Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 47. №2. C. 21 - 34. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-47-2-21-34

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.925.5

Математическая модель дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри

А. И. Салимова[1], *Р. И. Паровик**[1,2]

[1] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 4, Узбекистан

[2] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7, Россия

Аннотация. В работе предложена математическая модель нелинейного осциллятора Ван дер Поля-Эйри с учетом наследственности. Нелинейность осциллятора обусловлена наличием зависимости коэффициента трения от квадрата функции смещения, что характерно для осциллятора Ван дер Поля. Также собственная частота колебаний представляет собой функцию от времени, которая линейно возрастает при его возрастании. Последнее характерно для осциллятора Эйри. Эффекты наследственности вводятся в модельное уравнение посредством дробных производных в смысле Герасимова-Капуто. Они указывают на то, что колебательная система может обладать эффектами памяти, которые проявляются в зависимости текущего ее состояния от предыдущих. Для предложенной математической модели был разработан численный алгоритм, основанный на явной конечно-разностной схемы первого порядка. Численный алгоритм был реализован в компьютерной программе на языке Maple, с помощью которой была произведена визуализация результатов моделирования. Были построены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров модели. Показано, что дробная математическая модель может обладать различными колебательными режимами: от автоколебательных, затухающих и хаотических. Дается интерпретация результатов моделирования.

Ключевые слова: математическая модель, дробная производная Герасимова-Капуто, осциллограмма, фазовая траектория, предельный цикл, численный алгоритм

Получение: 29.03.2024; Исправление: 15.05.2024; Принятие: 06.06.2024; Публикация онлайн: 25.08.2024

Для цитирования. Салимова А. И., Паровик Р. И. Математическая модель дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 47. № 2. C. 21-34. EDN: QMOAXO. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-47-2-21-34.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. №124012300245-2)

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: parovik@ikir.ru

MATHEMATICAL MODELING

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-47-2-21-34

Research Article

Full text in Russian

MSC 26A33, 34A08

Mathematical Model of Van der Pol-Airy Fractional Oscillator

***A. I. Salimova*[1], *R. I. Parovik**[*1,2]**

[1] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, Tashkent, Universitetskaya str., 4, Uzbekistan

[2] Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 684034, Paratunka, Mirnaya str., 7, Russia

Abstract. The paper proposes a mathematical model of the nonlinear Van der Pol-Airy oscillator taking into account heredity. The nonlinearity of the oscillator is due to the dependence of the friction coefficient on the square of the displacement function, which is typical for the Van der Pol oscillator. Also, the natural frequency of oscillations is a function of time, which increases linearly as it increases. The latter is typical for the Airy oscillator. Heredity effects are introduced into the model equation through fractional derivatives in the Gerasimov-Caputo sense. They indicate that the oscillatory system may have memory effects that manifest themselves depending on its current state from previous ones. For the proposed mathematical model, a numerical algorithm was developed based on an explicit first-order finite-difference scheme. The numerical algorithm was implemented in a computer program in the Maple language, with the help of which the simulation results were visualized. Oscillograms and phase trajectories were constructed for various values of the model parameters. It is shown that a fractional mathematical model can have various oscillatory modes: from self-oscillatory, damped and chaotic. An interpretation of the simulation results is given.

Key words: mathematical model, Gerasimov-Caputo fractional derivative, oscillogram, phase trajectory, limit cycle, numerical algorithm.

Received: 29.03.2024; Revised: 15.05.2024; Accepted: 06.06.2024; First online: 25.08.2024

For citation. Salimova A. I., Parovik R. I. Mathematical model of Van der Pol-Airy fractional oscillator. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **47**: 2, 21-34. EDN: QMOAXO. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-47-2-21-34.

Funding. Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (registration No. 124012300245-2)

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

[*]**Correspondence:** E-mail: parovik@ikir.ru

Введение

Разработка математических моделей дробных колебательных систем (осцилляторов) является актуальной задачей в связи с широким спектром приложений: от физических [1] до экономических [2]. Это связано с тем, что колебания могут возникать в различных системах, в том числе обладающих наследственностью, и могут иметь важные свойства, которые необходимо изучать для установления закономерностей между различными параметрами, рассматриваемой системы. Дробные осцилляторы исследуются в рамках теории дробной динамики [3], а инструментом исследования дробных осцилляторов, как правило, является аппарат математического моделирования с привлечение дробного исчисления [4].

В настоящей статье была исследована нелинейная колебательная система Ван дер Поля-Эйри с эффектами наследственности. Особенностью этой колебательной системы заключается в наличии в модельном уравнении нелинейного трения, характерного для релаксационных колебаний осциллятора Ван дер Поля [5], линейной зависимости частоты собственных колебаний от времени, характерной для колебаний с плохо затухающей амплитудой в осцилляторе Эйри [6], а также в учете эффектов наследственности, которые характерны для вязкоупругих и пластичных сред [7]. Такие эффекты можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений или производных дробных порядков [4, 8, 9].

В работе с помощью явной конечно-разностной схемы первого порядка точности в рамках теории конечно-разностных схем строится численное решение. Разработана компьютерная программа в среде Maple, которая реализует численный алгоритм. С помощью, разработанной компьютерной программы были получены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров модели. Дана интерпретация результатов моделирования. Показано, что дробный осциллятор Ван дер Поля-Эйри обладает богатой динамикой, которая заслуживает дальнейшего изучения.

Постановка задачи и методика решения

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) + \lambda \left(a x^2(t) - b\right) \partial_{0t}^{\beta} x(t) + t x(t) = 0, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \tag{1}$$

где $x(t) \in C^2[0,T]$ — функция смещения; $t \in [0,T]$ — текущее время процесса; $T > 0$ - время моделирования; λ- коэффициент трения, a, b - константы, x_0, y_0 — константы, которые определяют начальные условия.

Операторы дробного дифференцирования в уравнении (1) понимаются в смысле Герасимова-Капуто порядков$1 < \alpha < 2$ и $0 < \beta < 1$ [10, 11]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \partial_{0t}^{\beta} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\beta}}, \tag{2}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Замечание 1. Если в модельном уравнении (1) положить $a = 0, b = -1$, то мы получаем уравнение дробного осциллятора Эйри, которое было рассмотрено в статьях [12–14].

Определение. Задачу Коши (1) будем называть дробным осциллятором Ван дер Поля-Эйри.

Замечание. Дробный осциллятор Ван дер Поля-Эйри содержит не только особенности осцилляторов Ван дер Поля и Эйри, а также дробные производные (2), которые характеризуют эффекты наследственности и при значении порядков $\alpha = 2, \beta = 1$ переходят целочисленные.

Укажем некоторые особенности, рассматриваемого осциллятора (1). Наличие нелинейного трения, характерного для осциллятора Ван дер Поля приводит к релаксационным колебаниям или автоколебаниям, которые на фазовой плоскости соответствуют предельным циклам. Релаксационные колебания Ван дер Поля находят свое приложение в физике, биологии и других науках [15]. Осциллятор Эйри обладает следующими особенностями: при отрицательных временах существует апериодический режим и происходит экспоненциальное затухание, а при положительных – наблюдаются колебания с плохо затухающей амплитудой подобно бесселевым функциям. Так как время в задаче Коши (1) положительно, то апериодических режимы будут отсутствовать. Осциллятор Эйри применяется в оптике [6], например, вблизи монохроматических каустик наблюдаются интерференционные полосы, интенсивность, которых описывается функциями Эйри, в лазерной оптике известны также пучки Эйри [16]. Дробный осциллятор Ван дер Поля и дробный осциллятор Эйри рассматривались независимо друг от друга в статьях [12–14, 17] соответственно. Было показано, что в основном при наличии дробной инерции, первый член в задаче Коши (1), происходит затухание колебаний, т.е. дробная инерция играет роль диссипативного члена как составляющей трения. Отметим, что в работах [18–21] было показано, что порядок дробной производной в инерциальном члене, а также и в диссипативном связан с качественной характеристикой колебательной системы – добротностью.

В целом комбинация трех составляющих, которые учтены в модели (1) дают новизну работы. В настоящей статье нас будет интересовать вопрос о существовании релаксационных колебаний, а также какие еще режимы могут существовать в такой системе. Для этих целей в силу нелинейности задачи Коши (1) необходимо воспользоваться численными методами.

Введем равномерную сетку, для этого разобьём временной интервал на N равных частей с шагом $\tau = T/N$. Пусть функция решения задачи Коши (1) обладает нужной гладкостью. Тогда мы можем ввести сеточную функцию $x(t_k) = x_k, t_k = k\tau, k = 1, ..., N-1$, которая аппроксимирует искомую функцию $x(t)$. Отметим, что аппроксимация производных порядков дается следующими формулами [22, 23]:

$$\partial_{0t}^{\alpha}x(t) \approx A\sum_{j=0}^{k-1}\omega_j^{\alpha}\left(x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}\right), \partial_{0t}^{\beta}x(t) \approx B\sum_{j=0}^{k-1}\omega_j^{\beta}\left(x_{k-j+1} - x_{k-j}\right), \quad (3)$$

где $A = \dfrac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, B = \dfrac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}, \omega_j^{\alpha} = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}, \omega_j^{\beta} = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}$.

С учетом аппроксимаций (3) дифференциальную задачу Коши (1) мы можем записать в дискретной подстановке:

$$\begin{cases} x_0 = c_1, \\ x_1 = c_1 + \tau c_2, y_0 = c_2, \\ x_{k+1} = \dfrac{2A + \lambda\left(ax_k^2 - b\right)B - \tau k}{A + \lambda\left(ax_k^2 - b\right)B} x_k - \dfrac{A}{A + \lambda\left(ax_k^2 - b\right)B} x_{k-1} - \\ - \dfrac{A \sum\limits_{j=1}^{k-1} \omega_j^{\alpha}\left(x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}\right)}{A + \lambda\left(ax_k^2 - b\right)B} - \dfrac{\lambda\left(ax_k^2 - b\right)B \sum\limits_{j=1}^{k-1} \omega_j^{\beta}\left(x_{k-j+1} - x_{k-j}\right)}{A + \lambda\left(ax_k^2 - b\right)B}, \\ k = 2, ..., N-1. \end{cases} \tag{4}$$

Задача (4) представляет собой нелокальную явную конечно-разностную схему. Можно показать, что схема (4) условно устойчива и сходится с первым порядком. Покажем с помощью вычислительной точности, полученной по правилу Рунге, что при увеличении узлов расчетной сетки N вычислительная точность стремиться к теоретической, т.е. к единице. Вычислительная точность p определяется по формуле:

$$p = \log_2\left(\xi_j / \xi_{j+1}\right), \tag{5}$$

где $\xi = \max\limits_i |x_i - x_{2i}|$ — ошибка, x_i — численное решение вычисленное на шаге τ, x_2 — численное решение вычисленное на шаге $\tau/2$, j — индекс, число итераций.

Пример 1. Классический осциллятор Ван дер Поля-Эйри ($\alpha = 2, \beta = 1$). Значения параметров модели (1): $\lambda = 0.15, a = b = 1, x_0 = 0.2, y_0 = 0.3, T = 1$.

Результаты вычисления вычислительной точности схемы (4) по формуле (5) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Классический осциллятор Ван дер Поля-Эйри
[Van der Pol-Airy classical oscillator]

N	τ	ξ	p
10	1/10	0.0006974210	—
20	1/20	0.0004640763	0.5876677840
40	1/40	0.0002628898	0.8199038548
80	1/80	0.0001392983	0.9162805155
160	1/160	0.0000712656	0.9668998922

Из табл. 1 видно, что для Примера 1 при увеличении узлов расчетной сетки N вычислительная точность стремиться к единице.

Пример 2. Дробный осциллятор Ван дер Пол-Эйри ($\alpha = 1.9, \beta = 0.8$). Остальные значения параметров возьмем из предыдущего примера.

Из табл. 2 мы также видим, что при увеличении узлов расчетной сетки вычислительная точность стремиться к единице.

Таблица 2

Дробный осциллятор Ван дер Поля-Эйри
[Van der Pol-Airy fractional oscillator]

N	τ	ξ	p
10	1/10	0.0003115359	—
20	1/20	0.0002240659	0.4754753168
40	1/40	0.0001633936	0.4555716297
80	1/80	0.0001101243	0.5692186263
160	1/160	0.0000733393	0.5864744480
320	1/320	0.0000379055	0.9521793008

Результаты исследования

Рассмотрим некоторые примеры применения нелокальной явной конечно-разностной схемы (4), которая была реализована в компьютерной программе на языке Maple.

Пример 3. Классический осциллятор Ван дер Поля-Эйри ($\alpha = 2, \beta = 1$). Значения остальных параметров модели (1): $\lambda = 0.15, a = 10, b = 20, t \in [0, 100]$, $N = 2500$.

Результаты моделирования по нелокальной явной конечно-разностной схеме (4)приведена на рис. 1 при различных значениях начальных условия: $(4, 0)$ и $(0.1, 0.1)$.

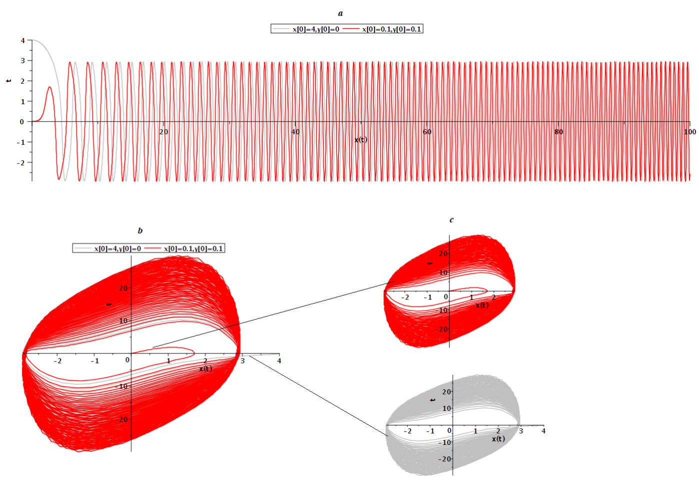

Рис. 1. Осциллограммы a) и фазовые траектории b) для классического осциллятора Ван дер Поля-Эйлера, построенные при различных начальных условиях: $(4, 0)$ — серая кривая и $(0.1, 0.1)$ — красная кривая; c) более детальное построение фазовых траекторий.

Figure 1. Oscillograms a) and phase trajectories b) for the classical Van der Pol-Airy oscillator, plotted under different initial conditions: $(4, 0)$ — gray curve and $(0.1, 0.1)$ — red curve; c) more detailed construction of phase trajectories.

Из рис. 1 мы видим, что в классическом случае для Примера 1 наблюдаются релаксационные колебания, на фазовая траектория выходит на предельный цикл, который является устойчивым аттрактором.

Определение 2. Предельный цикл называется устойчивым, если все фазовые траектории, начинающиеся в некоторой окрестности, асимптотически приближаются к предельному циклу при $t \to \infty$.

Определение 3. Предельные циклы, у которых близкие фазовые траектории неограниченно к ним приближаются называются аттракторами. Предельные циклы, у которых близкие фазовые траектории от них отталкиваются называются репеллерами.

Рассмотрим другой пример, когда $a = 0.1, b = 1$ и значения начальных условий $(8, 0)$ и $(0.1, 0.1)$, а остальные значения параметров оставим без изменения. Результаты моделирования приведены на рис. 2.

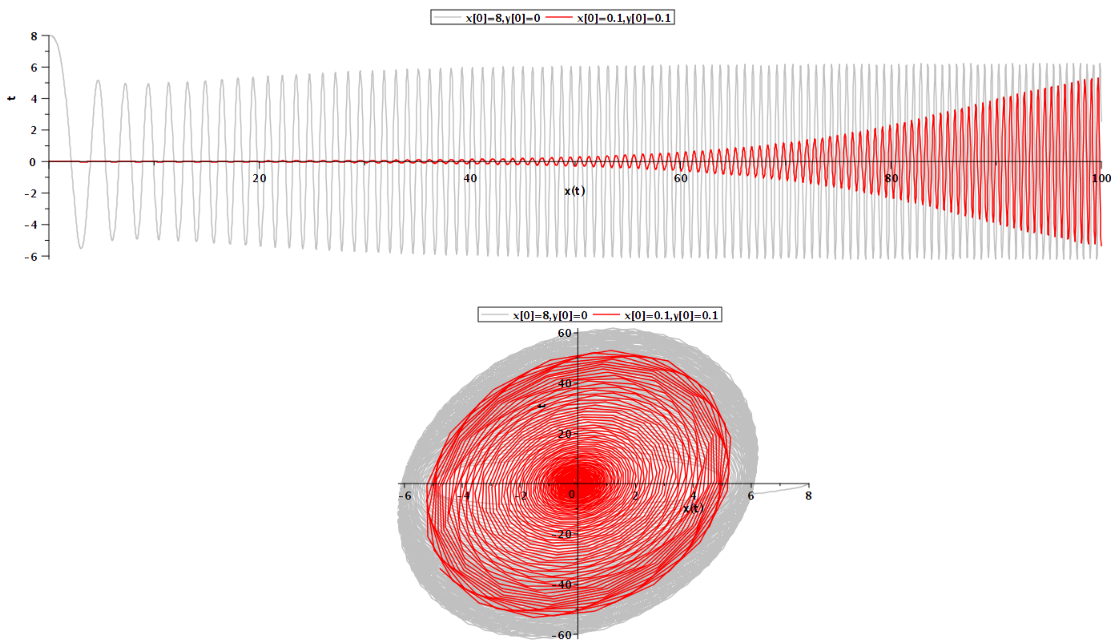

Рис. 2. Осциллограммы a) и фазовые траектории b) для классического осциллятора Ван дер Поля-Эйлера, построенные при $a = 0.1, b = 1$ и различных начальных условиях: $(8, 0)$ — серая кривая и $(0.1, 0.1)$ — красная кривая; c) более детальное построение фазовых траекторий.

Figure 2. Oscillograms a) and phase trajectories b) for the classical van der Pol-Euler oscillator, plotted for $a = 0.1, b = 1$ and different initial conditions: $(8, 0)$ — gray curve and $(0.1, 0.1)$ — red curve; c) more detailed construction of phase trajectories.

Здесь мы видим, что предельные циклы при различных значениях являются различными, что говорит о неустойчивости предельного цикла.

На рис.2a может сложится впечатление, что при более больших временах все-таки предельный цикл станет устойчивым. Однако это не так, увеличим время моделирования $T = 200$, остальные значения оставим без изменения (рис. 3).

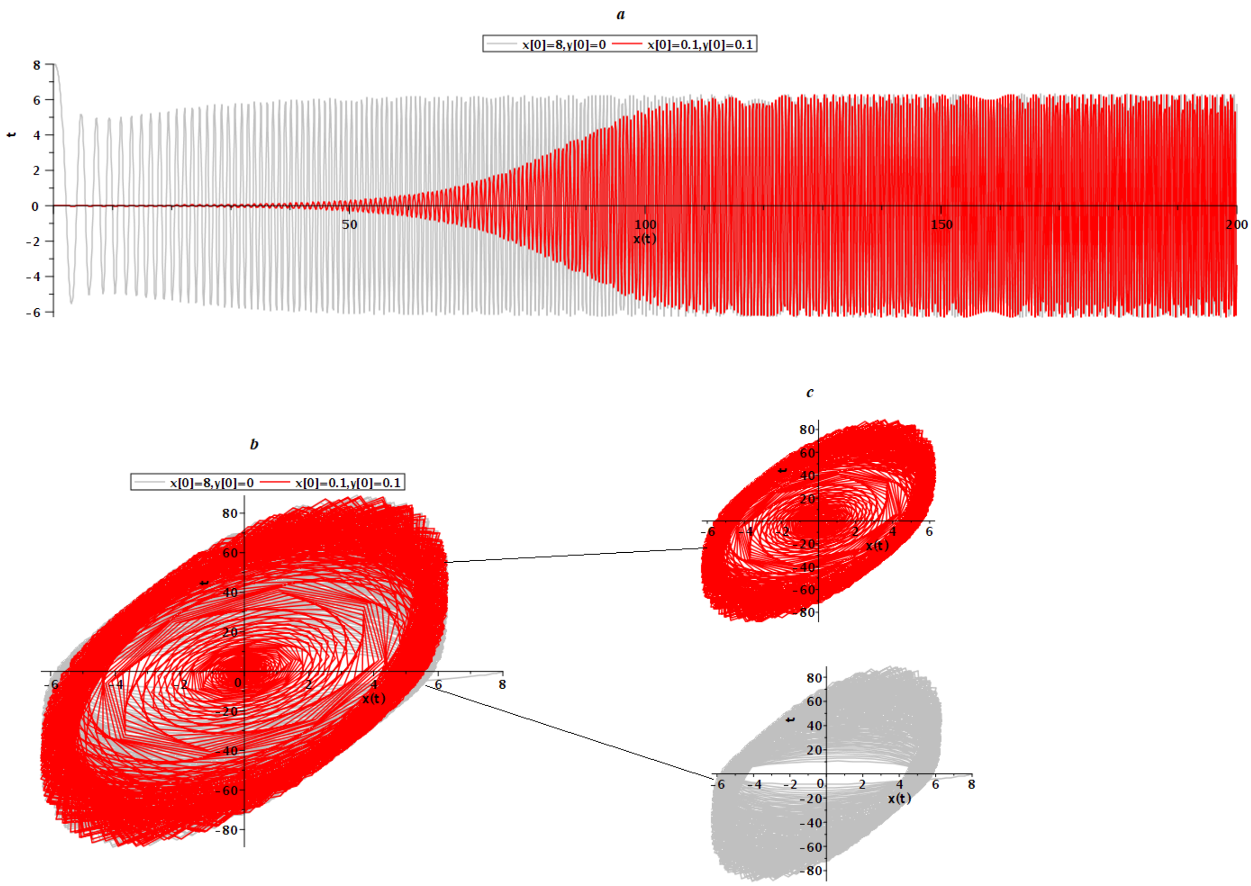

Рис. 3. Осциллограммы a) и фазовые траектории b) для классического осциллятора Ван дер Поля-Эйлера, построенные при $a = 0.1, b = 1, T = 200$ и различных начальных условиях: $(8, 0)$ — серая кривая и $(0.1, 0.1)$- красная кривая; c) более детальное построение фазовых траекторий.

Figure 3. Oscillograms a) and phase trajectories b) for the classical Van der Pol-Euler oscillator, constructed at $a = 0.1$, $b = 1$, $T = 200$ and different initial conditions: $(8, 0)$ — gray curve and $(0.1, 0.1)$ — red curve; c) more detailed construction of phase trajectories.

На рис. 3 мы видим детерминированный хаотический режим, который характерен для нелинейных колебательных систем и вызван чувствительностью к изменению начальных условий. Хаотические режимы заслуживают отдельного изучения, которое опирается на известные качественные методы нелинейной динамики [24].

Рассмотрим пример дробного осциллятора Ван дер поля-Эйри.

Пример 4. Дробный осциллятора Ван дер Поля-Эйри $(\alpha = 1.8, \beta = 0.85)$. Значения параметров: $\lambda = 0.15, a = 10, b = 20, t \in [0, 100], N = 2500$, начальные условия $(0.2, 0)$ и $(4, 0)$.

Результаты моделирования приведены на рис.4.

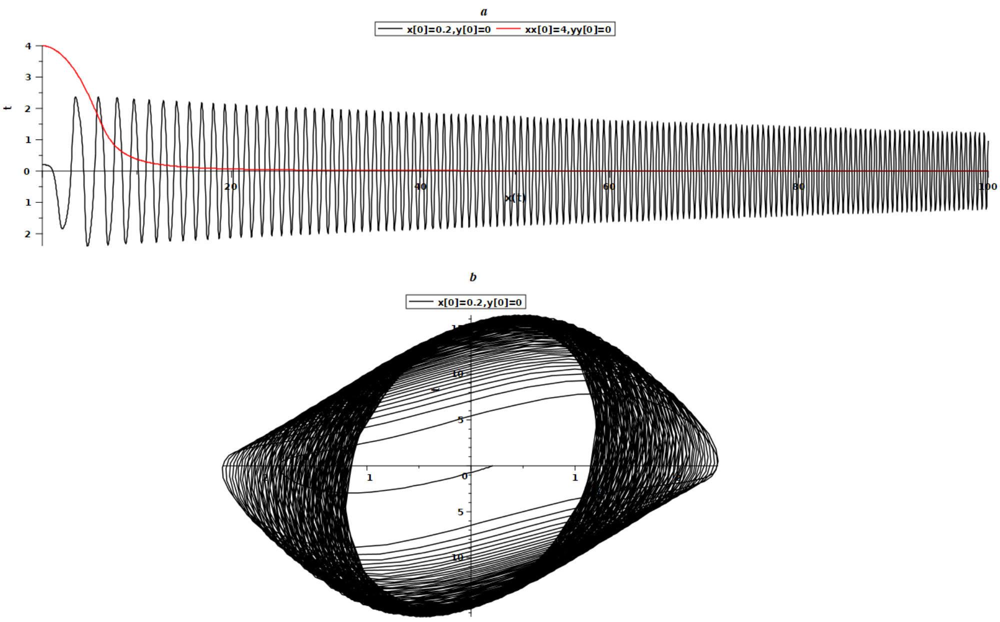

Рис. 4. Осциллограммы a) при начальных условиях $(0.2, 0)$ и $(4, 0)$ и фазовая траектория для начального условия $(0.2, 0)$.

Figure 4. Oscillograms a) for initial conditions $(0.2, 0)$ and $(4, 0)$ and phase trajectory for the initial condition $(0.2, 0)$.

На рис.4a приведены осциллограммы при начальных условиях $(0.2, 0)$ — кривая и $(4, 0)$ — красная кривая. Здесь мы видим, что предельный цикл на рис.4b является неустойчивым. Красная кривая представляет собой апериодический режим (колебания отсутствуют).

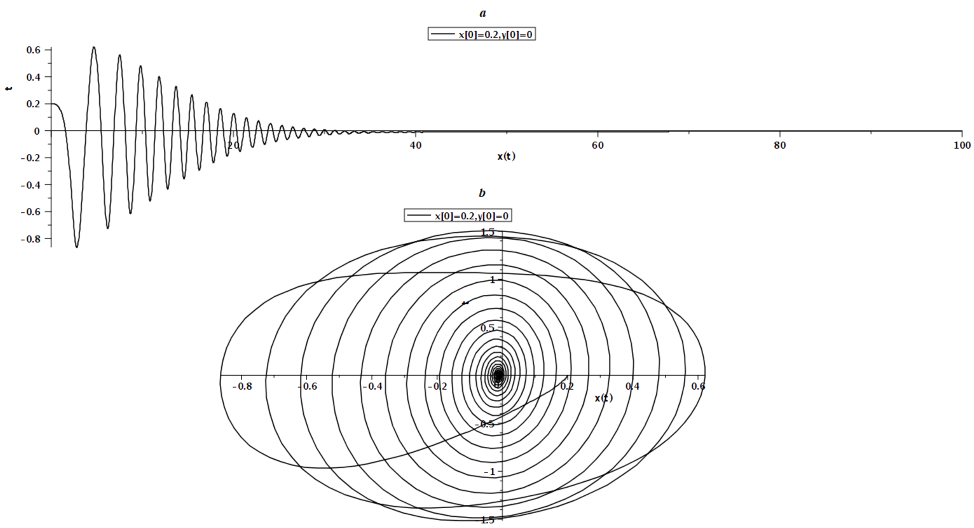

Рис. 5. Осциллограмма a) и фазовая траектория b) для начального условия $(0.2, 0)$.

Figure 5. Oscillogram a) and phase trajectory b) for the initial condition $(0.2, 0)$

На рис. 5 приведена фазовая траектория и осциллограмма, полученная по формуле (4) в зависимости от значений $\alpha = 1.9$ и $\beta = 0.1$, остальные значения параметров оставлены без изменения. Здесь релаксационных колебаний мы не видим, зато видим затухающие колебания.

В заключении нашего исследования посмотрим наличие хаотического режима для дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри. Для этого мы увеличим время моделирования, как в Примере 1, $T = 160$, $\alpha = 1.8$, $\beta = 0.85$ остальные параметры оставим без изменения. Результаты моделирования приведены на рис.6.

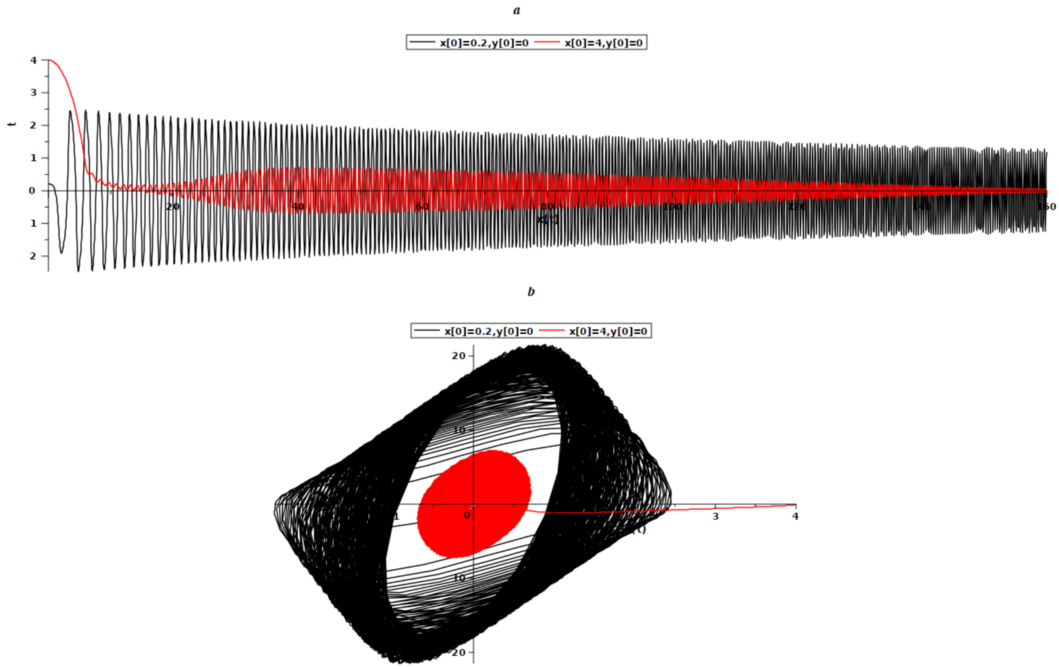

Рис. 6. Осциллограммы a) и фазовые траектории b) построенные по формуле (4) при различных начальных условиях $(4, 0)$ — красная кривая и $(0.2, 0)$ — черная кривая.

Figure 6. Oscillograms a) and phase trajectories b) constructed according to formula (4) under different initial conditions $(4, 0)$ — red curve and $(0.2, 0)$ — black curve.

На рис. 6 мы видим несколько интересных режимов. Хаотический режим наблюдается при начальном условии $(0.2, 0)$ мы видим здесь перемежаемость — чередования квазипериодических колебаний с хаотическими. Другой режим при начальном условии $(4, 0)$, характеризует бифуркацию Адронова-Хопфа — рождение и уничтожение предельного цикла.

Заключение

В статье была предложена новая математическая модель нелинейного дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри. Для которой был разработан численный алгоритм на основе нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности. Численный алгоритм был реализован в компьютерной программе на языке Maple. С помощью компьютерной программы были построены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров модели. Показано, наличие различных колебательных режимов: релаксационных, затухающих, хаотичных. Более детальный анализ режимов дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри в зависимости от значений его ключевых параметров может дать построение карт динамических режимов [25].

Список литературы

1. Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Berlin: Springer, 2011. 218 DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-42-54 pp.
2. Tarasov V. E. On history of mathematical economics: Application of fractional calculus, *Mathematics*, 2019. vol. 7, 509 DOI: 10.3390/math7060509.
3. Klafter J., Lim S. C., Metzler R. *Fractional dynamics: recent advances*. Singapore: World Scientific, 2011. 532 DOI: 10.1142/8087 pp.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
5. Van der Pol B. LXXXVIII. On “relaxation-oscillations”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1926. vol. 2, no. 11, pp. 978-992.
6. Airy G. B. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 1838. no. 6, pp. 379–402.
7. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твёрдых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
8. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.
9. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.
10. Герасимов А. Н. Обобщение законов линейного деформирования и их применение к задачам внутреннего трения, *АН ССР. Прикладная математика и механика*, 1948. Т. 44, № 6, С. 62-78.
11. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II, *Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, pp. 529-539.
12. Паровик Р. И. Математическое моделирование эредитарного осциллятора Эйри с трением, *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*, 2017. Т. 10, № 1, С. 138-148 DOI: 10.14529/mmp170109.
13. Паровик Р. И. Задача Коши для обобщенного уравнения Эйри, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2014. Т. 16, № 3, С. 64-69.
14. Parovik R. I. Mathematical Models of Oscillators with Memory / *Oscillators — Recent Developments*. London, InTech, 2019, pp. 3-21 DOI: 10.5772/intechopen.81858.
15. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE.*, 2016. vol. 50, pp. 2061-2070.
16. Efremidis N. K. et al. Airy beams and accelerating waves: an overview of recent advances, *Optica*, 2019. vol. 6, no. 5. 686-701 pp.
17. Паровик Р. И. Математическая модель фрактального осциллятора Ван-дер-Поля, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2015. Т. 17, № 2, С. 57-62.
18. Паровик Р. И. Анализ добротности вынужденных колебаний дробного линейного осциллятора, *Журнал технической физики*, 2020. Т. 90, № 7, С. 1059-1063 DOI: 10.21883/JTF.2020.07.49436.233-19.
19. Псху А. В. Рехвиашвили С. Ш. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора, *Письма в Журнал технической физики*, 2019. Т. 45, № 1, С. 34-37 DOI: 10.21883/PJTF.2019.01.47154.17540.

20. Рехвиашвили С. Ш., Псху А. В. Новый метод описания затухающих колебаний балки с одним заделанным концом, *Журнал технической физики*, 2019. Т. 89, № 9, С. 1314-1318 DOI: 10.21883/JTF.2019.09.48055.284-18.

21. Паровик Р. И. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики вынужденных колебаний нелинейного дробного осциллятора, *Письма в Журнал технической физики*, 2019. Т. 45, № 13, С. 25-28 DOI: 10.21883/PJTF.2019.13.47953.17811.

22. Gao G., Sun Z., Zhang H. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications, *Journal of Computational Physics*, 2014. vol. 259, pp. 33-50.

23. Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial, *Mathematics*, 2018. vol. 6, no. 2, 016 DOI: 10.3390/math6020016.

24. Tavazoei M. S. Haeri M. Chaotic Attractors in Incommensurate Fractional Order Systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2008. vol. 237, no. 20, pp. 2628-2637.

25. Parovik R. I., Yakovleva T. P. Construction of maps for dynamic modes and bifurcation diagrams in nonlinear dynamics using the Maple computer mathematics software package, *Journal of Physics: Conference Series*, 2022, 52022 DOI: 10.1088/1742-6596/2373/5/052022.

Информация об авторах

Салимова Асал Искандаровна – магистрант 1 курса "Прикладная математика", Национальный университет имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан, ORCID 0009-0003-9945-0991.

Паровик Роман Иванович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

[1] Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. Berlin: Springer, 2011. 218 p. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-42-54.

[2] Tarasov V. E. On history of mathematical economics: Application of fractional calculus. Mathematics. 2019, vol. 7(6), 509. DOI:10.3390/math7060509.

[3] Klafter J., Lim S. C., Metzler R. Fractional dynamics: recent advances. Singapore: World Scientific, 2011. 532 p. DOI: 10.1142/8087.

[4] Nakhushev A.M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p. (In Russian).

[5] Van der Pol B. LXXXVIII. On "relaxation-oscillations". The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1926. vol. 2. no. 11. pp. 978-992.

[6] Airy G. B. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic. Trans. Camb. Phil. Soc. 1838. no. 6. 379–402.

[7] Rabotnov Yu. N. Elements of hereditary mechanics of solids. Moscow: MIR Publishers. 1980. 387 p.

[8] Volterra V. Functional theory, integral and integro-differential equations. New York: Dover Publications, 2005. 288 p.

[9] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

[10] Gerasimov A. N. Generalization of the laws of linear deformation and their application to problems of internal friction. AN SSR. Prikladnaya matematika i mekhanika. 1948. vol. 44. no. 6. pp. 62-78. (In Russian).

[11] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II. Geophysical Journal International, 1967. vol. 13, pp. 529-539.

[12] Parovik R. I. Mathematical modelling of hereditarity Airy oscillator with friction, Bulletin of the South Ural State University, Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2017. vol. 10. no. 1, pp. 138-148. DOI: 10.14529/mmp170109. (In Russian).

[13] Parovik R. I. Cauchy problem for the generalized Airy equation. Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk. 2014. vol. 16. no. 3. pp. 64-69. (In Russian).

[14] Parovik R. I. Mathematical Models of Oscillators with Memory. Oscillators – Recent Developments. London, InTech, 2019, pp. 3-21. DOI: 10.5772/intechopen.81858.

[15] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. Proc. IRE. 2016. vol. 50. pp. 2061-2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.

[16] Efremidis N. K. et al. Airy beams and accelerating waves: an overview of recent advances. Optica. 2019. vol. 6. no. 5. pp. 686-701. DOI: 10.1364/OPTICA.6.000686.

[17] Parovik R. I. Mathematical model of the Van der Pol fractal oscillator. Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk. 2015. vol. 17, no. 2. pp. 57-62. (In Russian).

[18] Parovik R. I. Quality Factor of Forced Oscillations of a Linear Fractional Oscillator. Technical Physics. 2020. vol. 65. no. 7. pp. 1015-1019. DOI: 10.1134/S1063784220070154.

[19] Pskhu A. V., Rekhviashvili S. Sh. Analysis of Forced Oscillations of a Fractional Oscillator. Technical Physics Letters. 2018. vol. 44. no. 12. pp. 1218-1221. DOI: 10.1134/S1063785019010164.

[20] Rekhviashvili S. S., Pskhu A. V. New Method for Describing Damped Vibrations of a Beam with a Built-in End. Technical Physics. 2019. vol. 64. no. 9. pp. 1237-1241. DOI: 10.1134/S1063784219090135.

[21] Parovik R. I. Amplitude-Frequency and Phase-Frequency Performances of Forced Oscillations of a Nonlinear Fractional Oscillator. Technical Physics Letters. 2019. vol. 45. no. 7. pp. 660-663. DOI: 10.1134/S1063785019070095.

[22] Gao G., Sun Z., Zhang H. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications. Journal of Computational Physics. 2014. vol. 259. pp. 33-50. DOI: 10.1016/j.jcp.2013.11.017.

[23] Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. Mathematics. 2018. vol. 6. no. 2. 016. DOI: 10.3390/math6020016.

[24] Tavazoei M. S., Haeri M. Chaotic Attractors in Incommensurate Fractional Order Systems. Physica D: Nonlinear Phenomena. 2008. vol. 237. no. 20. pp. 2628-2637. DOI: 10.1016/j.physd.2008.03.037.

[25] Parovik R. I., Yakovleva T. P. Construction of maps for dynamic modes and bifurcation diagrams in nonlinear dynamics using the Maple computer mathematics software package. Journal of Physics: Conference Series. 2022. vol. 2373. 52022. DOI: 10.1088/1742-6596/2373/5/052022.

Information about the authors

Salimova Asal Iskandarovna – 1st year master's student "Applied Mathematics", National University named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0009-0003-9945-0991.

Parovik Roman Ivanovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Leading researcher, laboratory of modeling physical processes Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0002-1576-1860.