УДК 517.96
doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-1

О сходимости метода Галеркина для решения гиперсингулярных интегральных уравнений в специальных классах функций

Ю. Г. Смирнов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

mmm@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается численный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений на отрезке, которые возникают во многих задачах математической физики. *Материалы и методы.* Применяется метод Галеркина для решения гиперсингулярных уравнений с базисными функциями – многочленам Чебышева 2-го рода. Проекционный метод рассматривается в специальных классах функций. *Результаты и выводы.* Доказывается сходимость метода Галеркина для решения гиперсингулярных уравнений в специальных классах функций. Получена оценка скорости сходимости метода Галеркина.

Ключевые слова: гиперсингулярное уравнение, метод Галеркина, многочлены Чебышева

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по гранту Государственного задания (Рег. № 124020200015-7).

Для цитирования: Смирнов Ю. Г. О сходимости метода Галеркина для решения гиперсингулярных интегральных уравнений в специальных классах функций // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 3–12. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-1

On the convergence of Galerkin method for solving hypersingular integral equations in special classes of functions

Yu.G. Smirnov

Penza State University, Penza, Russia

mmm@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* The numerical method for solving hypersingular integral equations on a segment that arise in many problems of mathematical physics is considered. *Materials and methods.* Galerkin method is used to solve hypersingular equations with basic functions – Chebyshev polynomials of the 2nd kind. The projection method is considered in special classes of functions. *Results and conclusions.* The convergence of Galerkin method for solving hypersyngular equations in special classes of functions is proved. An estimate of the convergence rate of Galerkin method is obtained.

Keywords: hypersingular equation, Galerkin method, Chebyshev polynomials

Financing: the work was financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the grant of the State Assignment (Reg. No. 124020200015-7).

For citation: Smirnov Yu.G. On the convergence of Galerkin method for solving hypersingular integral equations in special classes of functions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(3):3–12. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-1

Введение

Численные методы используются при решении гиперсингулярных уравнений, к которым сводятся многие краевые задачи электродинамики, аэродинамики, акустики [1–4]. Чаще всего гиперсингулярные операторы понимаются в смысле Адамара [3, 4]. Но можно рассматривать гиперсингулярные операторы как псевдодифференциальные [1] или интегро-дифференциальные [2].

Хорошо известна формула действия гиперсингулярного оператора на многочлены Чебышева 2-го рода [2], которая показывает, что эти многочлены являются собственными функциями оператора. Основываясь на этом свойстве, естественно построить численный метод решения гиперсингулярных уравнений. Приближенное решение ищется в виде линейной комбинации многочленов Чебышева 2-го рода. Таким образом, рассматривается метод Галеркина с многочленами Чебышева в качестве базисных и тестовых функций. Такой подход позволяет явно (аналитически) учесть гиперсингулярную особенность ядра интегрального уравнения, что приводит к уменьшению ошибки при программной реализации численного метода. Иногда этот подход называют методом саморегуляризации.

Центральным вопросом при анализе численного метода является вопрос о его сходимости в некоторых функциональных классах. Также важна оценка скорости сходимости приближенного решения к точному.

Основным результатом настоящей статьи является доказательство сходимости метода Галеркина для решения гиперсингулярного уравнения в специальных классах функций, которые «подбираются» таким образом, чтобы легко изучить действие в них гиперсингулярного оператора. Такой подход был реализован при изучении логарифмических интегральных операторов [2, 5].

1. Гиперсингулярные интегральные уравнения в классах Ψ_p

Далее представлены свойства гиперсингулярных интегральных операторов в некоторых специальных классах Ψ_p (*на шкале пространств*), естественно связанных с многочленами Чебышева 2-го рода.

Пусть h_p – пространство последовательностей комплексных чисел ξ_k таких, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 (k+1)^p < \infty ; \; p \ge 0 . \quad (1)$$

Пространства h_p, наделенные скалярным произведением

$$(\xi,\eta)_p = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k (k+1)^p \tag{2}$$

и нормой

$$\|\xi\|_p^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 (k+1)^p , \tag{3}$$

являются сепарабельными гильбертовыми пространствами.

Рассмотрим классы функций, заданных на отрезке [–1, 1]:

$$\Psi_p = \left\{ \varphi : \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x),\ \xi \in h_p \right\}, \tag{4}$$

где

$$U_n(x) = \frac{\sin\left((n+1)\arccos x\right)}{\sqrt{1-x^2}} \ –$$

многочлены Чебышева 2-го рода [6]. Эти пространства также становятся гильбертовыми, если определить скалярные произведения по формуле

$$(\varphi,\psi)_p = (\xi,\eta)_p = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k (k+1)^p , \tag{5}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x),\ \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k U_k(x). \tag{6}$$

Из (1)–(6) ясно, что Ψ_p унитарно изометрично h_p.

Введем пространства квадратично-суммируемых функций на отрезке $[-1,1]$ с весами $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\sqrt{1-x^2}$:

$$L_2^{(1)} = L_2\left(\left[-1,\ 1\right];\ 1/\sqrt{1-x^2}\right), \tag{7}$$

$$L_2^{(2)} = L_2\left(\left[-1,\ 1\right];\ \sqrt{1-x^2}\right). \tag{8}$$

Хорошо известно, что $\Psi_0 = L_2^{(2)}$ [6].

Некоторые другие свойства функций из пространств (7) и (8) доказаны в [7]. В частности, пусть $\varphi \in \Psi_2$. Тогда функция $\varphi(x)$ непрерывна на интервале $(-1,1)$, и для функции $\varphi^*(x) := \varphi(x)\sqrt{1-x^2}$ имеем $\varphi^*(-1) = \varphi^*(1) = 0$.

Кроме того, функции $\varphi^*(x)=\varphi(x)\sqrt{1-x^2}$, где $\varphi\in\Psi_2$, удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ, $\mu\le\frac{1}{4}$, и верна оценка

$$\left|\varphi^*(x)\right|\le C(1-x)^{\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{1}{4}}.$$

Введем гильбертово пространство [2]:

$$\hat{W}_2^1:=\left\{\varphi:\varphi\in L_2^{(2)};\varphi^*(x):=\varphi(x)\sqrt{1-x^2},\left(\varphi^*\right)'\in L_2^{(2)},\varphi^*(-1)=\varphi^*(1)=0\right\}, \quad (9)$$

со скалярным произведением и нормой:

$$(\varphi,\psi)_w:=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}\left(\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\right)'\left(\overline{\psi(x)}\sqrt{1-x^2}\right)'\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

$$\|\varphi\|_w^2:=\int_{-1}^{1}\left|\varphi(x)\right|^2\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}\left|\left(\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\right)'\right|^2\sqrt{1-x^2}\,dx. \quad (10)$$

В работе [7] доказано, что $\Psi_2=\hat{W}_2^1$ (где пространства определены посредством формул (4)–(6), (9), (10)), а также что вложение $\Psi_p\subset\Psi_q$ компактно при $p>q\ge 0$.

Будем рассматривать гиперсингулярный интегральный оператор, определяемый формулой

$$H\varphi:=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-y}\varphi(y)\sqrt{1-y^2}\,dy,\ \varphi\in\Psi_p. \quad (11)$$

Свойства оператора (11) в классах Ψ_p определяются следующей леммой.

Лемма 1 [8]. Полиномы Чебышева 2-го рода U_n являются собственными функциями оператора H и справедливы следующие выражения:

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-y}U_n(y)\sqrt{1-y^2}\,dy=\pi(n+1)U_n(x),\ n\ge 0.$$

Из леммы 1 сразу следует

Лемма 2. Оператор $H:\Psi_{p+2}\to\Psi_p$, $p\ge 0$, непрерывно обратим.

Действительно, в силу леммы 1 для

$$\varphi\in\Psi_p,\ \varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k U_k(x),\ H\varphi=f,$$

имеем

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k U_k(t),\ \eta_k=\pi(k+1)\xi_k,$$

$$\xi_k=\frac{\eta_k}{\pi(k+1)}, \qquad (12)$$

откуда непосредственно получаем требуемое утверждение.

Формула (12) задает обратный оператор:

$$H^{-1}:\Psi_p\to\Psi_{p+2},\ p\geq 0;\ H^{-1}f=\varphi,$$

где $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k U_k(t)$, $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k U_k(x)$.

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор, определяемый формулой

$$S\varphi:=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-y}\varphi(y)\sqrt{1-y^2}\,dy,\ \varphi\in\Psi_p. \qquad (13)$$

Свойства оператора (13) в классах Ψ_p определяются следующей леммой [8].

Лемма 3 [8]. Справедливы следующие выражения:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-y}U_n(y)\sqrt{1-y^2}\,dy=\pi T_{n+1}(x),\ n\geq 0.$$

В работе [7] доказано, что оператор $S:\hat{W}_2^1\to L_2^{(2)}$ является компактным.

Пусть оператор K задан формулой

$$K\varphi\equiv\int_{-1}^{1}K(x,y)\varphi(y)\sqrt{1-y^2}\,dy. \qquad (14)$$

Лемма 4 [7]. Если $K(x,y)=\dfrac{\partial K_1(x,y)}{\partial y}$, функция $K_1(x,y)$ ограничена на квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$ и выполнено условие $K_1(x,y)\in L_2^{(2)}\times L_2^{(1)}$, т.е.

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1}\left|K_1(x,y)\right|^2\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}dx<\infty, \qquad (15)$$

то формула (14) определяет компактный оператор $K:\hat{W}_2^1\to L_2^{(2)}$.

Отметим, что оператор K будет компактным и при менее сильных, чем (15), ограничениях на ядро.

Далее рассмотрим интегральный оператор с логарифмической особенностью ядра вида

$$L\varphi \equiv \int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{|x-y|}\varphi(y)\sqrt{1-y^2}\,dy\,. \tag{16}$$

Лемма 5 [7]. Оператор (16) является компактным оператором $L:\hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}$.

Лемма 6 [7]. Пусть для функции $K(x,y)$ выполнены условия леммы 4, а α и β – произвольные числа. Тогда оператор

$$H+\alpha S+\beta L+K:\hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)} \tag{17}$$

является фредгольмовым (с нулевым индексом).

2. Метод Галеркина для решения гиперсингулярных интегральных уравнений в классах Ψ_p

Наша задача – изучить метод Галеркина для решения уравнения

$$A\varphi = f\,,\ \varphi\in \hat{W}_2^1,\ f\in L_2^{(2)}, \tag{18}$$

где, в соответствии с формулой (17),

$$A := H+\alpha S+\beta L+K:\hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}\,. \tag{19}$$

Напомним, что $\Psi_2 \equiv \hat{W}_2^1$, $\Psi_0 \equiv L_2^{(2)}$, и ниже будем использовать оба обозначения для этих пространств.

Обозначим через P_N и Q_N проекторы, действующие по формулам:

$$P_N\varphi = \sum_{k=0}^{N-1}\xi_k U_k\,,\ P_N:\Psi_2\to\Psi_2,\ \varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k U_k(x), \tag{20}$$

$$Q_N f = \sum_{k=0}^{N-1}\eta_k U_k\,,\ Q_N:\Psi_0\to\Psi_0,\ f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k U_k(x). \tag{21}$$

Пусть $\Psi_2^N = P_N\Psi_2 \subset \Psi_2$ и $\Psi_0^N = Q_N\Psi_0 \subset \Psi_0$ – конечномерные подпространства соответствующих пространств размерности $N(>0)$. Заметим, что P_N и Q_N, определяемые формулами (20) и (21), являются ортогональными проекторами [9, п. 1; 10, с. 219]. Тогда можно сформулировать метод Галеркина для решения уравнения (18) как проекционный метод: найти приближенное решение уравнения

$$Q_N A\varphi_N = Q_N f\,,\ \varphi_N \in \Psi_2^N, \tag{22}$$

для $N=1,2,\ldots$ Этот метод также можно сформулировать эквивалентным (и более распространенным) способом: найти приближенное решение уравнения

$$(A\varphi_N, v)_{L_2^{(2)}} = (f, v)_{L_2^{(2)}},\ \forall v \in \Psi_0^N,\ \varphi_N \in \Psi_2^N, \tag{23}$$

для $N = 1, 2, \ldots$, где круглые скобки обозначают скалярное произведение в пространстве $L_2^{(2)}$. Эквивалентность формулировок показана в [9, п. 3; 10, с. 240].

Определение 1. Проекционный метод (22) (или (23)) будем называть сходящимся для инъективного оператора $A : \hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}$, если для любого $f \in \operatorname{Im} A$ уравнение (22) однозначно разрешимо для $N \geq N_0$, начиная с некоторого $N_0 > 0$, и $\|\varphi - \varphi_N\|_w \to 0$ при $N \to \infty$, где $A\varphi = f$.

Здесь $\operatorname{Im} A$ – образ оператора A, а уравнение $A\varphi = f$ имеет единственное решение для любого $f \in \operatorname{Im} A$ в силу инъективности оператора A.

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 4 и оператор $A : \hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}$ инъективен, то проекционный метод (22) (или (23)) сходится для оператора A.

Доказательство. Для доказательства сходимости проекционного метода (22) достаточно доказать [9, теорема 4; 10, с. 221], что этот же метод сходится для оператора $H : \hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}$, поскольку оператор $\alpha S + \beta L + K : \hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}$ является компактным в силу лемм 3–5 (при выполнении условий леммы 4), а оператор $A : \hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}$, определенный формулой (19), инъективен.

Рассмотрим уравнения

$$H\varphi = f,\ \varphi \in \hat{W}_2^1,\ f \in L_2^{(2)} \tag{24}$$

и

$$Q_N H \varphi_N = Q_N f,\ \varphi_N \in \Psi_2^N. \tag{25}$$

Разложим правую часть в (24) в ряд Фурье по многочленам Чебышева 2-го рода:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k U_k(x). \tag{26}$$

Это возможно, так как $f \in L_2^{(2)}$. Ряд (26) сходится по норме в пространстве $L_2^{(2)}$ и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k|^2 < \infty. \tag{27}$$

В силу леммы 2 и формулы (12) получаем, что (единственное) решение уравнения (24) имеет вид

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\eta_k}{\pi(k+1)}U_k(x),$$

а (единственное) решение уравнения (25) имеет вид

$$\varphi_N(x)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\eta_k}{\pi(k+1)}U_k(x),$$

тогда

$$\varphi(x)-\varphi_N(x)=\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\eta_k}{\pi(k+1)}U_k(x).$$

Отсюда получаем, что

$$\left\|\varphi-\varphi_N\right\|_w=\left\|\varphi-\varphi_N\right\|_2=\frac{1}{\pi}\left(\sum_{k=N}^{\infty}|\eta_k|^2\right)^{1/2}\to 0$$

при $N\to\infty$ в силу сходимости ряда (27). Таким образом, сходимость метода Галеркина (25) доказана. Теорема доказана.

Из сходимости метода Галеркина (22) получаем [9, теорема 3; 10, с. 220]

Следствие 1. Для последовательности приближенных решений уравнений (22) имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости

$$\left\|\varphi-\varphi_N\right\|_w=C\inf_{\psi\in\Psi_2^N}\left\|\varphi-\psi\right\|_w \tag{28}$$

с некоторой константой C, зависящей от оператора A.

Заметим, что правую часть в (28) можно вычислить и определить порядок скорости сходимости приближенного решения к точному.

Заключение

Рассмотрен численный метод Галеркина для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на отрезке в специальных классах функций Ψ_p. Это пространства функций, которые представляются рядами Фурье по многочленам Чебышева 2-го рода со специальным ограничением на скорость убывания коэффициентов Фурье. При $p=2$ пространство Ψ_p совпадает с некоторым весовым пространством Соболева $\hat{W}_2^1$.

Основным результатом настоящей статьи является доказательство сходимости метода Галеркина с базисными и тестовыми функциями – многочленами Чебышева 2-го рода – для решений гиперсингулярного интегрального уравнения в этих пространствах функций. Кроме того, получена квазиоптимальная оценка скорости сходимости приближенных решений к точным. Эти результаты являются важными при реализации численных методов для решения гиперсингулярных уравнений.

Список литературы

1. Ilyinsky A. S., Smirnov Y. G. Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998. 114 p.
2. Shestopalov Y. V., Smirnov Y. G., Chernokozhin E. V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics. VSP, Utrecht, the Netherlands, 2000. 117 p.
3. Lifanov I. K., Poltavskii L. N., Vainikko M. M. Hypersingular Integral Equations and Their Applications. 1st ed. CRC Press, 2003. 396 p.
4. Сетуха А. В. Метод интегральных уравнений в математической физике : учеб. пособие. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2023. 316 с.
5. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. 268 с.
6. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1979. 416 с.
7. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости гиперсингулярных интегральных операторов в специальных классах функций // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 2. С. 3–14. doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-1
8. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М. : Мир, 1980. 608 с.
9. Смирнов Ю. Г. Проекционные методы. Пенза : Изд-во ПГТУ, 1997.
10. Kress R. Linear Integral Equations // Applied Mathematical Sciences, 82. Springer-Verlag, New York, 1999. 365 p.

References

1. Ilyinsky A.S., Smirnov Yu.G. *Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens*. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998:114.
2. Shestopalov Yu.V., Smirnov Yu.G., Chernokozhin E.V. *Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics*. VSP, Utrecht, the Netherlands, 2000:117.
3. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko M.M. *Hypersingular Integral Equations and Their Applications. 1st ed*. CRC Press, 2003:396.
4. Setukha A.V. *Metod integralnykh uravneniy v matematicheskoy fizike: ucheb. posobiye = Method of integral equations in mathematical physics: textbook.* Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 2023:316. (In Russ.)
5. Smirnov Yu.G. *Matematicheskiye metody issledovaniya zadach elektrodinamiki = Mathematical methods for studying problems of electrodynamics*. Penza: Inf.-izd. tsentr PenzGU, 2009:268. (In Russ.)
6. Suyetin P.K. *Klassicheskiye ortogonalnyye mnogochleny = Classical orthogonal polynomials*. Moscow: Nauka, 1979:416. (In Russ.)
7. Smirnov Yu.G. On the Fredholm property of hypersingular integral operators in special classes of functions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(2):3–14. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-1
8. Lyuk Yu. *Spetsialnyye matematicheskiye funktsii i ikh approksimatsii = Special mathematical functions and their approximations*. Moscow: Mir, 1980:608. (In Russ.)
9. Smirnov Yu.G. *Proyektsionnyye metody = Projection methods*. Penza: Izd-vo PGTU, 1997. (In Russ.)
10. Kress R. *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences, 82. Springer-Verlag, New York, 1999:365.

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Yuriy G. Smirnov
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 23.06.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 19.07.2025

Принята к публикации / Accepted 18.08.2025