

О хаотической динамике в одном варианте диффузных систем хищник-жертва*

Н.М. Евстигнеев¹, Т.В. Карамышева^{1,II}

¹ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва, Россия

^{II} Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия

Аннотация. Рассмотрено обобщение модели хищник-жертва типа Лотки-Вольтерры с учетом пространственной неоднородности. Модель отличается от известных диффузионных систем Лотки-Вольтерры более сложной нелинейностью, что соответствует более агрессивному взаимодействию между видами. Этот тип систем можно охарактеризовать как системы типа реакции-диффузии. Проанализировано базовое стационарное решение, его бифуркации и переход к хаосу посредством численного моделирования. Обнаружено, что серии бифуркаций приводят к известным каскадам бифуркаций предельных циклов, совпадающим с каскадами в теории Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого.

Ключевые слова: модель хищник-жертва, уравнения реакции-диффузии, исследование бифуркаций, метод коллокации, псевдоспектральный метод.

DOI: 10.14357/20790279240202 **EDN:** EQKPY

Введение

Исходная задача является одной из первых моделей в математической биологии, которая была предложена и подробно проанализирована в классической работе [1]. В литературе предлагалось множество обобщений этих систем [2].

Один из важных классов таких обобщений включает уравнения типа реакции-диффузии, в которых нелинейность берется из исходной системы Лотки-Вольтерры для многих различных моделей [3]. Анализ решений вида бегущей волны для классической нелинейности и различных применимых наборов граничных условий обсуждался в [4]. В работе [5] рассматривается система:

$$u_t = d_1 \Delta u + (b + 1)u^2 - u^3 v - a^2,$$

$$v_t = d_2 \Delta v + u^3 v - bu^2.$$

Как обобщение диффузионных систем Лотки-Вольтерры с модифицированной нелинейностью. Было показано, что при $0 < b < 2$ в указанной системе динамика в окрестности ее термодинамической ветви – это динамика взаимодействия хищника (переменная $v = v - b/a$) и жертвы (переменная $z = u - a$). Анализ в [5] ограничивался только решениями вида бегущей

волны, где анализируется приведенная система из четырех ОДУ первого порядка. В этом исследовании мы обращаемся ко всей системе с граничными условиями Неймана-Дирихле.

Работа имеет следующую структуру. Сначала сформулирована задача и проведен базовый анализ всей системы. Далее следует описание применяемого спектрального численного метода. Представлены результаты численного моделирования.

1. Постановка задачи и анализ основного решения

1.1. Формулировка задачи

Мы рассматриваем следующую систему уравнений в пространственной области $x \in [-1, 1]$ для двух независимых переменных u и v , описывающих взаимодействие видов:

$$u_t = d_1 \Delta u + (b + 1)u^2 - u^3 v - a^2, \quad (1.1)$$

$$v_t = d_2 \Delta v + u^3 v - bu^2, \quad (1.2)$$

$$u(t, -1) = u_0, u(t, 1)_x = 0, \quad (1.3)$$

$$v(t, -1) = v_0, v(t, 1)_x = 0, \quad (1.4)$$

где $d_1 > 0, d_2 > 0$ – действительные коэффициенты диффузии (описывающие диффузию каждого вида); $a > 0$ и $b > 0$ – действительные коэффици-

* Авторы выражают благодарность Российскому научному фонду (РНФ) за поддержку работы, номер проекта 23-21-00095

енты, описывающие взаимодействие и естественное изменение численности видов.

Некоторые из этих коэффициентов можно зафиксировать, а некоторые можно использовать при анализе бифуркаций. Такие параметры называются параметрами бифуркации.

1.2. Анализ устойчивости базового решения

Система (1) имеет однородное основное базовое решение $(u, v) = (a, b/a)$ с краевыми условиями $(u_0, v_0) = (a, b/a)$, которое в специфической литературе по уравнениям типа реакции-диффузии называют термодинамической ветвью. Покажем, что краевая задача (1) на отрезке $[-l, l]$, для любого $l > 0$, имеет устойчивое периодическое решение, которое бифурцирует от стационарного базового решения (термодинамической ветви) при некотором значении параметров бифуркации. Данный факт сформулирован в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Краевая задача (1) на отрезке $[-l, l]$ имеет устойчивый цикл, бифурцирующий от основного базового решения (термодинамической ветви) при значении параметра бифуркации:*

$$d_2 = d_2^* = (4l/\pi)^2(2a - ab + a^3) - d_1. \quad (2)$$

Доказательство. Линеаризуем задачу (1) на термодинамической ветви, полагая $p = u - a$ и $q = v - b/a$. Получим линейную систему уравнений:

$$p_t = d_1 p_{xx} + a(2 - b)p - a^3 q, \quad (3.1)$$

$$q_t = d_2 q_{xx} + abp + a^3 q, \quad (3.2)$$

с краевыми условиями Дирихле $p(t, -1) = q(t, -1) = 0$ и Неймана $p_x(t, 1) = q_x(t, 1) = 0$.

Оператор в правой части системы (3), действующий в пространстве Соболева $H^2[-1, 1]$ с указанными выше граничными условиями, может быть представлен в виде $L = K + D\Delta$,

$$\text{где } K = \begin{pmatrix} a(2 - b) & -a^3 \\ ab & a^3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = (\cdot)_{xx} := \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Для области $[-l, l]$ и выбранных граничных условий оператор Δ имеет собственные значения:

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)^2$$

и собственные функции:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2l}} \sin\left(\left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)(x + l)\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Мы можем показать, что собственные функции удовлетворяют граничным условиям. Действительно:

$$\Psi_n(-l) = \sqrt{\frac{2}{2l}} \sin\left(\left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)(l - l)\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \Psi'_n(l) &= \frac{\pi(2n + 1)}{4l} \cos\left(\frac{\pi(2n + 1)}{4l}(l + l)\right) \\ &= \frac{\pi(2n + 1)}{4l} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Разложим компоненты собственного вектора Ψ оператора L с собственным значением λ по системе собственных функций пространственного оператора. Поскольку $L\Psi = (K + D\Delta)\Psi = \lambda\Psi$, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0,1,\dots} \left[K \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \left(-\left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)^2\right) \right] \sin\left(\left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)(x + l)\right) = \\ = \lambda \sum_{n=0,1,\dots} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \sin\left(\left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)(x + l)\right). \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\left(K - \left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)^2 D\right) \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, собственные значения оператора L являются собственными значениями оператора:

$$G_n = K - \left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)^2 D,$$

которые, в свою очередь, удовлетворяют уравнениям:

$$\lambda^2 - \text{tr} G_n \lambda + \det G_n = 0,$$

где

$$\text{tr} G_n = a(2 - b) + a^3 - \left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)^2 (d_1 + d_2),$$

$$\det G_n = \left(a(2 - b) - \left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)^2 d_1\right)$$

$$\left(a^3 - \left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l}\right)^2 d_2\right) + a^4 b.$$

Чтобы бифуркация Хопфа произошла при некотором значении d_2 , необходимо иметь пару чисто мнимых собственных значений $\lambda = \pm i\omega, \omega > 0$. Это означает, что след матриц G_n исчезает, при этом определитель остается положительным. Далее, все остальные собственные значения оператора L должны иметь отрицательные действительные части. Другими словами, для некоторого $n = m$ необходимо, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$a(2 - b) + a^3 - \left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi m}{2l}\right)^2 (d_1 + d_2) = 0.$$

Если $m > 0$, тогда существует $n < m$ для которого выполняется неравенство:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} G_n &= (d_1 + d_2) \left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi m}{2l} \right)^2 - \\ &- (d_1 + d_2) \left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l} \right)^2 = \\ &= (m - n + m^2 - n^2) \frac{\pi^2}{4l^2} (d_1 + d_2) > 0. \end{aligned}$$

Тогда хотя бы одно собственное значение оператора L , соответствующее этому числу n , будет иметь положительную действительную часть. Следовательно, необходимо, чтобы $m = 0$ и

$$d_2^* = \left(\frac{4l}{\pi} \right)^2 (2a - ab + a^3) - d_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det G_n &= \left(2a - ab - \left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi n}{2l} \right)^2 d_1 \right) \\ &\left(ab - 2a + \left(\frac{\pi}{4l} \right)^2 d_1 \right) + a^4 b. \end{aligned}$$

Для $n = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \det G_0 &= - \left(\frac{\pi}{4l} \right)^4 d_1^2 + 2a(2 - b) \left(\frac{\pi}{4l} \right)^2 d_1 - \\ &- a^2(a^2 b + 4b - b^2 - 4). \end{aligned}$$

Следовательно, если коэффициент диффузии d_1 удовлетворяет:

$$(2a - ab - a^2 \sqrt{b}) \left(\frac{4l}{\pi} \right)^2 < d_1 < (2a - ab + a^2 \sqrt{b}) \left(\frac{4l}{\pi} \right)^2, \quad (4)$$

тогда $\det G_n > \det G_0 > 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, условия теоремы Андронова–Хопфа [6] о спектре оператора L выполняются для $d_2 = d_2^*$. Теорема доказана.

Замечание. При фиксированных параметрах численного исследования $a = 1.75, b = 0.7$ и $l = 1$, условие на коэффициент диффузии d_1 принимает вид $d_1 < (36.4 + 49\sqrt{0.7})/\pi^2 \approx 7.84$. При других значениях параметров указанные значения d_1 приведены ниже.

2. Численный метод и результаты

2.1. Численный метод

Задача (1) имеет пространственный линейный оператор Лапласа при смешанных граничных условиях. В этом случае для такого класса задач целесообразно применить спектральные методы высокого порядка точности [7]. Мы используем метод коллокаций Чебышева, следуя [8]. Дискретный оператор диффузии можно построить с помощью спектральной дифференциальной матрицы Чебышева. Рассмотрим отрезок $-1 \leq x \leq 1$.

Конструкция пространственного оператора выводится из дискретного решения задачи:

$$D_N u = f, \quad (5)$$

при рассматриваемых граничных условиях, где D_N – дискретный оператор производной (матрица дифференцирования), u – вектор решения (для которого функция f является производной, заданной в дискретных точках), а f – вектор правой части, представляющий собой производную от u в дискретных точках. Если такой дискретный оператор D_h найден, то производная второго порядка L_N аппроксимируется выражением $L_N = D_N \circ D_N = D_N^2$ в силу линейности.

Пусть $u(x)$ – решение (5). Интерполяционный полином Лагранжа используется в виде:

$$p(x) = \sum_{j=0}^N \phi_j(x) u(x_j), \quad (6)$$

для аппроксимации решения по некоторому множеству точек $\{x_j\}$ заданном отрезке. Базисный полином Лагранжа $\phi_j(x)$ определяется как:

$$\phi_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^N \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{S_N(x)}{S'_N(x_j)(x - x_j)}, \quad (7)$$

где $S_N(x)$ – общий полиномиальный множитель в каждой точке.

Применим полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$ для общего полиномиального множителя:

$$\begin{aligned} S_N(x) &= (1 - x^2) dT'_N(x)/dx = (1 - x^2) T'_N(x), T_n(x) \\ &= \cos(n\theta), \theta = \cos(x). \end{aligned}$$

Это дает нам

$$S_N(x) = N \sin(\theta) \sin(N\theta) = N \sin(\cos(x)) \sin(N \cos(x))$$

и тогда $S_N(x_j) = 0$ если $N\theta = \pi j$. Следовательно

$$\forall j \in Z: S_N \left(\cos \left(\frac{j\pi}{N} \right) \right) = 0.$$

Этот набор точек $\{x_j\}$ известен как набор точек Гаусса–Чебышева–Лобатто на рассматриваемом отрезке, определяемый как:

$$x_j = \cos(\theta_j) = \cos(j\pi/N), j = 0, 1, \dots, N. \quad (8)$$

Известно [9], что для такого набора точек на отрезке $[-1, 1]$ константа Лебега в (7) минимальна для функций из $C_M^n[-1, 1]$, т.е. множества n -раз дифференцируемых функций, n -ые производные которых ограничены по модулю положительной конечной константой M .

Суммируя все результаты, мы приходим к интерполяционному базисному полиному (7), определяемому как:

$$\phi_j(x) = \frac{(1 - x^2) T'_N(x)}{d_j(x - x_j)}, j = 0, 1, \dots, N, \quad (9)$$

где $d_j = S'_N(x_j) = -c_j N^2 T_N(x_j)$,

$c_j = 1$ для $j = 1, \dots, N-1$, $c_j = 2$ если $j = 0$ или N .

Теперь мы используем (9) в (6) и подставляем этот полином в (5). Полином обладает следующим свойством: он является единственным интерполяционным полиномом (в силу интерполяционной теоремы Лагранжа) степени не выше N и $p(x_j) = u(x_j)$ для $j = 0, 1, \dots, N$. Мы устанавливаем $f_j := f(x_j) = p'(x_j) = u'(x_j)$ в (5), где $p'(x) = u(x) \sum_{j=0}^N \phi'_j(x)$. Коэффициенты $u_j := u(x_j)$ являются постоянными величинами, не зависящими от x , поэтому получаем $D_N \in R^{(N+1) \times (N+1)}$, которая определяется как:

$$D_{N,jk} = \phi'_k(x) = \frac{1}{d_k} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{(1-x^2) \tau'_N(x)}{x-x_k} \right) \Big|_{x_j} \right), 0 \leq j, k \leq N. \quad (10)$$

Численные выражения для элементов данной матрицы легко получить из (10) с помощью символьных вычислений и их можно, для некоторых случаев, найти в [8]. После формирования матрицы дифференцирования Чебышева D_N оператор Лапласа находится как:

$$L_N = D_N^2. \quad (11)$$

Граничные условия не учитываются в (11), где мы решаем эту проблему, используя тау-метод [10]. Обратите внимание, что из (8) мы имеем $x_0 = \cos(0) = 1$ и $x_N = \cos(\pi) = -1$. Постановка граничного условия Неймана при $x = 1$ эквивалентна замене первой строки матрицы L_N (для которой $x_j = 1$, т.е. $j = 0$) на первую строку матрицы D_N и соответствующему значению в правой части системы до значения граничного условия, т.е. до 0. Установка граничного условия Дирихле при $x = -1$ эквивалентна замене последней строки матрицы L_N (для которой $x_j = -1$, т.е. $j = N$) на вектора-строку со всеми нулевыми элементами, кроме значения 1 в последней позиции. Соответствующее значение в правой части системы устанавливается равным значению граничного условия Дирихле.

Окончательный вид дискретного оператора Лапласа с учетом граничных условий $G_N \in R^{(N+1) \times (N+1)}$ имеет следующую структуру по строкам:

$$G_N := \begin{pmatrix} D_{N,0,:} \\ L_{N,1,:} \\ \dots \\ L_{N,N-1,:} \\ 0, 0, \dots, 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Другую форму оператора можно получить, подставив заданные граничные условия Дирихле u_0 и v_0 в систему (1), сделав задачу однородной с нулевыми условиями Неймана и Дирихле. В этом

случае последняя строка и последний столбец в (12) удаляются вместе с граничным значением в правой части. При этом нелинейная часть должна быть соответствующим образом модифицирована.

Известно, что системы типа реакции-диффузии можно разделить на жесткую линейную часть уравнения, связанную с диффузией, и мягкую локально-нелинейную часть уравнения. Интегрирование по времени таких систем с высокой точностью обычно выполняется с использованием явно-неявных методов Рунге-Кутты (IMEX-RK), где жесткая часть уравнения рассматривается неявно, а нелинейная – явно. В этом исследовании для численного интегрирования по времени мы применяем метод IMEX-4 из [11], в котором постоянные значения выбраны так, чтобы метод был L-устойчивым и жестко-точным. Неявная часть метода представляет из себя единично-диагональный неявный метод Рунге-Кутты. Таким образом можно заранее обратить матрицу G_N и применять ее на каждом шаге.

2.2. Результаты

Из выражения (4) можно заметить, что для многих наборов параметров базовое решение (термодинамическая ветвь) линейно неустойчиво. Известно, что наиболее интересные режимы возникают после бифуркации Хопфа.

Результаты анализа устойчивости (на основе Теоремы 1) могут быть представлены в виде многомерной гиперповерхностной диаграммы, которая идентифицирует области устойчивого и неустойчивого поведения системы. Примеры диаграмм устойчивости для различных значений параметров представлены на рис. 1.

Численно анализируем бифуркацию периодических решений и их устойчивость с помощью метода IMEX RK, описанного выше. Шаг интегрирования выбирался из условия минимума постоянной Лебега и лежал в диапазоне $[1 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-5}]$. Для анализа результатов построим проекции фазовых пространств в точках $u(x_{N/2})$, $v(x_{N/2})$. Фиксируем параметры $a = 1.75$, $b = 0.7$, $d_1 = 4$ и модифицируем параметр d_2 . Примеры диаграммы решения в пространстве $t \times x$ представлены на рис. 2. Выбранные области анализа параметров связаны с неустойчивостью части решений вблизи нейтральной прямой (см. отмеченную окрестность на рис. 1).

Наблюдаемые периодические решения сильно прижаты к исходному циклу, и чтобы отличить период необходимо увеличить окрестность кривой. Результаты представлены на рис. 3 и 4, которые указывают на наличие каскада Фейгенбаума наряду с

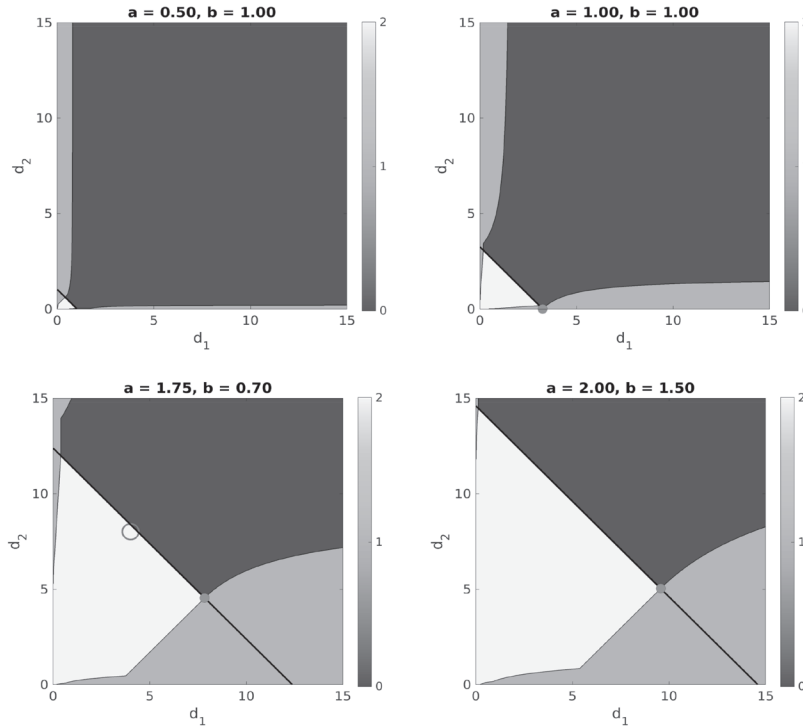


Рис. 1. Диаграммы устойчивости основного базового решения $(u, v) = (a, b/a)$ (термодинамической ветви) для различных значений параметров

периодическими предельными циклами из порядка Шарковского (периода 11, 7 и 3). Все предельные циклы, приведенные на Рис. 4, являются устойчивыми, что проверено путем анализа собственных значений матриц монодромии, которая строится как полный проход цикла периода 1 с временем, найденным по указанному количеству периодов.

На рис. 1 нулевые значения (темная заливка) указывают на линейную устойчивость базового решения; значения 1 (серая заливка) указывают на линейную неустойчивость базового решения с действительными неустойчивыми собственными значениями матрицы Якоби; значения 2 (светлая заливка) указывают на бифуркацию Хопфа основного решения. Кругом обозначена окрестность параметров, по которым выполнялся численный анализ периодических решений. Черная нейтральная прямая задается (2). Точка на нейтральной прямой, если она представлена, есть верхняя граница интервала (4),

$$\text{т.е. } d_1 = (2a - ab + a^2\sqrt{b}) \left(\frac{4}{\pi}\right)^2.$$

Результирующую бифуркационную схему [12] в фазовом пространстве можно закодировать следующим образом:

$$P_u \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_8 \rightarrow \dots \rightarrow C_{11} \rightarrow C_7 \rightarrow \dots \rightarrow C_3 \rightarrow C_{Ch},$$

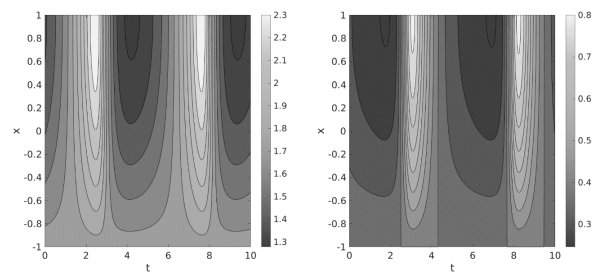


Рис. 2. Визуализация неоднородного решения в пространстве $t \times x$, $u(t, x)$ слева и $v(t, x)$ справа

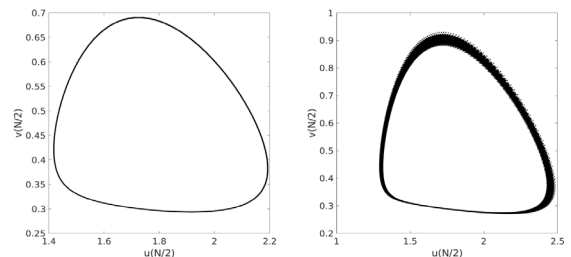


Рис. 3. Проекция периодических решений на плоскость устойчивого предельного цикла периода 3 слева при $d_2 = 7.976$ и хаотического аттрактора справа при $d_2 = 7.92$

где P_u – неустойчивая точка (термодинамическая ветвь); C_j – устойчивые периодические предельные циклы периодов j ; C_{Ch} – хаотический аттрактор.

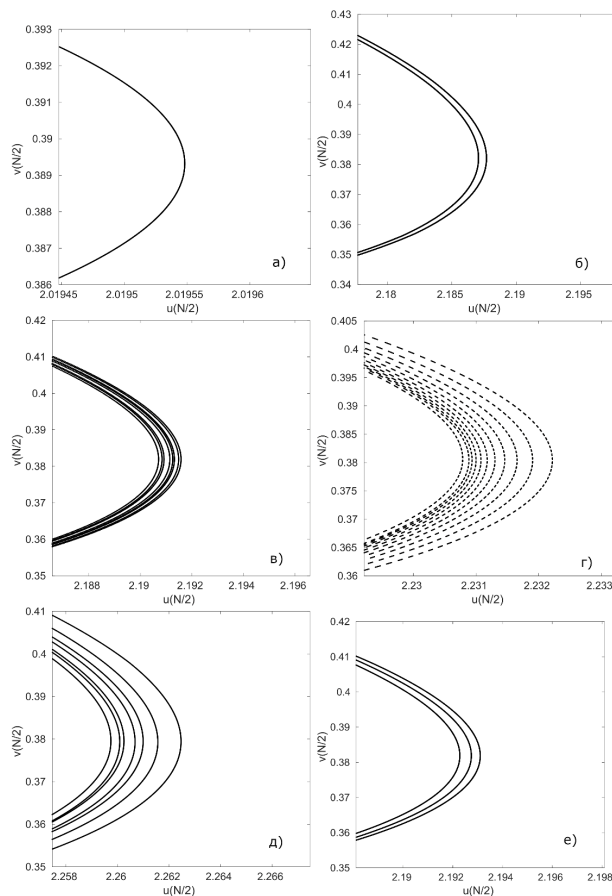


Рис.4. Приближение проекций устойчивых периодических решений из каскада Фейгенбаума-Шарковского для различных значений параметра d_2 : период 1 (а) при $d_2 = 8.06$, период 2 (б) при $d_2 = 7.976528$, период 8 (в) при $d_2 = 7.9765$, период 11 (г) при $d_2 = 7.97648$, период 7 (д) при $d_2 = 7.97644$, период 3 (е) при $d_2 = 7.9764$

Заключение

В статье мы рассмотрели модифицированную диффузионную модель типа Лотки-Вольтерры, предложенную в [5]. Мы проанализировали устойчивость базового однородного решения, разработали спектральный метод коллокации на основе полиномов Чебышева и использовали его для численного исследования хаотических режимов в указанной задаче. Было показано, что переход к хаосу осуществляется посредством последовательностей бифуркаций на периодических предельных циклах, предсказанных теорией Фейгенбаума – Шарковского – Магницкого. В будущем исследова-

нии мы намерены построить полную бифуркационную диаграмму стационарных и периодических решений этой задачи для различных комбинаций граничных условий.

Литература

1. *Volterra V.* Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. – Società anonima tipografica” Leonardo da Vinci”. V. 2. 1927.
2. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. Cambridge university press. 1998.
3. *Murray J.D., Murray J.D.* Mathematical biology: II: spatial models and biomedical applications. – New York : springer. 2003. V. 18.
4. *Tang L., Chen S.* Traveling wave solutions for the diffusive Lotka–Volterra equations with boundary problems //Applied Mathematics and Computation. 2022. V. 413. P. 126599.
5. *Magnitskii N.A.* Universal bifurcation chaos theory and its new applications //Mathematics. 2023. V. 11. No. 11. P. 2536.
6. *Hassard B.D., Kazarinoff N.D., Wan Y.H.* Theory and applications of Hopf bifurcation. CUP Archive. 1981. V. 41.
7. *Gottlieb D., Orszag S.A.* Numerical analysis of spectral methods: theory and applications. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1977.
8. *Trefethen L.N.* Spectral methods in MATLAB. Society for industrial and applied mathematics. 2000.
9. *Hoang N.* On node distributions for interpolation and spectral methods // Mathematics of computation. 2016. V. 85. No. 298. P. 667-692.
10. *Dang-Vu H., Delcarte C.* An accurate solution of the Poisson equation by the Chebyshev collocation method //Journal of Computational Physics. 1993. V. 104. No 1. P. 211-220.
11. *Koto T.* IMEX Runge–Kutta schemes for reaction–diffusion equations //Journal of Computational and Applied Mathematics. 2008. V. 215. No. 1. P. 182-195.
12. *Evstigneev N.M., Magnitskii N.A.* Numerical analysis of laminar–turbulent transition by methods of chaotic dynamics //Doklady Mathematics. Pleiades Publishing. 2020. V. 101. P. 110-114.

Евстигнеев Николай Михайлович. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Ведущий научный сотрудник. Кандидат технических наук. Область научных интересов: вычислительная математика, информационные технологии. E-mail: evstigneevnm@yandex.ru (ответственный за переписку).

Карамышева Таисия Владимировна. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Главный специалист. Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия. Старший научный сотрудник. Кандидат физико-математических наук. Область научных интересов: вычислительная математика, информационные технологии. E-mail: taisia.karamysheva@gmail.com

On the Chaotic Dynamics in One Variant of the Diffusive Predator-Prey Systems*

N.M. Evstigneev¹, T.V. Karamysheva^{1,II}

¹ Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

^{II} Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia.

Abstract. In this paper we are considering the generalization of the predator-prey model of the Lotka-Volterra type to the diffusion. The model is different from precious known diffusive Lora-Voterra systems by more complex non-linearity that corresponds to more aggressive interaction between species. This type of systems can be characterized as reaction-diffusion type of systems. In the present research we analyze the base stationary solution, its bifurcations end explore the transition to chaos by means of numerical investigation. It was detected that the series of bifurcation lead to the known cascades of bifurcations over limited cycles that coincide with the ones in Feigenbaum–Sharkovskii–Magnitskii theory. Finally, we summarize the current study and give the future work.

Keywords: *predator pray model, reaction-diffusion equations, bifurcation analysis, collocation method, pseudospectral method*

DOI: 10.14357/20790279240202 **EDN:** EQKPQY

References

1. Volterra V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. – Società anonima tipografica” Leonardo da Vinci”. 1927. V. 2.
2. Hofbauer J., Sigmund K. Evolutionary games and population dynamics. Cambridge university press. 1998.
3. Murray J.D., Murray J.D. Mathematical biology: II: spatial models and biomedical applications. – New York : springer. 2003. V. 18. P. xxvi+ 811.
4. Tang L., Chen S. Traveling wave solutions for the diffusive Lotka–Volterra equations with boundary problems //Applied Mathematics and Computation. 2022. V. 413. P. 126599.
5. Magnitskii N.A. Universal bifurcation chaos theory and its new applications //Mathematics. 2023. V. 11. No. 11. P. 2536.
6. Hassard B.D., Kazarinoff N.D., Wan Y.H. Theory and applications of Hopf bifurcation. CUP Archive. 1981. V. 41.
7. Gottlieb D., Orszag S.A. Numerical analysis of spectral methods: theory and applications. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1977.
8. Trefethen L.N. Spectral methods in MATLAB. Society for industrial and applied mathematics. 2000.
9. Hoang N. On node distributions for interpolation and spectral methods // Mathematics of computation. 2016. V. 85. No. 298. P. 667-692.

* The authors appreciate the support of the work by Russian Science Foundation (RSF), project number 23-21-00095.

10. *Dang-Vu H., Delcarte C.* An accurate solution of the Poisson equation by the Chebyshev collocation method //Journal of Computational Physics. 1993. V. 104. No. 1. P. 211-220.
11. *Koto T.* IMEX Runge–Kutta schemes for reaction–diffusion equations //Journal of Computational and Applied Mathematics. 2008. V. 215. No. 1. P. 182-195.
12. *Evstigneev N.M., Magnitskii N.A.* Numerical analysis of laminar–turbulent transition by methods of chaotic dynamics //Doklady Mathematics. Pleiades Publishing. 2020. V. 101. P. 110-114.

Evstigneev N.M., PhD, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, lead staff scientist. Scientific interests: computational and applied mathematics, computer sciences. E-mail: evstigneevnm@yandex.ru corresponding author.

Karamysheva T.V., PhD, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, chief staff engineer (0.5 rate) and Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, senior staff scientist. Scientific interests: computational and applied mathematics, computer sciences. E-mail: taisya.karamysheva@gmail.com