УДК 517.3
doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-4

Итерационный алгоритм для решения нелинейных интегральных уравнений

Б. А. Зайцев[1], М. Ю. Медведик[2]

[1,2]Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

[1]zaytcsevborist@gmail.com, [2]_medv@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Целью данного исследования является разработка эффективного алгоритма для решения нелинейных интегральных уравнений. *Материалы и методы*. Представлено описание и обоснование метода, основывающегося на применении принципа сжимающих отображений. *Результаты*. Рассмотрено применение метода к различным задачам, представлены численные результаты решения интегральных уравнений, показывающие сходимость метода. *Выводы*. Решение тестовых задач приведено для различных параметров нелинейности, что позволяет сделать вывод о качестве предложенного метода.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, принцип сжимающих отображений, численный метод, математическая модель

Финансирование: работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Рег. № 124020200015-7).

Для цитирования: Зайцев Б. А., Медведик М. Ю. Итерационный алгоритм для решения нелинейных интегральных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 36–44. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-4

An iterative algorithm for solving nonlinear integral equations

B.A. Zaytsev[1], M.Yu. Medvedik[2]

[1,2]Penza State University, Penza, Russia

[1]zaytcsevborist@gmail.com, [2]_medv@mail.ru

Abstract. *Background.* The purpose of this study is to develop an effective algorithm for solving nonlinear integral equations. *Materials and methods*. The method is based on the application of the principle of contraction mappings. The paper presents a description of the method and its justification. *Results.* The application of the method to various problems is considered, numerical results of solving integral equations are presented, showing the convergence of the method. *Conclusions.* The solution of test problems is given for various nonlinearity parameters, which allows us to draw a conclusion about the quality of the proposed method.

Keywords: nonlinear integral equation, principle of compressive maps, numerical method, mathematical model

Financing: the work was supported by the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, (Reg. no. 124020200015-7).

For citation: Zaytsev B.A., Medvedik M.Yu. An iterative algorithm for solving nonlinear integral equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-*

matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2025;(3):36–44. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-4

Введение

Интегральные уравнения занимают одно из центральных мест в современной математической физике, теории упругости, электродинамике, теории переноса излучения, экономическом моделировании и многих других областях науки и техники. Ряд задач приводит к нелинейным интегральным уравнениям, поэтому метод сжимающих отображений занимает центральное место в арсенале современных математических методов, особенно при решении интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, которые повсеместно возникают в фундаментальных и прикладных дисциплинах. Его уникальность заключается в органичном синтезе глубокой теоретической базы и конструктивного вычислительного подхода. В отличие от чисто численных схем, где сходимость часто принимается как эмпирический факт, этот метод строго *доказывает* существование и единственность решения в заданном функциональном пространстве при выполнении ключевого условия – сжимаемости интегрального оператора. Эта доказательная строгость сочетается с явным итерационным алгоритмом: последовательное применение оператора к произвольному начальному приближению гарантированно сходится к точному решению. Важнейшее практическое преимущество – управляемость и устойчивость вычислений. Благодаря природе сжатия погрешности на промежуточных итерациях не накапливаются хаотично, а систематически уменьшаются, что обеспечивает предсказуемость процесса. Метод позволяет оценить скорость сходимости и точность на любом шаге, предоставляя исследователю инструмент для планирования вычислений: например, определение числа итераций, необходимых для достижения заданной точности. Его универсальность проявляется в применимости к широкому спектру задач, включая сложные нелинейные уравнения, где классические подходы (такие как метод резольвент или разложения по собственным функциям) неприменимы или требуют непомерных вычислительных затрат. В таких случаях метод сжимающих отображений становится незаменимым, сохраняя прозрачность реализации даже для уравнений с негладкими ядрами или сложными нелинейностями.

Теоретической основой метода служит принцип Банаха о неподвижной точке, который не только гарантирует корректность, но и придает алгоритму математическую элегантность. Проверка условия сжимаемости, например через оценку нормы интегрального ядра, остается доступной задачей, что усиливает его практическую ценность. Даже в пограничных ситуациях, когда константа сжатия близка к единице и сходимость замедляется, метод сохраняет свою надежность как инструмент для задач, где аналитическое решение невозможно, а альтернативные численные методы не подкреплены теоретическими гарантиями.

Двойственная природа – сочетание доказательной мощи и вычислительной гибкости – делает метод фундаментом для современных гибридных подходов. Его интегрируют с техниками дискретизации, спектральными методами или алгоритмами машинного обучения, создавая эффективные комбинации для решения задач высокой сложности. В контексте растущих требований к точности и надежности математических моделей в науке и инженерии метод сжимающих отображений остается не просто инструментом, а стратегической методологией, обеспечивающей мост между абстрактной теорией и практическим решением. Его роль особенно возрастает в областях, где нелинейность и многомерность делают традиционные подходы неэффективными, подтверждая статус одного из наиболее универсальных и концептуально завершенных методов современной вычислительной математики. Итерационные методы решения различных видов линейных и нелинейных интегральных уравнений были рассмотрены в работах [1–10].

Постановка задачи

Построим итерационный алгоритм для решения различных видов нелинейных интегральных уравнений, основываясь на принципе сжатых отображений. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$u(x)=\alpha\int_a^b K\left(x,y,u(y)\right)dy+f(x), \tag{1}$$

где $f(y)$ и $K\left(x,y,u(y)\right)$ – непрерывные функции, $a\le x,y\le b$.

Пусть для ядра интегрального уравнения выполняется условие Липшица

$$\left|K(x,y,u_2(y)-K\left(x,y,u_1(y)\right)\right|\le M\left|u_2(y)-u_1(y)\right|,$$

где $M-$ некоторая постоянная, не зависящая от $u_2(y),u_1(y)$.

Рассмотрим отображение $g=Au$, причем

$$Au\equiv\alpha\int_a^b K\left(x,y,u(y)\right)dy+f(x). \tag{2}$$

Если $u_1(y)$, $u_2(y)$ – любые две непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, тогда

$$\left|Au_2(y)-Au_1(y)\right|\equiv\left|\alpha\int_a^b\left[K\left(x,y,u_2(y)\right)-K\left(x,y,u_2(y)\right)\right]dy\right|\le$$

$$\le|\alpha|M(b-a)\max_{a\le y\le b}\left|u_2(y)-u_1(y)\right|.$$

Оценка справедлива для любого $x\in[a,b]$, а значит,

$$\max_{a\le y\le b}\left|Au_2(y)-Au_1(y)\right|=\rho\left(Au_1(y),Au_2(y)\right)\le$$

$$\le|\alpha|M(b-a)\rho\left(u_1(y),u_2(y)\right). \tag{3}$$

Следовательно, при $|\alpha|<\dfrac{1}{M(b-a)}$ оператор A будет сжимающим, а интегральное уравнение будет иметь при таких α единственное непрерывное решение. Это решение находится методом последовательных приближений.

$$u_{n+1}(x) = \alpha \int_a^b K(x, y, u_n(y))\,dy + f(y),\ n = (0, 1, \ldots),$$

Уравнение будет однозначно разрешимо для любой достаточно малой α, так как если рассмотреть правую часть уравнения (1), как оператор сжатия, определенный в пространстве $C[a,b]$,

$$Au = \alpha \int_a^b K(x, y)\,u(y)\,dy + f(y),$$

то этот оператор будет переводить любую функцию $u(x) \in C[a,b]$ в некоторую функцию $\tilde{u}(x)$, определенную на том же промежутке, тем самым решение существует, если существует неподвижная точка у оператора A, т.е. функция переводящаяся оператором A в себя же

$$f_0 = Af_0.$$

Оператор A действует из полного пространства $C[a,b]$ снова в то же самое пространство $C[a,b]$.

Из принципа сжатых отображений следует, что для любого $|\alpha| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ уравнение Фредгольма с непрерывным ядром $K(x,y)$ и непрерывной функцией $f(x)$ имеет единственное решение, принадлежащее $C[a,b]$.

Последовательные приближения $u_0(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ к решению определяются следующей системой уравнений:

$$u_{n+1}(x) = \alpha \int_a^b K(x, y, u_n(y))\,dy + f(y),\ n = (0, 1, \ldots),$$

где в качестве приближения $u_0(x)$ можно взять любую непрерывную функцию на отрезке $[a,b]$.

Численный метод

Пусть дано уравнение вида

$$f(x) = \alpha \int_a^b K(x, y, u(y))\,dy + u(x),\ x \in [a,b].$$

Необходимо найти функцию $u(x)$, которая может быть представлена в виде

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j . \tag{4}$$

При это функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а $K(x, y, u(y))$ непрерывны в области $Q\{a \le x \le b, a \le y \le b\}$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на равные части $\Pi_i = \{x_{i-1} < x_i^0 < x_{i+1}\}$, где x_i^0 – середина Π_i, шаг между точками $x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_N^0$ будет при этом равен $h = (b-a)/N$.

За базисные φ_i возьмем следующую функцию:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_i, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases} \tag{5}$$

Тогда при условии, что α достаточно мало, зададим начальное приближение $u_0 = f(x)$, последующие $u_1, u_2, \ldots u_n$ найдем с помощью метода сжатых отображений, формула (1) запишется в виде

$$u_{n+1}(x) = -\alpha \int_a^b K(x, y, u_n(y))\, dy + f(y),\ n = (0, 1, \ldots), \tag{6}$$

Каждая следующая итерация будет увеличивать качество приближения, однако при удачно выбранных базисных функциях сходимости и точного решения можно достичь уже на близких n.

Численные результаты

Решим тестовое интегральное уравнение вида

$$u(x) = \int_{-1}^{1} \frac{xy}{1 + u^2(y)}\, dy + 1. \tag{7}$$

$K(x, y, u(y))$ непрерывна на данном отрезке интегрирования, она имеет ограниченную производную, а значит, удовлетворяют условию Липшица. При $\alpha = 1$ получим

$$u_1(x) = \int_{-1}^{1} \frac{xy}{2}\, dy + 1 = 1.$$

Соответственно и при любом другом n значение функции равно единице:

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x) = 1.$$

Решение тестовой задачи (7) на трех первых итерациях представлено на рис. 1.

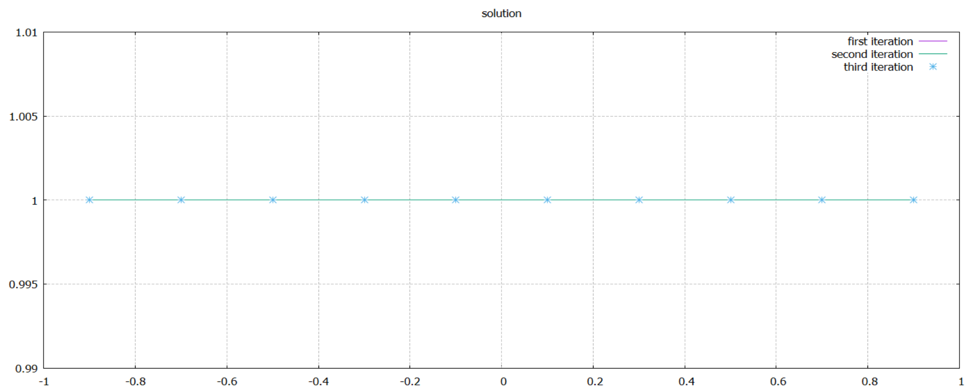

Рис. 1. Численное решение модельной задачи (7)

Увеличивать далее количество итераций более трех нецелесообразно, так как решения начинают совпадать с графической точностью.

Далее возьмем более сложное интегральное уравнение вида

$$u(x)=2\int_0^1 \cos(xyu(y))dy+\sin(x). \tag{8}$$

Ядро уравнения и функция $\sin(x)$ непрерывны на промежутке $[0,1]$, возьмем $\alpha=2$ равной, затем $\alpha=1$, наконец $\alpha<1$, посмотрим при этом за имением сходимости решения.

На рис. 2–4 представлены численные решения интегрального уравнения (8), полученные с использованием итерационной схемы (6) и различным параметром нелинейности.

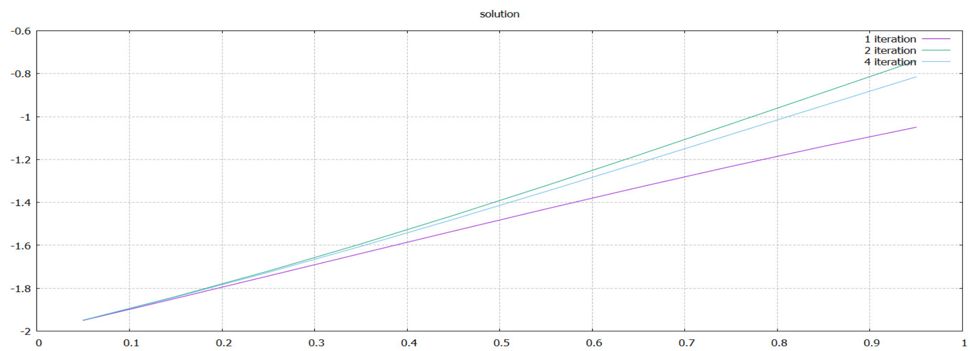

Рис. 2. Численное решение модельной задачи (8).
Параметр нелинейности $\alpha=2$

Заключение

Рассмотрена задача построения эффективного метода решения нелинейных интегральных уравнений. Предложен метод решения нелинейных интегральных уравнений, основанный на принципе сжимающих отображений. Произведено численное обоснование рассматриваемого метода. Представлены численные результаты решения задачи для различных тестовых задач.

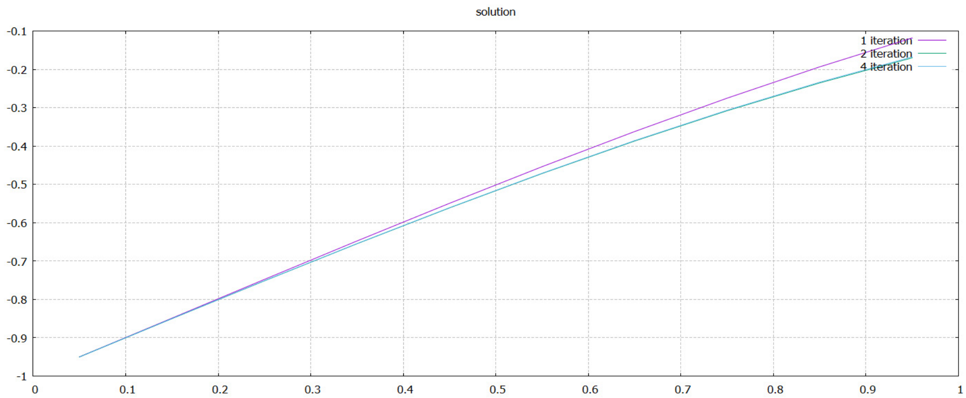

Рис. 3. Численное решение модельной задачи (8). Параметр нелинейности $\alpha = 1$

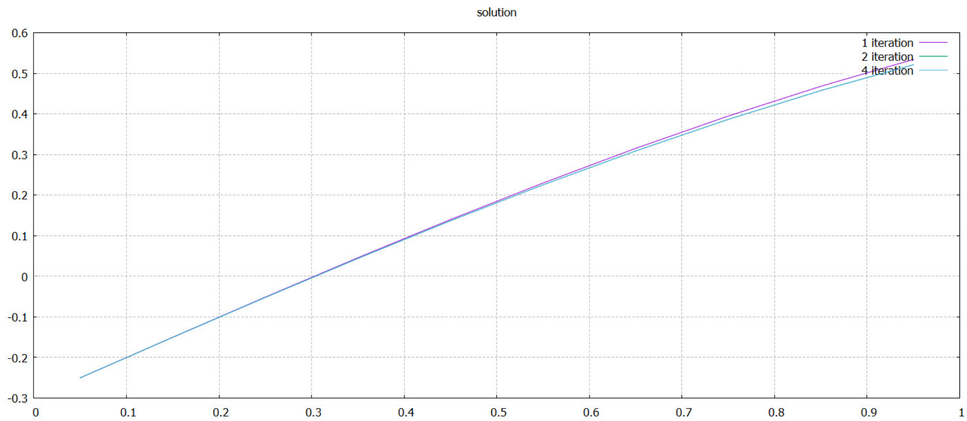

Рис. 4. Численное решение модельной задачи (8). Параметр нелинейности $\alpha = 0,3$

На основе полученных результатов можно заключить, что метод хорошо работает для небольших значений параметра нелинейности и может быть использован для решения прикладных задач математической физики.

Список литературы

1. Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю. Итерационные методы решения нерегулярных уравнений : учеб. пособие по курсу «Математические методы системного анализа» / Ин-т системного анализа РАН. М. : Эдиториал УРСС, 2006. 112 с.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы. М. : Наука, 1975. 632 с.
3. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М. : Наука, 1965. 384 с.
4. Kress R. Linear Integral Equations. New York : Springer-Verlag, 1999. 365 p.
5. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Два итерационных метода решения объемного сингулярного уравнения для нелинейной задачи дифракции в полубесконечном прямоугольном волноводе // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 4. С. 49–59. doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-5
6. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Итерационная схема решения нелинейного интегрального уравнения типа Липпмана – Швингера методом Галеркина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 66–73. doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-5

7. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Алгоритм поиска неоднородностей в обратных нелинейных задачах дифракции // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2024. Т. 166, № 3. С. 395–406.
8. Антонов А. В., Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г. Разработка Web-ориентированного вычислительного комплекса для решения трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов и ГРИД-технологий // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2007. № 4. С. 60–67.
9. Жуковская Л. В. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 146, № 3. С. 402–409.
10. Краснов М. Л. Интегральные уравнения: Введение в теорию. М. : Наука, 2019. 304 с.

References

1. Bakushinskiy A.B., Kokurin M.Yu. Iterative methods for solving irregular equations: a textbook for the course “Mathematical methods of systems analysis”. *In-t sistemnogo analiza RAN = Institute of Systems Analysis of the Russian Academy of Sciences.* Moscow: Editorial URSS, 2006:112. (In Russ.)
2. Bakhvalov N.S. *Chislennyye metody = Numerical methods*. Moscow: Nauka, 1975:632. (In Russ.)
3. Mikhlin S.G., Smolitskiy Kh.L. *Priblizhennyye metody resheniya differentsialnykh i integralnykh uravneniy = Approximate methods for solving differential and integral equations.* Moscow: Nauka, 1965:384. (In Russ.)
4. Kress R. *Linear Integral Equations*. New York: Springer-Verlag, 1999:365.
5. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Two iterative methods for solving the volume syn-gular equation for a nonlinear diffraction problem in a semi-infinite rectangular waveguide. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(4):49–59. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-5
6. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. An iterative scheme for solving a nonlinear integral equation of the Lippmann–Schwinger type using the Galerkin method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(3):66–73. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-5
7. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Algorithm for searching for inhomogeneities in inverse nonlinear diffraction problems. *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki = Proceedings of Kazan University. Series: Physical and mathematical sciences*. 2024;166(3):395–406. (In Russ.)
8. Antonov A.V., Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G. Development of a web-based computing system for solving three-dimensional vector problems of electromagnetic wave diffraction based on subhierarchical parallel algorithms and grid technologies. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2007;(4):60–67. (In Russ.)
9. Zhukovskaya L.V. An iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics.* 2006;146(3):402–409. (In Russ.)
10. Krasnov M.L. *Integralnyye uravneniya: Vvedeniye v teoriyu = Integral equations: introduction to theory.* Moscow: Nauka, 2019:304. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Борис Алексеевич Зайцев
студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: zaytcsevborist@gmail.com

Boris A. Zaytsev
Student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Михаил Юрьевич Медведик
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: _medv@mail.ru

Mikhail Yu. Medvedik
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 07.07.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 03.08.2025

Принята к публикации / Accepted 22.08.2025