

УДК 517.9

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-5

Итерационные методы решения квадратичных интегральных уравнений Вольтерра I рода

А. Н. Тында

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

tynda@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Проведено численное исследование интегральных уравнений первого рода с квадратичной нелинейностью, являющихся частью обобщенного интегро-степенного ряда Вольтерра и описывающих динамические системы с одним входом и одним выходом. Такие уравнения широко применяются в моделировании стационарных систем с неизменными динамическими характеристиками в течение переходного процесса. *Материалы и методы.* В основе предложенных итерационных численных методов лежит предварительная линеаризация интегрального оператора по модифицированной схеме Ньютона – Канторовича и использование параметра регуляризации для обеспечения устойчивости к колебанию входных данных. Для решения линейных уравнений на каждой итерации применен метод последовательных приближений в сочетании с аппроксимацией точного решения полиномиальным сплайном, построенным на каждом сегменте разбиения по нулям многочленов Лежандра. Для вычисления интегралов используется составная квадратурная формула Гаусса. *Результаты и выводы.* Предложен ряд итерационных численных схем решения квадратичных интегральных уравнений Вольтерра. Сформулированы теоремы сходимости модифицированного метода Ньютона – Канторовича. Приведены численные результаты, подтверждающие сходимость методов.

Ключевые слова: ряд Вольтерра, квадратичные интегральные уравнения, линеаризация оператора, регуляризация, итерационный процесс

Для цитирования: Тында А. Н. Итерационные методы решения квадратичных интегральных уравнений Вольтерра I рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 58–69. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-5

Iterative methods for solving quadratic Volterra integral equations of the first kind

A.N. Tynda

Penza State University, Penza, Russia

tynda@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* The paper is devoted to the numerical study of integral equations of the first kind with quadratic nonlinearity, which are part of the generalized Volterra integro-power series and describe dynamical systems with one input and one output. Such equations are widely used in the modeling of stationary systems with constant dynamic characteristics during the transfer process. *Materials and methods.* The proposed iterative numerical methods are based on the preliminary linearization of the integral operator according to the modified Newton-Kantorovich scheme and the use of the regularization parameter to ensure stability to fluctuations in the input data. To solve linear equations at

each iteration, the method of successive approximations is used in combination with the approximation of the exact solution by a polynomial spline constructed for each segment on the zeros of Legendre polynomials. The Gauss compound quadrature formula is used to calculate integrals. *Results and conclusions.* A number of iterative numerical schemes for solving quadratic Volterra integral equations are proposed. The convergence theorems of the modified Newton-Kantorovich method are formulated. Numerical results confirming the convergence of the methods are presented.

Keywords: Volterra series, quadratic integral equations, linearization of the operator, regularization, iterative process

For citation: Tynda A.N. Iterative methods for solving quadratic Volterra integral equations of the first kind. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):58–69. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-5

1. Постановка задачи

В 1930 г. итальянским математиком Вито Вольтерра было введено понятие интегро-степенного ряда и доказано, что он обобщает известную формулу Тейлора для функций n переменных [1]. Фундаментальным результатом является то, что такие ряды описывают нелинейные системы с памятью.

Рассмотрим одну из форм записи этого ряда, моделирующего стационарную динамическую систему (с неизменными динамическими характеристиками в течение переходного процесса T):

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t K_n(t, s_1, s_2, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

В развернутом виде:

$$y(t) = \int_0^t K_1(t, s) x(s) ds + \iint_{00}^t K_2(t, s_1, s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2 + \\ + \iiint_{000}^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x(s_1) x(s_2) x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Равенство (1) описывает нелинейную динамическую систему «вход-выход», при этом ядра $K_1(t, s)$, $K_2(t, s_1, s_2)$, ..., играют роль переходных характеристик, учитывающих динамические нелинейности системы с одним входом $x(t)$ и одним выходом $y(t)$.

Интегро-степенные ряды Вольтерра широко применяются для моделирования различных нелинейных динамических объектов [1–3]. Основанием для их применения является теорема Фреше – континуальный аналог теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами.

Для модели (2) можно выделить два основных направления исследований:

- задачи идентификации, заключающиеся в определении переходных характеристик $K_1(t, s)$, $K_2(t, s_1, s_2)$, ..., (см., например [4–6]);
- задачи исследования и решения полилинейных интегральных уравнений [3, 7, 8].

Частными случаями (2) являются:

- $N = 1$. Классическое линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода:

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

- $N = 2$. Квадратичное (билинейное) интегральное уравнение Вольтерра:

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Классические уравнения вида (3) с различного рода ядрами в различных пространствах достаточно хорошо изучены, разработан широкий спектр методов с регуляризацией (см., например, монографию [9]).

Уравнения I рода с ядрами, терпящими разрывы вдоль семейства гладких кривых (*слаборегулярные* уравнения Вольтерра I рода), классифицированы Д. Н. Сидоровым [2, 10] и численно исследовались в работах [11, 12]. Модели Вольтерра с такими ядрами находят применение при моделировании различных динамических процессов, включая системы накопителей энергии [12].

Среди работ, посвященных изучению интегральных уравнений вида (4), необходимо отметить серию работ А. С. Апарцина (см., например, [3, 7]).

2. Итерационный метод с линеаризацией оператора

Рассмотрим уравнение (4), наложив некоторые условия на входящие в него функции. Пусть ядра $K_1(t, s)$ и $K_2(t, s_1, s_2)$ являются непрерывными функциями каждого из своих аргументов и дифференцируемыми по переменной t , а правая часть $y(t) \in C^1[0, T]$, пусть, кроме того, $y(0) = 0$. Дополнительные условия, обеспечивающие существование единственного непрерывного решения уравнения (4), представлены в работе [3]. Дальнейшие рассуждения проводятся в рамках этих ограничений.

Непосредственная дискретизация уравнения (4) с использованием классических схем аппроксимации приводит к системам нелинейных (квадратичных) алгебраических уравнений и может столкнуться с вопросами выделения нужных приближенных значений искомой функции. В данной главе построим итерационный приближенный метод решения (4), основанный на схеме Ньютона – Канторовича и предполагающий линеаризацию интегрального оператора. В этом случае задача сводится к последовательному решению линейных интегральных уравнений вида (3). Для динамических систем с векторными входом и выходом, описываемых квадратичными интегральными уравнениями, метод Ньютона – Канторовича применен в работе [8].

Обозначим

$$Fx \equiv \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 - y(t). \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) в операторной форме принимает вид

$$Fx = 0. \quad (6)$$

Производная Фреше оператора F в точке x_0 определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} [F'(x_0)](x) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \omega x) - F(x_0)}{\omega} = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \\ &+ \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \left[\int_0^t (x_0(s_1) + \omega x(s_1))ds_1 \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)(x_0(s_2) + \omega x(s_2))ds_2 - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t x_0(s_1)ds_1 \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_0(s_2)ds_2 \right] = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \\ &+ \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{x_0(s_1)\omega x(s_2) + \omega x(s_1)x_0(s_2) + \omega^2 x(s_1)x(s_2)}{\omega} ds_1 ds_2 = \\ &= \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_0(s_1)x(s_2)ds_1 ds_2 + \\ &+ \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_0(s_2)x(s_1)ds_1 ds_2 = \int_0^t [K_1(t, s) + G_{0,1}(t, s) + G_{0,2}(t, s)]x(s)ds, \end{aligned}$$

где

$$G_{m,1}(t, s) = \int_0^t K_2(t, s_1, s)x_m(s_1)ds_1, \quad G_{m,2}(t, s) = \int_0^t K_2(t, s, s_2)x_m(s_2)ds_2.$$

Таким образом, получаем следующее выражение для производной интегрального оператора F , вычисленной в некоторой точке $x_m(t) \in C[0, T]$:

$$[F'(x_m)](x) = \int_0^t L_m(t, s)x(s)ds, \quad L_m(t, s) = K_1(t, s) + G_{m,1}(t, s) + G_{m,2}(t, s). \quad (7)$$

Итерационный процесс Ньютона – Канторовича принимает вид

$$F'(x_m(t))\Delta x_{m+1}(t) = -F(x_m(t)), \quad \Delta_{m+1} = x_{m+1} - x_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

В развернутом виде получаем

$$\int_0^t L_m(t, s)(x_{m+1}(s) - x_m(s))ds = y(t) - \int_0^t K_1(t, s)x_m(s)ds -$$

$$-\int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_m(s_1) x_m(s_2) ds_1 ds_2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, на каждом шаге m итерационного процесса (8) возникает необходимость решения линейного интегрального уравнения Вольтерра I рода относительно очередного приближения $x_{m+1}(t)$:

$$\int_0^t L_m(t, s) x_{m+1}(s) ds = Y_m(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$Y_m(t) = y(t) + \int_0^t [L_m(t, s) - K_1(t, s)] x_m(s) ds - \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_m(s_1) x_m(s_2) ds_1 ds_2;$$

$x_0(t)$ – начальное приближение.

Вычисление производной оператора F на каждом шаге m итерационного метода (8) в новой точке $x_m(t)$ может быть весьма затратным.

Модифицированная схема Ньютона – Канторовича [13], которая позволяет избежать такой необходимости, имеет вид

$$F'(x_0(t)) \Delta x_{m+1}(t) = -F(x_m(t)), \quad \Delta_{m+1} = x_{m+1} - x_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$\int_0^t L_0(t, s) x_{m+1}(s) ds = Y_m(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где

$$Y_m(t) = y(t) + \int_0^t [L_0(t, s) - K_1(t, s)] x_m(s) ds - \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_m(s_1) x_m(s_2) ds_1 ds_2.$$

Несмотря на потерю в скорости сходимости такого итерационного процесса, получаем важное преимущество – ядро $L_0(t, s)$ интегрального уравнения (11) остается неизменным на каждой итерации, так как зависит лишь от начального приближения $x_0(t)$ и в ряде случаев может быть получено аналитически.

2.1. Сходимость

Следуя классической монографии [13], применим общую теорию к нашему итерационному процессу (10) и сформулируем теорему его сходимости в банаховом пространстве $C[0, T]$ со стандартной нормой:

$$\|x(t)\|_{C[0, T]} = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|.$$

Теорема 1. Пусть оператор F дважды непрерывно дифференцируем в шаре $\Omega_0 : \{x, \|x - x_0\|_{C[0, T]} \leq p\}$ и, кроме того:

1) уравнение

$$\int_0^t L_0(t,s)x_1(s)ds = Y_0(t) \quad (12)$$

имеет единственное решение на $[0, T]$, т.е. существует обратный оператор

$$\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1};$$

$$2) \|\Delta x_1\|_{C[0,T]} \leq \eta;$$

$$3) \|\Gamma_0 F''(x)\|_{C[0,T]} \leq L, \quad x \in \Omega_0.$$

Если также

$$h = L\eta < \frac{1}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leq p \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta,$$

то уравнение (6) имеет единственное решение x^* в Ω_0 , процесс (10) сходится к x^* , а скорость сходимости оценивается неравенством

$$\|x_m - x^*\|_{C[0,T]} \leq \frac{\eta}{h} (1 - \sqrt{1 - 2h})^{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Существование единственного непрерывного решения уравнения (12) обеспечивается условием $y(t) \in C^1[0, T]$ (нетрудно проверить, что в этом случае и $Y_0(t) \in C^1[0, T]$). Таким образом, условие 1 теоремы выполняется. Нетрудно также проверить, что оператор F имеет в точке $x_0 \in C[0, T]$ непрерывную вторую производную (билинейный интегральный оператор).

Для оценки скорости сходимости схемы (10) при необходимости можно обойти условие существования второй производной $[F''(x_0)]$. Достаточные условия, обеспечивающие сходимость итерационного процесса для модифицированного метода Ньютона – Канторовича, предложены в работе [14]. Применим их для нашей задачи:

Теорема 2. Пусть

$$\|\Delta x_1\|_{C[0,T]} \leq B_0, \quad \|F(x_0)\|_{C[0,T]} = \eta_0.$$

Пусть также в шаре $\Omega: \left\{x, \|x - x_0\|_{C[0,T]} \leq \frac{B_0 \eta_0}{1 - q}\right\} (q < 1)$ выполняется

следующее условие:

$$\|F'(x^{(1)}) - F'(x^{(2)})\|_{C[0,T]} \leq q / B_0.$$

Тогда уравнение (6) имеет единственное решение x^* в Ω , последовательность приближенных решений (10) сходится к x^* и справедлива оценка погрешности:

$$\|x_m - x^*\|_{C[0,T]} \leq \frac{q^m \eta_0 B_0}{1-q}.$$

3. Решение линейного уравнения

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода (11), возникающее на каждой итерации модифицированного метода Ньютона – Канторовича. Для его численного решения будем использовать два стандартных подхода.

Метод последовательных приближений. Одним из эффективных подходов к решению уравнений Вольтерра первого рода с гладкими ядрами является сведение уравнения первого рода к уравнению второго рода посредством дифференцирования. Продифференцируем обе части уравнения (11):

$$\int_0^t \frac{\partial L_0(t,s)}{\partial t} x_{m+1}(s) ds + L_0(t,t) x_{m+1}(t) = Y'_m(t).$$

Теперь, используя принцип сжимающих отображений, определим приближенное решение уравнения как предел последовательности приближений:

$$x_{m+1}^{p+1}(t) = f(t) - \int_0^t V(t,s) x_{m+1}^p(s) ds, \quad x_{m+1}^0 = f(t), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где

$$f(t) = \frac{Y'_m(t)}{L_0(t,t)}, \quad V(t,s) = \frac{1}{L_0(t,t)} \frac{\partial L_0(t,s)}{\partial t}, \quad L_0(t,t) \neq 0.$$

4. Сглаживающий итерационный метод

Хорошо известно, что задача решения уравнений I рода, к которым относится и уравнение (4), может быть некорректной. В первую очередь тут играют роль показатели гладкости входящих в уравнение функций, а точнее, наборы рассматриваемых пространств. Интегральный оператор (5) отображает пространство решений не на все это пространство, а на его подпространство. Поэтому обратный оператор не ограничен, а значит, близость решений и близость правых частей следует оценивать в разных метриках (близость правых частей должна быть в более сильной метрике).

Одним из проявлений некорректности задачи является нарушение непрерывной зависимости решений от начальных данных. В системах типа «вход-выход» в ситуации неточного экспериментального определения выходного сигнала $y(t)$ это обстоятельство играет существенную роль. В таких случаях необходима регуляризация. Предложим сглаживающий итерационный метод, позволяющий получить устойчивое решение уравнения (4) с некоторой точностью, которое затем может быть использовано в методе Ньютона – Канторовича в качестве начального приближения:

$$x_{m+1}(t) = x_m(t) + \gamma \left(y(t) - \int_0^t K_1(t,s) x_m(s) ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_m(s_1) x_m(s_2) ds_1 ds_2, \right) \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

$$x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t),$$

где $x_0(t)$ – начально приближение.

На практике параметр регуляризации γ можно выбирать из условия минимальности невязки для достаточно больших значений m :

$$\begin{aligned} \varepsilon_m = & \left\| \int_0^t K_1(t, s) x_m(s) ds + \right. \\ & \left. + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_m(s_1) x_m(s_2) ds_1 ds_2 - y(t) \right\|_{C[0, T]} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (15)$$

Приближенное решение $x_{m+1}(t)$ на каждой новой итерации будем искать в виде кусочно-линейной функции, построенной на равномерной сетке узлов $t_i = iT / N$, $i = \overline{0, N}$:

$$X_N^{m+1}(t) = x_{m+1}(t_{k-1}) + \frac{x_{m+1}(t_k) - x_{m+1}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = \overline{1, N}.$$

Значения $x_{m+1}(0)$ определяются с помощью дифференцирования исходного уравнения, а для вычисления неизвестных значений $x_{m+1}(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, имеем последовательность равенств:

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t_k) = & X_N^m(t_k) + \gamma \left(y(t_k) - \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} K_1(t_k, s) X_N^m(s) ds - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{t_{l-1}}^{t_l} K_2(t_k, s_1, s_2) X_N^m(s_1) X_N^m(s_2) ds_1 ds_2 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

5. Численные результаты

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} & \int_0^t (1+t-s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t (1+s_1+s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = \\ & = 1 - \sin(t) - \cos(t) + 2t\sin^2(t) + \sin^2(t) + \sin(2t), \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (17)$$

точным решением которого является функция $x(t) = \cos t$.

5.1. Итерационный метод с регуляризацией

Проиллюстрируем работу предложенного сглаживающего итерационного алгоритма на модельном уравнении (17) при различных значениях параметра регуляризации γ . Результаты решения модельной задачи (17) приведены в табл. 1 и 2, в которых приняты следующие обозначения: m – количество итераций, $\epsilon_m = \max_{t \in [0, T]} |x(t) - x_m(t)|$ – норма погрешности.

Таблица 1
Зависимость погрешности вычислений от числа итераций при $\gamma = 0,03$

m	5	10	25	50	100	250	500	1000
ϵ_m	0,034	0,023	0,016	0,0052	0,00312	0,00097	0,00061	0,00032

Таблица 2
Зависимость погрешности вычислений от числа итераций при $\gamma = 0,01$

m	5	10	25	50	100	250	500	1000
ϵ_m	0,03	0,023	0,016	0,023	0,011	0,002	0,0012	0,0007

5.2. Модифицированный метод Ньютона – Канторовича

В табл. 3 приведены результаты работы итерационного метода (10). Для решения линейных уравнений на каждой итерации применен метод последовательных приближений в сочетании с аппроксимацией точного решения полиномиальным сплайном, построенным на каждом сегменте разбиения по нулям многочленов Лежандра. Для вычисления интегралов используется составная квадратурная формула Гаусса. В качестве начального приближения $x_0(t)$ выбрано приближенное решение, полученное методом (14) с невязкой (15), равной 0,01.

Таблица 3
Результаты решения уравнения (17)

m	N	r	ϵ_1	ϵ_2
1	10	3	0,00078	0,00082
2	10	3	$6,49 \cdot 10^{-5}$	$8,67 \cdot 10^{-5}$
3	10	3	$9,73 \cdot 10^{-6}$	$2,84 \cdot 10^{-5}$
5	10	3	$4,33 \cdot 10^{-6}$	$7,61 \cdot 10^{-6}$
2	20	3	$1,29 \cdot 10^{-6}$	$3,13 \cdot 10^{-6}$
5	20	3	$1,13 \cdot 10^{-6}$	$2,32 \cdot 10^{-6}$
2	20	4	$8,26 \cdot 10^{-7}$	$2,92 \cdot 10^{-6}$
5	20	4	$1,14 \cdot 10^{-7}$	$4,26 \cdot 10^{-7}$
5	50	5	$6,37 \cdot 10^{-8}$	$1,95 \cdot 10^{-7}$
10	100	5	$3,27 \cdot 10^{-12}$	$6,11 \cdot 10^{-12}$

В табл. 3 используются следующие обозначения: N – число подобластей разбиения отрезка $[0, T]$, m – число итераций модифицированного ме-

тода Ньютона – Канторовича; $\mathbf{r}$ – порядок сплайна; $\varepsilon_1 = \max_{k,i} |x_m(t_k^i) - x^*(t_k^i)|$ –

погрешность в узлах сетки; $\varepsilon_2 = \|x_m(t) - x^*(t)\|_{C[0,T]}$.

Заключение

Как можно видеть из представленных результатов, метод показывает достаточно быструю сходимость, согласующуюся с теоретическими оценками, что во многом обеспечивается выбором хорошего начального приближения.

Список литературы

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1982. 304 с.
2. Sidorov D. Integral Dynamical Models // Singularities, Signals And Control / ed. by L. O. Chua, World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A. Singapore : World Scientific Press, 2015. Vol. 87.
3. Апарцин А. С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2007. № 1. С. 13–41.
4. Солодуша С. В., Антипина Е. Д. К идентификации ядер Вольтерра в интегральных моделях линейных нестационарных динамических систем // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. № 224. Р. 125–132.
5. Воскобойников Ю. Е., Боева В. А. Идентификация квадратичного ядра уравнения Вольтерра для моделирования нелинейных динамических систем // Системы анализа и обработки данных. 2022. Т. 85, № 1. С. 25–40.
6. Sidorov D., Tynda A., Muratov V., Yanitsky E. Volterra black-box models identification methods: direct collocation vs. least squares // Mathematics. 2024. Vol. 12 (2). P. 227. doi: 10.3390/math12020227
7. Апарцин А. С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 8. С. 1380–1388.
8. Солодуша С. В. К численному решению одного класса систем полиномиальных уравнений Вольтерра I рода // Сибирский журнал вычислительной математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 117–126.
9. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие. Киев : Наукова думка, 1986. 543 с.
10. Sidorov D. N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel // Diff. Equat. 2013. Vol. 49. P. 210–216.
11. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 313. P. 119–128.
12. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels // Numerical Solution and Application for Power Systems Operation. Mathematics. 2020. Vol. 8. P. 1257.
13. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional Analysis. 2nd edition. Pergamon, 1982. 589 p.
14. Бойков И. В. Некоторые вопросы приближенного решения нелинейных операторных уравнений методом Ньютона – Канторовича // Точные науки : сб. аспирант. раб. Казань : Изд-во Каз. гос. ун-та, 1970. С. 82–94.

References

1. Vol'terra V. *Teoriya funktsionalov, integral'nykh i integrodifferentsial'nykh uravneniy = Theory of functionals, integral and integro -reference equations*. Moscow: Nauka, 1982:304. (In Russ.)
2. Sidorov D. Integral Dynamical Models. *Singularities, Signals And Control*. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A. Singapore: World Scientific Press, 2015;87.
3. Apartsin A.S. Voltaire's polyline integral equations and kinds: elements of theory and numerical methods. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika = Proceedings of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2007;(1):13–41. (In Russ.)
4. Solodusha S.V., Antipina E.D. To the identification of Voltaire's nuclei in integrated models of linear non -stationary dynamic systems. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory = The results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews*. 2023;(224):125–132. (In Russ.)
5. Voskoboynikov Yu.E., Boeva V.A. Identification of the quadratic nucleus of Voltaire's equation for modeling nonlinear dynamic systems. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Data analysis and processing systems*. 2022;85(1):25–40. (In Russ.)
6. Sidorov D., Tynda A., Muratov V., Yanitsky E. Volterra black-box models identification methods: direct collocation vs. least squares. *Mathematics*. 2024;12(2):227. doi: 10.3390/math12020227
7. Apartsin A.S. To the numerical solution of one class of systems of polynomial equations of Voltaire I kind. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics*. 2007;47(8):1380–1388. (In Russ.)
8. Solodusha S.V. To the numerical solution of one class of systems of polynomial equations of Voltaire I kind. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki = Siberian journal computing mathematics*. 2018;21(1):117–126. (In Russ.)
9. Verlan' A.F., Sizikov V.S. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy: spravochnoe posobie = Integral equations: methods, algorithms, programs: reference manual*. Kiev: Naukova dumka, 1986:543. (In Russ.)
10. Sidorov D.N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel. *Diff. Equat.* 2013;49:210–216.
11. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017;313:119–128.
12. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels. *Numerical Solution and Application for Power Systems Operation. Mathematics*. 2020;8:1257.
13. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional Analysis. 2nd edition*. Pergamon, 1982:589.
14. Boykov I.V. Some issues of the approximate solution of nonlinear operator equations by Newton – Kantorovich. *Tochnye nauki: sb. aspir. rab. = Exact sciences: collected papers of postgraduate students*. Kazan: Izd-vo Kaz. gos. un-ta, 1970:82–94. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Александр Николаевич Тында

кандидат физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: tynda@pnzgu.ru

Aleksandr N. Tynda

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, head
of the sub-department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 09.04.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 20.04.2025

Принята к публикации / Accepted 10.05.2025