УДК 524.62, 524.66, 524.7-1/-8, 52.33
doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-7

Спиральная структура дисковых галактик и эффект скрытой массы

В. М. Журавлев

Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, Ульяновск, Россия

zhvictorm@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Строится теория дисковых галактик с нарушением цилиндрической симметрии, которая решает проблему спиральной структуры галактик в рамках модели волны плотности общего вида. *Материалы и методы.* Теория строится на основе классической гидродинамики сплошной самогравитирующей среды с квазиклассическим полем тяготения, содержащим описание эффекта скрытой массы (темной материи). *Результаты.* Выведены уравнения пространственного распределения параметров среды и поля тяготения, а также уравнения эволюции масштабных факторов в условиях динамического равновесия вращающейся среды с нарушением цилиндрической симметрии. Устанавливается аналогия между эффектом скрытой массы и гравитационной проницаемостью среды. Рассматривается описание взаимодействия дисковой структуры с внешним окружением. *Выводы.* Теория позволяет строить модели дисковых галактик со спиральной структурой при наличии эффекта скрытой массы. Такие модели включают описание собственной эволюции дисковых галактик при наличии внешнего воздействия.

Ключевые слова: строение и собственная эволюция спиральных галактик, эффект скрытой массы, квазиклассическое поле тяготения, динамическое равновесие сплошной самогравитирующей среды

Финансирование: работа выполнена в рамках Соглашения о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2025-066 от 16.01.2025, заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

Для цитирования: Журавлев В. М. Спиральная структура дисковых галактик и эффект скрытой массы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 81–105. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-7

Spiral structure of disk galaxies and hidden mass effect

V.M. Zhuravlev

Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia

zhvictorm@gmail.com

Abstract. *Background*. A theory of disk galaxies with a violation of cylindrical symmetry is being constructed, which solves the problem of the spiral structure of galaxies within the framework of a general density wave model. *Materials and methods*. The theory is based on the classical hydrodynamics of a continuous self-gravitating medium with a quasi-classical gravitational field containing a description of the effect of hidden mass (dark matter). *Results*. The equations of the spatial distribution of the parameters of the medium and the gravitational field, as well as the equations of the evolution of scale factors, are derived under the conditions of dynamic equilibrium of a rotating medium with a violation of cylindrical symmetry. An analogy is established between the effect of hidden mass and the gravitational permeability of the medium. The description of the interaction of the disk structure with the external environment is considered. *Conclusions*. The theory allows us to build models of disk galaxies with a spiral structure in the presence of a hidden mass effect. Such models include descriptions of the intrinsic evolution of disk galaxies in the presence of external influences.

Keywords: the structure and proper evolution of spiral galaxies, the hidden mass effect, the quasi-classical gravitational field, the dynamic equilibrium of a continuous self-gravitating medium

Financing: the work was carried out within the framework of the Agreement on the provision of subsidies from the federal budget for the financial support of the state assignment for the provision of public services (works) No. 073-03-2025-066 dated January 16, 2025, concluded between the Ulyanov State Pedagogical University and the Ministry of Education of the Russian Federation.

For citation: Zhuravlev V.M. Spiral structure of disk galaxies and hidden mass effect. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(3):81–105. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-7

Введение

В теории дисковых галактик имеются две важные проблемы. Первой является решение задачи объяснения плоской кривой вращения галактик на их периферии. Вторая – формирование и эволюция спиральных структур, которые обладают большим разнообразием их геометрической формы. Проблему плоской кривой вращения дисковых галактик, находящихся в относительном равновесном состоянии, связывают обычно с эффектом «темной материи» или эффектом скрытой массы в зависимости от способа объяснения этого эффекта. Эффект «темной материи» связан с объяснением плоской кривой вращения как следствие присутствия в галактиках неидентифицированной в локальных экспериментах экзотической по свойствам формы материи, которая взаимодействует с обычной материей только за счет гравитации [1–3]. Эффект скрытой массы связан с объяснением плоской кривой вращения как проявление квазиклассического поля тяготения, отличающегося на масштабах галактик и их скоплений от классического закона тяготения Ньютона. Примером такого подхода может служить теория MOND [4–6], а также предложенный в [7, 8] способ объяснения эффекта скрытой массы, опирающийся на новую теорию пространства и материи – Топологическую теорию фундаментальных полей (ТТФП) [9–11].

Проблема теории спиральных галактик находится в разработке уже порядка ста лет и связана с невозможностью объяснить все наблюдаемые формы их спиральной структуры с помощью какого-либо одного типа моделей [12–14]. Основная часть моделей относится к теории волны плотности [15–19], другая часть опирается на теорию динамических спиралей, связанную с численными моделями задачи N тел [20–22].

Модели теории волны плотности можно разделить на два класса. Это кинематический подход [15], опирающийся на модели орбитального движения отдельных звезд в галактиках и подход, основанный на уравнениях динамики сплошной среды с использованием бесстолкновительного уравнения Больцмана [18, 19]. Кинематический подход является достаточно упрощенным способом описания структуры галактик и отражает лишь самые общие свойства их динамики [15]. Подход, основанный на использовании уравнения Больцмана, требует знания распределения звезд в галактике по скоростям, получить которые из экспериментальных данных достаточно сложно [18, 19]. Кроме этого, все имеющиеся варианты теории волны плотности при анализе пространственного распределения плотности массы вынуждены прибегать к линеаризации получающихся уравнений динамики, поскольку исходная задача оказывается существенно нелинейной.

Новым подходом к теории спиральных структур является теория динамического равновесия дисковых галактик [7, 8]. Этот подход опирается на гидродинамические модели сплошной самогравитирующей среды и вместо вероятностных уравнений Больцмана использует непосредственно гидродинамические уравнения Эйлера. Поскольку в таком подходе скорости точек среды детерминированы, то не возникает трудностей с вероятностным распределением звезд по скоростям. Важным элементом нового подхода, позволяющим решать задачу без линеаризации исходных уравнений, является представление параметров среды и напряженности ее собственного поля тяготения с помощью лагранжевых переменных или маркеров. Это позволяет включить в общую схему моделей динамического равновесия и описание спиральных структур дисковых галактик.

Еще одной важной частью предлагаемого подхода является использование квазиклассической теории тяготения для объяснения эффекта скрытой массы. В данной работе общая идеология квазиклассической теории гравитационного поля [7, 8] обобщается, что позволяет использовать ее для описания спиральной структуры галактик в условиях динамического равновесия для более общих граничных условий, чем в работе [8]. Основной задачей данной работы является построение модели динамического равновесия галактик со спиральными структурами.

1. Описание динамики сплошной среды в отсутствие цилиндрической симметрии

В классической механике для описания среды, заполняющей трехмерное пространство, с точки зрения лагранжева подхода необходимо вводить три лагранжевы переменные $e^a(\boldsymbol{x},t)$, $a=1,2,3$, называемые далее маркерами, которые удовлетворяют по определению трем однотипным уравнениям:

$$\frac{de^a}{dt} \equiv \frac{\partial e^a}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = 0, \ a=1,2,3. \tag{1}$$

Здесь и далее $\boldsymbol{x}=\left(x^1,x^2,x^3\right)$. Следствием этой системы уравнений [7, 8, 23] является соотношение

$$\frac{\partial M(\boldsymbol{e})|\boldsymbol{J}|}{\partial t} + \mathrm{div}\left(M|\boldsymbol{J}|u\right) = 0, \tag{2}$$

где $M(\boldsymbol{e})=M_0\aleph(\boldsymbol{e})$, M_0 – постоянная размерности массы; $\aleph(\boldsymbol{e})$ – произвольная безразмерная дифференцируемая функция маркеров $\boldsymbol{e}=\left(e^1,e^2,e^3\right)$;

$u=\left(u^1,u^2,u^3\right)$ – декартовы компоненты поля скоростей гидродинамического потока. Концентрация маркеров n определяется соотношением

$$n=|\boldsymbol{J}|=\left|\det\hat{\boldsymbol{J}}\right|, \tag{3}$$

где $\left|\det\hat{\boldsymbol{J}}\right|$ – якобиан преобразования $e\to x$ с матрицей Якоби:

$$\hat{\boldsymbol{J}}=\left(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha}\right). \tag{4}$$

Соотношение (2) в гидродинамике интерпретируется как уравнение неразрывности (сохранения массы)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho u)=0 \tag{5}$$

при определении плотности среды ρ в соответствии с формулой

$$\rho=M_0\aleph(\boldsymbol{e})|J|, \tag{6}$$

здесь M_0 – постоянная размерности массы. Функция $\aleph(\boldsymbol{e})$ описывает относительную массу отдельных частиц, помеченных различными маркерами e. Если все частицы среды имеют одинаковую массу, то $\aleph=1$ и плотность среды просто пропорциональна концентрации n. Поэтому $\aleph(\boldsymbol{e})$ будем называть относительной массивностью частиц среды.

На основе (6) в работе [7] было показано, что точное решение обобщенного уравнения Пуассона

$$\operatorname{div}\boldsymbol{g}=-4\pi GD\rho=-4\pi G\left(\rho+\rho_D\right) \tag{7}$$

относительно напряженности g поля тяготения с учетом эффекта скрытой массы с плотностью $\rho_D=(D-1)\rho$ можно в общем случае представить в следующем виде:

$$g^\alpha=-\frac{4\pi G}{3}M_0\Xi(\boldsymbol{e},t)|J|e^a\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}+[\operatorname{rot}\boldsymbol{U}]^\alpha, \tag{8}$$

здесь G – постоянная тяготения Ньютона, а вспомогательная функция Ξ связана с функцией D соотношением

$$D=\frac{\Xi}{\aleph}\left(1+\frac{1}{3}e^a\frac{\partial}{\partial e^a}\ln\Xi(\boldsymbol{e},t)\right). \tag{9}$$

Для удобства введем векторное поле $K=\left(K^1,K^2,K^3\right)$ с компонентами:

$$K^\alpha=e^a\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}. \tag{10}$$

Векторное поле $\boldsymbol{U}$ является аналогом калибровочного поля, позволяющего добиться того, что $\boldsymbol{g}$ будет некоторым градиентным полем, что требует условие консервативности классического поля тяготения. Если $D=1$, то уравнение Пуассона (7) будет совпадать с уравнением для классической теории тяготения, а поле (8) будет решением классического уравнения Пуассона при подходящем выборе поля $\boldsymbol{g}_Z = \operatorname{rot}\boldsymbol{U}$, компенсирующего вихревую составляющую этого поля [7]. В общем же случае (9) с $D \neq 1$ общее точное решение (8) позволяет использовать его для описания эффекта скрытой массы с плотностью «темной» массы ρ_D [7, 8].

2. Автомодельная эволюция сплошной среды

По аналогии с работой [8] рассмотрим уравнения динамики пылевидной среды в цилиндрической системе координат (r,φ,z), где r – радиальная координата, z – вертикальная, φ – азимутальный угол. Уравнения Эйлера классической механики сплошной среды для компонентов скорости потока $v=(u,w,v)$ (u – радиальная компонента, w – вертикальная, а v – зональная) будут иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt}u-\frac{v^2}{r}=g^1, \frac{d}{dt}w=g^2, \frac{d}{dt}v+\frac{vu}{r}=g^3,$$
$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}+w\frac{\partial}{\partial z}+\frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{g}=\left(g^1,g^2,g^3\right)$ – компоненты напряженности гравитационного поля в цилиндрической системе координат (g^1 – радиальная, g^2 – вертикальная, g^3 – азимутальная).

Уравнения (11) необходимо дополнить уравнением неразрывности (5) и уравнением Пуассона (7), решение которых уже получено в терминах маркеров $e^a(\boldsymbol{x},t)$ в виде соотношений (6) и (8). Поэтому для получения решений общей системы уравнений (11), (5) и (7) остается выразить также и скорость гидродинамического потока через маркеры. Это можно сделать в рамках предположения, что исследуемая система находится в динамическом равновесии [23].

Для описания динамического равновесия [23] используются автомодельные переменные, которые по определению сами должны являться маркерами или функциями маркеров. Наиболее простым и полезным в рамках данной задачи способом введения автомодельных переменных является представление соответствующих компонентов скорости потока в форме обобщенного потока Хаббла:

$$u=\frac{dr}{dt}=\dot{a}\xi(\boldsymbol{e}), v=\frac{dz}{dt}=\dot{b}\zeta(\boldsymbol{e}), \tag{12}$$

где $\xi=\xi(\boldsymbol{e})$ и $\zeta=\zeta(\boldsymbol{e})$ – автомодельные переменные; $a(t)$ и $b(t)$ – масштабные факторы, $\boldsymbol{e}=\left(e^1,e^2,e^3\right)$. Если проинтегрировать эти соотношения по t вдоль траекторий движения частиц, т.е. при условии $\boldsymbol{e}=\mathrm{const}$, получаем следующие соотношения:

$$r=a(t)\xi(\boldsymbol{e})+r_0(\boldsymbol{e}),\ z=b(t)\zeta(\boldsymbol{e})+z_0(\boldsymbol{e}),$$

где $r_0(\boldsymbol{e})$ и $z_0(\boldsymbol{e})$ – постоянные интегрирования.

В простейшем случае $r_0(\boldsymbol{e})=z_0(\boldsymbol{e})=0$ автомодельные переменные имеют стандартный вид [7, 8, 23]:

$$\xi=r/a(t),\zeta=z/b(t). \tag{13}$$

Поскольку наличие спиральных рукавов в галактиках означает нарушение цилиндрической симметрии, то в описание таких объектов необходимо ввести дополнительную автомодельную переменную $\theta=\theta(\xi,\zeta,\varphi,t)$. Эта новая автомодельная переменная должна отражать в условиях динамического равновесия зависимость параметров среды от азимутального угла φ. Чтобы ввести такую переменную, рассмотрим третье уравнение системы (11), полагая $g^3=0$. В этом случае приходим к уравнению сохранения удельного момента импульса:

$$\frac{d}{dt}(rv)=rg^3=0. \tag{14}$$

Это уравнение имеет общее решение:

$$vr=L(\boldsymbol{e}), \tag{15}$$

которое представляет собой закон сохранения удельного момента импульса L частиц среды. Из (15) следует соотношение для азимутальной скорости:

$$v=r\frac{d\varphi}{dt}=\frac{L(\boldsymbol{e})}{r}.$$

С учетом (13) приходим к уравнению для азимутального угла в следующем виде:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{a^2(t)}\Omega_0(\boldsymbol{e}),\ \Omega_0(\boldsymbol{e})=\frac{L(\boldsymbol{e})}{\xi^2}.$$

Функцию $\Omega_0(e)$ будем называть коэффициентом локальной угловой скорости зонального потока.

Интегрируя последнее соотношение по t, находим дополнительную автомодельную переменную θ, связанную с φ следующим образом:

$$\theta=\varphi-\Omega(\boldsymbol{e},t), \tag{16}$$

где

$$\Omega = c(t)\Omega_0(\boldsymbol{e}),\ c(t) = \int \frac{dt}{a^2(t)}. \tag{17}$$

Именно эта автомодельная переменная будет описывать зависимость переменных среды от азимутального угла φ.

3. Параметры среды и поля в автомодельных переменных

Наличие дополнительной автомодельной переменной в описании динамического равновесия среды с нарушенной цилиндрической симметрией требует дополнительных вычислений матрицы преобразования от пространственных переменных к автомодельным. Имеем:

$$\hat{\boldsymbol{I}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \zeta} & \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ \xi\Omega_\xi & \xi\Omega_\zeta & 1+\Omega_\theta \end{pmatrix}.$$

Соответственно, обратная матрица $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{I}}^{-1}$ имеет следующий вид:

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial r} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} & \frac{\partial \theta}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{\Omega_\xi}{aC} & -\frac{\Omega_\zeta}{bC} & \frac{1}{C} \end{pmatrix},$$

где

$$C = 1 + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}. \tag{18}$$

Для того чтобы плотность допускала разделение переменных, необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = 0, \tag{19}$$

что дает $C = 1$. Это важное условие означает, что коэффициент локальной угловой скорости $\Omega = \Omega(\xi, \zeta, t)$ не зависит от азимутального угла.

Учитывая (6), находим:

$$|\boldsymbol{J}| = \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = \frac{1}{r}|\boldsymbol{J}|\det\hat{J} = \frac{|\boldsymbol{J}|}{a^2(t)b(t)\xi},$$

где

$$\boldsymbol{J} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial E^1}{\partial \xi} & \frac{\partial E^1}{\partial \zeta} & \frac{\partial E^1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial E^2}{\partial \xi} & \frac{\partial E^2}{\partial \zeta} & \frac{\partial E^2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial E^3}{\partial \xi} & \frac{\partial E^3}{\partial \zeta} & \frac{\partial E^3}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

является функцией только автомодельных переменных, поскольку $E^a(\xi,\zeta,\theta) = e^a(r,z,\varphi,t)$, а $N = |\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e})|$ – представляет собой коэффициент плотности числа частиц.

В новых переменных плотность среды будет иметь следующий вид:

$$\rho = M_0 \aleph(\boldsymbol{e})|\boldsymbol{J}| = \frac{M_0 \aleph(\boldsymbol{e})|\boldsymbol{J}|}{a^2(t)b(t)\xi} = \frac{M_0 R}{a^2(t)b(t)}, \tag{20}$$

где R – коэффициент плотности среды,

$$R = \frac{\aleph(\boldsymbol{e})N(\boldsymbol{e})}{\xi}. \tag{21}$$

В результате вычисление компонентов напряженности поля тяготения строится на базе следующих соотношений:

$$\tilde{\tilde{K}}^{\alpha} = e^a \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial e^a} = E^a \frac{\partial X^{\beta}}{\partial E^a} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial X^{\beta}},$$

здесь и далее $X^1 = \xi, X^2 = \zeta, X^3 = \theta$, $\boldsymbol{X} = \left(X^1, X^2, X^3\right)$.

Введем дополнительно обозначения:

$$K^1 = E^a \frac{\partial \xi}{\partial E^a}, K^2 = E^a \frac{\partial \zeta}{\partial E^a}, K^3 = E^a \frac{\partial \theta}{\partial E^a}. \tag{22}$$

Тогда имеем следующие соотношения:

$$\tilde{K}^{\alpha} = I^{\alpha}_{\beta} K^{\beta},$$

где I^{α}_{β} – компоненты матрицы $\hat{\boldsymbol{I}}$.

В покомпонентном виде последние соотношения с учетом формы матрицы $\hat{I}$ имеют следующий вид:

$$K^1 = a(t)K^1, K^2 = b(t)K^2, \tag{23}$$

$$K^3 = a\xi\left(\Omega_{\xi} K^1 + \Omega_{\zeta} K^2 + K^3\right).$$

Прямой проверкой убеждаемся, что для компонентов вектора K выполняется тождество:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Xi\boldsymbol{J}K^1\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\Xi\boldsymbol{J}K^2\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Xi\boldsymbol{J}K^3\right)=3\xi DR, \tag{24}$$

где D определяется соотношением (9).

Переход к записи поля $\operatorname{rot}\boldsymbol{U}$ в автомодельных переменных основывается на следующих общих соотношениях для любой функции $F\left(r,z,\varphi,t\right)=$ $=F\left(\xi,\zeta,\theta,t\right)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\partial F}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r}=\frac{1}{a}\frac{\partial F}{\partial\xi}-\frac{1}{a}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\frac{\partial F}{\partial\theta},\\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{b}\frac{\partial F}{\partial\zeta}-\frac{1}{b}\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\frac{\partial F}{\partial\theta},\\ \frac{\partial F}{\partial\phi}=\frac{\partial F}{\partial\theta}.\end{gathered} \tag{25}$$

Используя эти соотношения, выражения для компонентов $\operatorname{rot}\boldsymbol{U}$ можно представить в следующей форме:

$$[\operatorname{rot}\boldsymbol{U}]^1=\frac{1}{a\xi}\frac{\partial U^2}{\partial\theta}-\frac{1}{b}\frac{\partial U^3}{\partial\zeta}+\frac{1}{b}\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\frac{\partial U^3}{\partial\theta},$$

$$[\operatorname{rot}\boldsymbol{U}]^2=\frac{1}{a}\frac{\partial U^3}{\partial\xi}-\frac{1}{a}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\frac{\partial U^3}{\partial\theta}+\frac{1}{a\xi}U^3-\frac{1}{a\xi}\frac{\partial U^1}{\partial\theta},$$

$$[\operatorname{rot}\boldsymbol{U}]^3=\frac{1}{b}\frac{\partial U^1}{\partial\zeta}-\frac{1}{b}\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\frac{\partial U^1}{\partial\theta}-\frac{1}{a}\frac{\partial U^2}{\partial\xi}+\frac{1}{a}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\frac{\partial U^2}{\partial\theta},$$

здесь U^α, $\alpha=1,2,3,$ – компоненты поля: $U\left(\xi,\zeta,\theta,t\right)=U\left(r,z,\varphi,t\right)$.

4. Разделение переменных

Уравнения динамики в автомодельных переменных теперь можно представить следующим образом:

$$\ddot{a}\xi-a^{-3}\Omega_0^2\xi=g^1,\ddot{a}\zeta=g^2,g^3=0. \tag{26}$$

Подставляя в эти уравнения значения компонентов напряженности поля тяготения, приходим к следующим уравнениям:

$$\ddot{a}\xi=-\frac{\Gamma_0}{ab\xi}\Xi|\boldsymbol{J}|K^1+\frac{1}{a\xi}\frac{\partial U^2}{\partial\theta}-\frac{1}{b}\frac{\partial U^3}{\partial\zeta}+\frac{1}{b}\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\frac{\partial U^3}{\partial\theta}+\frac{\Omega_0^2\xi}{a^3},$$

$$\ddot{b}\zeta=-\frac{\Gamma_0}{a^2\xi}\Xi|\boldsymbol{J}|K^2+\frac{1}{a}\frac{\partial U^3}{\partial\xi}-\frac{1}{a}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\frac{\partial U^3}{\partial\theta}+\frac{1}{a\xi}U^3-\frac{1}{a\xi}\frac{\partial U^1}{\partial\theta}, \tag{27}$$

$$-\frac{\Gamma_0}{a^2 b\xi}\Xi|\boldsymbol{J}|\left(\Omega_\xi K^1+\Omega_\zeta K^2+K^3\right)+\frac{1}{b}\frac{\partial U^1}{\partial\zeta}-\frac{1}{b}\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\frac{\partial U^1}{\partial\theta}-\frac{1}{a}\frac{\partial U^2}{\partial\xi}+\frac{1}{a}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\frac{\partial U^2}{\partial\theta}=0.$$

Здесь введено обозначение: $\Gamma_0=4\pi G M_0/3$. Компоненты векторного поля $\boldsymbol{K}=\left(K^1,K^2,K^3\right)$, а также J являются функциями автомодельных переменных и не зависят от времени. В то же время компоненты векторного поля $U=\left(U^1,U^2,U^3\right)$ могут зависеть от времени, как и функция Ξ. Поэтому требуется указать такое разделение последних на аддитивные слагаемые, зависящие от времени, при которых уравнения динамики позволяли бы провести разделение переменных по аналогии с работами [7, 23, 24]. Для получения замкнутой системы уравнений после разделения переменных потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\Xi=\frac{b(t)}{a^2(t)}\Xi_\omega+\sum_{j=0}^{\infty}f_j(t)\Xi_j(\boldsymbol{X}),\ D=\frac{b(t)}{a^2(t)}D_\omega+\sum_{j=0}^{\infty}f_j(t)D_j(\boldsymbol{X}),$$

$$U^3=\frac{\Gamma_0 b(t)}{a^3(t)}Q_\omega(\boldsymbol{X})+\frac{\Gamma_0}{a(t)}\sum_{j=0}^{\infty}f_j(t)Q_j(\boldsymbol{X}), \tag{28}$$

$$U^1=\frac{\Gamma_0 b(t)}{a^3(t)}\left(U_{11}(\boldsymbol{X})+\frac{1}{a(t)}U_{12}(\boldsymbol{X})\right)+\frac{\Gamma_0}{a(t)}\sum_{j=0}^{\infty}f_j(t)\left(V_{11j}(\boldsymbol{X})+\frac{1}{a(t)}V_{12j}(\boldsymbol{X})\right),$$

$$U^2=\frac{\Gamma_0}{a^2(t)}\left(U_{21}(\boldsymbol{X})+\frac{1}{a(t)}U_{22}(\boldsymbol{X})\right)+\frac{\Gamma_0}{b(t)}\sum_{j=0}^{\infty}f_j(t)\left(V_{21j}(\boldsymbol{X})+\frac{1}{a(t)}V_{22j}(\boldsymbol{X})\right).$$

Слагаемые в этих соотношениях, имеющие индекс ω, а также слагаемые с $U_{ij}(\boldsymbol{X})$, $i=1,2;$ $j=1,2,$ относятся к составляющим поля тяготения, связанными с вращением среды. Дополнительные ряды с коэффициентами $f_j(t)$ относятся к условно «невращающимся» параметрам поля. Подставляя эти соотношения в уравнения (24), (27) и проводя разделение переменных, приходим к системе уравнений для пространственных функций поля g.

Из уравнения (24) следуют следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Xi_j JK^1\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\Xi_j JK^2\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Xi_j JK^3\right)=3\xi D_j R,\ j=0,\ldots,\infty; \tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Xi_\omega JK^1\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\Xi_\omega JK^2\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Xi_\omega JK^3\right)=3\xi D_\omega R.$$

Первое уравнение системы (27) приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{f_j}{ab}:-JK^1\Xi_j+\frac{\partial V_{21j}}{\partial\theta}-\frac{\partial Q_j}{\partial\zeta}\xi=\varpi_{1j}\xi^2\ j=0,\ldots,\infty; \tag{30}$$

$$\frac{1}{a^3}: -JK^1\Xi_\omega + \frac{\partial U_{21}}{\partial\theta} - \frac{\partial Q_\omega}{\partial\zeta}\xi + \frac{1}{\Gamma_0}\Omega_0^2\xi^2 = \kappa_1\xi^2.$$

Второе уравнение системы (27) сводится также к двум уравнениям:

$$\frac{f_j}{a^2}: -JK^2\Xi_j + \xi\frac{\partial Q_j}{\partial\xi} + Q_j - \frac{\partial V_{11j}}{\partial\theta} = \varpi_{2j}\xi\zeta, j = 0,\ldots,\infty; \tag{31}$$

$$\frac{b}{a^4}: -JK^2\Xi_\omega + \xi\frac{\partial Q_\omega}{\partial\xi} + Q_\omega - \frac{\partial U_{11}}{\partial\theta} = \kappa_2\xi\zeta.$$

В этих уравнениях $\varpi_{kj}, \kappa_k, k = 1,2,$ – произвольные вещественные параметры разделения переменных. Кроме этого, должны выполняться условия:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}Q_\omega = 0, \frac{\partial}{\partial\theta}Q_j = 0, j = 0,\ldots,\infty; \tag{32}$$

$$\frac{\partial U_{12}}{\partial\theta} = \frac{\partial U_{22}}{\partial\theta} = 0,\ \frac{\partial V_{12j}}{\partial\theta} = \frac{\partial V_{22j}}{\partial\theta} = 0, j = 0,\ldots,\infty.$$

Отсюда следуют соотношения:

$$Q_\omega = Q_\omega(\xi,\zeta); U_{l2} = U_{l2}(\xi,\zeta), U_{22} = U_{22}(\xi,\zeta), \tag{33}$$

$$Q_j = Q_j(\xi,\zeta), V_{k2j} = V_{k2j}(\xi,\zeta), k = 1,2, j = 0,\ldots,\infty.$$

Соответствующие соотношениям (30) и (31) уравнения для масштабных факторов принимают такой вид:

$$\ddot{a} = \frac{\mu_1}{a^3} + \frac{F_1(t)}{ab}, \quad \ddot{b} = \frac{\mu_2}{a^4}b + \frac{F_2(t)}{a^2}, \tag{34}$$

где

$$F_k = \sum_{j=0}^{\infty}\nu_{kj}f_j(t), k = 1,2; j = 0,\ldots,\infty, \tag{35}$$

$$\nu_{kj} = \Gamma_0\varpi_{kj},\ \mu_k = \Gamma_0\kappa_k,\ k = 1,2. \tag{36}$$

Системы уравнений (30), (31) и (34) подобны системам уравнений, которые рассматривались в [7, 8]. Отличие заключается в появлении бесконечного числа слагаемых рядов разложения поля тяготения, что приводит к фактически произвольным функциям $F_k(t),\ k = 1,2$. Произвол в этих функциях, как будет показано далее, связан с произвольностью граничных условий для исходной системы уравнений.

Третье уравнение системы (27) приводит к трем подсистемам. Первая из них может быть представлена в следующей форме:

$$\frac{\partial V_{11j}}{\partial\zeta} - \frac{\partial V_{21j}}{\partial\xi} = 0, j = 0,\ldots,\infty;\ \frac{\partial U_{11}}{\partial\zeta} - \frac{\partial U_{21}}{\partial\xi} = 0. \tag{37}$$

Вторая подсистема сводится к уравнениям:

$$-\Omega_{0,\zeta}\frac{\partial V_{11j}}{\partial\theta}+\Omega_{0,\xi}\frac{\partial V_{21j}}{\partial\theta}=0,\ j=0,\dots,\infty;$$

$$-\Omega_{0,\zeta}\frac{\partial U_{11}}{\partial\theta}+\Omega_{0,\xi}\frac{\partial U_{21}}{\partial\theta}=0. \tag{38}$$

Третья подсистема записывается следующим образом:

$$-\frac{J}{\xi}\Xi_j K^3+\frac{\partial V_{12j}}{\partial\zeta}-\frac{\partial V_{22j}}{\partial\xi}=0,\ j=0,\dots,\infty;$$

$$-\frac{J}{\xi}\Xi_\omega K^3+\frac{\partial U_{12}}{\partial\zeta}-\frac{\partial U_{22}}{\partial\xi}=0,$$

$$\Omega_{0,\xi}K^1+\Omega_{0,\zeta}K^2=0. \tag{39}$$

Из первой подсистемы находим:

$$V_{11j}=\frac{\partial\Phi_j}{\partial\xi},V_{21j}=\frac{\partial\Phi_j}{\partial\zeta},U_{11}=\frac{\partial\Phi_\omega}{\partial\xi},U_{21}=\frac{\partial\Phi_\omega}{\partial\zeta}, \tag{40}$$

где $\Phi_j=\Phi_j(\xi,\zeta,\theta)$ и $\Phi_\omega(\xi,\zeta,\theta)$ – некоторые новые функции.

Из второй подсистемы получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Omega_0}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\xi}-\frac{\partial\Omega_0}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\zeta}\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Omega_0}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi_\omega}{\partial\xi}-\frac{\partial\Omega_0}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi_\omega}{\partial\zeta}\right)=0,$$

отсюда получаем

$$\frac{\partial\Omega_0}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\xi}-\frac{\partial\Omega_0}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\zeta}=H_{1j}(\xi,\zeta),$$

$$\frac{\partial\Omega_0}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi_\omega}{\partial\xi}-\frac{\partial\Omega_0}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi_\omega}{\partial\zeta}=H_\omega(\xi,\zeta), \tag{41}$$

где $H_{1j}(\xi,\zeta)$ и $H_\omega(\xi,\zeta)$ – некоторые произвольные функции.

Из систем (39) и (32) следует:

$$|J|\Xi_j K_3=W_j(\xi,\zeta)=-\frac{\partial V_{12j}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V_{22j}}{\partial\xi},\ j=0,\dots,\infty,$$

$$|J|\Xi_\omega K_3=W_\omega(\xi,\zeta)=-\frac{\partial U_{12}}{\partial\zeta}+\frac{\partial U_{22}}{\partial\xi}, \tag{42}$$

$$\Xi_j/W_j=\Xi_\omega/W_\omega,\ j=0,\dots,\infty,$$

где $W_j(\xi,\zeta)$ и $W_\omega(\xi,\zeta)$ – произвольные функции, определяющиеся в начальный момент времени.

Из последних соотношений системы (42) следует, что

$$\Xi_j = \Xi_\omega \frac{W_j}{W_\omega}, \; j = 0,\ldots,\infty. \quad (43)$$

5. Анализ уравнений пространственного распределения полей

Соотношения (40) позволяют системы (30) и (31) сгруппировать по-новому и записать их в следующей форме:

$$-JK^1\Xi_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial \zeta} = \varpi_{1j}\xi^2,$$

$$-JK^2\Xi_j - \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi} = \varpi_{2j}\xi\zeta, \; j = 0,\ldots,\infty, \quad (44)$$

и

$$-JK^1\Xi_\omega + \frac{\partial \Psi_\omega}{\partial \zeta} + \frac{1}{\Gamma_0}\Omega_0^2\xi^2 = \kappa_1\xi^2, \quad (45)$$

$$-JK^2\Xi_\omega - \frac{\partial \Psi_\omega}{\partial \xi} = \kappa_2\xi\zeta,$$

где введены обозначения:

$$\Psi_j = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \theta} - \xi Q_j, \; j = 1,\ldots,\infty; \Psi_\omega = \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial \theta} - \xi Q_\omega. \quad (46)$$

Учитывая теперь последнее уравнение системы (39), получаем дополнительные ограничения на вид функций Ψ_j и Ψ_ω, которые могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi} - \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi}\frac{\partial \Psi_j}{\partial \zeta} = \varpi_{1j}\xi^2\frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} - \varpi_{2j}\xi\zeta\frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \Psi_\omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi}\frac{\partial \Psi_\omega}{\partial \zeta} = \left(\kappa_1 - \frac{1}{\Gamma_0}\Omega_0^2\right)\xi^2\frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} - \kappa_2\xi\zeta\frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi}.$$

Учитывая (41), из этих соотношений получаем уравнения для функций Q_j и Q_ω в следующей форме:

$$\left(\varpi_{1j}\xi^2 + \frac{\partial\left(\xi Q_j\right)}{\partial \zeta}\right)\Omega_{0,\xi} + \left(\varpi_{2j}\xi\zeta - \frac{\partial\left(\xi Q_j\right)}{\partial \xi}\right)\Omega_{0,\zeta} = 0,$$

$$\left(\kappa_1\xi^2 + \frac{\partial(\xi Q_\omega)}{\partial \zeta} - \frac{1}{\Gamma_0}\xi^2\Omega_0^2\right)\Omega_{0,\xi} + \left(\kappa_2\xi\zeta - \frac{\partial(\xi Q_\omega)}{\partial \xi}\right)\Omega_{0,\zeta} = 0. \quad (47)$$

Для выяснения свойств пространственного распределения поля тяготения вычислим дивергенцию поля K , используя уравнения (44) и (45). В результате получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J\Xi_j K^1\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(J\Xi_j K^2\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(J\Xi_j K^3\right)=-\left(2\varpi_{1j}+\varpi_{2j}\right)\xi, \qquad (48)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J\Xi_\omega K^1\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(J\Xi_\omega K^2\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(J\Xi_\omega K^3\right)=-\left(2\kappa_1+\kappa_2\right)\xi+\frac{1}{\Gamma_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\Omega_0^2\right). \qquad (49)$$

Здесь учитывалось, что функции $V_{12j},V_{22j},U_{12},U_{22}$ не зависят от θ. Используя теперь тождество (24), уравнения (48) и (49) приводим к более простому виду:

$$D_j=-\frac{\Lambda_j}{R},D_\omega=-\frac{\Lambda_\omega}{R}+\frac{1}{3\Gamma_0}\frac{1}{\xi R}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\Omega_0^2\right), \qquad (50)$$

здесь

$$\Lambda_j=\frac{1}{3}\left(2\varpi_{1j}+\varpi_{2j}\right),\Lambda_\omega=\frac{1}{3}\left(2\kappa_1+\kappa_2\right).$$

Используя (28) и определение плотности (20), окончательно получаем:

$$D=\frac{1}{R}\left(-F(t)+\frac{f_\omega(t)}{3\Gamma_0}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\Omega_0\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{M_0}{a^2 b}\left(-F(t)+\frac{f_\omega(t)}{3\Gamma_0}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\Omega_0^2\right)\right), \qquad (51)$$

здесь

$$F=\frac{1}{3}\left(2F_1(t)+F_2(t)\right)+f_\omega(t)\Lambda_\omega,f_\omega(t)=\frac{b(t)}{a^2(t)}. \qquad (52)$$

Из соотношений (43) и (50) следует, что функции Ξ_j можно представить в следующем общем виде:

$$\Xi_j=\varpi_j\Xi_s(\xi,\zeta,\theta),\Xi_\omega=W_\omega(\xi,\zeta)\Xi_s(\xi,\zeta,\theta), \qquad (53)$$

где ϖ_j – постоянные, при этом $W_j=\varpi_j=\text{const}$. Из этих соотношений и формы уравнений (44) следует, что функции Ψ_j, а также постоянные ϖ_{1j} и ϖ_{2j} должны иметь такой вид:

$$\Psi_j=\varpi_j\Psi_s(\xi,\zeta,\theta),\varpi_{1j}=\lambda_1\varpi_j,\varpi_{2j}=\lambda_2\varpi_j,\Lambda_j=\frac{1}{3}\varpi_j\Lambda, \qquad (54)$$

где λ_1 и λ_2 – некоторые произвольные постоянные и $\Lambda=2\lambda_1+\lambda_2$. В результате уравнения (44) сводятся к уравнениям для одной функции Ξ_s:

$$-JK^1\Xi_s+\frac{\partial\Psi_s}{\partial\zeta}=\lambda_1\xi^2,\ -JK^2\Xi_s-\frac{\partial\Psi_s}{\partial\xi}=\lambda_2\xi\zeta. \qquad (55)$$

Соответственно функции D_j и W_j можно представить в аналогичной форме:

$$D_j=\varpi_j D_s, D_s=-\frac{\Lambda}{3R}, W_j=\varpi_j W_s. \qquad (56)$$

Этот факт сводит систему уравнений для Ξ_s и Ξ_ω в точности к системе уравнений, рассмотренной в [8] для дисковых галактик с цилиндрической симметрией. Соотношения (54) также модифицируют и функции $F_1(t),\ F_2(t)$:

$$F_k=\lambda_k F_0(t), k=1,2; F_0=\Gamma_0\sum_{j=0}^{\infty}\varpi_j f_j(t),$$

$$F=\frac{1}{3}\Lambda F_0(t)+\Lambda_\omega f_\omega(t). \qquad (57)$$

Соответственно уравнения эволюции будут выглядеть теперь так:

$$\ddot{a}=\frac{\mu_1}{a^3}+\frac{\nu_1}{ab}F_0(t), \ddot{b}=\frac{\mu_2}{a^4}b+\frac{\nu_2}{a^2}F_0(t), \qquad (58)$$

где $\nu_k=\Gamma_0\lambda_k, k=1,2$.

6. Переход к классическому полю тяготения

Как отмечалось ранее, случай $D=1$ соответствует классическому уравнению Пуассона. Если это требование применить к соотношению (51), то из этого соотношения получаем связь между плотностью среды и коэффициентом угловой скорости зонального потока Ω_0. Учитывая (20), эту связь удобно записать в следующей форме:

$$R(X)=-F(t)+\frac{f_\omega(t)}{3\Gamma_0}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\Omega_0^2(\xi,\zeta)\right). \qquad (59)$$

Поскольку функции R и Ω_0 зависят только от автомодельных переменных, то последнее соотношение может иметь место только в случае выполнения двух условий:

$$F_0(t)=\gamma=\text{const}, f_\omega(t)=\frac{b}{a^2}=\varepsilon=\text{const}. \qquad (60)$$

Отсюда следует, что $F(t)=\Lambda\gamma/3+\varepsilon=\text{const}$. При выполнении условий (60) уравнения эволюции масштабных факторов можно привести к следующему виду:

$$\ddot{a} = \frac{\mu_1}{a^3} + \frac{\nu_1 \gamma}{ab}, \ddot{b} = \frac{\mu_2}{a^4} b + \frac{\nu_2 \gamma}{a^2}, \quad (61)$$

который совпадает с уравнениями, исследованными в [8]. Кроме этого, при выполнении этих же условий связь между коэффициентом плотности R и Ω_0 примет такой вид:

$$R = -\Lambda\gamma / 3 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{3\Gamma_0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \Omega_0^2 \right). \quad (62)$$

Фактически это соотношение в рамках данной теории может служить способом проверки новой теории и ее отличия от классической теории тяготения. Самым простым выводом, который следует из соотношения (62), является невозможность появления спиральной структуры в дисковых галактиках при его выполнении. Действительно, при наличии связи (62), поскольку $\Omega_0 = \Omega(\xi, \zeta)$ не зависит от угловой переменной θ, плотность среды также не будет зависеть от нее. Следовательно, динамическое равновесие при наличии спиральной структуры невозможно в рамках классической теории тяготения. Поэтому при условии классической формы уравнения Пуассона модель будет способна описывать лишь дисковые галактики с цилиндрической симметрией распределения плотности, которое определяется соотношением (62).

Кроме требования выполнения уравнения (62) для полного перехода к классической теории тяготения в рамках рассматриваемой теории динамического равновесия необходимо еще одно требование. В рамках ньютоновской теории тяготения требуется также, чтобы напряженность поля тяготения была градиентом некоторого потенциала:

$$g = -\nabla\phi. \quad (63)$$

Для проверки этого требования необходимо рассмотреть уравнения (26), которые для этого полезно представить в таком виде:

$$g^1 = \ddot{a}\xi - a^{-3}\Omega_0^2 \xi, g^2 = \ddot{b}\zeta. \quad (64)$$

Для выполнения (63) необходимо, чтобы ротор от g обращался в ноль. Единственная компонента ротора $\operatorname{rot} g$, которая может быть отлична от нуля, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} g^1 - \frac{\partial}{\partial \xi} g^2 = -a^{-3} \xi \frac{\partial}{\partial \zeta} \Omega_0^2.$$

Отсюда следует, что вихревая составляющая поля тяготения обращается полностью в ноль при выполнении условия

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \Omega_0 = 0, \quad (65)$$

т.е. в случае, если коэффициент угловой скорости не зависит от $\zeta = z / b(t)$. Если же угловая скорость меняется в зависимости от расстояния до экваториальной плоскости, то для существования динамического равновесия с радиальным потоком (12) и зональным потоком со скоростью $v = a^{-2}\xi\Omega_0$ необходима неклассическая форма поля тяготения с вихревой составляющей, поддерживающей дифференциальное вращение среды, зависящее от вертикальной координаты z. В силу этого в случае общей зависимости Ω от ζ полного перехода к классической теории тяготения при $D = 1$ в данной модели не происходит. Это означает, что в случае чисто классической теории тяготения даже при отсутствии эффекта скрытой массы ($D = 1$) при общей зависимости Ω от z динамическое равновесие с потоком (12) не может реализовываться. В этом случае и статическое равновесие с вращением среды реализоваться не может, поскольку статическое равновесие является частным случаем динамического равновесия. Более того, в силу требования выполнения уравнения (62) в рамках классической теории дисковые структуры не могут находиться ни в динамическом, ни статическом равновесии, поскольку в этом случае и плотность среды ρ будет зависеть только от ξ: $\rho = M_0 R(\xi) a^{-2}(t) b(t)$.

7. Уравнение Пуассона и гравитационная проницаемость среды

Полученное решение (51) для функции D позволяет также по-новому взглянуть на суть эффекта скрытой массы, опираясь на аналогию между уравнениями Пуассона для электрического поля в диэлектрической среде и поля тяготения в обобщенной форме (7). Уравнение Пуассона для напряженности электрического поля E в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \text{const}$ можно записать в следующей форме (в системе СГС):

$$\mathrm{d}ivE = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_e, \tag{66}$$

где ρ_e – плотность электрических зарядов. Сравнивая это уравнение с (7), видим, что функция $G \cdot D$ аналогична величине ε^{-1}. С другой стороны, функция D, определенная соотношением (9), обратно пропорциональна функции относительной массивности частиц среды $\aleph(\boldsymbol{e})$. Действительно, уравнение Пуассона (7) можно записать в такой форме:

$$\mathrm{d}ivg = -4\pi G D\rho = -\frac{4\pi}{\varepsilon_G}\rho,$$

где условно ε_G – гравитационная проницаемость среды:

$$\varepsilon_G = \frac{1}{GD} = \frac{\aleph}{G\varpi}, \varpi = \left(1 + \frac{1}{3}K^{\alpha}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\alpha}}\right)\Xi.$$

Различия в записи уравнений Пуассона в случаях электрического и гравитационного поля сводятся к наличию множителя ϖ^{-1}. С точки зрения ТТФП подобный множитель имеет место и для фундаментального электрического поля и порожден связью этих полей с геометрией и топологией пространства [11]. Кроме этого, источниками электрического поля являются заряды двух знаков, а поле тяготения массы материи всегда имеет положительный знак. В случае электрического поля изменения внутреннего поля в среду связаны с ее поляризацией, т.е. с изменением положения зарядов под действием внешнего электрического поля. В случае тяготения изменения во внутреннем поле в среде можно объяснить различиями в изменении движения частиц среды различной массы. Менее массивные смещаются или изменяют свои орбиты больше, чем более массивные частицы. Обычно считалось, что поле тяготения, в отличие от электрического поля, не экранируется, что, казалось бы, ведет к отсутствию гравитационной проницаемости. Однако наличие эффекта скрытой массы можно интерпретировать именно как определенного сорта изменение внутреннего гравитационного поля, например, его усиление за счет того, что происходят изменения движения частиц различной массы под действием общего коллективного поля. Особенно этот эффект должен проявлять себя в галактиках, которые состоят из совокупности звезд различных масс, а также пыли и газа. Но при описании галактик все эти объекты воспринимаются как точечные, включая отдельные звезды, частицы пыли, атомы и молекулы газов, а также плазмы. В силу этого именно при столь значительном разбросе масс частиц среды и проявляется наблюдаемый эффект скрытой массы. К этому следует добавить, что в ТТФП само пространство материально и его топология и геометрия создают поле тяготения.

Подтверждением такой концепции может служить решение (51) для функции D. Это решение получено без внесения в теорию каких-либо особых представлений о самогравитирующей среде и ее динамике. Динамика построена исключительно на уравнениях ньютоновской механики для сплошной самогравитирующей среды при дополнительном требовании, что гидродинамический поток удовлетворяет закону Хаббла. Кроме того, допускалось, что поле тяготения этой сплошной среды обладает эффектом скрытой массы в самом общем виде, и радиальный поток представляет собой поток Хаббла, т.е. скорость радиальных составляющих скорости потока прямо пропорциональна расстоянию от центра системы. Тем не менее уравнения динамики в этом случае автоматически приводят к решению (51).

8. Граничные условия

Если теперь решение для D (51) подставить в (7), то мы приходим к уравнению Пуассона в следующей форме:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{g} = \left(3\Gamma_0 \frac{F(t)}{a^2 b} - \frac{1}{a^4} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \Omega_0^2 \right) \right). \tag{67}$$

Правая часть этого уравнения содержит функцию, связанную со скоростью зонального потока среды, т.е. с ее дифференциальным вращением, а не с плотностью. Задавая напряженность поля тяготения на некотором автомодельном расстоянии $\xi = \xi_0 = \text{const}$ от оси вращения в плоскости экватора при $\zeta = 0$, приходим к соотношению

$$g^1(\xi_0, 0, t) = G_1(t) = \left(\frac{\mu_1 - \Omega_0^2(\xi_0, 0)}{a^3(t)} + \frac{\nu_1 F_0(t)}{a(t) b(t)} \right) \xi_0. \tag{68}$$

Таким образом, функция $F_0(t)$ определяется изменением радиальной компоненты напряженности поля тяготения на некотором расстоянии от оси вращения в плоскости экватора. Этот факт означает, что слагаемое в правой части (67), содержащее функцию $F_0(t)$, отвечает за взаимодействие среды с внешним окружением, которое и будет определять в итоге эволюцию дисковой системы.

9. Уравнения пространственной структуры плотности

Полученные решения указывают на неполную замкнутость рассматриваемой модели. Уравнения динамики, рассматриваемые относительно функции плотности ρ, приводят к решению (51). Поскольку в рассматриваемой модели нет никаких дополнительных сведений относительно функций Ξ и D, то число неизвестных превышает число уравнений. В работе [8] для замыкания системы уравнений было предложено ввести дополнительные предположения относительно общих свойств функций Ξ и $\aleph$.

Для анализа пространственного распределения параметров среды рассмотрим по аналогии с [8] уравнения для Ξ_s и Ξ_ω в следующей форме:

$$\Xi_s + \frac{1}{3}\hat{D}\Xi_s = \aleph D_s = \frac{-\Lambda}{3N}, \tag{69}$$

$$\Xi_\omega + \frac{1}{3}\hat{D}\Xi_\omega = \aleph D_\omega = \frac{1}{N}\left(-\Lambda_\omega + \frac{1}{3\Gamma_0}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\Omega_0^2\right)\right).$$

Здесь введено обозначение:

$$\hat{D} = K^1\frac{\partial}{\partial\xi} + K^1\frac{\partial}{\partial\zeta} + K^3\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{70}$$

Решение этих уравнений можно получить и в маркерных переменных E^1, E^2, и в автомодельных. В маркерных переменных [7, 8] соответствующие решения дают общее представление о физическом смысле функций Ξ_j и Ξ_ω, что существенно с точки зрения общей интерпретации квазиклассического поля тяготения с точки зрения ТТФП [7, 11]. Для анализа пространственного распределения параметров среды полезно получить решения в автомодельных переменных. Для этого следует воспользоваться уравнениями (39), (45), и (55), из которых можно вычислить компоненты поля K. Учитывая (43), решения уравнений (69) для Ξ_s и Ξ_ω можно записать в следующем виде:

$$N\Xi_s^2 + \frac{1}{3}N\Xi_s\hat{D}X = -\frac{\Lambda}{3}\Xi_s.$$

Используя (39), (45) и (55) для вычисления компонентов K, приходим к уравнению

$$\hat{L}\ln\Xi_s = \Lambda\Xi_s + 3\Xi_s^2 N, \tag{71}$$

где оператор $\hat{L}$ имеет следующий вид:

$$\hat{L} = -N\Xi_s \hat{D} = \hat{L}_0 + \frac{W_s}{\xi}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$\hat{L}_0 = \left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\Psi_s}{\partial\zeta} + \lambda_1\xi\right)\frac{\partial}{\partial\xi} - \left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\Psi_s}{\partial\xi} - \lambda_2\zeta\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}.$$

Учитывая связь (53) между Ξ_s и Ξ_ω, второе уравнение системы (69) можно привести к уравнению для W_ω:

$$\hat{L}_0 W_\omega + \Lambda W_\omega = 3\Lambda_\omega - \frac{1}{\Gamma_0}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\Omega_0^2\right). \tag{72}$$

Здесь учтено, что функция W_ω не зависит от переменной θ. Уравнения (71) и (72) почти в точности совпадают с аналогичными уравнениями для дисковых галактик с цилиндрической симметрией [8]. Основное отличие состоит в том, что в форме оператора $\hat{L}$ присутствует теперь производная по переменной θ, которая отвечает за нарушение цилиндрической симметрии. Кроме этого, из-за нарушения цилиндрической симметрии несколько меняются числовые множители перед слагаемыми в записи уравнений.

10. Решение уравнений пространственного распределения параметров поля и среды

С формальной точки зрения, считая, что функции Ξ_s и W_ω заданы, уравнение (71) следует рассматривать как уравнение для вычисления функции N – концентрации частиц среды. Уравнение же (72) следует рассматривать как уравнение для вычисления функции Ω_0 – коэффициента локальной угловой скорости зонального потока. С другой стороны, как и в случае дисковых галактик с цилиндрической симметрией [8], эти уравнения можно использовать для вычисления функций Ξ_s и W_ω по известным из эксперимента функциям N и Ω_0. Исходя из этого уравнения системы (71) и (72) при заданной функции коэффициента концентрации частиц N и коэффициента угловой скорости Ω_0 можно формально проинтегрировать с помощью метода характеристик.

Для уравнения (71) применение метода характеристик можно свести к представлению решения Ξ_s в виде функции от трех переменных $s = s(\xi,\zeta,\theta)$ и $\tau_{1,2} = \tau_{1,2}(\xi,\zeta,\theta)$, которые по определению должны удовлетворять уравнениям:

$$\hat{L}s = 1,\ \hat{L}\tau_1 = 0,\ \hat{L}\tau_2 = 0. \tag{73}$$

Полагая $\Xi_s = \Xi_s(s,\tau_1,\tau_2)$ и учитывая, что оператор $\hat{L}$ первого порядка, приходим к уравнению

$$\frac{\partial\Xi_s}{\partial s} - \Lambda\Xi_s - 3N\Xi_s^2 = 0. \tag{74}$$

Функции $s = s(\xi,\zeta,\theta)$ и $\tau_{1,2} = \tau_{1,2}(\xi,\zeta,\theta)$, являясь решениями линейных уравнений первого порядка, определяются выбором функции Ψ_s, входящей в определение оператора $\hat{L}$.

Аналогично для уравнения (72) необходимо ввести две переменные на характеристиках $\sigma = \sigma(\xi,\zeta)$ и $\tau_0 = \tau_0(\xi,\zeta)$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\hat{L}_0\sigma = 1, \hat{L}_0\tau_0 = 0.$$

В этом случае уравнение (72) для W_ω примет такой вид:

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial \sigma} + \Lambda W_\omega = 3\Lambda_\omega - \frac{1}{\Gamma_0}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2\Omega_0^2\right). \tag{75}$$

Решения уравнений (74) и (75) можно записать [7, 8] в такой форме:

$$\Xi_s = -\frac{1}{2}\frac{e^{\Lambda s}}{\int Ne^{\Lambda s}ds + C_0(\tau_1,\tau_2)},$$

$$W_\omega = e^{-\Lambda\sigma}\left(W_0(\tau_1,\tau_2) + \int e^{\Lambda\sigma}F(\sigma,\tau_0)d\sigma\right), \tag{76}$$

где $W_0(\tau_1,\tau_2), C_0(\tau_1,\tau_2)$ – постоянные вдоль характеристик функции и введено обозначение

$$F = 3\Lambda_\omega - \frac{1}{\Gamma_0}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2\Omega_0^2\right).$$

Зависимость от θ в полученных решениях содержится в функциях s,σ и τ_1,τ_2, которые вычисляются из последних трех уравнений системы (73). Учитывая, что нас интересуют решения периодические по θ с периодом 2π, функции s,σ и τ_1,τ_2 можно представить в следующем виде:

$$s = \sigma(\xi,\zeta) + \Re\left\{\sum_{m=1}^{\infty} S_m(\xi,\zeta)e^{im\theta}\right\}, \tag{77}$$

$$\tau_l = \tau_0^{(l)}(\xi,\zeta) + \Re\left\{\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(l)}(\xi,\zeta)e^{im\theta}\right\}, l = 1,2.$$

Уравнения для коэффициентов этих разложений в ряд Фурье имеют следующий вид:

$$\hat{L}_0\sigma = 1, \hat{L}_0 S_m + i\xi^{-1}W_s S_m = 0,$$

$$\hat{L}_0\tau_0^{(l)} = 0, \hat{L}_0 A_m^{(l)} + i\xi^{-1}W_s A_m^{(l)} = 0, \; l = 1,2; m = 1,\ldots,\infty. \tag{78}$$

В работе [8] предлагалось специальное замыкание системы уравнений для распределения плотности среды, которое приводило к возможности получить наблюдаемые в реальности дисковые структуры галактик. Условия замыкания сводились к двум предположениям:

$$\Xi_s = \aleph = qR^k, \tag{79}$$

где q и k – некоторые постоянные. Равенство $\Xi_s = \aleph$ приводит к упрощенной форме напряженности поля тяготения, в которую будет входить вместо множителя ΞN непосредственно плотность среды ρ. Равенство $\aleph = qR^k$ представляется логичным следствием предположения, что массивность точек среды, которыми в галактике являются звезды, является простой функцией плотности среды в данной точке. Используя эти предположения, уравнение для коэффициента плотности среды, являющееся следствием (74), перепишем в следующем виде:

$$k\frac{\partial R}{\partial s} - \Lambda R - 3R^2 = 0. \tag{80}$$

Решение этого уравнения для функции $R = R(s, \tau_1, \tau_2)$ можно представить в следующей форме:

$$R = -\frac{k}{3}\frac{\partial \Theta}{\partial s}, \tag{81}$$

где Θ – вспомогательная функция. После подстановки этого представления в соотношение (80) приходим к уравнению для Θ:

$$\Theta'' - \frac{\Lambda}{k}\Theta' = 0.$$

Решая этого уравнение и подставляя решение в (81), находим:

$$R = \frac{\Lambda}{3}\frac{1}{1 + C_0(\tau_1, \tau_2)e^{-\Lambda s/k}}. \tag{82}$$

Это уравнение совпадает по форме с аналогичным решением для дисковых галактик с цилиндрической симметрией [8], но отличается зависимостью переменных s, τ_1, τ_2 от θ.

Дополнительным элементом решений (82), который отсутствует в решениях, построенных в [8], является их зависимость от угловой автомодельной переменной θ и, соответственно, φ. Эта зависимость от угловой переменной будет определяться решением уравнений (77). Общий анализ решений (82) с учетом зависимости от θ представляется слишком объемным для того, чтобы включать его в данную работу. При тех же ограничениях, которые использовались в [8] при вычислении пространственного распределения коэффициента плотности среды, можно ожидать, что основным изменением в их структуре будет именно наличие спиральных структур различной формы в зависимости от начальных условий, которые определяют зависимость $A_m^{(l)}(\xi, \zeta), l = 1, 2$ и $S_m(\xi, \zeta)$ от ξ и ζ.

Заключение

Построена общая теория динамического равновесия дисковых структур без специального требования цилиндрической симметрии в пространственном распределении параметров среды и поля тяготения. Выведены все основные уравнения, позволяющие в дальнейшем по аналогии с работой [8] строить решения для пылевых дисков и дисковых галактик, допускающих спиральные структуры. Основным новым элементом теории является наличие в ней новой автомодельной переменной θ, связанной линейно с азимутальным углом φ. Это позволяет распространить модель динамического равновесия на случай отсутствия цилиндрической симметрии в структуре дисковых галактик.

Важным дополнением к теории дисковых галактик с цилиндрической симметрией, построенной на основе квазиклассического поля тяготения, кроме спиральных образований в их структуре, обобщенная теория включает два новых аспекта.

Первый состоит в том, что обобщается эволюция масштабных параметров дисков. Обобщение состоит в возможности учитывать внешнее воздействие на диск, которое определяется одним граничным условием. Такая возможность не рассматривалась в работе [8].

Второй аспект состоит в том, что возникающий в квазиклассической теории тяготения эффект скрытой массы, как было показано в работе, можно интерпретировать как эффект гравитационной проницаемости среды, аналогичный по форме диэлектрической проницаемости. Причиной возникновения эффекта гравитационной проницаемости, в отличие от электромагнетизма, является не наличие двух противоположных зарядов, а различная массивность отдельных точек сплошной среды, описываемая в квазиклассической теории тяготения функцией $\aleph(e)$ [7, 24].

Список литературы

1. Einasto J. Dark Matter // arXiv:0901.0632v1.2009.
2. Засов А. В., Сабурова А. С., Хоперсков А. В., Хоперсков С. А. Темная материя в галактиках // Успехи физических наук. 2017. Т. 187, № 1. С. 3–44.
3. Edmonds D., Erlich. J., Minic D., Takeuchi T. Universal Acceleration and Fuzzy Dark Matter // arXiv:2405.08744v1. 2024.
4. Milgrom M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis // Astrophys. J. 1983. Vol. 270. P. 365–370.
5. McGaugh S. S. A Novel Test of the Modified Newtonian Dynamics with Gas Rich Galaxies // arXiv:1102.3913v1. 2011.
6. Govaertsa J. Newtonian Gravity and Galaxy Rotation Curves: An Axisymmetric Green’s Function Perspective // arXiv:2408.09977v1. 2024.
7. Журавлев В. М. Поле тяготения сплошной самогравитирующей среды и “темная материя” // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2024. Т. 120, № 6. С. 400–408.
8. Zhuravlev V. M. The gravitational field of a self-gravitating continuous medium, dark matter and disk galaxies // Gravitation and Cosmology. 2025. Vol. 31, № 3. С. 291–311.
9. Журавлев В. М. Материя и геометрия. ОТО и далее.... // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. № 2. С. 5–26.
10. Zhuravlev V. M. Induction Equations for Fundamental Fields and Dark Matter // Gravitation and Cosmology. 2017. Vol. 23, № 2. P. 95–104.

11. Zhuravlev V. M. Matter and Space. New Theory of Fields and Particles // Gravitation and Cosmology. 2022. Vol. 28, № 4. P. 319–341.
12. Dobbs C., Baba J., Dawes I. Review 4: Spiral Structures in Disc Galaxies // Publications of the Astronomical Society of Australia (PASA). 2014. Vol. 31, № 35. P. 40.
13. Марчук А. А., Костюк В. С. Прояснение природы спиральной структуры в галактиках: такие разные случаи NGC 3686 и M 100 // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове. 2023. № 229. С. 53–75.
14. Marchuk A. A. Resonance coupling in spiral arms. Patterns for flat rotation curve // arXiv:2405.14483v3. 2024.
15. Lin C. C., Shu F. H. On the Spiral Structure of Disk Galaxies // Astrophysical Journal. 1964. Vol. 140. P. 646–655.
16. Toomre A. What amplifies the spirals // Structure and Evolution of Normal Galaxies / ed. by S. M. Fall, D. Lynden-Bell. Cambridge and New York : Cambridge University Press, 1981. P. 111–136.
17. Pour-Imani H., Kennefick D., Kennefick J., Davis B. L., Shields D. W., Abdeen M. S. Strong evidence for the density-wave theory of spiral structure in disk galaxies // arXiv:1608.00969v1. 2016.
18. Морозов А. Г. Физика дисков. Волгоград : Изд-во ВолГу, 2005. 422 с.
19. Фридман А. М. Физика галактических дисков. М. : Физматлит, 2011. 645 с.
20. Baba J., Takayuki R. S., Keiichi W. Dynamics of Non-steady Spiral Arms in Disk Galaxies // Astrophysical Journal. 2013. Vol. 763.1, № 46. P. 1–14.
21. Sellwood J. A. New Developments in Spiral Structure Theory // arXiv:1001.5430. 2010.
22. Forgan D., Bonnell1 I., Lucas W., Rice K. Tensor classification of structure in smoothed particle hydrodynamics density fields // arXiv:1601.02580v1. 2016.
23. Журавлев В. М. Модели динамического равновесия астрофизических объектов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2022. Т. 162, № 6. С. 850–877.
24. Журавлев В. М. Масса и параметры вращения звезд в условиях динамического равновесия // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 3. С. 107–145.

References

1. Einasto J. Dark Matter. *arXiv:0901.0632v1*. 2009.
2. Zasov A.V., Saburova A.S., Khoperskov A.V., Khoperskov S.A. Dark matter in galaxies. *Uspekhi fizicheskikh nauk = Advances in the physical sciences*. 2017;187(1):3–44. (In Russ.)
3. Edmonds D., Erlich. J., Minic D., Takeuchi T. Universal Acceleration and Fuzzy Dark Matter. *arXiv:2405.08744v1*. 2024.
4. Milgrom M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophys. J.* 1983;270:365–370.
5. McGaugh S.S. A Novel Test of the Modified Newtonian Dynamics with Gas Rich Galaxies. *arXiv:1102.3913v1*. 2011.
6. Govaertsa J. Newtonian Gravity and Galaxy Rotation Curves: An Axisymmetric Green's Function Perspective. *arXiv:2408.09977v1*. 2024.
7. Zhuravlev V.M. The gravitational field of a continuous self-gravitating medium and "dark matter". *Pisma v Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki = Letters to the Journal of experimental and theoretical physics*. 2024;120(6):400–408. (In Russ.)
8. Zhuravlev V.M. The gravitational field of a self-gravitating continuous medium, dark matter and disk galaxies. *Gravitation and Cosmology*. 2025;31(3):291–311.
9. Zhuravlev V.M. Matter and geometry. General relativity and beyond... *Prostranstvo, vremya i fundamentalnyye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions.* 2016;(2):5–26. (In Russ.)
10. Zhuravlev V.M. Induction Equations for Fundamental Fields and Dark Matter. *Gravitation and Cosmology*. 2017;23(2):95–104.

11. Zhuravlev V.M. Matter and Space. New Theory of Fields and Particles. *Gravitation and Cosmology*. 2022;28(4):319–341.
12. Dobbs C., Baba J., Dawes I. Review 4: Spiral Structures in Disc Galaxies. *Publications of the Astronomical Society of Australia (PASA)*. 2014;31(35):40.
13. Marchuk A.A., Kostyuk V.S. Clarifying the nature of spiral structure in galaxies: the very different cases of NGC 3686 and M 100. *Izvestiya Glavnoy astronomicheskoy observatorii v Pulkove = Proceedings of the Main Astronomical Observatory in Pulkovo*. 2023;(229):53–75. (In Russ.)
14. Marchuk A.A. Resonance coupling in spiral arms. Patterns for flat rotation curve. *arXiv:2405.14483v3*. 2024.
15. Lin C.C., Shu F.H. On the Spiral Structure of Disk Galaxies. *Astrophysical Journal*. 1964;140:646–655.
16. Toomre A. What amplifies the spirals. *Structure and Evolution of Normal Galaxies*. Ed. by S.M. Fall, D. Lynden-Bell. Cambridge and New York: Cambridge University Press, 1981:111–136.
17. Pour-Imani H., Kennefick D., Kennefick J., Davis B.L., Shields D.W., Abdeen M.S. Strong evidence for the density-wave theory of spiral structure in disk galaxies. *arXiv:1608.00969v1*. 2016.
18. Morozov A.G. *Fizika diskov = Disc physics*. Volgograd: Izd-vo VolGu, 2005:422. (In Russ.)
19. Fridman A.M. *Fizika galakticheskikh diskov = Physics of galactic disks.* Moscow: Fizmatlit, 2011:645. (In Russ.)
20. Baba J., Takayuki R.S., Keiichi W. Dynamics of Non-steady Spiral Arms in Disk Galaxies. *Astrophysical Journal*. 2013;763.1(46):1–14.
21. Sellwood J.A. New Developments in Spiral Structure Theory. *arXiv:1001.5430*. 2010.
22. Forgan D., Bonnell1 I., Lucas W., Rice K. Tensor classification of structure in smoothed particle hydrodynamics density fields. *arXiv:1601.02580v1*. 2016.
23. Zhuravlev V.M. Modeli dinamicheskogo ravnovesiya astrofizicheskikh obyektov. *Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki*. 2022;162(6):850–877.
24. Zhuravlev V.M. Mass and rotation parameters of stars under conditions of dynamic equilibrium. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(3):107–145. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев
доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник лаборатории гравитации, космологии и астрофизики, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова (Россия, г. Ульяновск, пл. Ленина, 4/5)

Viktor M. Zhuravlev
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, researcher of the laboratory of gravity, cosmology and astrophysics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov (4/5 Lenina square, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 01.07.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 27.08.2025

Принята к публикации / Accepted 10.09.2025