tau(t)=\gamma_1\,D_{rx}^{-\beta}\tau'(t),\quad -\frac{m}{2}\le\lambda<\frac{m}{2}; \tag{19}$$

$$\nu(x)\equiv 0,\quad \lambda=\frac{m}{2}. \tag{20}$$

Предварительно докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. *Для любой абсолютно непрерывной на сегменте $[0,r]$ функции $\varphi=\varphi(x)$, удовлетворяющей условию $\varphi(r)=0$, имеет место неравенство:*

$$\varphi(x)\,D_{rx}^{\alpha}\varphi(t)\ge\frac{1}{2}\,D_{rx}^{\alpha}\varphi^2(t),\qquad 0<\alpha\le 1. \tag{21}$$

Действительно, если $\varphi(r)=0$, то по определению имеем

$$D_{rx}^{\alpha}\varphi(t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r\frac{\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt.$$

Аналогично,

$$D_{rx}^{\alpha}\varphi^2(t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r\frac{2\varphi(t)\,\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt.$$

Пользуясь приведенными равенствами, находим

$$\varphi(x)D_{rx}^{\alpha}\varphi(t)-\frac{1}{2}D_{rx}^{\alpha}\varphi^2(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r\frac{\varphi'(t)\ [\varphi(t)-\varphi(x)]}{(t-x)^{\alpha}}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r\frac{\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}}\left(\int\limits_x^t\varphi'(s)ds\right)dt=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^r\left(\int\limits_x^t\frac{\varphi'(s)\,\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}}ds\right)dt=$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_x^r \left(\int\limits_s^r \frac{\varphi'(s)\,\varphi'(t)}{(t-x)^\alpha} dt \right) ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_x^r (s-x)^\alpha \frac{\varphi'(s)}{(s-x)^\alpha} \left(\int\limits_s^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^\alpha} dt \right) ds =$$

$$= -\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_x^r (s-x)^\alpha \frac{d}{ds} \left[\left(\int\limits_s^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^\alpha} dt \right)^2 \right] ds =$$

$$= \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_x^r (s-x)^{\alpha-1} \left(\int\limits_s^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^\alpha} dt \right)^2 ds \geq 0,$$

откуда и вытекает неравенство (21). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь интеграл вида

$$I = \int\limits_0^r \tau(x)\,\nu(x)\,dx. \tag{22}$$

При $-\frac{m}{2} \leq \lambda < \frac{m}{2}$ из (19) и (22) с учетом (21) приходим к неравенству

$$I = \int\limits_0^r \tau(x)\,\nu(x)\,dx = \gamma_1 \int\limits_0^r \tau(x)\,D_{rx}^{1-\beta}\tau(t)\,dx \geq$$

$$\geq \frac{\gamma_1}{2} \int\limits_0^r D_{rx}^{1-\beta}\tau^2(t)\,dx = \frac{\gamma_1}{2\Gamma(\beta)} \int\limits_0^r x^{\beta-1}\,\tau^2(x)\,dx \geq 0. \tag{23}$$

С другой стороны, для соответствующей **задаче 1** однородной задачи интеграл (22) с учетом (8) и (9) примет вид:

$$I = \int\limits_0^r \tau(x)\,\nu(x)\,dx = -\int\limits_0^r \tau(x)\,\tau'''(x)\,dx = -\frac{1}{2}\,[\tau'(0)]^2 \leq 0. \tag{24}$$

Из неравенств (23) и (24) следует равенство $I = 0$, которое, как следует из (23), может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x) \equiv 0 \ \forall\, x \in [0, r]$. При этом из соотношений (8) и (19) находим, что и $\nu(x) \equiv 0$ для всех $x \in [0, r]$ и любых $\lambda \in \left[-\frac{m}{2}; \frac{m}{2}\right)$.

Если же $\lambda = \frac{m}{2}$, то из (8), (9) и (20) приходим к однородной задаче

$$\tau(0) = 0, \;\; \tau(r) = 0, \;\; \tau'(r) = 0 \tag{25}$$

для уравнения

$$\tau'''(x) = 0, \quad 0 < x < r. \tag{26}$$

Решение задачи (25) для уравнения (26), как и в случае $\lambda \in \left[-\frac{m}{2}; \frac{m}{2}\right)$, не может отличаться от тривиального: $\tau(x) \equiv 0$ и $\nu(x) \equiv 0$ для всех $x \in [0, r]$.

Тогда, как следует из формул (10), (15), (17), в области Ω_1 решение $u(x,y) \equiv 0$ как решение однородной задачи Коши (6), (7) для уравнения (2). А в области Ω_2 однородная задача

$$u_{xxx} + u_y = 0, \quad \forall\ (x,y) \in \Omega_2,$$

$$u(0,y) = 0, \;\; u(r,y) = 0, \;\; u_x(r,y) = 0, \quad 0 \le y < h,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le r$$

будет обладать только нулевым решением $u(x,y) \equiv 0 \ \forall\ (x,y) \in \bar{\Omega}_2$ [12, с. 144]. Таким образом, $u(x,y) \equiv 0 \ \forall\ (x,y) \in \bar{\Omega}$. □

4. Теорема существования

Перейдем к исследованию вопроса о существовании регулярного решения **задачи 1**. Здесь справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть заданные функции* $f(x,y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, $\psi(x)$ *таковы, что они обладают свойствами*

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \varphi_3(y)\ \in C\,[0,h]\,;\ \psi(x) \in C\,[0,r] \cap C^2(0,r);\ \ f(x,y) \in C(\bar{\Omega}_2). \qquad (27)$$

Тогда существует регулярное в области Ω решение **задачи 1**.

Доказательство. Действительно, из полученных выше фундаментальных соотношений (8), (13) и (16), относительно искомых функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ при $\lambda \in \left[-\frac{m}{2};\, \frac{m}{2}\right)$ приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \tau'''(x) + \nu(x) = f(x,0), \\ \nu(x) = \gamma_1\, D_{rx}^{1-\beta}\tau(t) - \gamma_2\,(r-x)^{\beta_2}\, D_{rx}^{1-\beta_1}\psi(t), \end{cases} \qquad (28)$$

откуда относительно искомой функции $\tau(x)$ приходим к задаче нахождения регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с дробной производной в младших членах вида

$$\tau'''(x) + \gamma_1\, D_{rx}^{1-\beta}\tau(t) = f(x,0) + \gamma_2\,(r-x)^{\beta_2}\, D_{rx}^{1-\beta_1}\psi(t), \qquad 0 < x < r, \qquad (29)$$

удовлетворяющего условиям (9).

Путем применения оператора D_{rx}^{-3} к обеим частям последнего уравнения, решение уравнения (29) эквивалентным образом редуцируется к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода вида

$$\tau(x) = \frac{\gamma_1}{\Gamma(\beta+2)} \int\limits_x^r (t-x)^{\beta+1}\, \tau(t)\, dt + c_1\,(r-x)^2 + c_2(r-x) + c_3 - \frac{1}{2} \int\limits_x^r (t-x)^2\, F(t)\, dt, \quad (30)$$

где $F(x) = f(x,0) + \gamma_2\, x^{\beta_1}\, D_{0x}^{1-\beta_2}\psi(t)$, а c_1, c_2, c_3 – пока произвольные постоянные.

Функция

$$R(x,t;\,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_1^n (t-x)^{n\beta+2n-1}}{\Gamma(n\beta+2n)} = (t-x)^{\beta+1} E_{\frac{1}{\beta+2}}\left[\gamma_1\,(t-x)^{(\beta+2)};\, \beta+2\right],$$

где $E_\rho(z;\mu) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho^{-1}m+\mu)}$ – функция Миттаг-Леффлера [17, с. 117], является резольвентой ядра $K(x,t;\beta) = \frac{(t-x)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)}$ уравнения (30) и с помощью функции $R(x,t;\beta)$ решение уравнения (30) выписывается в следующем виде

$$\tau(x) = c_1\,(r-x)^2 + c_2(r-x) + c_3 - \frac{1}{2}\int\limits_x^r (t-x)^2\,F(t)\,dt+$$

$$+c_1\,\gamma_1\int\limits_x^r (r-t)^2 R(x,t;\beta)dt + c_2\gamma_1\int\limits_x^r (r-t)R(x,t;\beta)dt + c_3\gamma_1\int\limits_x^r R(x,t;\beta)dt-$$

$$-\frac{\gamma_1}{2}\int\limits_x^r R(x,t;\beta)\int\limits_t^r (s-t)^2\,F(s)\,ds\,dt. \qquad (31)$$

Непосредственным вычислением находим, что

$$\int\limits_x^r R(x,t;\beta)\,dt = (r-x)^{\beta+2}E_{\frac{1}{\beta+2}}\left[\gamma_1\,(r-x)^{(\beta+2)};\,\beta+3\right],$$

$$\int\limits_x^r (r-t)R(x,t;\beta)\,dt = (r-x)^{\beta+3}E_{\frac{1}{\beta+2}}\left[\gamma_1\,(r-x)^{(\beta+2)};\,\beta+4\right],$$

$$\int\limits_x^r (r-t)^2 R(x,t;\beta)\,dt = 2\,(r-x)^{\beta+4}E_{\frac{1}{\beta+2}}\left[\gamma_1\,(r-x)^{(\beta+2)};\,\beta+5\right],$$

$$\int\limits_x^r R(x,t;\beta)\int\limits_t^r (s-t)^2\,F(s)\,ds\,dt = 2\int\limits_x^r (t-x)^{\beta+4}E_{\frac{1}{\beta+2}}\left[\gamma_1\,(t-x)^{(\beta+2)};\,\beta+5\right]\,F(t)\,dt.$$

С учетом приведенных выше вычислений равенство (31) перепишется в следующей форме

$$\tau(x) = \left\{(r-x)^2 + 2\,\gamma_1(r-x)^{\beta+4}E_{\frac{1}{\beta+2}}\left[\gamma_1\,(r-x)^{(\beta+2)};\,\beta+5\right]\right\}c_1+$$

$$+\left\{(r-x) + \gamma_1\,(r-x)^{\beta+3}E_{\frac{1}{\beta+2}}\left[\gamma_1\,(r-x)^{(\beta+2)};\,\beta+4\right]\right\}c_2+$$

$$+\left\{1 + \gamma_1\,(r-x)^{\beta+2}E_{\frac{1}{\beta+2}}\left[\gamma_1\,(r-x)^{(\beta+2)};\,\beta+3\right]\right\}c_3-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_x^r \left\{(t-x)^2 + 2\gamma_1\,(t-x)^{\beta+4}E_{\frac{1}{\beta+2}}\left[\gamma_1\,(t-x)^{(\beta+2)};\,\beta+5\right]\right\}\,F(t)\,dt. \qquad (32)$$

Удовлетворяя (32) условиям (9), находим:

$$c_2 = -\varphi_3(0),\;\; c_3 = \varphi_2(0),$$

$$c_1 = \frac{1}{\delta}\,\left\{\varphi_1(0) + \gamma_1\,\left[1 + r^{\beta+2}E_{\frac{1}{\beta+2}}(\gamma_1\,r^{(\beta+2)};\,\beta+3)\right]\varphi_2(0)-\right.$$

$$-\left[r+\gamma_1 r^{\beta+3}E_{\frac{1}{\beta+2}}(\gamma_1 r^{(\beta+2)};\,\beta+4)\right]\varphi_3(0)-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_0^r\left[t^2+2\gamma_1 t^{\beta+4}E_{\frac{1}{\beta+2}}(\gamma_1 t^{(\beta+2)};\,\beta+5)\right]F(t)\,dt\right\},$$

где $\delta=\frac{r^2}{2}+\gamma_1 r^{\beta+4}E_{\frac{1}{\beta+2}}(\gamma_1 r^{(\beta+2)};\,\beta+5)>0$.

Таким образом единственное решение задачи (29), (9) при $\lambda\in\left[-\frac{m}{2};\,\frac{m}{2}\right)$ дается по формуле (32), где значения постоянных c_1, c_2, c_3 определяются по приведенным выше формулам.

При $\lambda=\frac{m}{2}$ из соотношений (8) и (18) с учетом условий (9) находим

$$\tau(x)=\frac{(r-x)^2}{r^2}\,\varphi_1(0)+\left[1-\frac{(r-x)^2}{r^2}\right]\varphi_2(0)+\frac{x^2-rx}{r}\,\varphi_3(0)-\frac{1}{2}\int\limits_x^r(t-x)^2 f(t,0)\,dt+$$

$$+\frac{(r-x)^2}{2\,r^2}\int\limits_0^r t^2 f(t,0)\,dt+\frac{(r-x)^2}{2^\beta\,r^2\,(1-\beta)^{(1+\beta)}}\int\limits_0^r\left[t^2+2(1-\beta)\,t\right](r-t)^\beta\,\psi(t)\,dt-$$

$$-2^{-\beta}\,(1-\beta)^{-(1+\beta)}\int\limits_x^r\left[(t-x)^2+2(1-\beta)\,(t-x)\right](r-t)^\beta\,\psi(t)\,dt.$$

После того, как функция $\tau=\tau(x)$ найдена, вторую искомую функцию $\nu=\nu(x)$, в зависимости от значения λ, можно найти из соотношений (8), (13) или (18). Тогда регулярное решение **задачи 1** в области Ω_1 определяется как решение задачи Коши (6), (7) для уравнения (2) и выписывается по одной из формул (10), (15) или (17), а в области Ω_2 приходим к начально-краевой задаче (4), (6) для уравнения (2), решение которого выписывается аналогично результатам работы [12, с. 132, 159]. При этом указанный в формуле (27) класс заданных функций $f(x,y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, $\psi(x)$ обеспечивают регулярность полученного решения в области Ω. □

Заключение

Сформулирована первая краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в том смысле, в котором она была сформулирована и исследована Адамом Маремовичем Нахушевым для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка. Доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения задачи.

Список литературы

1. Стручина Г. М. Задача о сопряжении двух уравнений, *Инженерно-физический журнал*, 1961. Т. 4, № 11, С. 99-104.
2. Золина Л. А. О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1966. Т. 6, № 6, С. 991-1001.
3. Сабитов К. Б. К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром, *Диффееренц. уравнения*, 1989. Т. 25, № 1, С. 117-126.
4. Нахушев А. М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа, *Диффееренц. уравнения*, 1978. Т. 14, № 1, С. 66-73.
5. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука, 2006. 287 с.
6. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения, *Владикавказский Математический журнал*, 2016. Т. 18, № 2, С. 19-30.
7. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области гиперболичности, *Уфимский Математический журнал*, 2017. Т. 9, № 2, С. 25-39.
8. Balkizov Zh. A. The first boundary value problem with deviation from the characteristics for a second order parabolic-hyperbolic equation, *Bulletin of the Karaganda University*, 2018. № 2 (90), С. 34-42.
9. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа*. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
10. Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа*. М.: Наука, 2016. 272 с.
11. Смирнов М. М. *Уравнения смешанного типа*. М.: Наука, 1970. 296 с.
12. Джураев Т. Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*. Ташкент: Фан, 1979. 238 с.
13. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
14. Смирнов М. М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения*. Минск: Вышэйшая школа, 1977. 160 с.
15. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
16. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
17. Джрбашян М. М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости*. М.: Наука, 1966. 672 с.

Информация об авторе

Балкизов Жираслан Анатольевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела уравнений смешанного типа, Института прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия, ORCID 0000-0001-5329-7766.

References

[1] Struchina G. M. Zadacha o sopryazhenii dvukh uravnenij. Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 1961. vol. 4. no. 11. pp. 99-104 (in Russan)

[2] Zolina L. A. Boundary value problem for the model equation of the hyperbolic-parabolic type. U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1966. vol. 6. no. 6, pp. 63–78.

[3] Sabitov K. B. On the theory of equations of mixed parabolic-hyperbolic type with a spectral parameter. Differ. Equ. 1989. vol. 25. no. 1. pp. 93–100.

[4] Nakhushev A. M. On the theory of linear boundary value problems for a second order equation of mixed hyperbolic-parabolic type. Dif. Ur. 1978. vol. 14. no. 1. 66–73 (in Russian)

[5] Nakhushev A. M. Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij v chastnykh proizvodnykh [Shift problems for partial differential equations]. Moscow. Nauka. 2006, 287 p. (in Russian)

[6] Balkizov Zh. A. The first boundary value problem for a hyperbolic equation degenerating inside a domain. Vladikav. Matemat. Zhurnal. 2016. vol. 18. no. 2. pp. 19-30. DOI: 10.23671/VNC.2016.2.5915 (in Russian)

[7] Balkizov Zh. A. Dirichlet boundary value problem for a third order parabolic-hyperbolic equation with degenerating type and order in the hyperbolicity domain. Ufa Math. J. 2017. vol. 9. no. 2. pp. 25–39. DOI:10.13108/2017-9-2-25.

[8] Balkizov Zh. A. The first boundary value problem with deviation from the characteristics for a second order parabolic-hyperbolic equation. Bulletin of the Karaganda University. 2018. no. 2(90). pp. 34-42. DOI: 10.31489/2018m2/34-42.

[9] Dzhuraev T. D., Sopuev A., Mamazhanov M. Kraevye zadachi dlya uravnenij parabolo-giperbolicheskogo tipa [Boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations]. Tashkent. Fan. 1986. 220 p. (in Russian)

[10] Sabitov K. B. Pryamye i obratnye zadachi dlya uravnenij smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo tipa [Direct and inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type]. Moscow. Nauka. 2016. 272 p. (in Russian)

[11] Smirnov M. M. Uravneniya smeshannogo tipa [Mixed type equations]. Moscow. Nauka. 1970. 296 p. (in Russian)

[12] Djuraev T. D. Kraevye zadachi dlya uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov [Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types]. Tashkent. Fan. 1979. 238 p. (in Russian)

[13] Nakhushev A. M. Uravneniya matematicheskoj biologii [Equations of Mathematical Biology]. Moscow. Visshaya shkola. 1995. 301 p. (in Russian)

[14] Smirnov M. M. Vyrozhdayushchiesya giperbolicheskie uravneniya [Degenerate hyperbolic equations]. Minsk. Visheishaya shkola. 1977. 160 p. (in Russian)

[15] Nakhushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its applications]. Moscow. Fizmatlit. 2003. 272 p. (in Russian)

[16] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk. Nauka i tekhnika. 1987. 688 p. (in Russian)

[17] Djrbashyan M. M. Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funkcij v kompleksnoj ploskosti [Integral transforms and representations of functions in the complex plane]. Moscow. Nauka. 1966. 672 p. (in Russian)

Information about the author

Balkizov Zhiraslan Anatolevich – Ph. D. (Phys. & Math.), Leading Researcher, Dep. of Mixed Type Equations, Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0001-5329-7766.