УДК 517.925
doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-4

О бифуркациях периодической траектории, касающейся линий переключения в двух точках

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия

vroitenberg@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели*. Динамические системы, задаваемые разрывными кусочно-гладкими векторными полями на плоскости, являются естественными математическими моделями релейных систем теории автоматического управления. Периодические траектории описывают автоколебания. Хотя исследованию рождения периодических траекторий посвящено значительное число работ, описание типичных бифуркаций далеко от завершения. Целью настоящей работы является изучение бифуркаций периодических траекторий, аналогичных бифуркациям двойного и тройного циклов гладкой динамической системы. *Материалы и методы*. Применяются метод точечных отображений и другие методы качественной теории дифференциальных уравнений. *Результаты.* Рассматривается типичное двухпараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей на плоскости. Предполагается, что при нулевых значениях параметров поле имеет периодическую траекторию Г, касающуюся линий переключения в двух особых точках типа «развилка» и не содержащую других особых точек. При этом обе компоненты, на которые Г разбивает плоскость, пересекаются с сепаратрисами развилок, не содержащимися в Г. Рассматриваются три случая. В первом случае Г устойчива и бифурцирует аналогично тройному циклу, во втором случае Г устойчива, но ее бифуркации состоят только в изменении числа участков скользящих движений на ней, а в третьем случае Г полуустойчива и бифурцирует аналогично двойному циклу. *Выводы.* Указано несколько возможных сценариев рождения и перерождения периодических траекторий кусочно-гладкой динамической системы при изменении ее параметров.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле на плоскости, особая точка, периодическая траектория, бифуркация

Для цитирования: Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях периодической траектории, касающейся линий переключения в двух точках // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 45–57. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-4

On bifurcations of a periodic orbit tangent to switching lines at two points

V.Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia

vroitenberg@mail.ru

Abstract. *Background*. Dynamic systems defined by discontinuous piecewise smooth vector fields on a plane are natural mathematical models of relay systems in automatic control theory. Periodic trajectories describe self-oscillations. Although a significant number of works have been devoted to the study of the birth of periodic trajectories, the description of typical bifurcations is far from complete. The purpose of this research is to study bifurcations of periodic trajectories similar to bifurcations of double and triple cycles of a smooth dynamic system. *Materials and methods.* The method of point mappings and other methods of the qualitative theory of differential equations are applied. *Results*. A generic two-parameter family of piecewise smooth vector fields on a plane is considered. It is assumed that for zero values of the parameters the field has a periodic trajectory Γ touching the switching lines at two singular points of the fork type and not containing other singular points. In this case, both components into which Γ divides the plane intersect with the separatrices of the forks that are not contained in Γ. Three cases are considered. In the first case, Γ is stable and bifurcates similarly to a triple cycle, in the second case, Γ is stable, but its bifurcations consist only in changing the number of sections of sliding motions on it, and in the third case, Γ is semistable and bifurcates similarly to a double cycle. *Conclusions.* Several possible scenarios for the birth and rebirth of periodic trajectories of a piecewise smooth dynamic system when its parameters change are indicated.

Keywords: piecewise smooth planar vector field, singular point, periodic trajectory, bifurcation

For citation: Roitenberg V.Sh. On bifurcations of a periodic orbit tangent to switching lines at two points. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):45–57. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-4

Введение

Исследования бифуркаций кусочно-гладких динамических систем на плоскости ведутся уже давно [1, 2]. Бифуркации рождения периодической траектории из особой точки и другие локальные бифуркации в типичных семействах кусочно-гладких систем на плоскости с одним и двумя параметрами изучались в работах [2–9]. Бифуркации сепаратрисных контуров и периодических траекторий рассматривались в [3–5, 10, 11]. Тем ни менее до сих пор не исследованы некоторые нетривиальные бифуркации в типичных двухпараметрических семействах.

В данной работе описываются бифуркации в окрестности периодической траектории, касающейся линий переключения в двух особых точках типа «развилка».

1. Предварительные сведения

Пусть $\bigcup_{k=1}^{m} M_k = \mathbf{R}^2$, где множества M_k имеют границу ∂M_k, являющуюся вложенным одномерным C^∞-подмногообразием $\mathbf{R}^2$, а $M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j$, если $i, j \in \{1,..,m\}$, $i \neq j$. Обозначим $D := \{M_1, M_2, ..., M_m\}$. Множества $M_{ij} := M_i \cap M_j \neq \varnothing$ – C^∞-гладкие одномерные подмногообразия $\mathbf{R}^2$.

Кусочно-гладким векторным полем класса C^1 на плоскости $\mathbf{R}^2$ с разбиением D, назовем такое векторное поле $X : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, что для любого $k \in \{1,...,m\}$ существует единственное C^1-векторное поле X^k на M_k, для которого $X^k \big|_{\operatorname{int} M_k} = X \big|_{\operatorname{int} M_k}$. Обозначим множество таких полей – $\mathfrak{X}^1(\mathbf{R}^2, D)$. Траектории поля X определим по *принципу выпуклого доопределения* на линиях M_{ij} [2, с. 40, с. 95]. Если в выпуклой оболочке векторов $X^i(x)$ и $X^j(x)$, $x \in M_{ij}$, имеется вектор, касательный к M_{ij}, то обозначим его $X^{i,j}(x)$.

Особые точки векторных полей X^k, точки касания этих полей с ∂M_k и точки $x \in M_{ij}$, в которых $X^{i,j}(x) = 0$, будем называть *особыми точками* поля X.

Пусть в особой точке $O \in M_{ij}$ вектор $X^i(O)$ касается M_{ij}. Выберем C^∞-координаты x_1, x_2 в окрестности $U(O)$ точки O так, чтобы эта точка имела координаты $x_1 = x_2 = 0$, а $M_i \cap U(O)$ ($M_j \cap U(O)$) задавалось условием $x_2 \geq 0$ ($x_2 \leq 0$). В этих координатах $X^i(x) = (P_1^+(x_1, x_2),\ P_2^+(x_1, x_2))$, $X^j(x) = (P_1^-(x_1, x_2),\ P_2^-(x_1, x_2))$, где $P_s^\pm \in C^1$ ($s = 1, 2$), $P_2^+(0,0) = 0$. Особая точка O – *сходящаяся (расходящаяся) развилка*, если $P_1^+(0,0)\dfrac{\partial P_2^+(0,0)}{\partial x_1} > 0$, а $P_2^-(0,0) > 0$ ($P_2^-(0,0) > 0$) (рис. 1).

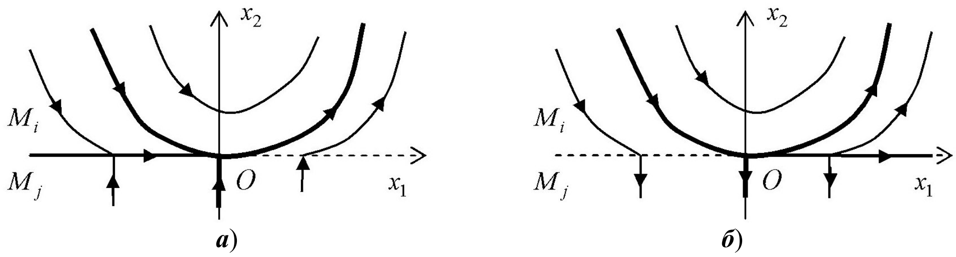

Рис. 1. Сходящаяся развилка (***а***); расходящаяся развилка (***б***)

В сходящейся (расходящейся) развилке O начинается отрицательная (положительная) полутраектория, не касающаяся M_{ij} в точке O – *трансверсальная сепаратриса* развилки O. Положительную и отрицательную полутраектории, начинающиеся в точке O и касающейся M_{ij} в O, назовем *выходящей и входящей касательной сепаратрисами* развилки.

2. Формулировка условий

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon \in \mathfrak{X}^1(\mathbf{R}^2, D)$, зависящих от параметров $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbf{R}^2$ так, что отображение $(x, \varepsilon) \mapsto X_\varepsilon(x)$ принадлежит классу C^1. Будем предполагать выполнение сформулированных ниже условий I–V.

I. Векторное поле X_0 имеет периодическую траекторию Γ_0, проходящую через две развилки O_1^0 и O_2^0, не содержащую других особых точек и содержащую касательные сепаратрисы этих развилок.

Множество $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma_0$ состоит из двух связных компонент C_1 и C_2.

II. Компонента C_1 (соотв. C_2) не пересекается с трансверсальной сепаратрисой развилки O_1^0 (соотв. O_2^0).

Условие **III** сформулируем в двух вариантах:

IIIа. Обе точки O_1^0 и O_2^0 – сходящиеся развилки.

IIIб. Точка O_1^0 – сходящаяся развилка, точка O_2^0 – расходящаяся развилка.

Вариант расходящихся развилок O_1^0 и O_2^0 сводится к **IIIа** переходом к семейству противоположных векторных полей $-X_\varepsilon$.

Будем считать, что развилка $O_k^0 \in M_{i_k j_k}$, а ее касательные сепаратрисы начинаются в M_{i_k}, $k = 1,2$. Выберем C^1-отображения $T_k : (-1,1) \to \operatorname{int} M_{i_1}$ ($k = 1,2$), трансверсальные траекториям поля X^{i_1}, такие, что $\forall s \in (-1,1)$ векторы $T_k'(s)$ и $X^{i_1}(T_k(s))$ линейно независимы, точка $T_1(0)$ ($T_2(0)$) принадлежит входящей (выходящей) касательной сепаратрисе точки O_1^0, а $T_k(0,1) \in C_1$.

Выбрав достаточно малую окрестность нуля $\mathrm{E}^1 \subset \mathbf{R}^2$, будем иметь для поля X_ε, $\varepsilon \in \mathrm{E}^1$, развилки $O_k(\varepsilon) \in M_{i_k j_k}$, $k = 1,2$, такие, что $O_k(\cdot) \in C^1$, $O_k(0) = O_k^0$, при этом входящая (выходящая) касательная сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ пересекает трансверсаль $T_1(-1,1)$ ($T_2(-1,1)$) в точке $T_1(s_{11}(\varepsilon))$ ($T_2(s_{12}(\varepsilon))$), выходящая (входящая) касательная сепаратриса развилки $O_2(\varepsilon)$ пересекает трансверсаль $T_1(-1,1)$ ($T_2(-1,1)$) в точке $T_1(s_{21}(\varepsilon))$ ($T_2(s_{22}(\varepsilon))$), где $s_{kl}(\cdot) \in C^1$, $s_{kl}(0) = 0$ ($k,l = 1,2$).

Считая окрестность E^1 достаточно малой, можно выбрать такие C^1-вложения $T_k^\varepsilon : (-1,1) \to M_{i_k j_k}$ ($\varepsilon \in \mathrm{E}^1$, $k = 1,2$), что $T_k^\varepsilon(v)$ C^1-гладко зависит от (v,ε), $T_k^\varepsilon(0) = O_k(\varepsilon)$, а $T_1^\varepsilon(-1,0)$ и $T_2^\varepsilon(0,1)$ – устойчивые линейные особенности поля X_ε.

Обозначим $s_k(\varepsilon) := s_{2k}(\varepsilon) - s_{1k}(\varepsilon)$ и введем условие

IV. $\det(\partial s_k(0) / \partial \varepsilon_i) \neq 0$.

Оно не зависит от произвола в выборе отображений T_1 и T_2. Сделав в окрестности нуля $\mathrm{E}_* \subset \mathrm{E}^1$ замену $\tilde{\varepsilon}_1 = s_1(\varepsilon)$, $\tilde{\varepsilon}_2 = s_2(\varepsilon)$ и вернувшись к прежним обозначениям параметров, можно считать, что при всех $\varepsilon \in \mathrm{E}_* = (-\delta_*, \delta_*)^2$:

$$s_{2k}(\varepsilon) - s_{1k}(\varepsilon) = \varepsilon_k \text{ для } k = 1,2. \tag{1}$$

Из теорем о функциях соответствия по траекториям между дугами без контакта [12] и (1) следует, что для достаточно малых $u_0 > 0$ и $0 < \delta_0 < \min\{u_0, \delta_*\}$ определены отображения по траекториям поля X_ε, $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2$:

$$T_1\ (s_{11}(\varepsilon) + u) \mapsto T_1^\varepsilon(\varphi_1(u,\varepsilon)),\ u \in (-u_0, 0),$$

$$T_2\ (s_{12}(\varepsilon) + u) \mapsto T_2^\varepsilon(\varphi_2(u,\varepsilon)),\ u \in (\varepsilon_2, u_0),$$

$$T_1\ (s_{11}(\varepsilon) + u) \mapsto T_2\ (s_{12}(\varepsilon) + f_1(u,\varepsilon)),\ u \in [0, u_0),$$

$$T_2\ (s_{12}(\varepsilon) + u) \mapsto T_1\ (s_{11}(\varepsilon) + f_2(u,\varepsilon)),\ u \in (-u_0, \varepsilon_2],$$

такие, что $\varphi_k \in C^1$, $(\varphi_k)'_u(u,\varepsilon) > 0$, $k = 1,2$, $\varphi_1(-0,\varepsilon) \equiv 0$, $\varphi_2(\varepsilon_2 + 0, \varepsilon) \equiv 0$,

$$f_k \in C^1,\ (f_k)'_u(u,\varepsilon) > 0,\ k = 1,2,\ f_1(0,\varepsilon) \equiv 0,\ f_2(\varepsilon_2, \varepsilon) \equiv \varepsilon_1. \qquad (2)$$

Число $\lambda := (f_1)'_u(0,0)(f_2)'_u(0,0)$ не зависит от выбора T_1 и T_2. Сформулируем теперь условие

V. $\lambda \neq 1$.

3. Бифуркации в окрестности Γ_0

Теорема. Пусть выполняются условия I–V. Тогда существует цилиндрическая окрестность U периодической траектории Γ_0, ограниченная простыми замкнутыми кривыми Γ_- и Γ_+, число $\delta > 0$ и разбиение области параметров $\mathrm{E} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \delta^2\}$ на множества $\mathrm{B}_0 = \{(0,0)\}$, B_i, E_i, $i = 1,2,\ldots,6$ (рис. 2):

$$\mathrm{B}_2 = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1), \varepsilon_1 \in (0,\delta)\},\ \mathrm{B}_3 = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \varepsilon_1 = \beta_3(\varepsilon_2), \varepsilon_2 \in (0,\delta)\},$$

$$\beta_j(\cdot) \in C^1,\ \beta_j(+0) = 0,\ \beta'_j(+0) > 0,\ j = 2,3,\ \beta'_2(+0)\beta'_3(+0) < 1,$$

$$\mathrm{B}_1 = \cup_{k \in \mathbf{N}} \mathrm{B}_1^k,\ \mathrm{B}_1^k = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \varepsilon_2 = \beta_1^k(\varepsilon_1), \varepsilon_1 \in (0,\delta)\},$$

$$\beta_1^1(\varepsilon_1) \equiv 0,\ \beta_1^k(\cdot) \in C^1\ \ \beta_1^k(\varepsilon_1) \uparrow \beta_2(\varepsilon_1),$$

$$\mathrm{B}_4 = \cup_{k \in \mathbf{N}} \mathrm{B}_4^k\ , \mathrm{B}_4^k = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \varepsilon_1 = \beta_4^k(\varepsilon_2), \varepsilon_2 \in (0,\delta)\},$$

$$\beta_4^1(\varepsilon_2) \equiv 0,\ \beta_4^k(\cdot) \in C^1,\ \beta_4^k(\varepsilon_2) \uparrow \beta_3(\varepsilon_2),$$

$$\mathrm{B}_5 = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 = 0\},\ \mathrm{B}_6 = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 < 0\},$$

$$\mathrm{E}_2 = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \varepsilon_2 > \beta_2(\varepsilon_1) \wedge \varepsilon_1 > \beta_3(\varepsilon_2)\},\ \mathrm{E}_1 = \cup_{k \in \mathbf{N}} \mathrm{E}_1^k,\ \mathrm{E}_3 = \cup_{k \in \mathbf{N}} \mathrm{E}_3^k,$$

$$\mathrm{E}_1^k = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \beta_1^k(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_1^{k+1}(\varepsilon_1)\},\ \mathrm{E}_3^k = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \beta_4^k(\varepsilon_2) < \varepsilon_1 < \beta_4^{k+1}(\varepsilon_2)\},$$

$$\mathrm{E}_4 = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 > 0\},\ \mathrm{E}_5 = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 < 0\},$$

$$\mathrm{E}_6 = \{\varepsilon \in \mathrm{E} : \varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 < 0\}.$$

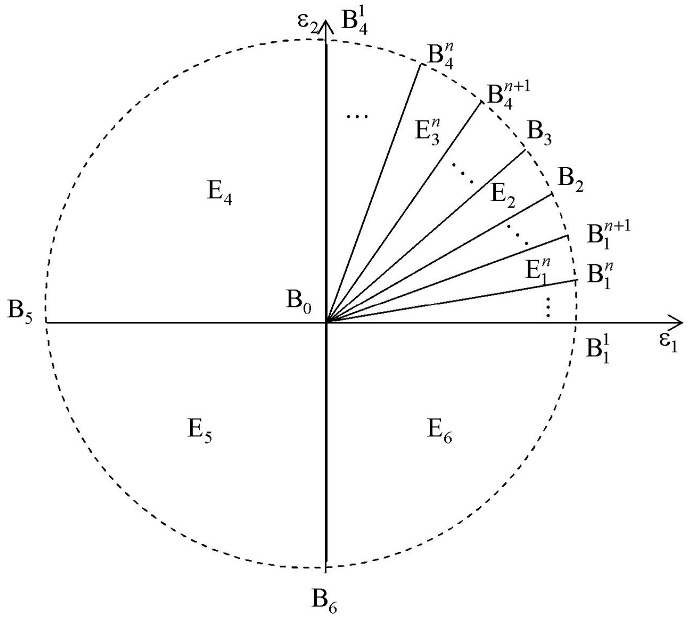

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма

1. В случае, когда условие III имеет вид IIIa, а $\lambda > 1$ (соотв. $\lambda < 1$), в точках Γ_- и Γ_+ траектории векторных полей X_ε, $\varepsilon \in \mathrm{E}$, входят в U, а их фазовые портреты в U имеют вид, изображенный на рис. 3 (соотв. на рис. 4).

2. В случае, когда условие III имеет вид IIIб, а $\lambda > 1$, в точках Γ_- (Γ_+) траектории векторных полей X_ε, $\varepsilon \in \mathrm{E}$, входят в U (выходят из U), а их фазовые портреты в U имеют вид, изображенный на рис. 5.

Случай, когда условие III имеет вид IIIб, а $\lambda < 1$, сводится к случаю 2 переходом к семейству противоположных векторных полей $-X_\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathrm{E}$.

Доказательство. Ограничимся случаем 1, $\lambda > 1$. В случаях 1 (для $\lambda < 1$) и 2 доказательство аналогично.

Функции f_k ($k = 1,2$) можно продолжить до C^1-функций $\overline{f}_k : (-u_0, u_0) \times (-\delta_0, \delta_0)^2 \to \mathbf{R}$. При достаточно малых $u_1 \in (0, u_0)$ и $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ определена функция $\overline{f}(u,\varepsilon) := \overline{f}_2(\overline{f}_1(u,\varepsilon),\varepsilon)$, $(u,\varepsilon) \in (-u_1, u_1) \times$ $\times (-\delta_1, \delta_1)^2$. Так как $\overline{f}'_u(0,0) = \lambda > 1$, то можно считать

$$\overline{f}'_u(u,\varepsilon) > 1 \text{ для всех } (u,\varepsilon) \in (-u_1, u_1) \times (-\delta_1, \delta_1)^2. \tag{3}$$

Из (2) следует, что

$$(f_1)'_{\varepsilon_1}(0,0) = (f_1)'_{\varepsilon_2}(0,0) = 0,$$

$$\overline{f}'_{\varepsilon_1}(0,0) = (\overline{f}_2)'_{\varepsilon_1}(0,0) = 1,\ \overline{f}'_{\varepsilon_2}(0,0) = (\overline{f}_2)'_{\varepsilon_2}(0,0) = -(f_2)'_u(0,0) < 0. \tag{4}$$

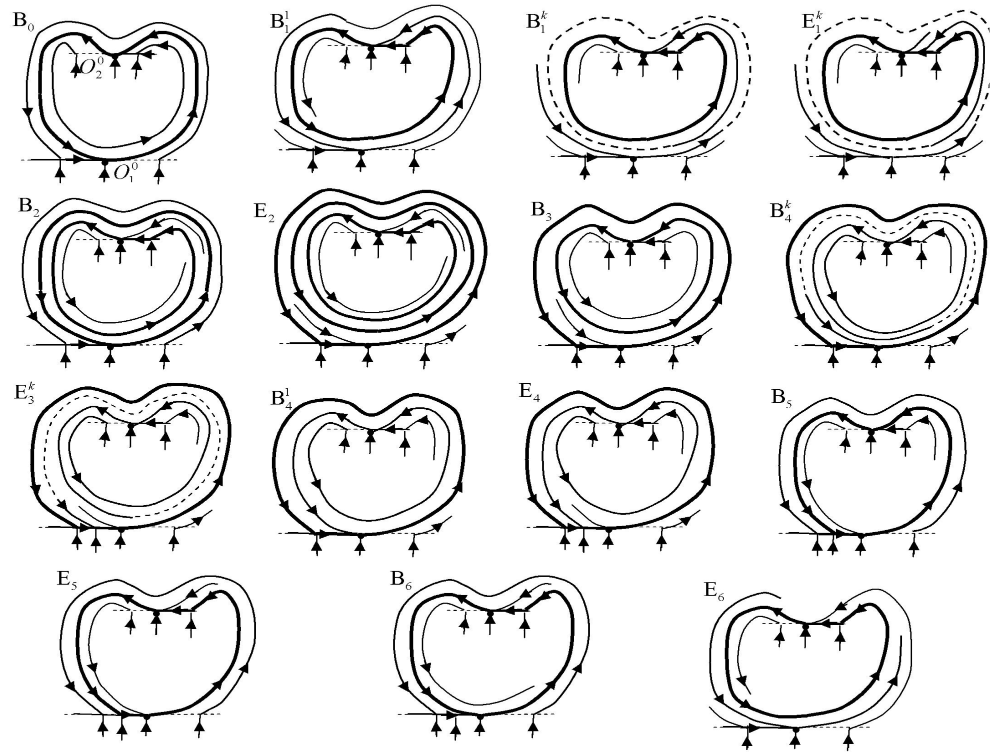

Рис. 3. Бифуркации в случае 1, $\lambda > 1$

Поэтому можно считать u_1 и δ_1 выбранными так, что

$$|(f_1)'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon)| < 1/2 \text{ для всех } (u,\varepsilon) \in [0,u_1) \times (-\delta_1, \delta_1)^2, \tag{5}$$

$$\bar{f}'_{\varepsilon_1}(u,\varepsilon) > 0,\ \bar{f}'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon) < 0 \text{ для всех } (u,\varepsilon) \in (-u_1, u_1) \times (-\delta_1, \delta_1)^2. \tag{6}$$

Вследствие (4) и теоремы о неявной функции найдутся такие числа $0 < \delta_3 \le \delta_2 \le \delta_1$, что $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta_3, \delta_3)$ уравнение $\bar{f}_2(0,\varepsilon) = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1) \in (-\delta_2, \delta_2)$, где $\beta_2(\cdot) \in C^1$,

$$\beta_2(\varepsilon_1) = (1/(f_2)'_u(0,0))\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1), \tag{7}$$

и потому можно считать $\beta_2(\varepsilon_1) > 0$ при $\varepsilon_1 \in (0, \delta_3)$, $\beta'_2(\varepsilon_1) > 0$ при $\varepsilon_1 \in [0, \delta_3)$,

$$\operatorname{sgn} f_2(0,\varepsilon) = -\operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_2(\varepsilon_1)) \text{ для всех } \varepsilon \in (0, \delta_3) \times [0, \delta_2). \tag{8}$$

Пусть $S(\varepsilon) := \bar{f}_1(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2$. Из (2) получаем $S'_{\varepsilon_1}(0) = (\bar{f}_1)'_u(0,0) > 0$, $S'_{\varepsilon_2}(0) = -1$. Поэтому можно считать, что δ_2 и δ_3 выбраны так, что $\forall \varepsilon_2 \in (-\delta_3, \delta_3)$ уравнение $S(\varepsilon) = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_1 = \beta_3(\varepsilon_2)$, где $\beta_3(\cdot) \in C^1$,

$$\beta_3(\varepsilon_2) = (1/(f_1)'_u(0,0))\varepsilon_2 + o(\varepsilon_2). \tag{9}$$

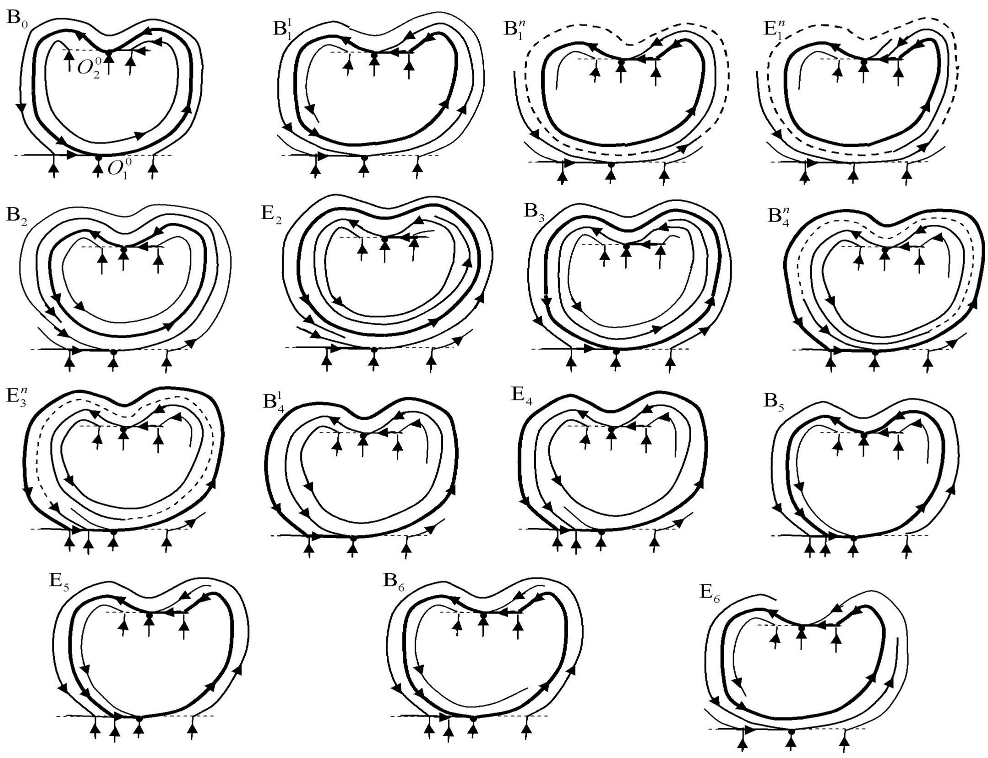

Рис. 4. Бифуркации в случае 1 $\lambda < 1$

Следовательно, можно считать $\beta_3(\varepsilon_2) > 0$ при $\varepsilon_2 \in (0, \delta_3)$, $\beta_3'(\varepsilon_2) > 0$ при $\varepsilon_2 \in [0, \delta_3)$,

$$\operatorname{sgn}(f_1(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 - \beta_3(\varepsilon_2)) \text{ для всех } \varepsilon \in [0, \delta_2) \times (0, \delta_3). \quad (10)$$

Так как $\lambda = (f_1)'_u(0,0)(f_2)'_u(0,0) > 1$, то из (7) и (9) следует, что $\delta_4 \in (0, \delta_3)$ можно выбрать так:

$$\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta_4) \ \beta_2(\varepsilon_1) < \beta_3^{-1}(\varepsilon_1). \quad (11)$$

Функция последования $f(\cdot, \varepsilon) := f_2(f_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ в точках ее области определения совпадает с $\overline{f}(\cdot, \varepsilon)$. Ввиду (2) при $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times (-\delta_4, 0)$ $f(\cdot, \varepsilon)$ не определена, при $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times \{0\}$ она определена в единственной точке $u = 0$. Считая δ_4 достаточно малым, имеем при $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times (0, \delta_4)$ $f_1(u_1, \varepsilon) > f_1(u_1, 0)/2 > \delta_4 > \varepsilon_2$, $f_1(0, \varepsilon) = 0 < \varepsilon_2$. Отсюда и из неравенства $(f_1)'_u(u, \varepsilon) > 0$ следует, что для каждого $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times (0, \delta_4)$ существует такое $u_0(\varepsilon) \in (0, u_1)$, что

$$\operatorname{sgn}(f_1(u, \varepsilon) - \varepsilon_2) = \operatorname{sgn}(u - u_0(\varepsilon)) \quad (12)$$

для всех $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times (0, \delta_4)$, $u \in [0, u_1]$.

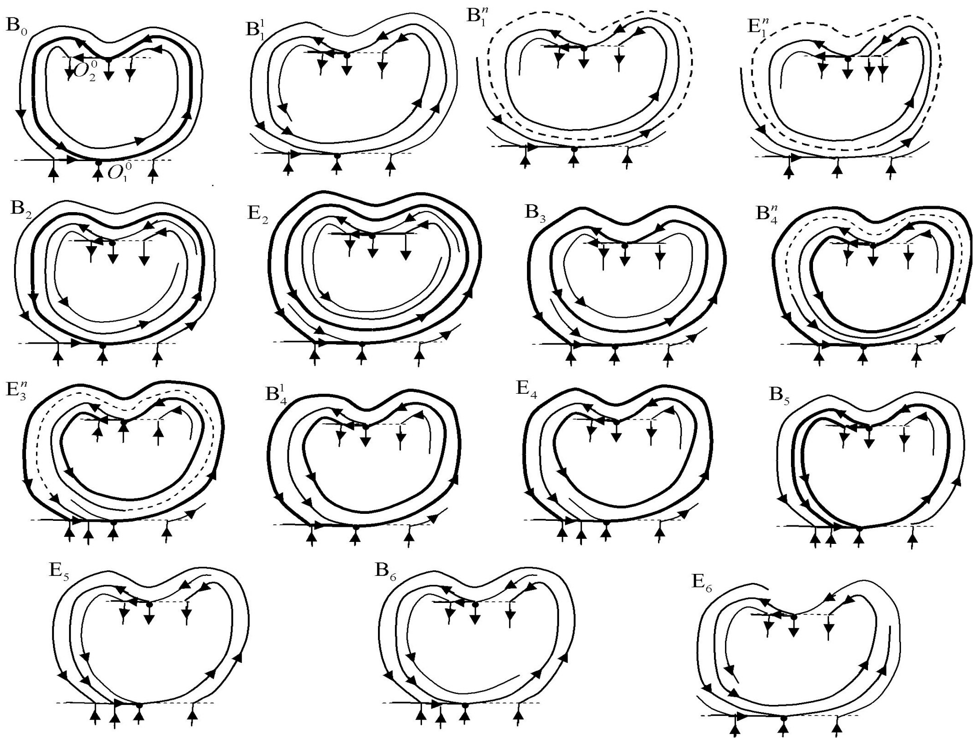

Рис. 5. Бифуркации в случае 2

Из (2), (10) и (12) следует, что при $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times (0, \delta_4)$ $f(\cdot, \varepsilon)$ определена на $[0, u_0(\varepsilon)]$, причем $u_0(\varepsilon) = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 = \beta_3(\varepsilon_2)$ и $u_0(\varepsilon) < \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 > \beta_3(\varepsilon_2)$.

Используя леммы из [12, параграф 3] можно построить окрестность U траектории Γ_0 и выбрать число $\delta \in (0, \delta_4)$ такое, что граница U состоит из простых замкнутых кривых Γ_- и Γ_+, пересекающихся с дугой $T_k(-1,1)$, $k = 1, 2$, в единственной точке $T_k(s_{1k}(\varepsilon) + u_1^-(\varepsilon))$ и $T_k(s_{1k}(\varepsilon) + u_1^+(\varepsilon))$, где $-u_1 < u_k^-(\varepsilon) < 0 < u_k^+(\varepsilon) < u_1$, траектории полей X_ε, $\varepsilon \in \mathrm{E} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2):\ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \delta^2\}$ в точках Γ_- и Γ_+ входят в U, в U нет особых точек X_ε, кроме $O_1(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$. Тогда каждая траектория поля X_ε, начинающаяся в U, пересекает дугу $T_1\ (s_{11}(\varepsilon) + u_1^-(\varepsilon), s_{11}(\varepsilon) + u_1^+(\varepsilon))$.

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{E}$, $\varepsilon_1 > 0$, $0 \le \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$. Из (2) и (8) имеем $f(0, \varepsilon) > 0$; откуда и из (3) получаем $\forall u \in [0, u_0(\varepsilon)]$ $f(u, \varepsilon) > u$. Положим для $u \in [0, u_0(\varepsilon)]$ $f^1(u, \varepsilon) := f(u, \varepsilon)$ и $f^n(u, \varepsilon) := f(f^{n-1}(u, \varepsilon), \varepsilon)$, если значение $f^{n-1}(u, \varepsilon)$ определено и $f^{n-1}(u, \varepsilon) \in [0, u_0(\varepsilon)]$.

Лемма 1. Для любого $n \in \mathbf{N}$ существует C^1-функция $\beta_1^n(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$, такая, что $f^n(0, \varepsilon) = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_2 = \beta_1^n(\varepsilon_1)$, $0 < f^n(0, \varepsilon) < \varepsilon_1$ при $\beta_1^n(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$, $\beta_1^1(\varepsilon_1) \equiv 0$,

$$\forall \varepsilon_1 \in (0,\delta) \ \ и \ \ n > 1 \ \ \beta_1^{n-1}(\varepsilon_1) < \beta_1^n(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1), \tag{13}$$

$$\forall \varepsilon_1 \in (0,\delta) \ \ \lim_{n\to\infty} \beta_1^n(\varepsilon_1) = \beta_2(\varepsilon_1). \tag{14}$$

Доказательство. Из (2), (8) и (6) получаем, что при $\varepsilon_2 = \beta_1^1(\varepsilon_1) \equiv 0$ $f^1(0,\varepsilon) = f_2(0,\varepsilon) = \varepsilon_1$, при $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$ $f^1(0,\varepsilon) = 0$, при $\beta_1^1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$ $0 < f^1(0,\varepsilon) < \varepsilon_1$.

Пусть функции $\beta_1^n(\varepsilon_1)$ существуют при $n \le k$. Тогда функция $\Delta_k(\varepsilon) := f_1(f^k(0,\varepsilon),\varepsilon) - \varepsilon_2$ определена при $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$, $\beta_1^k(\varepsilon_1) \le \varepsilon_2 \le \beta_2(\varepsilon_1)$. Из (6) и неравенства $f_u'(u,\varepsilon) > 0$ следует, что $(f^k)'_{\varepsilon_2}(0,\varepsilon) < 0$. Отсюда и из (5) получаем, что

$$(\Delta_k)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) = (f_1)'_u(f^k(0,\varepsilon),\varepsilon)(f^k)'_{\varepsilon_2}(0,\varepsilon) + (f_1)'_{\varepsilon_2}(f^k(0,\varepsilon),\varepsilon) - 1 < 0. \tag{15}$$

Из (2), (8) и (10) имеем при $\varepsilon_2 = \beta_1^k(\varepsilon_1)$ $\Delta_k(\varepsilon) = f_1(\varepsilon_1,\varepsilon) - \varepsilon_2 > 0$, при $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$ $\Delta_k(\varepsilon) = f_1(0,\varepsilon) - \varepsilon_2 = -\varepsilon_2 < 0$. Отсюда и из (15) следует, что $\operatorname{sgn}\Delta_k(\varepsilon) = \operatorname{sgn}(\beta_1^{k+1}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2)$ $\forall \varepsilon_1 \in (0,\delta)$, где $\beta_1^{k+1}(\cdot) \in C^1$ и удовлетворяет неравенствам (13) при $n = k+1$. Тогда при $\varepsilon_2 = \beta_1^{k+1}(\varepsilon_1)$ $f^{k+1}(0,\varepsilon) = \varepsilon_1$, а при $\beta_1^{k+1}(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$ $0 < f^{k+1}(0,\varepsilon) < \varepsilon_1$. По индукции получаем, что функции $\beta_1^n(\varepsilon_1)$ существуют $\forall n \in \mathbf{N}$. Покажем, что справедливо равенство (14). Пусть это не так. Тогда $\exists \hat\varepsilon_1 \in (0,\delta)$ $\lim_{n\to\infty} \beta_1^n(\hat\varepsilon_1) = \hat\varepsilon_2 < \beta_2(\hat\varepsilon_1)$. Так как $f(u,\hat\varepsilon) > u$ при $\hat\varepsilon := (\hat\varepsilon_1,\hat\varepsilon_2)$ и $u \in [0,u_0(\hat\varepsilon)]$, то при некотором $\hat n \in \mathbf{N}$ $\Delta_{\hat n}(\hat\varepsilon) > 0$. Для достаточно малой окрестность W точки $\hat\varepsilon$ $\Delta_{\hat n}(\varepsilon) > 0$ при всех $\varepsilon \in W$ и потому $f^n(0,\varepsilon)$ не определено для $n > \hat n$. С другой стороны, существует $n > \hat n$, при котором $\hat\varepsilon^n := (\hat\varepsilon_1, \beta_1^n(\hat\varepsilon_1)) \in V$. Поскольку $f^n(0,\hat\varepsilon^n) = \hat\varepsilon_1$, то получаем противоречие. Тем самым (14) верно и лемма 1 доказана.

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 2. Для любого $n \in \mathbf{N}$ существует C^1-функция $\beta_4^n(\varepsilon_2), \varepsilon_2 \in (0,\delta)$, такая, что $f^n(\varepsilon_1,\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon_1 = \beta_4^n(\varepsilon_2)$, $0 < f^n(0,\varepsilon) < \varepsilon_1$ при $\beta_4^n(\varepsilon_2) < \varepsilon_1 < \beta_3(\varepsilon_2)$, $\beta_4^1(\varepsilon_1) \equiv 0$,

$$\forall \varepsilon_2 \in (0,\delta) \ \ и \ \ n > 1 \ \ \beta_4^{n-1}(\varepsilon_2) < \beta_4^n(\varepsilon_2) < \beta_3(\varepsilon_2), \ \ \lim_{n\to\infty} \beta_4^n(\varepsilon_2) = \beta_3(\varepsilon_2). \tag{16}$$

Учитывая (11), (13), (14) и (16), можно задать множества B_j, E_j ($j = \overline{1,6}$) так, как они описаны в формулировке теоремы.

При $\varepsilon = 0$ из выбора окрестности U следует, что все отрицательные (положительные) полутраектории траектории, начинающиеся в U, выходят из U (совпадают с Γ_0, начиная с некоторого момента времени).

При $\varepsilon \in B_2$ из (2) и (8) следует, что $f(0,\varepsilon)=0$, т.е. через точку $T_1\ (s_{11}(\varepsilon))$, а потому и через точку $O_1(\varepsilon)$, проходит периодическая траектория $\Gamma(\varepsilon)$ поля X_ε, образованная касательными сепаратрисами точки $O_1(\varepsilon)$. Ввиду (10) $f_1(\varepsilon_1,\varepsilon) > \varepsilon_2$. Поэтому через точку $O_2(\varepsilon)$ проходит периодическая траектория $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$ поля X_ε, образованная дугой выходящей касательной сепаратрисы от $O_2(\varepsilon)$ до точки $T_2^\varepsilon(\varphi_2(f_1(\varepsilon_1,\varepsilon),\varepsilon))$ и дугой $T_2^\varepsilon[0,\varphi_2(f_1(\varepsilon_1,\varepsilon),\varepsilon)]$. Из равенства $f(0,\varepsilon)=0$ и (3) следует, что $\forall u \in (0,u_0(\varepsilon)]\ \ f(u,\varepsilon) > u$. Поэтому отрицательная (положительная) полутраектория, начинающаяся в точке $T_1\ (s_{11}(\varepsilon)+u)$, при $u \in (u_-(\varepsilon),0)$ выходит из U в точке кривой Γ_- (содержит точку $T_1^\varepsilon(\varphi_1(u,\varepsilon))$, и потому начиная с некоторого момента совпадает с $\Gamma(\varepsilon)$); при $u \in (0,\varepsilon_1)$ α-предельна к $\Gamma(\varepsilon)$ (содержит точку $T_2^\varepsilon(\ \varphi_2(f_1(f^n(u,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)$ при некотором n и начиная с некоторого момента времени совпадает с $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$); при $u \in (\varepsilon_1,u_+(\varepsilon))$ выходит из U в точке кривой Γ_+ (начиная с некоторого момента времени совпадает с $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$),

При $\varepsilon \in B_3$ из (2) и (10) следует, что $f(\varepsilon_1,\varepsilon)=\varepsilon_1$, т.е. через точку $T_1\ (s_{11}(\varepsilon)+\varepsilon_1)$, а потому и через точку $O_2(\varepsilon)$, проходит периодическая траектория $\Gamma(\varepsilon)$ поля X_ε, образованная касательными сепаратрисами точки $O_2(\varepsilon)$. Учитывая (3), получаем $\forall u \in [0,u_0(\varepsilon)) = [0,\varepsilon_1)\ \ f(u,\varepsilon) < u$. Так как $f(0,\varepsilon) < 0$, то через точку $O_1(\varepsilon)$ проходит периодическая траектория $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$ поля X_ε, образованная дугой выходящей касательной сепаратрисы точки $O_1(\varepsilon)$ от $O_1(\varepsilon)$ до точки $T_1^\varepsilon(\varphi_1(f(0,\varepsilon),\varepsilon))$ и дугой $T_1^\varepsilon[\varphi_1(f(0,\varepsilon),\varepsilon),0]$. Аналогично случаю $\varepsilon \in B_2$ получаем, что положительная (отрицательная) полутраектория, начинающаяся в точке $T_1\ (s_{11}(\varepsilon)+u)$, при $u \in (u_-(\varepsilon), f(0,\varepsilon))$ совпадает с $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$, начиная с некоторого момента времени (выходит из U в точке кривой Γ_-), при $u \in (f(0,\varepsilon),\varepsilon_1)$ совпадает с $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента времени (α-предельна к $\Gamma(\varepsilon)$), при $u \in (\varepsilon_1,u_+(\varepsilon))$ совпадает с $\Gamma(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента времени (выходит из U в точке кривой Γ_+).

При $\varepsilon \in E_2$ из (8) имеем $f(0,\varepsilon) < 0$. Кроме того, $f(u_0(\varepsilon),\varepsilon) = f_2(\varepsilon_2,\varepsilon) = \varepsilon_1 > u_0(\varepsilon)$. Из этих двух неравенств и (3) следует, что $f(\cdot,\varepsilon)$ имеет неподвижную точку $u_*(\varepsilon) \in (0,u_0(\varepsilon))$, при этом $f(u,\varepsilon) < u$, если $u \in [0,u_*(\varepsilon))$ и $f(u,\varepsilon) > u$, если $u \in (u_*(\varepsilon),u_0(\varepsilon)]$. Через точку $T_1\ (s_{11}(\varepsilon)+u_*(\varepsilon))$ проходит неустойчивая гиперболическая периодическая траектория $\Gamma_u(\varepsilon)$. Как и в случаях $\varepsilon \in B_3$ и $\varepsilon \in B_2$, существуют периодические траектории $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$ и $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$, проходящие, соответственно, через точки $O_1(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$. Положительная (отрицательная) полутраектория, начинающаяся в точке

T_1 $(s_{11}(\varepsilon)+u)$, при $u \in (u_-(\varepsilon), f(0,\varepsilon))$ совпадает с $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента (выходит из U в точке кривой Γ_-), при $u \in (f(0,\varepsilon), u_*(\varepsilon))$ совпадает с $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента (α-предельна к $\Gamma_u(\varepsilon)$), при $u \in (u_*(\varepsilon), \varepsilon_1)$ совпадает с $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента (α-предельна к $\Gamma_u(\varepsilon)$), при $u \in (\varepsilon_1, u_+(\varepsilon))$ совпадает с $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента (выходит из U в точке кривой Γ_+).

Существование периодической траектории при $\varepsilon \in B_1 \cup E_1$ и $\varepsilon \in B_4 \cup E_3$ доказывается как и в случаях $\varepsilon \in B_2$ и $\varepsilon \in B_3$, а поведение остальных траекторий следует из лемм 1 и 2. Аналогично получаем поведение траекторий при $\varepsilon \in B_5 \cup B_6 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$.

Заключение

В работе описано несколько типичных бифуркаций в двухпараметрических семействах кусочно-гладких векторных полей на плоскости, могущих быть математическими моделями возникновения автоколебаний в реальных динамических системах с переключениями.

Список литературы

1. Баутин А. Н. Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М. : Наука, 1976. 496 с.
2. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М. : Наука, 1985. 224 с.
3. di Bernardo M., Budd Ch. J., Capneys A. R., Kowalczyk P. Piecewise smooth dynamical systems // Appl. Math. Sci. Vol. 163. London : Springer, 2008. 483 p.
4. Kuznetsov Yu. A., Rinaldi S., Gragnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13, № 8. P. 2157–2188.
5. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems // J. of Differential Equations. 2011. Vol. 250, № 4. P. 1967–2023.
6. Hogan S. J., Homer M. E., Jeffrey M. R., Szalai R. Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations // J. Nonlinear Sci. 2016. Vol. 26. P. 1161–1173.
7. Simpson D. J. W. A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems // Physics Letters A. 2018. Vol. 382, № 35. P. 2439–2444.
8. Ройтенберг В. Ш. О рождении странного аттрактора из точки стыка линий разрыва векторного поля // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2016. № 4. С. 53–59.
9. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях в окрестности особой точки типа «сшитый трехкратный фокус» // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2. С. 18–31.
10. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях петли сепаратрисы двумерной кусочно-гладкой динамической системы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 1. С. 36–50.
11. Ройтенберг В. Ш. Бифуркации сшитого тройного цикла кусочно-гладкой непрерывной динамической системы // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». 2024. Т. 16, № 1. С. 39–48.
12. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М. : Наука, 1966. 568 с.

References

1. Bautin A.N. Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti = Methods and techniques of qualitative research of di -namic systems on the plane.* Moscow: Nauka, 1976:496. (In Russ.)
2. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu = Differential equations with the explosive right part.* Moscow: Nauka, 1985:224. (In Russ.)
3. di Bernardo M., Budd Ch.J., Capneys A.R., Kowalczyk P. Piecewise smooth dynamical systems. *Appl. Math. Sci. Vol. 163*. London: Springer, 2008:483.
4. Kuznetsov Yu.A., Rinaldi S., Gragnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *Intern. J. of Bifurcation and Chaos*. 2003;13(8):2157–2188.
5. Guardia M., Seara T.M., Teixeira M.A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *J. of Differential Equations*. 2011;250(4):1967–2023.
6. Hogan S.J., Homer M.E., Jeffrey M.R., Szalai R. Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations. *J. Nonlinear Sci*. 2016;26:1161–1173.
7. Simpson D.J.W. A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems. *Physics Letters A*. 2018;382(35):2439–2444.
8. Roytenberg V.Sh. On the birth of a strange attorrator from the junction point of the lines of the rupture of the vector field. *Vestnik Adygeyskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki = Bulletin of Adygea State University. Series: Natural and mathematical sciences.* 2016;(4):53–59. (In Russ.)
9. Roytenberg V.Sh. On bifurcations in the vicinity of a special point such as “sewn three or time focus”. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2017;(2):18–31. (In Russ.)
10. Roytenberg V.Sh. On bifurcation of the loop of the separatics of a two-dimensional piece-clatter of the dynamic system. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2020;(1):36–50. (In Russ.)
11. Roytenberg V.Sh. Bifurcation of a stitched triple cycle with a piece of continuous dynamic system. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika» = Bulletin of South Ural State University. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”.* 2024;16(1):39–48. (In Russ.)
12. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka = Quality theory of second -order dynamic systems.* Moscow: Nauka, 1966:568. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Владимир Шлеймович Ройтенберг
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Ярославский государственный технический университет (Россия, г. Ярославль, Московский проспект, 88)

Vladimir Sh. Roitenberg
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the sub-department of higher mathematics, Yaroslavl State Technical University (88 Moskovskiy avenue, Yaroslavl, Russia)

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 25.03.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 15.04.2025

Принята к публикации / Accepted 29.04.2025