УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ РАЗБРОСА ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ КОМПОЗИЦИИ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ТЕПЛОВОГО РАСШИРЕНИЯ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Б.С. РЕЗНИКОВ, доктор техн. наук, профессор
А.В. ГОБЫШ, канд. физ.-мат. наук
(*НГТУ, г. Новосибирск*)

Поступила 19 октября 2014
Рецензирование: 05 ноября 2014
Принята к печати: 15 ноября 2014

Резников Б.С. – 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20,
Новосибирский государственный технический университет,
e-mail: reznikov@corp.nstu.ru

Предложен подход для численного исследования осредненных коэффициентов линейного теплового расширения многофазных композитов на основе метода статистических испытаний. Данный подход позволяет учитывать стохастическую природу композита, т.е. исследовать влияние разброса физико-математических характеристик субструктурных элементов, в частности, модулей Юнга, коэффициентов Пуассона и линейного теплового расширения. При этом используемая математическая модель композита основана на принципе эффективной однородности, структурном анализе и учитывает естественные условия сопряжения (для деформаций, напряжений и температуры) на границе раздела фаз. Численные результаты для эффективных коэффициентов линейного теплового расширения композита приведены для различных структур трехфазных сред, для которых получены доверительные интервалы с заданной доверительной вероятностью. Оценено влияние стохастической природы различных характеристик субструктурных элементов на математическое ожидание коэффициентов линейного теплового расширения композита.

Ключевые слова: структурно-неоднородные среды, стохастическая природа композита, метод Монте-Карло, эффективные коэффициенты, тепловое расширение, статистические характеристики, доверительный интервал.

Введение

Композиты, используемые в современной технике, представляют собой статистический ансамбль значительного количества первичных элементов (различных волокон, частиц, «усов», стеклянных микросфер, связующего и т. д.), физико-механические свойства которых, как показывают эксперименты, имеют разброс значений, т. е. являются случайными величинами. Поэтому исследование влияния статистического разброса упругих характеристик и коэффициентов линейного теплового расширения субструктурных элементов композиции является актуальной задачей, решение которой позволит наиболее достоверно прогнозировать эффективные коэффициенты теплового расширения микронеоднородных материалов.

В данной работе на основе математической модели для многофазных материалов из [1–3], где параметры композита являлись детерминированными, предложен подход для расчета эффективных коэффициентов линейного теплового расширения структурно-неоднородных сред, который позволяет учитывать стохастическую природу композита. При этом используется метод Монте-Карло (метод статистических испытаний [4–6]) и считается, что случайными параметрами являются модули Юнга, коэффициенты Пуассона и линейного теплового расширения субструктурных элементов. С помощью разработанного по данной методике численного алгоритма для различных типов многофазных материалов определены как статистические характеристики, так и доверительные интервалы (при заданной доверительной вероятности) для эффективных коэффициентов линейного теплового расширения рассматриваемых композитов.

Метод исследования

Для расчета осредненных коэффициентов линейного теплового расширения многофазных материалов в случае детерминированных параметров используется математическая модель композита (рис. 1), основные предположения из [1–3] и соотношения из [3].

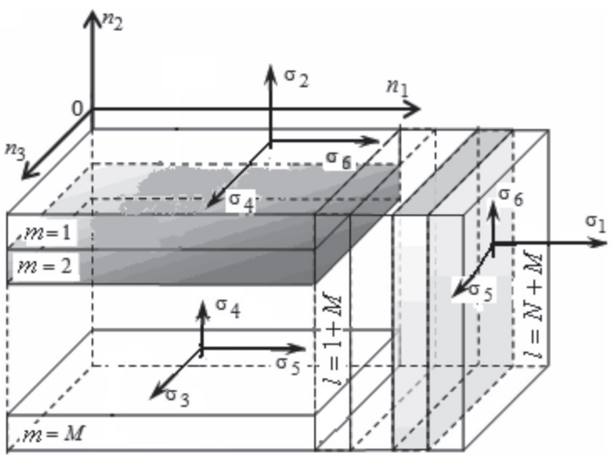

Рис. 1. Характерный элемент композита с продольно-поперечным расположением $M + N$ фаз

В частности, физические соотношения в случае пространственного напряженного состояния при термосиловом воздействии для рассматриваемого композита (см. рис. 1) имеют следующий вид:

$$\varepsilon_n = \sum_{p=1}^{3} b_{np}\sigma_p + \alpha_{nn}^t\theta, \qquad (1)$$

$$\varepsilon_s = b_{ss}\sigma_s + \alpha_{ss}^t\theta \;(n = 1,2,3;\; s = 4,5,6).$$

Выражения для эффективных коэффициентов податливости b_{np}, b_{ss} (n, p, = 1, 2, 3; s = 4, 5, 6) и линейного теплового расширения α_{rr}^t (r = 1, 2, …, 6) определены в [3], где получено, что указанные величины зависят от большого числа управляющих параметров:

$$b_{np} = b_{np}\left(\omega_m, a_{ik}^{(m)}, a_{jj}^{(m)}, \alpha_{ll}^{(m)}\right);$$

$$b_{ss} = b_{ss}\left(\omega_m, a_{ik}^{(m)}, a_{jj}^{(m)}, \alpha_{ll}^{(m)}\right);$$

$$\alpha_{rr}^t = \alpha_{rr}^t\left(\omega_m, a_{ik}^{(m)}, a_{jj}^{(m)}, \alpha_{ll}^{(m)}\right), \qquad (2)$$

где i, k = 1, 2, 3; j = 4, 5, 6; l = 1, 2, …, 6; m = 1, 2, …, M, M + 1, …, M + N.

(Здесь и в дальнейшем используются в основном обозначения из [3].) Для оценки влияния отклонений тех или иных параметров из (2) от номинальных на значения α_{rr}^t (r = 1, 2, …, 6) будем использовать метод Монте-Карло [4]. При этом считается, что теоретические плотности распределения параметров

$$a_{ik}^{(m)},\; a_{jj}^{(m)},\; \alpha_{ll}^{(m)}, \qquad (3)$$

которые имеют стохастическую природу, известны, например, из экспериментов. Тогда, определив последовательность (на ЭВМ) случайных значений указанных параметров (3) и используя соотношения из [3], найдем α_{rr}^t (r = 1, 2, …, 6) для каждой серии значений управляющих параметров. Повторив эту процедуру L раз (L – количество статистических испытаний), получим значения $\alpha_{rr(1)}^t$, $\alpha_{rr(2)}^t$, …, $\alpha_{rr(L)}^t$, что позволяет определить статистические характеристики случайных величин α_{rr}^t ($r = 1, 2, \ldots, 6$) – статистическое среднее и статистическую дисперсию [7, 8]:

$$M\left[\alpha_{rr}^t\right] = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\alpha_{rr(l)}^t,$$

$$D\left[\alpha_{rr}^t\right] = \frac{1}{L-1}\sum_{l=1}^{L}\left(\alpha_{rr(l)}^t - M\left[\alpha_{rr}^t\right]\right)^2, \qquad (4)$$

где r = 1, 2, …, 6.

Указанные величины в (4) являются состоятельными и несмещенными оценками для математических ожиданий и дисперсий случайных величин α_{rr}^t (r = 1, 2, …, 6).

Используя (4), можно построить доверительные интервалы $I_{rr(\beta)}$, соответствующие заданной доверительной вероятности β для математического ожидания величины α_{rr}^t (r = 1, 2, …, 6), которые, согласно [7], определяются следующим образом:

$$I_{rr(\beta)} = \left(M\left[\alpha_{rr}^{t}\right] - \Delta_{r(\beta)}; \; M\left[\alpha_{rr}^{t}\right] + \Delta_{r(\beta)} \right), \tag{5}$$

где $\Delta_{r(\beta)} = t_{\beta}\dfrac{\sqrt{D\left[\alpha_{rr}^{t}\right]}}{\sqrt{L}}$; t_{β} – статистика Стьюдента (при заданных L и β).

Результаты и обсуждение

В качестве числовых примеров в целях определенности и конкретизаций рассмотрим трехфазные композиты, состоящие из различных изотропных фаз. В этом случае для элементов композиции будем иметь следующие выражения для коэффициентов податливости и линейного теплового расширения [2, 9, 10]:

$$\begin{gathered} a_{ii}^{(m)} = 1/E^{(m)}, \\ a_{12}^{(m)} = a_{13}^{(m)} = a_{23}^{(m)} = -\nu^{(m)}/E^{(m)}, \\ a_{ll}^{(m)} = 1/G^{(m)}, G^{(m)} = 0,5E^{(m)}/(1+\nu^{(m)}), \\ \alpha_{ii}^{(m)} = \alpha_{t}^{(m)}, \; \alpha_{ll}^{(m)} = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где i = 1, 2, 3; l = 4, 5, 6; m = 1, 2, 3. При этом параметры $E^{(m)}$, $\nu^{(m)}$, $\alpha_t^{(m)}$ (m = 1, 2, 3) имеют стохастическую природу и подчиняются (для значительного класса композитов [11–14]) нормальному закону. Тогда, согласно [4], определим совокупность значений нормально распределенных случайных величин по формуле

$$\begin{gathered} X_i = \sqrt{D[X_i]}\xi + M[X_i] \; (i = 1, 2, \ldots, 9; \\ X_1 = E^{(1)}, \; X_2 = E^{(2)}, \; X_3 = E^{(3)}, \\ X_4 = \nu^{(1)}, \; X_5 = \nu^{(2)}, \; X_6 = \nu^{(3)}, \\ X_7 = \alpha_t^{(1)}, \; X_8 = \alpha_t^{(2)}, \; X_9 = \alpha_t^{(3)}) \end{gathered} \tag{7}$$

(ξ – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице), а тем самым найдем множество случайных значений для всех рассматриваемых параметров из (6). Затем, используя их, определим с помощью соотношений из [2, 3] $\alpha_{rr(l)}^{t}$ (r = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3, …, L), а тем самым из (4) и (5) – $M\left[\alpha_{rr}^{t}\right]$, $D\left[\alpha_{rr}^{t}\right]$ и $I_{rr(\beta)}$.

Для указанных композитов также были проведены расчеты статистического среднего, статистической дисперсии и доверительного интервала для эффективного термического коэффициента объемного расширения – α^t, значение которого в соответствии с [2, 9] определяется следующим образом:

$$\alpha^{t} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{rr}^{t}. \tag{8}$$

При этом соотношения (4), (5) остаются справедливы и для α^t, если в них нижний индекс «r» опустить.

Конкретные расчеты проведены для композита со следующими параметрами: $\tilde{\omega}_3 = 0,3$, $0 \le \tilde{\omega}_1 \le 0,3$, $\tilde{\omega}_2 = 0,7 - \tilde{\omega}_1$. Характеристики, указанные в таблице, взяты из [11–15].

При этом первый материал соответствует стеклянным волокнам (кварцевое стекло), второй материал – стеклянной микродроби, а третий материал – полиэфирному связующему. Для определения среднего квадратического отклонения указанных в таблице величин использовалось «правило трех сигм» (при заданном разбросе экспериментальных данных в [11–15]).

Для оценки влияния взаимного расположения фаз и их объемного содержания на статистические характеристики коэффициентов линейного теплового расширения композита на рис. 2–4 приведены соответственно зависимости $M\left[\alpha_{11}^{t}\right]$, $M\left[\alpha_{22}^{t}\right]$ и $M[\alpha^{t}]$ от удельного

Характеристики параметров для композита

m	$M[E^{(s)}]$, ГПа	$\sqrt{D[E^{(s)}]}$, ГПа	$M[\nu^{(s)}]$	$\sqrt{D[\nu^{(s)}]}$	$\sqrt{D[\alpha^{(s)}]}$, 1/град, 10^{-5}	$\sqrt{D[\alpha^{(s)}]}$, 1/град, 10^{-5}
1	120,17	17,17	0,17	0,015	0,056	0,018
2	63,5	4,83	0,25	0,0167	0,053	0,149
3	3,29	0,41	0,385	0,012	8,5	0,5

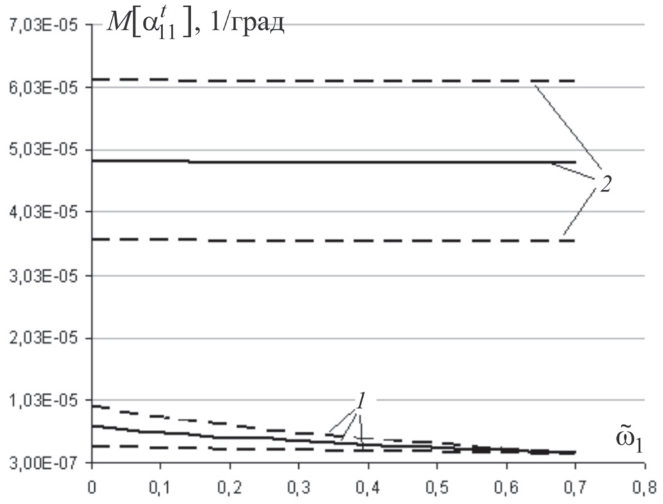

Рис. 2. Зависимости $M\left[\alpha_{11}^t\right]$ от удельного объемного содержания 1-й фазы $\tilde{\omega}_1$ (сплошные линии) и доверительные интервалы (пунктирные линии) при доверительной вероятности $\beta = 0{,}95$ и $L = 10$

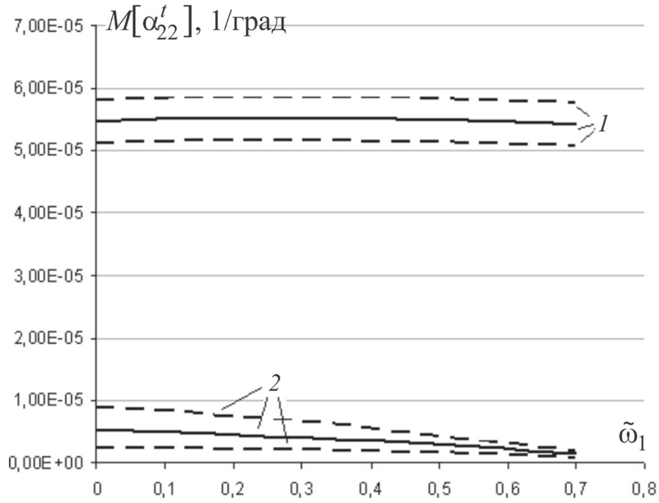

Рис. 3. Зависимости $M\left[\alpha_{22}^t\right]$ от удельного объемного содержания 1-й фазы $\tilde{\omega}_1$ (сплошные линии) и доверительные интервалы (пунктирные линии) при доверительной вероятности $\beta = 0{,}95$ и $L = 10$

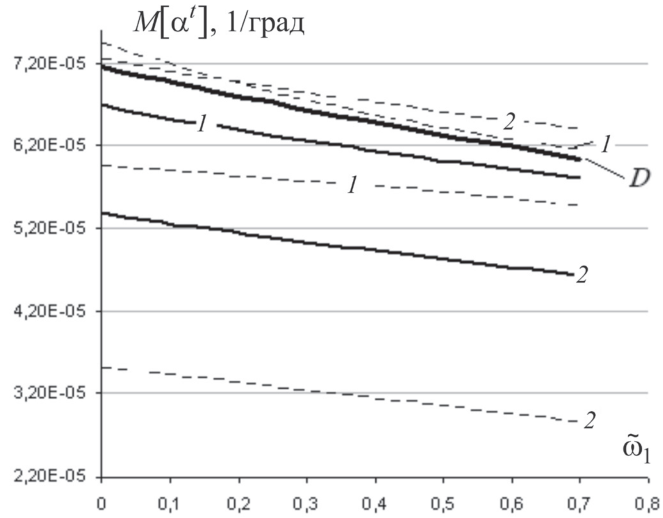

Рис. 4. Зависимости $M[\alpha^t]$ от удельного объемного содержания 1-й фазы $\tilde{\omega}_1$ (сплошные линии) и доверительные интервалы (пунктирные линии) при доверительной вероятности $\beta = 0{,}95$ и $L = 10$

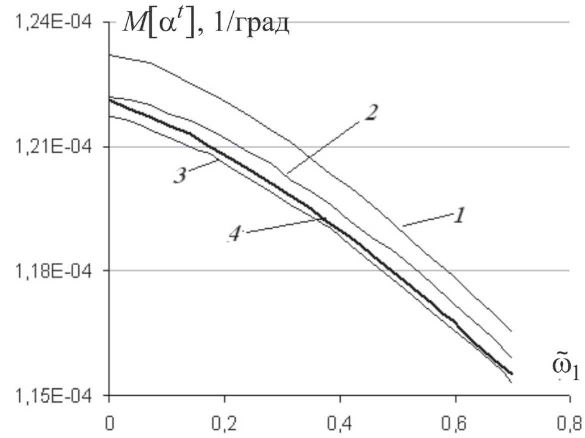

Рис. 5. Влияние стохастической природы различных характеристик субструктурных элементов композита (продольное расположение фаз) на $M[\alpha^t]$

объемного содержания 1-й фазы $\tilde{\omega}_1$ (сплошные линии) и указаны доверительные интервалы (пунктирные линии) при доверительной вероятности $\beta = 0{,}95$ и $L = 10$. Кривые, отмеченные цифрой 1, отвечают случаю продольного расположения фаз ($M = 3$, $T = 0$), а цифрой 2 – случаю продольно-поперечного расположения фаз ($M = 2$, $N = 1$). Сплошная кривая, отмеченная буквой *D* на рис. 4, соответствует эффективному термическому коэффициенту объемного расширения α^t, найденному для продольно-поперечного расположения фаз при детерминированных параметрах элементов композиции, которые равны математическим ожиданиям соответствующих величин из таблицы.

На рис. 5 для оценки влияния стохастической природы различных характеристик субструктурных элементов композита (продольное расположение фаз) на $M[\alpha^t]$ приведены зависимости: кривая *1* соответствует случаю, когда $\alpha^{(m)}$

(m = 1, 2, 3) – случайные, а остальные параметры детерминированы; кривая *2* – $\nu^{(m)}$ (m = 1, 2, 3) – случайные, а остальные параметры детерминированы; кривая *3* – $E^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3$) – случайные, а остальные параметры детерминированы; кривая *4* – все параметры случайные. Учет стохастической природы модуля Юнга (кривая *3*) практически совпадает со случаем, когда все параметры детерминированные. Характеристики свойств элементов композиции взяты из таблицы. Сравнение кривых на рис. 5 показывает, что наибольшее влияние на эффективный коэффициент объемного термического расширения оказывает разброс значений $\alpha^{(m)}$ (m = 1, 2, 3).

Выводы

Используемая математическая модель многофазного композита и предложенный метод позволили исследовать влияние структуры композита и его стохастическую природу на статистические характеристики эффективных коэффициентов теплового расширения. При этом для указанных характеристик найдены доверительные интервалы при заданной доверительной вероятности, что позволяет оценивать эксплуатационные свойства композита при термических воздействиях.

Список литературы

1. *Резников Б.С., Никитенко А.Ф., Кучеренко И.В.* Прогнозирование макроскопических свойств структурно-неоднородных сред: сообщение 1 // Известия вузов. Строительство. – 2008. – № 2. – С. 10–17.

2. *Резников Б.С., Гобыш А.В.* Расчёт эффективных коэффициентов теплового расширения микронеоднородных композитов // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2013. – № 2 (21). – С. 139–149.

3. *Резников Б.С., Гобыш А.В.* Прогнозирование структуры многофазных размеростабильных композитов при температурном воздействии // Доклады 3-й Всероссийской конференции «Проблемы оптимального проектирования сооружений». – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2014. – С. 345–352.

4. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) / Н.П. Бусленко, Д.И. Голенко, И.М. Соболь, В.Г. Срагович, Ю.А. Шрейдер. – М.: Физматгиз, 1962. – 332 с.

5. *Резников Б.С.* Прогнозирование разрушения кольцевых пластин с учетом реальной структуры и стохастической природы армированного материалов // Краевые задачи и их приложения: межвузовский сборник научных трудов. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1989. – С. 89–99.

6. *Резников Б.С.* Расчет на прочность конструкций из армированных материалов методом Монте-Карло // Механика композитных материалов. – 1986. – № 6. – С. 1059–1063.

7. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. – 576 с.

8. Математическая статистика: учебник / В.М. Иванова, В.Н. Калинина, Л.А. Нешумова, И.О. Решетникова. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1981. – 371 с.

9. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

10. *Подстригач Я.С.*, *Коляно Ю.М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наукова думка, 1976. – 310 с.

11. *Скудра А.М., Булавс Ф.Я., Роценс К.А.* Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1971. – 238 с.

12. *Игнатов И.В., Стрельченко И.Г., Юрьев С.В.* Статистические характеристики механических констант стеклопластиков // Механика полимеров. – 1972. – № 6. – С. 1025–1028.

13. *Тарнопольский Ю.М., Скудра А.Н.* Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. – Рига: Зинатне, 1966. – 260 с.

14. *Тарнопольский Ю.М., Розе А.В.* Особенности расчёта деталей из армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с.

15. *Дубровский И.М., Егоров Б.В., Рябошапка К.П.* Справочник по физике. – Киев: Наукова думка, 1986. – 558 с.

OBRABOTKA METALLOV
(METAL WORKING AND MATERIAL SCIENCE)
N 4(65), October – December 2014, Pages 78–84

Influence of range of compositions elements characteristics on the effective thermal expansion coefficients for microheterogeneous materials

Reznikov B.S., D.Sc. (Engineering), Professor, e-mail: reznikov@corp.nstu.ru
Gobysh A.V., Ph.D. (Physics and Mathematics), e-mail: agobysh@mail.ru

Novosibirsk State Technical University, 20 Prospect K. Marksa, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

Abstract

The approach for the numerical analysis of the averaged thermal expansion coefficients of multiphase composites based on the method of statistical testing is proposed. This approach allows to take into account the stochastic nature of the composite. The influence of the variation of physical and mathematical characteristics of the substructural elements: Young modulus, Poisson ratios and linear thermal expansion coefficients is investigated. The mathematical model of the composite is based on the principle of effective homogeneity, structural analysis and correctly formulated interference conditions (for deformation, stress and temperature) at the interphase boundary. The numerical results are presented for the effective coefficients of linear thermal expansion of the composite for various structures of three-phase environments. The confidence intervals with given confidence probability for various structures are found. The influence of the stochastic nature of various characteristics of substructural elements on mathematical expectation of thermal expansion coefficients of the composite is estimated.

Keywords:
structure-heterogeneous mediums, stochastic nature of composite, Monte-Carlo technique, effective coefficients, thermal expansion, statistical characteristics, confidence interval.

References

1. Reznikov B.S., Nikitenko A.F., Kucherenko I.V. Prognozirovanie makroskopicheskikh svoistv strukturno-neodnorodnykh sred. Soobshchenie 1 [Determination Technique of Macroscopic Properties of Structurally Nonhomogeneous Environments. Information 1]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Stroitel'stvo – News of higher educational institutions. Construction*, 2008, no. 2, pp. 10–17.

2. Reznikov B.S., Gobysh A.V. Raschet effektivnykh koeffitsientov teplovogo rasshireniya mikroneodnorodnykh kompozitov [Calculation of the effective thermal expansion coefficients for microheterogeneous composites]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2013, no. 2 (21), pp. 139–149.

3. Reznikov B.S., Gobysh A.V. [Prediction of the structure of multi-phase composites dimensionally at temperature influence]. *Doklady 3 Vserossiiskoi konferentsii "Problemy optimal'nogo proektirovaniya sooruzhenii"* [Reports of the 3rd All-Russian conference "Problems of optimal design of structures"]. Novosibirsk, NGASU Publ., 2014, pp. 345–352.

4. Buslenko N.P., Golenko D.I., Sobol' I.M., Sragovich V.G., Shreider Yu.A. *Metod statisticheskikh ispytanii (metod Monte-Karlo)* [Method of statistical tests (Monte Carlo method)]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 332 p.

5. Reznikov B.S. [Prediction of fracture annular plates with the real structure and the stochastic nature of fiber reinforced materials]. *Mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov "Kraevye zadachi i ikh prilozheniya"* [Interuniversity collected articles "Boundary value problems and their applications"], 1989, pp. 89–99.

6. Reznikov B.S. *Raschet na prochnost' konstruktsii iz armirovannykh materialov metodom Monte-Karlo* [Calculation of the strength of structures of reinforced materials by the Monte Carlo method]. *Mekhanika kompozitnykh materialov – Mechanics of Composite Materials*, 1986, no. 6, pp. 1059–1063. (In Russian)

7. Venttsel' E.S. *Teoriya veroyatnostei* [Probability theory]. 3rd ed. Moscow, Nauka Publ., 1964. 576 p.

8. Ivanova V.M., Kalinina V.N., Neshumova L.A., Reshetnikova I.O. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. 2nd ed. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1981. 371 p.

9. Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity microinhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.

10. Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M. *Obobshchennaya termomekhanika* [Generalized Thermomechanics]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1976. 310 p.

11. Skudra A.M., Bulavs F.Ya., Rotsens K.A. *Polzuchest' i staticheskaya ustalost' armirovannykh plastikov* [Creep and static fatigue of reinforced plastics]. Riga, Zinatne Publ., 1971. 238 p.

12. Ignatov I.V., Strel'chenko I.G., Yur'ev S.V. *Statisticheskie kharakteristiki mekhanicheskikh konstant stekloplastikov* [Statistical characteristics of the mechanical constants of glass-reinforced plastics]. *Mekhanika polimerov – Polymer Mechanics*, 1972, no. 6, pp. 1025–1028. (In Russian)

13. Tarnopol'skii Yu.M., Skudra A.N. *Konstruktsionnaya prochnost' i deformativnost' stekloplastikov* [Structural strength and deformability of fiberglass plastic]. Riga, Zinatne Publ., 1966. 260 p.

14. Tarnopol'skii Yu.M., Roze A.V. *Osobennosti rascheta detalei iz armirovannykh plastikov* [Features of calculation of details made of reinforced plastics]. Riga, Zinatne Publ., 1969. 274 p.

15. Dubrovskii I.M., Egorov B.V., Ryaboshapka K.P. *Spravochnik po fizike* [Physics Handbook]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1986. 558 p.

Received 19 October 2014
Revised 05 November 2014
Accepted 15 November 2014