

ISSN 2712-8687

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1/2025

CONTROL  SCIENCES

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,
И. А. Каляев, академик РАН,
Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН,
В. А. Левин, академик РАН,
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН,
Е. А. Федосов, академик РАН

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,
В. Н. Бурков, д-р техн. наук,
В. М. Вишнеvский, д-р техн. наук,
А. О. Калашников, д-р техн. наук,
В. В. Клочков, д-р экон. наук,
С. А. Краснова, д-р техн. наук,
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,
Н. Е. Максимова, канд. техн. наук
(ответственный секретарь),
А. С. Мандель, д-р техн. наук,
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,
А. И. Михальский, д-р биол. наук,
Д. А. Новиков, академик РАН
(гл. редактор),
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,
Ф. Ф. Пашенко, д-р техн. наук
(зам. гл. редактора),
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,
С. В. Ратнер, д-р экон. наук,
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,
А. Д. Цвиркун, д-р техн. наук,
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,
Волгоград – А. А. Воронин, д-р физ.-мат. наук,
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольницкий,
д-р техн. наук,
Самара – М. И. Гераськин, д-р экон. наук,
Саратов – В. А. Кушников, д-р техн. наук,
Тамбов – М. Н. Краснянский, д-р техн. наук,
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук,
Челябинск – О. В. Логиновский, д-р техн. наук

ADVISORY BOARD

E. A. Fedosov, RAS¹ Academician,
I. A. Kalyaev, RAS Academician,
N. V. Kuznetsov, RAS Corr. Member,
V. A. Levin, RAS Academician,
N. A. Makhutov, RAS Corr. Member,
A. F. Rezchikov, RAS Corr. Member,
S. N. Vassilyev, RAS Academician

EDITORIAL BOARD

V. N. Afanas'ev, Dr. Sci. (Tech.),
F. T. Aleskerov, Dr. Sci. (Tech.),
N. N. Bakhtadze, Dr. Sci. (Tech.),
V. N. Burkov, Dr. Sci. (Tech.),
A. O. Kalashnikov, Dr. Sci. (Tech.),
V. V. Klochkov, Dr. Sci. (Econ.),
M. V. Khlebnikov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
S. A. Krasnova, Dr. Sci. (Tech.),
O. P. Kuznetsov, Dr. Sci. (Tech.),
A. A. Lazarev, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
V. G. Lebedev, Dr. Sci. (Tech.),
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Phych.),
A. S. Mandel, Dr. Sci. (Tech.),
N. E. Maximova, Cand. Sci. (Tech),
Executive Editor-in-Chief,
R. V. Meshcheryakov, Dr. Sci. (Tech.),
A. I. Michalski, Dr. Sci. (Biol.),
D. A. Novikov, RAS Academician,
Editor-in-Chief,
F. F. Pashchenko, Dr. Sci. (Tech.),
Deputy Editor-in-Chief,
B. V. Pavlov, Dr. Sci. (Tech.),
L. B. Rapoport, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
S. V. Ratner, Dr. Sci. (Econ.),
E. Ya. Rubinovich, Dr. Sci. (Tech.),
A. D. Tsvirkun, Dr. Sci. (Tech.),
V. M. Vishnevsky, Dr. Sci. (Tech.),
I. B. Yadykin, Dr. Sci. (Tech)

LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Chelyabinsk – O. V. Loginovskiy, Dr. Sci. (Tech.),
Kursk – S. G. Emelyanov, Dr. Sci. (Tech.),
Lipetsk – A. K. Pogodaev, Dr. Sci. (Tech.),
Perm – V. Yu. Stolbov, Dr. Sci. (Tech.),
Rostov-on-Don – G. A. Ougolnitsky,
Dr. Sci. (Tech.),
Samara – M. I. Geraskin, Dr. Sci. (Econ.),
Saratov – V. A. Kushnikov, Dr. Sci. (Tech.),
Tambov – M. N. Krasnyanskiy, Dr. Sci. (Tech.),
Ufa – B. G. Ilyasov, Dr. Sci. (Tech.),
Vladivostok – O. V. Abramov, Dr. Sci. (Tech.),
Vologograd – A. A. Voronin, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Voronezh – S. A. Barkalov, Dr. Sci. (Tech.)

¹Russian Academy of Sciences.



CONTROL SCIENCES
Научно-технический
журнал

6 номеров в год

ISSN 1819-3161 (Print)

ISSN 2712-8687 (Online)

Издается с 2003 года

УЧРЕДИТЕЛЬ и ИЗДАТЕЛЬ

Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор
академик РАН

Д.А. Новиков

Заместитель главного редактора
Ф.Ф. Пащенко

Ответственный секретарь
Н.Е. Максимова

Выпускающий редактор
Л.В. Петракова

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410

Тел./факс (495) 198-17-20, доб. 1410

E-mail: pu@ipu.ru

Интернет: <http://pu.mtas.ru>
<http://controlsciences.org>

Опубликовано: 14 марта 2025 г.

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.
выдано Министерством Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых
коммуникаций

Свидетельство о регистрации
Эл № ФС 77-80482 от 17 февраля 2021 г.
выдано Федеральной службой
по надзору в сфере связи,
информационных технологий и
массовых коммуникаций

Журнал входит в RSCI на платформе
Web of Science и Перечень
рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс
научного цитирования (РИНЦ).
На сайте Научной электронной
библиотеки (www.elibrary.ru) доступны
полные тексты статей.

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.2025

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Макаров М. И., Коргин Н. А., Пыжьянов А. А.
Симуляторы беспилотного наземного транспорта,
применяемые для моделирования движения
по пересеченной местности 3

Математические проблемы управления

Зотьев Д. Б., Махин А. А. Полиномиальная регрессия
экспертных оценок комплексного качества 16

Анализ и синтез систем управления

Юрченков А. В. Построение динамического регулятора
для стационарных систем с мультипликативными шумами:
анизотропный подход 30

Управление в социально-экономических системах

**Жуковский В. И., Жуковская Л. В., Смирнова Л. В.,
Высокос М. И.** О коалиционной рациональности в игре
трех лиц 40

Информационные технологии в управлении

Губанов Д. А., Мельничук В. С. Построение профилей
научных публикаций на основе текстов и связей соавторства
(на примере теории управления и ее приложений) 46

Хроника

**XXXII Международная конференция «Проблемы
управления безопасностью сложных систем» 53**



CONTROL SCIENCES
Scientific Technical
Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161 (Print)

ISSN 2712-8687 (Online)

Published since 2003

FOUNDER and PUBLISHER

V.A. Trapeznikov

**Institute of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences**

Editor-in-Chief

D.A. Novikov, RAS Academician

Deputy Editor-in-Chief

F.F. Pashchenko

Executive Editor-in-Chief

N.E. Maximova

Editor

L.V. Petrakova

Editorial address

65 Profsoyuznaya st., office 410,
Moscow 117997, Russia

☎/📠 +7(495) 198-17-20, ext. 1410

✉ pu@ipu.ru

URL: <http://pu.mtas.ru>

<http://controlsciences.org>

Published: March 14, 2025

Registration certificate of

ПИ № ФС 77-49203 of 30 March 2012

issued by the Ministry of Press,

Broadcasting, and Mass Media

of the Russian Federation

Registration certificate of

Эл № ФС 77-80482 of 17 February 2021

issued by the Federal Service

for Supervision of Communications,

Information Technology, and Mass Media

The Journal is indexed in RSCI (Russian

Science Citation Index) on the platform

Web of Science and in the list of peer-

reviewed scientific publications of HAC

On the website of the Scientific electronic

library (www.elibrary.ru) full texts of

articles are available

© V.A. Trapeznikov

Institute of Control Sciences

of Russian Academy of Sciences

CONTROL SCIENCES

1.2025

CONTENTS

Surveys

Makarov, M. I., Korgin N. A., and Pyzh'yanov A. A.

Unmanned Vehicles: A Survey of Modern Simulators 3

Mathematical Problems of Control

Zot'ev, D. B. and Makhin, A. A. Polynomial Regression

of Expert Estimates of Complex Quality 16

Analysis and Design of Control Systems

Yurchenkov, A. V. Dynamic Anisotropy-Based Controller

Design for Time-Invariant Systems with Multiplicative Noise 30

Control in Social and Economic Systems

Zhukovskiy, V. I., Zhukovskaya, L. V., Smirnova, L. V.,

and Vysokos, M. I. On Coalitional Rationality

in a Three-Person Game 40

Information Technology in Control

Gubanov, D. A. and Melnichuk, V. S. Constructing

Scientific Publication Profiles Based on Texts and

Coauthorship Connections (in the Field of Control Theory

and Its Applications) 46

Chronicle

32nd International Conference on Problems of Complex

Systems Security Control 53

СИМУЛЯТОРЫ БЕСПИЛОТНОГО НАЗЕМНОГО ТРАНСПОРТА, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПО ПЕРЕСЕЧЕННОЙ МЕСТНОСТИ[#]

М. И. Макаров*, Н. А. Коргин**, А. А. Пыжьянов***

***Иститут проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва,
*Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет), г. Москва

*✉ maxim.i.makarov@gmail.com, **✉ nkorgin@ipu.ru, ***✉ ipu@isko.moe

Аннотация. Рассматриваются популярные симуляторы беспилотных транспортных средств с поддержкой пересеченной местности: Gazebo, CARLA, AirSim, NVIDIA Isaac Sim и Webots. Описаны их основные возможности, связанные с моделированием рельефа, физикой движения, поддержкой датчиков и погодных условий. Особое внимание уделено созданию реалистичных сцен пересеченной местности, сложности импорта реальных карт и взаимодействию с другими программными платформами, такими как Robot Operating System (ROS) и системы ИИ. Проанализированы основные минусы каждого симулятора: трудоемкость создания детализированных моделей рельефа и транспортных средств, высокая сложность интеграции реальных карт и зависимость от характеристик компьютерного оборудования. Также отмечается сложность взаимодействия с различным программным обеспечением и требования к знаниям в области 3D-моделирования. Симуляторы Gazebo и Webots выделяются хорошей интеграцией с ROS, но требуют больше усилий для работы с пересеченной местностью. CARLA и AirSim обеспечивают высококачественную визуализацию, но имеют более высокие требования к оборудованию и навыкам пользователя для создания ландшафтов. NVIDIA Isaac Sim выделяется поддержкой симуляций с использованием ИИ, но требует значительных ресурсов. Представлен опыт авторов в части отображения траекторий и ориентации транспортного средства в некоторых симуляторах.

Ключевые слова: беспилотные автомобили, симуляторы, пересеченная местность, гусеничные платформы.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка и тестирование беспилотных транспортных средств являются одними из наиболее сложных и актуальных задач современной робототехники и автомобильной промышленности. Для обеспечения безопасности и надежности автономных систем необходимо проводить масштабные испытания в разнообразных условиях, включая сложные сценарии взаимодействия с окружающей средой и другими участниками дорожного движе-

ния. Однако проведение таких тестов в реальном мире сопряжено с рядом трудностей, включая высокие затраты, риски для безопасности и ограниченные возможности для повторяемости экспериментов [1–3]. Симуляторы давно стали важным инструментом в области инженерии и компьютерных наук. Первые полноценные симуляторы транспортных средств появились еще в 1990-х гг. и были узкопрофильными, направленными на изучение конкретных аспектов и характеристик движения автомобилей. С развитием вычислительных мощностей и алгоритмов моделирования симуляторы постепенно становились все более сложными и реалистичными, позволяя воспроизводить не только дорожные условия, но и взаимодействие с

[#] Исследования Коргина Н. А. частично выполнены за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00681, <https://rscf.ru/project/23-29-00681>.

другими транспортными средствами, пешеходами и инфраструктурой.

В последние годы благодаря развитию сообществ пользователей программного обеспечения с открытым исходным кодом (англ. *open source*, OS) симуляторы стали еще более доступными и гибкими. Такие платформы, как CARLA, Gazebo и AirSim, получили широкое распространение благодаря открытым исходным кодам и активной поддержке сообществом разработчиков. OS-симуляторы позволяют исследователям и инженерам настраивать и модифицировать среду симуляции в соответствии с конкретными требованиями их проектов, что существенно ускоряет процессы разработки и тестирования. До широкого развития OS-симуляторов некоторые исследователи использовали релевантные компьютерные игры, такие как GTA [4].

Цель данной статьи – представить обзор современных симуляторов, используемых для разработки и тестирования беспилотного транспорта, с особым акцентом на OS-решения, поддерживающие моделирование движения по пересеченной местности. В работе будут рассмотрены различные типы симуляторов и области их применения в контексте задач беспилотного движения. В частности, для задач моделирования движения уникальных внедорожных транспортных платформ с электрическим приводом разной компоновки – колесно-гусеничной и лыже-гусеничной (рис. 1). В настоящее время в рамках апробации элементов концепции распределенной сети полигонов для отработки сценариев применения гетерогенных групп транспортных средств с электрическим приводом в сложных климатических и ландшафтных условиях [5] уже собран значительный массив данных для

анализа моделей движения подобных подвижных платформ по пересеченной местности. На их основе в дальнейшем планируется синтезировать алгоритмы управления для автономного движения с помощью методов, предложенных в статье [6] для планирования двумерных траекторий, путем адаптации их к пересеченной местности.

1. ТИПЫ СИМУЛЯТОРОВ

Современные системы автопилота представляют собой чрезвычайно сложные комплексы, состоящие из множества взаимосвязанных модулей, каждый из которых выполняет определенные функции. Эти системы включают в себя модули локализации, определения и отслеживания препятствий, анализа транспортного потока, планирования маршрутов и следования по заданному пути. Каждый из этих модулей требует отдельного подхода к разработке, тестированию и оптимизации, что делает использование симуляторов неотъемлемой частью процесса создания и совершенствования автономных транспортных средств. Для эффективного моделирования и тестирования различных аспектов работы системы автопилота используются разнообразные типы симуляторов, каждый из которых фокусируется на конкретных задачах. Симуляторы транспортного потока позволяют моделировать и анализировать взаимодействие транспортных средств в городской и пригородной среде, симуляторы динамики транспортного средства сосредоточены на физическом поведении автомобиля, а симуляторы сенсоров и восприятия – на моделировании данных с камер, лидаров и других сенсоров. Кроме того, существуют симуляторы для создания сложных сценариев движе-

*а**б*

Рис. 1. Гусеничные платформы: *а* – колесно-гусеничные, *б* – лыже-гусеничные



ния, которые позволяют тестировать алгоритмы принятия решений в различных дорожных ситуациях.

В этом разделе будут рассмотрены основные типы симуляторов, используемых для разработки и тестирования систем автопилота, их ключевые характеристики, а также примеры наиболее популярных решений в каждой категории.

1.1. Симуляторы транспортного потока

Симуляторы транспортного потока предназначены для моделирования движения множества транспортных средств на дорогах, в том числе взаимодействий между ними, с целью анализа и оптимизации транспортных систем. Эти симуляторы помогают исследовать поведение транспортных потоков, влияние различных сценариев на пробки, эффективность многообразия дорожных инфраструктур, а также поведение участников движения в различных ситуациях [7].

Основные характеристики.

- Моделирование движения большого количества транспортных средств.
- Поддержка различных типов дорожных сетей и сценариев.
- Возможность интеграции с системами управления транспортом (например, со светофорами).
- Анализ и визуализация транспортных потоков и заторов.

Примеры симуляторов.

- SUMO (Simulation of Urban Mobility) – один из наиболее распространенных симуляторов для моделирования транспортного потока в городской среде. Поддерживает моделирование больших городских сетей и интеграцию с другими симуляторами [8].
- AIMSUN – коммерческий симулятор, используемый для анализа и управления транспортными потоками, с поддержкой сложных моделей взаимодействий между транспортными средствами [9].

1.2. Симуляторы динамики транспортного средства

Эти симуляторы сосредоточены на моделировании динамических характеристик отдельных транспортных средств. Они используются для анализа поведения автомобиля в различных условиях, таких как ускорение, торможение, управление на скользких поверхностях и взаимодействие с неровностями дороги. Подобные симуляторы важны для разработки и тестирования систем управления, таких как системы стабилизации и автономного управления [10].

Основные характеристики.

- Высокоточное моделирование физических процессов, таких как динамика шасси, подвески, двигателя и тормозной системы.
- Моделирование взаимодействия транспортного средства с дорожным покрытием.
- Поддержка различных типов транспортных средств, включая легковые автомобили, грузовики и мотоциклы.
- Возможность симуляции экстремальных условий, таких как аварийные ситуации.

Примеры симуляторов.

- CarMaker – индустриальный стандарт для моделирования динамики транспортных средств. Поддерживает тестирование систем автономного управления и ассистирования водителю (англ. *advanced driver-assistance systems, ADAS*) [11].
- TruckSim – специализированный симулятор для моделирования динамики тяжелых транспортных средств, таких как грузовики и автобусы [12].

1.3. Симуляторы сенсоров и восприятия

Эти симуляторы сосредоточены на моделировании используемых в автономных транспортных средствах сенсоров, таких как камеры, лидары, радары и ультразвуковые датчики. Основная цель таких симуляторов – обеспечить реалистичное воспроизведение данных сенсоров, которые могут быть использованы для разработки и тестирования алгоритмов восприятия и принятия решений [13].

Основные характеристики.

- Реалистичное моделирование данных сенсоров в различных условиях окружающей среды.
- Поддержка множества типов сенсоров и их комбинаций.
- Возможность интеграции с алгоритмами обработки изображений и сигналов.
- Тестирование и отладка систем восприятия в сложных сценариях, таких как плохие погодные условия или плохая освещенность.

Примеры симуляторов [14].

- CARLA – предоставляет широкий набор сенсоров и моделей для тестирования систем восприятия в городских условиях.
- AirSim – симулятор от Microsoft, который поддерживает реалистичное моделирование данных сенсоров и используется для разработки автономных дронов и наземных транспортных средств.

1.4. Комплексные симуляторы

Эти симуляторы предназначены для создания и тестирования сложных сценариев движения, в ко-

торых участвуют автономные транспортные средства. Они позволяют моделировать различные дорожные ситуации и взаимодействие автономного транспортного средства с другими участниками дорожного движения, что особенно важно для разработки систем принятия решений. Как правило, в них уже заложена та или иная реализация других типов симуляторов или имеется возможность интеграции сторонних решений [15, 16].

Основные характеристики.

- Поддержка создания сложных сценариев с участием множества транспортных средств и пешеходов.
- Интеграция с алгоритмами принятия решений и управления движением.
- Возможность моделирования редких и экстремальных ситуаций, таких как аварии или внезапные препятствия.
- Анализ и визуализация принятых решений и их последствий.

Примеры симуляторов.

- CARLA – гибкая и расширяемая платформа для обучения, тестирования и проверки систем автономного вождения; созданная на основе визуализатора Unreal Engine, CARLA предлагает высокоточные среды, реалистичную физику и полный набор датчиков, включая камеры, лидары (англ. LiDAR) и радары (англ. RADAR) [17].
- PreScan – используется для разработки и тестирования систем ADAS и автономных транспортных средств, включая моделирование сложных сценариев и дорожных ситуаций.
- LGSVL Simulator – поддерживает моделирование различных сценариев и интеграцию с платформами для разработки автономного управления, такими как Apollo и Autoware [14].
- AutoDRIVE Simulator – высокоточная платформа моделирования, разработанная с использованием игрового визуализатора Unity; включает в себя модель транспортного средства, оснащенную комплексным набором датчиков и приводов, что облегчает исследования и обучение в области технологий автономных транспортных средств [18].

2. РАБОТА СО СЦЕНАМИ ПЕРЕСЕЧЕННОЙ МЕСТНОСТИ

Задачи, которые ставят перед современными беспилотными транспортными средствами, требуют от них движения не только по ровным, асфальтированным и размеченным дорогам, но и по пересеченной местности с различными типами покрытий, начиная от грунтовых и заканчивая снежным покровом [19]. Для отработки алгоритмов управ-

ления, навигации и локализации требуется наличие соответствующего симулятора, способного реализовывать движение по сложному рельефу и представлять набор типичных для такой местности препятствий. Поскольку применение беспилотных транспортных средств пока не так распространено, то и количество соответствующих симуляторов существенно ограничено. Среди дополнительных требований, предъявляемых к таким симуляторам по сравнению с симуляторами, включающими дороги с асфальтовым покрытием, можно выделить следующие:

- Физическая модель местности. Поддержка рельефов с неровностями, различными типами грунта (гравий, песок, камни), водой и другими природными препятствиями; это позволяет тестировать, как беспилотник будет реагировать на скользкие или рыхлые поверхности, а также на подъемы и спуски.
- Детализированные модели транспортных средств. Важно учитывать особенности различных видов транспорта, будь то автономные машины, гусеничные транспортные средства, роботы на колесах или даже дроны, способные передвигаться по труднопроходимой местности; симуляторы должны точно моделировать подвеску, сцепление с дорогой, динамометрию и другие важные аспекты;
- Окружающая среда. Симуляторы должны включать не только разнообразные рельефы, но и имитировать влияние погодных условий, таких как дождь, снег, туман и ветер, которые могут сильно отразиться на управлении транспортным средством; в рассмотренных ниже симуляторах различные метеоусловия влияют только на визуальный ряд, который может быть получен сенсорами; влияние этих факторов на сцепление с дорожным полотном, если это возможно, явно отображается в характеристиках симулятора.

Далее будут более подробно рассмотрены различные симуляторы, которые могут использоваться для имитации движения по пересеченной местности.

2.1. Gazebo

Это один из самых популярных симуляторов роботов и беспилотных транспортных средств, поддерживающий реалистичную физику и высокую степень возможности адаптирования под индивидуальные нужды (кастомизации). Благодаря открытому исходному коду используется в исследовательских и образовательных проектах, а также в коммерческих разработках [20, 21]. Это открытая платформа, которая позволяет интегрировать раз-



личные физические визуализаторы, такие как ODE, Bullet, Simbody и др.

Плюсы:

- Реалистичная физика. Gazebo поддерживает сложные рельефы с неровностями, холмами, скалами и даже водой, что позволяет моделировать сценарии движения автономных транспортных средств по пересеченной местности.

- Моделирование сцепления и подвески. Важно для гусеничных или колесных транспортных средств, работающих на пересеченной местности; можно точно симулировать, как транспортное средство будет вести себя на сложном рельефе.

- Поддержка различных типов поверхности. Симулятор может моделировать разные типы грунта, включая скользкие или рыхлые поверхности, такие как песок, гравий, грязь.

- Окружающая среда. Можно добавлять эффекты, такие как дождь, ветер, снег, которые влияют на условия движения по пересеченной местности.

- Интеграция с Robot Operating System (ROS). Gazebo активно используется в связке с ROS, что делает его удобным для разработки и тестирования автономных систем в реальных условиях.

Минусы:

- Создание сцен. Хотя Gazebo предоставляет инструменты для создания сцен, разработка детализированных пересеченных ландшафтов может оказаться трудоемкой. Пользователи часто сталкиваются с необходимостью вручную моделировать сложные элементы рельефа.

- Импорт карт. Автоматический импорт карт из реальных данных (например, спутниковых) возможен через дополнительные плагины, но это требует дополнительной настройки и не всегда может обеспечивать достаточную детализацию для сложных рельефов.

- Сложность создания моделей. Создание детализированных 3D-моделей транспортных средств требует знаний в области 3D-моделирования и физической симуляции. Сам процесс может быть сложным для тех, кто не знаком с такими инструментами.

- Интеграция с другими системами. Хотя Gazebo хорошо интегрируется с ROS, интеграция с другими фреймворками может требовать дополнительных усилий. Например, использование других физических визуализаторов или интерфейсов управления может быть ограниченным без ручной настройки.

Сложность: средняя. Gazebo ориентирован на исследователей, так что потребуется хорошее понимание работы с ROS и основ симуляции, чтобы создать и настроить сложные сцены.

2.2. CARLA

Это симулятор с открытым исходным кодом, разработанный для тестирования автономных транспортных средств в городских условиях [22]. Однако его можно адаптировать и для пересеченной местности, поскольку он предоставляет достаточные возможности для создания нестандартных ландшафтов [23].

Плюсы:

- Кастомизация среды. CARLA предоставляет инструменты для создания пользовательских карт, что позволяет строить сложные рельефы с пересеченной местностью.

- Поддержка реалистичной физики движения. CARLA может моделировать динамику автомобиля при движении по неровной местности, включая управление скоростью, сцеплением и устойчивостью.

- Возможность работы с различными типами поверхностей. Несмотря на ориентацию на городские условия, CARLA позволяет моделировать участки с травой, грязью, песком и другими типами поверхностей.

- Учет погодных условий. Возможна симуляция различных погодных условий, влияющих на сцепление и видимость.

Минусы.

- Создание сцен. CARLA предназначен в первую очередь для городских условий, и создание сцен пересеченной местности может потребовать ручной настройки. Встроенные карты не включают пересеченную местность, поэтому потребуется импортировать пользовательские карты и вручную настраивать рельефы.

- Импорт карт. Импорт реальных карт требует дополнительных инструментов и модулей, а также навыков работы с 3D-графикой и геопространственными данными. Поддержка пересеченной местности заявлена в новостной статье [24], однако никаких примеров или статей о применении этого функционала не было обнаружено, в результате чего адаптация под пересеченную местность оказывается усложнена.

- Сложность создания моделей. В CARLA уже есть готовые модели транспортных средств, но для создания уникальных моделей придется использовать сторонние инструменты, такие как Blender или Maya. Это может быть сложным, особенно если нужно детализировать подвеску и динамику движения.

- Интеграция с другим ПО. Хорошо интегрируется с Python API для сценариев, но взаимодействие с другими системами требует дополнитель-

ной настройки. Нет встроенной поддержки ROS, что может быть минусом для проектов на ROS.

Сложность: высокая для пересеченной местности. Потребуется значительные усилия для создания детализированных природных сцен и интеграции реальных карт.

2.3. AirSim

Это симулятор, разработанный Microsoft для дронов и наземных транспортных средств [25]. Его основное преимущество – интеграция с движком Unreal Engine, что позволяет создавать высокодетализированные 3D-сцены, включая пересеченную местность [26].

Плюсы:

- Высокая детализация местности. Благодаря использованию Unreal Engine AirSim может точно симулировать сложные рельефы с различными типами местности – от горных ландшафтов до густых лесов.

- Поддержка реалистичной физики движения. В AirSim можно моделировать различные типы транспортных средств, включая колесные и гусеничные платформы, что позволяет тестировать движение по сложной местности.

- Кастомизация датчиков. Симулятор предоставляет возможность моделировать различные датчики, такие как камеры, лидары и GPS, что особенно полезно для тестирования работы на пересеченной местности с затрудненным сигналом.

- Учет погодных условий и освещения. Можно моделировать различные погодные условия, такие как дождь, снег, туман, которые значительно усложняют навигацию на пересеченной местности.

Минусы:

- Создание сцен. Поскольку AirSim использует Unreal Engine, создание сцены требует работы с инструментами игрового движка. Несмотря на визуальную мощь, Unreal Engine имеет достаточно высокий порог вхождения для новичков. Создание сложных ландшафтов и окружений может занять много времени и требовать серьезных навыков в области 3D-моделирования.

- Импорт карт. В AirSim не предусмотрена прямая возможность для импорта реальных географических данных. Однако есть сторонние инструменты, которые можно использовать, но их настройка усложнена.

- Сложность создания моделей. Для создания детализированных моделей транспортных средств также придется использовать Unreal Engine или сторонние программы 3D-моделирования. Процесс интеграции новых моделей с физической симуляцией может быть трудоемким.

- Интеграция с другим ПО. AirSim предоставляет API для работы с Python и C++, но взаимодействие с ROS или другими системами потребует дополнительных усилий. Интеграция с другими фреймворками ограничена по сравнению с Gazebo.

Сложность: высокая. Несмотря на мощные возможности визуализации, сложность создания сцен и работы с картами из реальных данных делает AirSim более трудоемким для использования в академических или коммерческих проектах с пересеченной местностью.

2.4. NVIDIA Isaac Sim

Это платформа для симуляции роботов от NVIDIA, разработанная для поддержки сложных задач робототехники и автономного транспорта. Она использует возможности графического процессора (GPU) и позволяет моделировать сложные сценарии, включая пересеченную местность. Есть возможность реализации собственных расширений гибкими функциональными возможностями [27–29].

Плюсы:

- Фотореалистичная среда. Использование движка PhysX и GPU-акселерации позволяет точно симулировать физику движения транспортных средств по сложным рельефам и разнообразным поверхностям.

- Интеграция с реальными алгоритмами. Isaac Sim поддерживает интеграцию с алгоритмами глубокого обучения и планирования маршрутов, что позволяет моделировать и тестировать сложные сценарии на пересеченной местности.

- Поддержка различных типов роботов. Симулятор может моделировать как колесные транспортные средства, так и гусеничные роботы или дроны, что делает его универсальным для задач автономного передвижения на пересеченной местности.

- Датчики. Поддерживается симуляция сложных сенсорных систем, включая камеры, лидары и GPS, что помогает тестировать работу роботов в условиях пересеченной местности.

Минусы:

- Создание сцен. Хотя Isaac Sim предоставляет инструменты для создания сложных сцен, моделирование пересеченной местности потребует значительных усилий. Платформа ориентирована на высокопроизводительные вычисления с использованием GPU, что может усложнить разработку пользователям без мощного оборудования.

- Импорт карт. В Isaac Sim можно интегрировать модели реальных карт через 3D-моделирование, но процесс требует использования сторон-



них инструментов и может быть достаточно сложным, особенно для реалистичной симуляции рельефа и природных условий.

- Сложность создания моделей. Создание новых моделей транспортных средств и адаптация их к физике движения требует серьезной подготовки и знаний в области 3D-графики. Включение динамики подвески и сложных механизмов может быть сложным для непрофессионалов.

- Интеграция с другим ПО. Хорошо интегрируется с NVIDIA AI-инструментами, но для интеграции с ROS или другими автономными системами могут потребоваться дополнительные модули и настройки. Это может быть затруднительно для проектов, где требуется быстрая и легкая интеграция.

2.5. Webots

Это бесплатный симулятор роботов с открытым исходным кодом, который используется в образовательных и исследовательских целях [30, 31]. Он поддерживает широкий спектр роботизированных систем, включая беспилотные транспортные средства.

Плюсы:

- Гибкость моделирования рельефов. В Webots можно создавать собственные модели сложной местности, включающие горы, холмы, каньоны и другие природные объекты.

- Поддержка различных транспортных средств. В Webots можно симулировать работу как колесных, так и гусеничных транспортных средств, что позволяет тестировать алгоритмы движения по сложной местности.

- Моделирование датчиков. Webots поддерживает широкий набор датчиков, что делает его пригодным для тестирования автономных систем на пересеченной местности с использованием камер, лидаров и GPS.

- Учет погодных условий. Можно моделировать различные погодные условия, такие как дождь и туман, которые влияют на видимость и сцепление.

Минусы:

- Создание сцен. Webots обладает удобным интерфейсом для создания простых сцен, но если речь идет о сложной пересеченной местности, то придется вручную настраивать рельефы и поверхности, что может служить ограничением по сравнению с другими более продвинутыми симуляторами.

- Импорт карт. Импорт реальных карт не поддерживается напрямую, и придется использовать сторонние инструменты для создания сложных

рельефов и местности. Моделирование пересеченной местности будет осуществляться значительно сложнее по сравнению с более мощными симуляторами.

- Сложность создания моделей. Webots имеет библиотеку стандартных роботов, но создание собственных моделей требует использования сторонних инструментов для 3D-моделирования. Встроенные инструменты моделирования ограничены, что может осложнить работу с уникальными транспортными средствами.

- Интеграция с другим ПО. Webots поддерживает интеграцию с ROS и другими популярными фреймворками, но более сложные задачи, такие как глубокая интеграция с внешними ИИ-системами, могут потребовать разработки дополнительных модулей.

2.6. Blender с фотограмметрией OpenDroneMap

Blender – редактор для создания трехмерной компьютерной графики, включающий в себя средства моделирования, скульптинга, анимации, симуляции, отрисовки (рендеринга), постобработки и монтажа видео со звуком. OpenDroneMap – набор инструментов для фотограмметрии по аэрофото-снимкам, формирующий 3D-карты отснятой местности [32].

Плюсы:

- Моделирование. Практически не ограниченные возможности по моделированию и симуляции процессов, так как имеется богатый набор инструментов от базовых до узкоспециализированных, из которых можно собрать собственный симулятор [33].

- Импорт карт. Наличие плагинов для импорта карт и проецирования спутниковых снимков на публично доступные данные о высотах.

- Анимация. Гибкие возможности по созданию анимации и доступ к Python API, в котором возможно изменение любых свойств.

- Понятный интерфейс. После создания необходимых вспомогательных инструментов задачи импорта записей с датчиков сводятся к однокнопочным решениям с возможностью быстрой отладки результатов.

Минусы:

- Модульность. Необходимость искать (создавать, собирать) все части симуляции.

- Поддержка GNSS. Отсутствие встроенной привязки базового пространства 3D-редактора к географическим координатам – вся работа с реальными данными требует внимательного пересчета координатных систем и предварительной подготовки (обработки) записей.

- Физика взаимодействий. Сложность симуляции физического взаимодействия транспортного средства с рельефом. Blender в первую очередь используется для анимации, и встроенные инструменты эмуляции физики обычно используются для упрощения реализации художественного замысла, а не для расчета физических нагрузок.

Сложность: высокая. Несмотря на мощные возможности визуализации, первичная сложность создания сцен и работы с картами из реальных данных делает симулятор сложным для использования в академических или коммерческих проектах с пересеченной местностью.

2.7. NV073

Это 3D-симулятор, разработанный в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова на основе визуализатора Unreal Engine 5.2 и AirSim для моделирования совместной работы группы наземных, подводных, надводных и воздушных беспилотных аппаратов [34]. Использование в основе симулятора AirSim наследует все его преимущества и недостатки. Есть адаптированная и упрощенная сборка для просмотра записей траекторий движения электротранспорта вместе с характеристиками работы силовой установки.

Плюсы:

- Простота управления просмотром – удобный слайдер со шкалой времени, кнопки запуска/остановки.
- Поддержка разнородных аппаратов – заявлена поддержка четырех типов беспилотных аппаратов: наземные, воздушные, надводные и подводные.
- Разнообразие анимаций – можно визуализировать обороты двигателя через анимацию вращения колес, менять освещение и погодные условия.
- Упрощен запуск и импорт записей – вся среда запускается одним исполняемым файлом и читает подготовленный файл записи из заранее заданной папки.
- Встроенный алгоритм корректирует запись траектории по высоте, привязывая движение к поверхности карты.

Минусы:

- Отсутствует возможность добавления моделей местности – новые карты можно добавить только с привлечением разработчика.
- Не поддерживается отображение всей траектории – для каждого момента времени показывается только положение транспортного средства в этот момент, что затрудняет оценку всей записи в целом.

- Привязка к поверхности игнорирует записанные данные о высоте, что делает симуляцию сильно зависимой от качества модели местности.

- Отсутствие документации – вся информация о симуляторе может быть получена только из ограниченного набора статей или напрямую у авторов симулятора, что накладывает сложности на его установку и дальнейшее использование.

2.8. Сравнение рассмотренных симуляторов

Каждый из перечисленных симуляторов предоставляет некоторые возможности для моделирования пересеченной местности, поэтому выбор какого-то из них зависит от специфики проекта. Gazebo и AirSim подходят для высокодетализированного моделирования физических условий, CARLA может быть адаптирован для нестандартных задач, NVIDIA Isaac Sim предлагает мощные возможности для симуляции с использованием GPU, а Webots – простой и гибкий инструмент для образовательных целей. При этом Gazebo и Webots легче интегрируются с ROS, но могут потребовать больше ручной работы для создания сложных природных ландшафтов. CARLA и AirSim, в свою очередь, отлично подходят для высококачественной визуализации, но требуют значительных усилий для создания сцен пересеченной местности и импорта реальных данных. NVIDIA Isaac Sim предлагает мощную поддержку симуляций с ИИ, но требует высокопроизводительных ресурсов и сложной настройки для создания сцены. Построение модели местности с помощью OpenDroneMap и проигрывание (симуляция) записи движения в Blender подходят для визуализации рельефа и траекторий, но не дают готовых инструментов для симуляции физических взаимодействий. Большая часть этих симуляторов поддерживает взаимодействие с внешними инструментами, что дает возможность воспроизведения поведения реального объекта в симуляционной среде.

Для дальнейшего выбора симулятора определим основные сравниваемые параметры.

- RTF (*Real-Time Factor*, коэффициент реального времени) – это показатель, используемый для оценки скорости выполнения симуляции относительно реального времени. Он широко применяется в робототехнике и автономных транспортных системах для анализа производительности и вычислительной эффективности.

- Частота обновления сенсоров – скорость, с которой обновляются сенсоры (лидары, камеры, GPS). Чем выше частота, тем точнее моделирование, но выше нагрузка на процессор и графику.



• Графический визуализатор (движок) – отвечает за рендеринг изображений. Unreal Engine и Omniverse RTX обеспечивают высокое качество графики, но требуют мощного оборудования. OGRE и OpenGL более простые и легковесные.

• Физический визуализатор (движок) – отвечает за моделирование динамики движения, столкновений, силы трения, реакции подвески и других физических эффектов. Чем мощнее движок, тем реалистичнее поведение объектов.

• Максимальное число транспортных средств (роботов) – показывает, сколько объектов можно одновременно моделировать. Ограничивается вычислительной мощностью процессора и видеокарты.

Сравнение для выбранных в статье симуляторов по перечисленным параметрам приведено в табл. 1.

Итоговое экспертное сравнение возможностей симуляторов и их технических характеристик приведено в табл. 2, где оценка 1 соответствует наименее сложным в реализации вариантам, 2 – средним, 3 – сложным. Согласно табл. 2 нельзя выделить один симулятор, который будет лучше других по всем параметрам.

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ СИМУЛЯТОРОВ

Перед авторами данной статьи стоит задача симуляции движения колесно-гусеничных и лыже-гусеничных платформ, приведенных на рис. 1, в первую очередь в рамках анализа сценариев их применения на участках распределенной сети по-

лигонов, расположенных в горных районах Мурманской области и Кавказа [5]. Для решения научных и прикладных задач от симулятора требуется:

- поддержка движения по пересеченной местности, включая различные типы покрытий (грунт, снег, песок);
- наличие готовых моделей транспортных средств, близких по характеристикам к изображенным на рис. 1, или возможность добавления своей модели;
- интеграция с Python;
- отсутствие необходимости в покупке лицензии;
- возможность отобразить движение по данным, записанным с реального транспортного средства.

Согласно приведенному выше обзору и сравнительной табл. 2, нельзя выделить один симулятор, который будет лучше других по всем параметрам. Наиболее подходящими оказываются симуляторы Webots, Isaac Sim и Gazebo. Однако Isaac Sim требует наличие высокопроизводительных видеокарт, Gazebo же является лидером по всем параметрам, исключая сложность создания сцен (он уступает в этом Webots). Авторам статьи не так важна возможность создания собственных сцен, поэтому дальнейшие эксперименты и тестирование будут производиться с использованием Gazebo. Данный симулятор предлагает инструменты для моделирования физического поведения транспортного средства, работы с датчиками и визуализации собранных данных. Поскольку рассматриваемые гусеничные платформы обладают сложной динамикой,

Таблица 1

Сравнение характеристик симуляторов для беспилотных транспортных средств

Характеристики	Gazebo	CARLA	AirSim / NVO73	NVIDIA Isaac Sim	Webots
Физический визуализатор	ODE, Bullet, Simbody, DART	Unreal Engine PhysX	Unreal Engine PhysX	NVIDIA PhysX	ODE
RTF	1.0–2.0	~1.0 (зависит от видеокарты)	~1.5 (зависит от настроек)	1.0 (требовательный к GPU)	1.0–3.0 (легковесный)
Частота обновления сенсоров	100–1000 Hz	~100 Hz (камеры, LiDAR)	120 Hz (LiDAR), 30-60 Hz (камеры)	240 Hz (LiDAR), 60 Hz (камеры)	~100 Hz
Графический визуализатор	OGRE (basic)	Unreal Engine 4	Unreal Engine 4 (5.2 в случае NVO73)	Omniverse RTX (высокая детализация)	Встроенный OpenGL-based
Максимальное число транспортных средств	50+ (оптимизирован)	~20–50 (зависит от настроек)	10-30 (зависит от GPU)	100+ (с ускорением RTX)	10–50 (оптимизирован для мобильных роботов)

**Сравнение симуляторов для беспилотных транспортных средств с поддержкой пересеченной местности
(низкая оценка соответствует более приоритетному варианту)**

Критерий	Gazebo	CARLA	AirSim / NVO73	NVIDIA Isaac Sim	Webots	ODM+Blender
Создание сцен	2	3	3	2	1	2
Импорт карт	2	3	3	3	3	2
Сложность создания моделей	2	3	3	3	1	2
Интеграция с другим ПО	1	1	1	2	2	1
Поддержка пересеченной местности	1	3	1	1	2	1
Возможность отображения логов реального объекта	1	1	3	2	1	2
Требования к оборудованию	1	2	3	3	1	2

особенно при движении по пересеченной местности, Gazebo с его реалистичным физическим движком позволяет тестировать такие аспекты, как сцепление гусениц с поверхностью, поведение подвески и влияние различных типов грунта (песок, грязь, камни) [35].

Для задачи отображения реальных данных, записанных при движении на мотоцикле или гусеничной платформе, авторами были опробованы два различных инструмента:

– система симуляции NVO 73 на базе игрового движка Unreal Engine [34, 36];

– Blender с фотограмметрией OpenDroneMap.

Функциональные возможности NVO 73 пока сильно ограничены, что не позволяет удовлетворить все требования, предъявляемые к инструментам визуализации, однако есть возможность воспроизведения движения из заранее записанного файла логов. Интерфейс симулятора представлен на рис. 2.

Отрисовка траекторий движения на моделях местности из OpenDroneMap в Blender получается довольно наглядной, что отображено на рис. 3, и также позволяет показать запись движений человека, однако синхронизация записей очень трудоемка, так как требует ручного подбора поправок для всех исходных положений – модели местности и координат спутниковой навигации, взаимного расположения транспортного средства и человека на нем [36]. Без разработки физической модели движения и привязок транспортного средства к поверхности земли, а также человека к транспортному средству на реконструкции получаются периодические значительные расхождения с кон-

трольной видеозаписью – транспортное средство улетает в небо или проваливается под землю, человек поворачивается и сдвигается в разные стороны.



Рис. 2. Интерфейс симулятора NVO 73



Рис. 3. Отрисовка движения в Blender с ODM



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье проведен обзор популярных симуляторов для моделирования различных аспектов движения автономных транспортных средств. Отдельное внимание уделено симуляторам, поддерживающим пересеченную местность: Gazebo, CARLA, AirSim, NVIDIA Isaac Sim и Webots. Каждый из рассмотренных симуляторов обладает уникальными возможностями, которые делают их подходящими для различных задач, но при этом имеют и некоторые ограничения.

Так, Gazebo и Webots выделяются простотой интеграции с ROS и низкими требованиями к оборудованию, но требуют значительных усилий для создания сложных сцен пересеченной местности. CARLA и AirSim предлагают высококачественную визуализацию и гибкость при работе с индивидуально разработанными сценариями, однако сложность настройки пересеченных рельефов и высокая нагрузка на оборудование могут стать ограничивающими факторами. NVIDIA Isaac Sim, в свою очередь, демонстрирует выдающиеся возможности симуляции с использованием ИИ и GPU-ускорения, но его применение связано с высокими требованиями к вычислительным ресурсам и сложностью настройки. Итоговый выбор симулятора зависит от целей проекта, доступного оборудования и требуемой степени детализации моделирования. Независимо от выбора, использование симуляторов значительно ускоряет разработку и тестирование автономных систем, минимизируя риски и затраты на реальных испытаниях. Для задач, связанных с пересеченной местностью, важно учитывать не только возможности симулятора, но и сложность интеграции реальных данных, таких как рельеф и записи движения, что особенно актуально для исследования и оптимизации алгоритмов автономного управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karunakaran, D., Berrio, J.S., Worrall, S. Challenges of Testing Highly Automated Vehicles: A Literature Review // Proceedings of 2022 IEEE International Conference on Recent Advances in Systems Science and Engineering (RASSE). – Tainan, 2022. – P. 1–8. – DOI: 10.1109/RASSE54974.2022.9989562
2. Beringhoff, F., Greenyer, J., Roesener, C. Thirty-One Challenges in Testing Automated Vehicles: Interviews with Experts from Industry and Research // Proceedings of 2022 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). – Aachen, 2022. – P. 360–366. – DOI: 10.1109/IV51971.2022.9827097
3. Lou, G., Deng, Y., Zheng, X., et al. Testing of Autonomous Driving Systems: Where Are We and Where Should We Go? // Proceedings of the 30th ACM Joint European Software Engineering Conference and Symposium on the Foundations of Software Engineering. – Singapore, 2022. – P. 31–43.
4. Martinez, M., Sitawarin, C. Beyond Grand Theft Auto V for Training, Testing and Enhancing Deep Learning in Self-driving Cars. – arXiv:1712.01397, 2017. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1712.01397>
5. Коргин Н.А., Мецераков П.В. Концепция проекта по созданию распределенной сети полигонов для отработки сценариев применения гетерогенных групп транспортных средств с электрическим приводом в сложных климатических и ландшафтных условиях // Труды 11-й Всероссийской научной конференции «Системный синтез и прикладная синергетика»: сборник научных трудов (п. Нижний Архыз, ССПС-2022). – Ростов н/Д.: Южный федеральный университет, 2022. – С. 197–202. [Korgin, N.A., Meshcheryakov, P.V. Kontsepsiya proekta po sozdaniyu raspredelennoi seti poligonov dlya otrabotki stsenariyev primeneniya geterogennykh grupp transportnykh sredstv s ehlektricheskim privodom v slozhnykh klimaticheskikh i landshaftnykh usloviyakh. kh // Trudy 11-i Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii «Sistemnyi sintez i prikladnaya sinergetika»: sbornik nauchnykh trudov (p. Nizhnii Arkhyz, SSPS-2022). – Rostov n/D.: Yuzhnyi federal'nyi universitet, 2022. – P. 197–202. (In Russian)]
6. Макаров М.И. Алгоритм локального планирования пути для объезда препятствий в путевых координатах // Проблемы управления. – 2024. – № 3. – С. 66–72. [Makarov, M.I. A local path planning algorithm for avoiding obstacles in the frenet frame // Control Sciences. – 2024. – No. 3. – P. 56–61.]
7. Mitrohin, M.A., Alyaev, A.O., Lobanov, R.I., Semenkin, M.V. Investigation of the Influence of Lighting Objects Control Algorithms on the Characteristics of Road Traffic at Intersections // Transport Automation Research. – 2024. – No. 3. – P. 282–295.
8. Lim, K.G., Lee, C.H., Chin, R.K., et al. SUMO Enhancement for Vehicular Ad Hoc Network (VANET) Simulation // Proceedings of 2017 IEEE 2nd International Conference on Automatic Control and Intelligent Systems (I2CACIS). – Kota Kinabalu, 2017. – P. 86–91.
9. Barceló, J., Barceló, P., Casas, J., Ferrer, J.L. AIMSUN: New ITS Capabilities // Proc. Eur. ITS Conf. – Bilbao, Spain, 2001. – P. 1–10.
10. Ghafarian, M., Watson, N., Mohajer, N., et al. A Review of Dynamic Vehicular Motion Simulators: Systems and Algorithms // IEEE Access. – 2023. – Vol. 11. – P. 36 331–36 348.
11. Ziegler, S., Höppler, R. Extending the IPG CarMaker by FMI Compliant Units // Proceedings of 8th International Modelica Conference. – Dresden, 2011. – P. 779–784.
12. TruckSim Overview. – URL: <https://www.carsim.com/products/trucksim/index.php> (дата обращения: 30.09.2024). [Accessed September 30, 2024.]
13. Silva, I., Silva, H., Botelho, F., Pendao, C. Realistic 3D Simulators for Automotive: A Review of Main Applications and Features // Sensors. – 2024. – Vol. 24, no. 18. – Art. no. 5880.
14. Li, Y., Yuan, W., Zhang, S., et al. Choose Your Simulator Wisely: A Review on Open-Source Simulators for Autonomous Driving // IEEE Transactions on Intelligent Vehicles. – 2024. – Vol. 9, iss. 5. – P. 4861–4876.
15. Cantas, M.R., Guvenc, L. Customized Co-simulation Environment for Autonomous Driving Algorithm Development and Evaluation // arXiv:2306.00223, 2023. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.00223>
16. Holen, M., Knausgard, K., Goodwin, M. An Evaluation of Autonomous Car Simulators and Their Applicability for Supervised and Reinforcement Learning // Proceedings of International Conference on Intelligent Technologies and Applications. – Grimstad, 2021. – P. 367–379.
17. May, J., Poudel, S., Amdan, S., et al. Using the CARLA Simulator to Train a Deep Q Self-Driving Car to Control a Real-

- World Counterpart on a College Campus // Proceedings of 2023 IEEE International Conference on Big Data. – Sorrento, 2023. – P. 2206–2210.
18. *Tanmay, V.S., Chinmay, V.S., Ming, X.* AutoDRIVE Simulator: A Simulator for Scaled Autonomous Vehicle Research and Education // Proceedings of the 2021 2nd International Conference on Control, Robotics and Intelligent System (CCRIS '21). – Qingdao, 2021. – P. 1–5.
19. *Hanevold, M.* Path Following Model Predictive Control of a Differential Drive UGV in Off-Road Terrain: Master of Informatics thesis. – Oslo: University of Oslo, 2022. – 88 p.
20. *Zheng, H., Smereka, J.M., Mikulski, D., et al.* Bayesian Optimization Based Trust Model for Human Multi-robot Collaborative Motion Tasks in Offroad Environments // International Journal of Social Robotics. – 2023. – Vol. 15, no. 7. – P. 1181–1201.
21. *Koenig, N., Howard, A.* Design and Use Paradigms for Gazebo, an Open-Source Multi-robot Simulator // Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). – Sendai, 2004. – Vol. 3. – P. 2149–2154.
22. *Dosovitskiy, A., Ros, G., Codevilla, F., et al.* CARLA: An Open Urban Driving Simulator // Proceedings of Conference on Robot Learning. – Mountain View, 2017. – P. 1–16.
23. *Han, I., Park, D.H., Kim, K.J.* A New Open-Source Off-road Environment for Benchmark Generalization of Autonomous Driving // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 136 071–136 082.
24. *Let's go off-road!* – URL: <https://carla.org/2023/04/21/avl-off-road-simulation> (дата обращения: 30.09.2024). [Accessed September 30, 2024.]
25. *Shah, S., Dey, D., Lovett, C., Kapoor, A.* Airsim: High-Fidelity Visual and Physical Simulation for Autonomous Vehicles // Proceedings of the 11th International Conference on Field and Service Robotics. – Cham: Springer International Publishing, 2018. – P. 621–635.
26. *Jansen, W., Verreycken, E., Schenck, A., et al.* COSYS-AIRSIM: A Real-Time Simulation Framework Expanded for Complex Industrial Applications // Proceedings of 2023 Annual Modeling and Simulation Conference (ANNSIM). – Hamilton, 2023. – P. 37–48.
27. *Richard, A., Kamohara, J., Uno, K., et al.* Omnirls: A Photorealistic Simulator for Lunar Robotics // Proceedings of 2024 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). – Yokohama, 2024. – P. 16 901–16 907.
28. *Jacinto, M., Pinto, J., Patrikar, J., et al.* Pegasus Simulator: An Isaac Sim Framework for Multiple Aerial Vehicles Simulation // Proceedings of 2024 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). – Chania, 2024. – P. 917–922.
29. *Ellis, K., Zhang, H., Stoyanov, D., Kanoulas, D.* Navigation among Movable Obstacles with Object Localization Using Photorealistic Simulation // Proceedings of 2022 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). – Huntington Place, 2022. – P. 1711–1716.
30. *Zea, D., Toapanta, A., Perez, V.H.* Intelligent and Autonomous Guidance through a Geometric Model for Conventional Vehicles // In: Innovation and Research: A Driving Force for Socio-Econo-Technological Development. – Cham: Springer International Publishing, 2020. – P. 78–93.
31. *Couceiro, M. S., Vargas, P. A., Rocha, R. P.* Bridging the Reality Gap between the Webots Simulator and E-puck Robots // Robotics and Autonomous Systems. – 2014. – Vol. 62, no. 10. – P. 1549–1567.
32. *Zhang, C., Maga, A. M.* An Open-Source Photogrammetry Workflow for Reconstructing 3D models // Integrative Organismal Biology. – 2023. – Vol. 5, no. 1. – Art no. obad024.
33. *OpenDroneMap + blender = Fun.* – URL: <https://smathermather.com/2019/12/30/opendronemap-blender-fun-part-2/> (дата обращения: 30.09.2024). [Accessed September 30, 2024].
34. *Амосов О.С., Амосова С.Г., Кулагин К.А.* Моделирование виртуального полигона для отработки совместной навигации группы разнородных беспилотных аппаратов // Материалы 34-й конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова (Санкт-Петербург, 2024). – Санкт-Петербург, 2024. – С. 117–120. [Amosov, O.S., Amosova, S.G., Kulagin, K.A. Modelirovanie virtual'nogo poligona dlya otrabotki sovmestnoy navigacii grupy raznorodnyh bespilotnyh apparatov // Materialy 34-j konferencii pamyati vydayushchegosya konstruktora giroskopicheskikh priborov N.N. Ostryakova (Sankt-Peterburg, 2024). – Saint Petersburg, 2024. – S. 117–120. (In Russian)]
35. *Dobrokvashina, A., Lavrenov, R., Bai, Y., et al.* Servosila Engineer Crawler Robot Modelling in Webots Simulator // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. – 2022. – Vol. 11, no. 6. – P. 417–421.
36. *Trefilov, P., Kulagin, K., Mamchenko, M.* Developing a Flight Mission Simulator in the Context of UAVs Group Control // Proceedings of 2020 13th International Conference “Management of Large-Scale System Sevelopment” (MLSD). – Moscow, 2020. – P. 1–4. – DOI:10.1109/MLSD49919.2020.9247692
37. *Базенков Н.И., Пыжьянов А.А.* Система сбора данных для реконструкции движений мотоциклиста // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2024): сб. науч. тр. – М.: ИПУ РАН, 2024. – С. 1776–1280. [Bazhenkov N.I., Pyzh'yanov A.A. Sistema sbora dannyh dlja rekonstrukcii dvizhenij motociklista // XIV Vserossijskoe soveshhanie po problemam upravlenija (VSPU-2024): sb. nauch. tr. – Moscow, 2024. – S. 1776–1780. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии
П.В. Мецгеряковым.

Поступила в редакцию 03.12.2024,
после доработки 11.02.2025.
Принята к публикации 12.02.2025.

Макаров Максим Игоревич – мл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва; Московский физико-технический институт (Государственный университет), г. Москва,
✉ maxim.i.makarov@gmail.com
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4854-5910>

Коргин Николай Андреевич – д-р техн. наук, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва,
✉ nkorgin@ipu.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-1744-3011>

Пыжьянов Андрей Александрович – инженер-программист, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва,
✉ ipu@isko.moe
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-4539-6190>

© 2024 г. Макаров М. И., Коргин Н. А., Пыжьянов А. А.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная.](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



UNMANNED VEHICLES: A SURVEY OF MODERN SIMULATORS

M. I. Makarov*, N. A. Korgin**, and A. A. Pyzh'yanov***

*****Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

*✉ maxim.i.makarov@gmail.com, **✉ nkorgin@ipu.ru, ***✉ ipu@isko.moe

Abstract. This survey is devoted to popular simulators supporting rough terrain for unmanned vehicles, namely, Gazebo, CARLA, AirSim, NVIDIA Isaac Sim, and Webots. Their main capabilities related to terrain modeling, motion physics, and support for sensors and weather conditions are described. Particular attention is paid to the creation of realistic rough terrain scenes, the complexity of importing real maps, and interaction with other software platforms, such as Robot Operating System (ROS) and artificial intelligence (AI) systems. The main drawbacks of each simulator are analyzed: the labor intensity of creating detailed terrain and vehicle models, the high complexity of integrating real maps, and the dependence on powerful hardware. The survey also notes the complexity of interaction with various software solutions and the required knowledge of 3D modeling. Gazebo and Webots are remarkable for their good integration with ROS but require more effort to work with rough terrain. CARLA and AirSim provide high-quality visualization but have higher requirements for creating landscapes. NVIDIA Isaac Sim stands out for AI simulation support but is resource-intensive. The authors' experience in mapping vehicle trajectories and orienting in some simulators is presented.

Keywords: unmanned vehicles, simulators, rough terrain, tracked platforms.

Acknowledgments. The research of N. A. Korgin was supported in part by the Russian Science Foundation, project no. 23-29-00681, <https://rscf.ru/project/23-29-00681>.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РЕГРЕССИЯ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК КОМПЛЕКСНОГО КАЧЕСТВА

Д. Б. Зотьев*, А. А. Махин**

Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИНХ», г. Новосибирск

*✉ zotev@inbox.ru, **✉ kislik0fist@mail.ru

Аннотация. Рассматривается проблема построения многокритериальных рейтингов, т. е. ранжирования объектов с учетом нескольких полезных качеств. Эта задача, которая относится к многокритериальной оптимизации, возникает также в ситуациях выбора управленческих решений при наличии альтернативных вариантов. Целью исследования была разработка метода решения этой проблемы, основанного на вычислении комплексных, т. е. обобщенных средних показателей качества, которые представляют собой многочлены из класса нормализованных средних функций. Последние относятся к строго монотонным сдвиг-инвариантным агрегирующим операторам. Такие многочлены кратко называются СМ. Например, взвешенные среднearифметические показатели комплексного качества являются СМ степени 1. Предположительно, СМ обладают всеми свойствами таких показателей, которые существенны для построения многокритериальных рейтингов. В рамках представленного метода, который назван интерактивной аппроксимацией экспертных оценок, для вычисления комплексных показателей качества предлагается использовать СМ произвольной степени. Данный подход аналогичен экспертно-статистическому методу определения весов. При этом он обеспечивает наилучшую среднеквадратическую аппроксимацию любого числа экспертных оценок, поэтому в процессе экспертизы их неопределенность уменьшается, а взаимная согласованность повышается. В статье описываются СМ степеней 1, 2, 3. Метод интерактивной аппроксимации экспертных оценок проверяется для СМ степени 2 в рамках задачи о вычислении комплексного показателя качества смарт-фонов, ранжируемых по семи частным критериям.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, принятие решений, нормализованная средняя функция, сдвиг-инвариантный многочлен, агрегирующий оператор, весовой коэффициент, комплексный показатель, экспертная оценка.

ВВЕДЕНИЕ

Задача выбора наиболее предпочтительного объекта с учетом различных его полезных свойств (*качеств*) относится к многокритериальной оптимизации. Предполагается, что качества объекта измеряются некоторыми показателями $q_i \in [0; 1]$, $i = 1, \dots, n$. Большому значению показателя q_i соответствует более предпочтительный по i -му качеству объект [1]. Этот объект может быть способом действий в ситуации принятия решения, и тогда в роли его частных качеств выступают оценки полезности с различных точек зрения [2]. Данная за-

дача не вызывает принципиальных затруднений, если есть возможность так упорядочить частные качества по важности, чтобы более важное качество имело подавляющий приоритет над менее важным. Тогда задача оптимизации по многим критериям сводится к последовательной оптимизации по одному критерию. Но если все качества по важности сопоставимы, то вполне объективного метода ее решения не существует. Можно лишь утверждать, что наиболее предпочтительный объект должен быть Парето-оптимальным [3]. Это хотя и сужает область поиска, но оставляет место неопределенности. Для устранения этой неопределенности приходится привлекать разного рода



субъективные (нечеткие) оценки, которые могут исходить от экспертов или ЛПР (лица, принимающего решение).

Наиболее часто применяется метод взвешенного усреднения показателей q_i , в соответствии с которым вычисляется так называемый комплексный показатель качества $q \in [0; 1]$ (также называемый агрегирующим, интегральным и т. п., а по существу являющийся обобщенным, средним показателем)

$$q = \sum_{i=1}^n w_i q_i. \quad (1)$$

Числа $w_i > 0$ называются коэффициентами весовости (весаами) и удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1. \text{ Функция (1) называется также функцией}$$

полезности или функцией ценности. Использование функций вида (1) обусловлено их простотой и традицией. Однако не существует убедительных научных доказательств предпочтительности таких функций перед прочими. Формула (1) является незаменимой лишь в некоторых специальных задачах многокритериальной оптимизации. Например, в монографии [4, гл. 4.2.2] представлена теорема 1, согласно которой функция полезности должна иметь вид (1), если частные и комплексные предпочтения, лежащие в основе соответствующих ранжировок, удовлетворяют аксиомам фон Неймана – Моргенштерна. Последние исходят из того, что в ранжировании участвуют неопределенные объекты, в отношении которых известны лишь распределения вероятностей их совпадения с конкретными объектами (так называемые смеси или лотереи). Теория фон Неймана – Моргенштерна применима к задачам принятия решений с неопределенностью исходов, но бесполезна при определенности. Согласно монографии [5, гл. 3.6.3] показатель q можно выразить формулой (1), если для каждой пары критериев, измеряемых показателями q_i и q_j , комплексный рейтинг по q_i и q_j не зависит от позиций данных объектов в рейтингах по всем остальным критериям. Очевидно, что в общем случае это условие не выполняется. Таким образом, при вычислении комплексного показателя качества $q(q_1, \dots, q_n)$ применять формулу (1) не обязательно.

Понятие весов w_i считается интуитивно ясным и выражающим относительную важность (значимость) частных качеств, измеряемых показателями q_i [1]. Но общепринятого определения, из которого можно извлечь правило их вычисления, не существует. В обзоре [6] описаны более сотни методов,

которые могут давать различные значения весов. В связи с этим некоторые специалисты считают метод свертывания частных показателей недостаточно объективным. В полемически острой форме это мнение выражено фразой А. И. Орлова: «Игры по разработке обобщенного показателя качества не имеют объективного характера» [7]. В рамках такой парадигмы при оптимизации следует использовать все значения частных показателей (критериев) q_i в совокупности. В. Д. Ногин разработал сужающий границу Парето метод корректировки показателей q_i , основанный на сравнениях их относительной важности [3]. В. В. Подиновский предложил метод N -моделей, в рамках которого частные качества (или критерии полезности) количественно сравниваются по важности, но формула (1) не применяется [8]. Фактически метод N -моделей имеет дело с ранжированием по частным качествам (критериям). В настоящей статье проводится мысль о том, что объективным основанием для вычисления комплексного показателя $q = f(q_1, \dots, q_n)$ служит задача построения усредненной оценки.

Согласно формуле (1) вес w_i выражает относительное приращение значения комплексного показателя q , отвечающее приращению значения q_i при неизменных прочих значениях частных показателей. Обобщая это определение, приходим к понятию *функционального веса* ρ_i , введенному в монографии [9]:

$$\rho_i = \frac{\partial q}{\partial q_i}. \quad (2)$$

Прозрачная идея рассматривать производные (2) как весовые коэффициенты имеет давнюю историю. Как отмечается в монографии [1, с. 46], замечательный кораблестроитель и ученый А. Н. Крылов еще в 1907 г. исследовал вопрос об оценке комплексного качества боевого корабля с учетом четырех частных качеств: броневой защиты, огневой мощи, скорости хода и дальности плавания. Отношение весомостей этих качеств он выразил пропорцией, стоящей слева от знака приближенного равенства в следующей формуле:

$$\frac{w_i}{w_k} = \frac{\Delta_i q / \delta}{\Delta_k q / \delta} \approx \frac{\partial q / \partial q_i}{\partial q / \partial q_k} = \frac{\rho_i}{\rho_k}, \quad (3)$$

где $\delta = \Delta q_i = \Delta q_k$ есть равные малые приращения частных показателей при неизменных прочих показателях. Здесь комплексный показатель q характеризует водоизмещение, а его приращения $\Delta_i q$ и $\Delta_k q$ вычисляются от «среднего корабля». Из выражения (3) видно, что А. Н. Крылов был близок к понятию функциональных весов (2).

Производные (2) используются в алгоритмах многокритериальной оптимизации [10], однако не отождествляются с весами. В статье [11] рассматривается функция предпочтения $P(F_1, \dots, F_n)$, зависящая от критериев F_i , которые можно считать ненормированными показателями качества. Предлагается рассматривать производные $\partial P / \partial F_i$ как меры значимости критериев F_i . Эта идея близка к понятию функционального веса, хотя авторы работы [11] не отказались от весов w_i , проводя различие между функцией предпочтений и функцией полезности вида (1) как ее линейной аппроксимацией. При этом на веса не накладывается условие $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, а их отношения определяются из отношений производных $\partial P / \partial F_i$.

В настоящей статье применительно к проблеме многокритериального ранжирования рассматриваются комплексные показатели качества $q(q_1, \dots, q_n)$, которые выражаются сдвиг-инвариантными монотонными многочленами (СМ). Подробно обсуждаются СМ степеней 1, 2 и 3. Предлагается алгоритм построения СМ степени 2 и связанный с ним метод интерактивной аппроксимации экспертных оценок комплексного качества, посредством которого коэффициенты многочлена выражаются через эти оценки. Алгоритм повышает их взаимную согласованность и уменьшает неопределенность. Последнее существенно упрощает задачу, стоящую перед экспертами, и тем самым повышает уровень объективности полученных от них данных.

1. СДВИГ-ИНВАРИАНТНЫЕ СРЕДНИЕ СТРОГО МОНОТОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Ограничение областей значений показателей q и q_i промежутком $[0; 1]$ обусловлено их применением в задаче построения рейтинга (т. е. ранжирования) объектов, в котором учтены их (*частные*) рейтинги по каждому i -му качеству. Рейтинги будем считать возрастающими, т. е. лучший объект имеет ранг N , а худший – ранг 1. Позиция r_i^j объекта j в рейтинге i является целой частью числа $q_i^j(N-1)+1$, где q_i^j – соответствующий показатель качества. Аналогично позиция r^j объекта j в общем (комплексном) рейтинге является целой частью числа $q^j(N-1)+1$, где $q = q^j$.

Число позиций N считаем общим для всех рейтингов и достаточно большим для ранжирова-

ния всех объектов, сравнимых между собой по каждому из качеств $i=1, \dots, n$. Рассматриваются также гипотетические объекты, которые могут занимать любые позиции в соответствующих рейтингах. Для корректной интерпретации показателей качества необходимы более *тонкие рейтинги*, допускающие промежуточные позиции в исходных рейтингах. Число таких позиций между r_i и r_i+1 , а также между r и $r+1$ равно $10^m - 1$, если произведения $q_i(N-1)$ и $q(N-1)$ вычисляются с точностью до m цифр после запятой. Добавляя к реально существующим объектам все *мыслимые* объекты того же рода, отвечающие любым наборам позиций в тонких рейтингах по i -м качествам, получим *гиперкубическую совокупность*. Термин «гиперкубическая» указывает на то, что наборы значений показателей q_i , отвечающих объектам данной совокупности, равномерно распределены в n -мерном гиперкубе. Будем ранжировать эти объекты по (тонкому) общему рейтингу, считая заданным число $m \geq 1$.

Следующее основополагающее утверждение принимается без доказательства как естественное свойство всякого общего рейтинга, имеющего единую шкалу рангов для соответствующих частных рейтингов. Априори нельзя исключить, что какие-то общие рейтинги этим свойством не обладают. Такие рейтинги в данной статье не рассматриваются. Для ранжирования по частным качествам также могут использоваться различные шкалы рангов.

Утверждение (принцип равного сдвига). Для любого объекта из гиперкубической совокупности, занимающего позиции r_1, \dots, r_n и r в частных и в общем (тонких) рейтингах, объект с позициями $r+10^{-m}, \dots, r_n+10^{-m}$ в частных рейтингах занимает позицию $r+10^{-m}$ в общем рейтинге.

Из этого принципа вытекает, что любым равным между собой сдвигам позиций объекта в частных рейтингах отвечает ровно такой же сдвиг его позиции в общем рейтинге. Какими свойствами должен обладать комплексный показатель $q = f(q_1, \dots, q_n)$, чтобы его можно было использовать для многокритериального ранжирования?

Объект с наихудшими качествами $q_1 = \dots = q_n = 0$ должен занять низшую позицию, а объект с наилучшими качествами $q_1 = \dots = q_n = 1$ – высшую позицию в общем рейтинге. Поэтому должно быть $f(0, \dots, 0)$ и $f(1, \dots, 1) = 1$. Следовательно, функция $f(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, отображает гиперкуб Q^n на отрезок $[0; 1]$, где

$$Q^n = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq q_i \leq 1 \forall i \}. \quad (4)$$



Еще одно естественное свойство называется монотонностью:

$$\forall \mathbf{q}, \mathbf{q}' \in Q^n \ (\forall i \in \{1, \dots, n\} \ q'_i \geq q_i) \Rightarrow f(q'_1, \dots, q'_n) \geq f(q_1, \dots, q_n), \tag{5}$$

т. е. если объект не хуже по всем частным качествам, то он не хуже в среднем.

Любая функция $q = f(\mathbf{q})$ с вышеуказанными свойствами называется агрегирующим оператором [12]. Если в дополнение к свойству (5) имеет место

$$((\forall i \in \{1, \dots, n\} \ q'_i \geq q_i) \& (\exists i \in \{1, \dots, n\} \ q'_i > q_i)) \Rightarrow f(q'_1, \dots, q'_n) > f(q_1, \dots, q_n), \tag{6}$$

то функция f называется строго монотонной. Практический смысл условия (6) очевиден.

Свойство $f(a, a, \dots, a) = a \ \forall a \in [0; 1]$ называется идемпотентностью [12]. Оно означает, что если объект занимает одну и ту же позицию $r = r_i = a(N - 1) + 1$ в каждом из частных (тонких) рейтингов, то в общем рейтинге он также занимает позицию r . Для линейной функции (1) свойство идемпотентности эквивалентно $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, а строгая монотонность означает, что все веса $w_i > 0$.

Для монотонных агрегирующих операторов идемпотентность равносильна свойству

$$\forall \mathbf{q} \in Q^n \ \min_{i=1, \dots, n} q_i \leq f(\mathbf{q}) \leq \max_{i=1, \dots, n} q_i, \tag{7}$$

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n).$$

Свойство (7) называют компенсационным [12]. Такие $f(\mathbf{q})$ будем называть *средними функциями*. Важное свойство, которым обладают агрегирующие операторы $q = f(\mathbf{q})$ вида (1), называется сдвиговой инвариантностью [12]. Оно состоит в том, что

$$\forall \mathbf{q} \in Q^n \ \forall \Delta \mathbf{q} \in R^n$$

$$(q + \Delta q \in Q^n \ \& \ \Delta q_1 = \dots = \Delta q_n) \Rightarrow \Delta q = \Delta f = \Delta q_i. \tag{8}$$

Условие (8) соответствует принципу равного сдвига и выглядит весьма естественным, хотя далеко не все средние функции являются сдвиг-инвариантными. Например, таковыми не являются следующие функции: взвешенная среднегеометри-

ческая $f(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^n q_i^{w_i}$, среднеквадратическая

$f(\mathbf{q}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i)^2 / n}$ и среднегармоническая

$f(\mathbf{q}) = n \left(\sum_{i=1}^n 1/q_i \right)^{-1}$. Заметим, что из условия

$f(\mathbf{0}) = 0$, которому агрегирующий оператор удовлетворяет по определению, и сдвиговой инвариантности вытекает его идемпотентность.

Итак, согласно принципу равного сдвига для построения многокритериальных рейтингов следует использовать строго монотонные сдвиг-инвариантные агрегирующие операторы, к которым относятся *нормализованные средние функции* (НСФ). Последние были введены в статье [13] под впечатлением от работы [9], базовые идеи которой изложены также в публикации [14]. В статье [15] определение НСФ было несколько усилено до строгой монотонности на всех гранях гиперкуба Q^n (4) размерностей до $n-1$.

Определение 1. *Нормализованной средней функцией (НСФ) называется любая непрерывно дифференцируемая функция $f(\mathbf{q})$, определенная на гиперкубе Q^n , такая, что $f(\mathbf{0}) = 0$, и выполнено условие*

$$\forall \mathbf{q} \in Q^n \ \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i}(\mathbf{q}) = 1 \ \& \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i}(\mathbf{q}) \geq 0 \ \& \ \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow q_i \in \{0, 1\} \right) \right] \right). \tag{9}$$

Дифференциальное уравнение в выражении (9) является обобщением на функциональные веса (2)

условия $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Функции вида (1) относятся к классу НСФ. Проверим, что каждая непрерывно дифференцируемая функция $f(\mathbf{q})$ на гиперкубе Q^n , которая является строго монотонным сдвиг-инвариантным агрегирующим оператором, относится к классу НСФ.

Возьмем произвольный набор отрезков $[q_i; q_i + \Delta q] \subseteq [0; 1]$, $i = 1, \dots, n$. Из формулы конечных приращений Лагранжа для некоторого $\theta \in (0; 1)$ получаем:

$$\Delta q = f(q_1 + \Delta q, \dots, q_n + \Delta q) - f(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i}(q_1 + \theta \Delta q, \dots, q_n + \theta \Delta q) \Delta q, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i}(q_1 + \theta \Delta q, \dots, q_n + \theta \Delta q) = 1.$$

Поскольку число Δq можно брать сколь угодно малым, множество точек $q + \theta \Delta q$, в которых выполняется условие (10), является всюду плотным в гиперкубе Q^n . Следовательно, в каждой точке Q^n сумма производных $\partial f / \partial q_i$ равна 1.

Таким образом, класс функций НСФ не является существенно новым, однако до работы [14] весьма естественное уравнение (9) в контексте обобщенных средних функций не рассматривалось. Оно дает не только новое описание для сдвиг-инвариантных агрегирующих операторов, но и эффективный метод вычисления многочленов, являющихся НСФ. В работе [15] они получили название сдвиг-инвариантных средних монотонных многочленов и сокращенное обозначение СМ. Поскольку любую непрерывную функцию на гиперкубе Q^n можно сколь угодно точно аппроксимировать многочленом, с практической точки зрения для вычисления многокритериальных средних рейтингов достаточно комплексных показателей качества в виде многочленов. В дальнейшем будем рассматривать комплексные показатели $q = f(q)$, являющиеся СМ.

Среди многих методов вычисления весов w_i выделяется экспертно-статистический [16], который заключается в следующем. Пусть дана выборка из K реально существующих объектов с частными показателями $q_i = q_i^j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, K$. Назовем такую выборку *эмпирической совокупностью*. При наличии экспертной оценки $q = q_0^j$ комплексного показателя для каждого j -го объекта коэффициенты w_i подбираются так, чтобы аппроксимировать оценки q_0^j посредством формулы (1). Для этого решается задача оптимизации

$$\sum_{j=1}^K \left(q_0^j - \sum_{i=1}^n w_i q_i^j \right)^2 \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i \geq 0 \quad \forall i.$$

Веса w_i можно рассматривать как коэффициенты многочлена $f(q_1, \dots, q_n)$ степени 1, зависящие от оценок q_0^j . Если повысить степень многочлена, то это повысит точность попадания в экспертные оценки и позволит увеличить их число. Если этот многочлен относится к классу СМ, то он обладает *всеми* свойствами функций (1), которые обеспечивают многокритериальное ранжирование по принципу равного сдвига.

Таким образом, однократная экспертиза объектов из эмпирической совокупности (выборки) поз-

воляет получить формулу для комплексного показателя качества, которая может применяться ко всем объектам из гиперкубической совокупности, не прибегая каждый раз к организационно сложным и затратным экспертизам.

Следует пояснить, что комплексный показатель качества q определяет рейтинг объектов виртуальной гиперкубической совокупности. Объекты из эмпирической совокупности наделяются теми и только теми показателями качества, как частными, так и комплексными, которые они имеют в гиперкубической совокупности. За исключением примера из § 4, в этой статье не рассматриваются показатели качества объектов из эмпирической совокупности, определяемые независимо от гиперкубической. Например, показатель q_i для наилучшего из объектов эмпирической совокупности по i -му качеству не обязательно равен единице, поскольку данный объект может не быть лучшим в гиперкубической совокупности.

В пользу СМ степени выше 1 можно выдвинуть формальное возражение, состоящее в том, что такая функция $q = f(q_1, \dots, q_n)$ переводит показатели q_1, \dots, q_n , измеряемые по шкале интервалов или отношений, в показатель q , не измеряемый ни по одной из этих шкал. Однако ограничение значений качества шкалы промежутком $[0; 1]$ исключает ее линейные преобразования.

В задачах многокритериального ранжирования показатели качества (функции ценности, полезности или предпочтения) располагаются на порядковой шкале. Допускаются *всевозможные* значения показателей q и q_i на промежутке $[0; 1]$ и допустимые преобразования их шкал ограничиваются строго возрастающими непрерывно дифференцируемыми функциями $q = \psi(p)$ и $q_i = \varphi_i(p_i)$, которые отображают отрезок $[0; 1]$ на себя. Если $q = f(q)$ является НСФ и для такого преобразования переменных q и q_i в переменные p и p_i справедливо

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i}(\varphi_1(p_1), \dots, \varphi_n(p_n)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i}(p_i) = \frac{\partial \psi}{\partial p}(p),$$

где $p = \psi^{-1}(f(\varphi_1(p_1), \dots, \varphi_n(p_n)))$, то функция $p = \psi^{-1}(f(\varphi_1(p_1), \dots, \varphi_n(p_n)))$ является НСФ. Такие *допустимые* преобразования показателей q и q_i в показатели p и p_i , $i = 1, \dots, n$, сохраняют согласованные с ними рейтинги (ранги).



В качестве примера допустимого преобразования шкал $[0; 1]$ рассмотрим НСФ (1). Заметим, что она является СМ степени 1. Легко проверить, что для любой строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(p)$ преобразования $q = \varphi(p)$ и $q_i = \varphi(p_i) \forall i \in \{1, \dots, n\}$ являются допустимыми в указанном выше смысле. Соответствующий комплексный показатель $p = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n w_i \varphi(p_i)\right)$ относится к классу НСФ, но не является СМ. Это не что иное, как взвешенное среднее по Колмогорову – Нагумо.

2. СМ СТЕПЕНЕЙ 2 И 3

Произвольный многочлен степени 2 можно записать в виде

$$f(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n a_i q_i^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} b_{ik} q_i q_k + \sum_{i=1}^n c_i q_i. \quad (11)$$

При каждом $i \in \{1, \dots, n\}$ функциональный вес (2) представляется в виде

$$\rho_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} = 2a_i q_i + \sum_{1 \leq k < i} b_{ki} q_k + \sum_{i < k \leq n} b_{ik} q_k + c_i. \quad (12)$$

Вершины гиперкуба Q^n (4) имеют вид (B_1, \dots, B_n) , $B_i \in \{0; 1\}$, всего таких вершин 2^n . Функциональные веса ρ_i являются линейными функциями от качеств q_1, \dots, q_n , поэтому для строгой монотонности функции (11) необходимо и достаточно, чтобы для любой вершины вида $B = (B_1, \dots, B_n)$ гиперкуба Q^n выполнялось условие

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \rho_i(B) \geq 0 \ \& \ \rho_i(B_1, \dots, B_{i-1}, 0, B_{i+1}, \dots, B_n) + \rho_i(B_1, \dots, B_{i-1}, 1, B_{i+1}, \dots, B_n) > 0. \quad (13)$$

Условие (13) равносильно тому, что для любой точки $q = (q_1, \dots, q_n) \in Q^n$ имеет место

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \left[\rho_i(q) \geq 0 \ \& \ (\rho_i(q) = 0 \Rightarrow q_i \in \{0, 1\}) \right].$$

Условие (13) выполняется, если при некотором $\varepsilon > 0$ для любой вершины B имеем $\rho_i(B) \geq \varepsilon$.

Если условие (13) выполняется, то из вершины $(0, \dots, 0)$ получим, что все $c_i \geq 0$. Дифференциаль-

ное уравнение в формуле (9) равносильно системе уравнений

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad 2a_i + \sum_{1 \leq k < i} b_{ki} + \sum_{i < k \leq n} b_{ik} = 0, \quad \sum_{k=1}^n c_k = 1. \quad (14)$$

Итак, коэффициенты СМ (11) можно определить из уравнений (14) с учетом условий (13). При этом нужно позаботиться о том, чтобы все коэффициенты b_{ik} и b_{ki} не обращались в ноль одновременно (иначе степень многочлена понижается).

Варьируя свободные параметры b_{ik} при $i < k$ и c_l при $l < n$ (общим числом $n(n+1)/2 - 1$), можно аппроксимировать экспертные оценки $q = q_0^j$ путем решения задачи оптимизации (15) относительно коэффициентов многочлена (11) с учетом условий (13) и (14):

$$\sum_{j=1}^E \left(\sum_{i=1}^n a_i (q_i^j)^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} b_{ik} q_i^j q_k^j + \sum_{i=1}^n c_i q_i^j - q_0^j \right)^2 \rightarrow \min, \quad (15)$$

где E – число объектов, подвергнутых экспертизе (т. е. размер эмпирической совокупности). Абсолютная погрешность полученной таким образом аппроксимации оценивается числом

$$\Delta = \max_{j=1, \dots, E} \left| \sum_{i=1}^n a_i (q_i^j)^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} b_{ik} q_i^j q_k^j + \sum_{i=1}^n c_i q_i^j - q_0^j \right|. \quad (16)$$

Если условие $\Delta \ll 1$ не выполняется, то функция (11) может оказаться практически бесполезной.

Наилучшую аппроксимацию оценок q_0^j с помощью СМ степени 2 можно найти следующим образом. Выражая a_1, a_2, \dots, a_n и c_n через остальные параметры в формуле (14) и подставляя их в целевую функцию задачи (15), получим квадратичную функцию $S(b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1n}, b_{23}, \dots, b_{2n}, \dots, b_{n-1,n}, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$. Положительно определенная функция S достигает своего наименьшего значения в единственной точке

$$\tilde{X} = (\tilde{b}_{12}, \tilde{b}_{13}, \dots, \tilde{b}_{1n}, \tilde{b}_{23}, \dots, \tilde{b}_{2n}, \dots, \tilde{b}_{n-1,n}, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2 - 1},$$

которая определяется системой уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial b_{ik}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c_l} = 0, \quad 1 \leq i < k \leq n, \quad 1 \leq l \leq n-1. \quad (17)$$

Из формулы (14) следует, что $\partial a_i / \partial b_{ik} = \partial a_k / \partial b_{ik} = -1/2$ и $\partial c_n / \partial c_l = -1$, все остальные частные производные равны нулю. Отсюда вытекает, что система (17) равносильна системе (18), если положить в ней $q^j = q_0^j$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^E \left(\sum_{i=1}^n a_i (q_i^j)^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} b_{ik} q_i^j q_k^j + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n c_i q_i^j - q^j \right) \cdot (q_s^j - q_t^j)^2 = 0, 1 \leq s < t \leq n, \\ \sum_{j=1}^E \left(\sum_{i=1}^n a_i (q_i^j)^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} b_{ik} q_i^j q_k^j + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n c_i q_i^j - q^j \right) \cdot (q_l^j - q_n^j) = 0, 1 \leq l \leq n-1. \end{array} \right. \quad (18)$$

Из этой системы, содержащей $n(n+1)/2 - 1$ уравнений, однозначно находится точка \tilde{X} . Последняя согласно условиям (14) определяет коэффициенты многочлена (11), описывающего регрессию экспертных оценок q_0^j с наименьшей ошибкой аппроксимации $\sigma = \sqrt{S(\tilde{X})/E}$.

Следует также проверить условие (13). Если оно выполняется, то получен СМ $f(q)$ степени 2, который является оптимальным по среднеквадратической ошибке σ . Но для решения вопроса о практической применимости комплексного показателя $q = f(q)$ следует еще оценить погрешность (16).

Если условие (13) не выполняется, то функция (11) не является СМ из-за нарушения строгой монотонности. В этом случае можно численно решать задачу (15) с учетом условий (13) и (14).

Произвольный многочлен степени 3 можно записать в виде

$$f(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i,j,k=1}^n \alpha_{ijk} q_i q_j q_k + \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} q_i q_j + \sum_{i=1}^n \gamma_i q_i, \quad (19)$$

где тензоры α_{ijk} и β_{ij} симметричны. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ найдем функциональный вес

$$\rho_k = 3 \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ijk} q_i q_j + 2 \sum_{i=1}^n \beta_{ik} q_i + \gamma_k.$$

Дифференциальное уравнение (9) для функции (19) равносильно системе уравнений

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ijk} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \beta_{ik} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \gamma_k = 1, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (20)$$

Для того, чтобы удовлетворяющий уравнениям (20) многочлен (19) относился к классу СМ, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $q = (q_1, \dots, q_n) \in Q^n$ было выполнено условие

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}$$

$$[\rho_k(q) \geq 0 \ \& \ (\rho_k(q) = 0 \Rightarrow q_k \in \{0, 1\})].$$

Также нужно позаботиться о том, чтобы все α_{ijk} не обращались в ноль одновременно.

3. ИНТЕРАКТИВНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Многочлены из класса СМ можно использовать как для наилучшей аппроксимации (полиномиальной регрессии) экспертных оценок комплексного качества q_0^j , так и для уменьшения их неопределенности, а также для того, чтобы повысить взаимную согласованность этих оценок. Соответствующий алгоритм применительно к СМ степени 1 был предложен в работе [17] и описан в публикации [15].

Повышение взаимной согласованности экспертных оценок означает улучшение их аппроксимируемости посредством некоторой НСФ (см. определение 1). Из теоремы Вейерштрасса – Стоуна следует, что любая НСФ может быть сколь угодно точно аппроксимирована многочленом достаточно большой степени. Очевидно, что со сколь угодно малой погрешностью этот многочлен можно считать относящимся к классу СМ. Таким образом, наиболее адекватное экспертным оценкам выражение для среднего показателя $q = q(q_1, \dots, q_n)$ можно искать в виде многочлена класса СМ.

Рассмотрим случай СМ степени 2. Пусть оценки q_0^j нумеруются числами $j=1, \dots, E$ в порядке последовательной экспертизы объектов из эмпирической совокупности, при этом диапазон возможных значений комплексного показателя качества для очередного объекта зависит от ранее назначенных оценок. Этот диапазон определяется условием

$$q_{\min}^j < q_0^j < q_{\max}^j. \quad (21)$$

Здесь q_{\min}^j и q_{\max}^j есть минимальное и максимальное значения функции

$$g_j(q^1, \dots, q^E) = q^j, \quad (q^1, \dots, q^E) \in \bar{\Omega}_j,$$

на замыкании $\bar{\Omega}_j$ множества Ω_j таких точек

$$(q^1, \dots, q^E) \in \mathbb{R}^E, \text{ что}$$

$$q^l = q_0^l \ \forall l \in \{1, \dots, j-1\} \ \& \ 0 \leq q^k \leq 1 \ \forall k \in \{j, \dots, E\},$$



и для любого набора двоичных чисел $B_i \in \{0; 1\}$, а также для любых чисел a_i, b_{kl}, c_i , удовлетворяющих системам (14) и (18), справедливы все неравенства (13). Знаки строгого неравенства в формуле (21) обусловлены тем, что значения q_{\min}^j и q_{\max}^j вычисляются на замыкании $\bar{\Omega}_j$ множества Ω_j , а экспертные оценки q_0^j должны отвечать точкам из множества Ω_j .

Очевидно, что уравнения (14) и неравенства (13) определяют выпуклый многогранник \wp в пространстве $\mathbb{R}^{n(n+1)/2-1}$ параметров $b_{ik}, c_1, \dots, c_{n-1}$, $1 \leq i < k \leq n$. Множество Ω_j является пересечением $(E - j + 1)$ -мерной плоскости

$$\left\{ (q^1, \dots, q^E) \in \mathbb{R}^E : q^l = q_0^l, l = 1, \dots, j-1 \right\}$$

с многогранником Ω_1 , который является прообразом многогранника \wp при линейном отображении $\omega : Q^E \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2-1}$, где Q^E – гиперкуб в пространстве $\mathbb{R}^E : 0 \leq q^j \leq 1$. Отображение ω определяется системой (18) линейных относительно q^j уравнений, где коэффициенты a_i и c_n выражены через $b_{ik}, c_1, \dots, c_{n-1}$ согласно формуле (14). Следовательно, $\bar{\Omega}_j$ – выпуклый компактный многогранник в \mathbb{R}^E . Нужно проверить, что $\bar{\Omega}_j \neq \emptyset$ при каждом $j = 1, \dots, E$.

При нулевых значениях всех b_{ik} и любых положительных значениях c_i в силу системы (14) условия (13) удовлетворяются, поэтому соответствующая точка $\tilde{X} \in \wp$. Легко понять, что точка \tilde{X} является внутренней для многогранника \wp . Следовательно, $\dim \wp = n(n+1)/2 - 1$. Для любой $\tilde{X} \in \wp$ при условиях (14) система (18) имеет решение

$$q^j = \sum_{i=1}^n a_i (q_i^j)^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} b_{ik} q_i^j q_k^j + \sum_{i=1}^n c_i q_i^j, j = 1, \dots, E.$$

Поэтому $\Omega_1 = \omega^{-1}(\wp) \neq \emptyset$. Вышеуказанная формула вместе с условиями (14) задает линейное отображение $\mathbb{R}^{n(n+1)/2-1} \rightarrow \mathbb{R}^E$. Если его матрица \mathcal{J} имеет ранг E , то $\dim \Omega_1 = E$. В этом случае выпуклый многогранник $\bar{\Omega}_1$ имеет непустую внутренность. Из процесса построения множеств $\bar{\Omega}_j$ вы-

текает, что каждое из них также имеет непустую внутренность. При этом линейная функция $g_j(q^1, \dots, q^E)$ достигает на $\bar{\Omega}_j$ максимума и минимума, не совпадающих между собой. Если же условие о ранге матрицы \mathcal{J} не выполняется (что маловероятно при $E \leq n(n+1)/2 - 1$), то описываемый алгоритм не всегда гарантирует успех. Впрочем, пример 1 в § 4 показывает, что и в случае, когда $E > n(n+1)/2 - 1$, алгоритм может быть эффективным.

Каждая оценка q_0^j выбирается экспертом (или группой экспертов) субъективно, но из объективно заданного числового промежутка (21). При этом должно быть выполнено условие

$$\min \{q_1^j, \dots, q_n^j\} \leq q_0^j \leq \max \{q_1^j, \dots, q_n^j\}. \quad (22)$$

Обсудим геометрический смысл ограничения значений показателя q_0^j промежутком между q_{\min}^j и q_{\max}^j .

Выпуклый непустой многогранник $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^E$ состоит из таких точек вида (q^1, \dots, q^E) , что соответствующее решение a_i, b_{kl}, c_i системы (18) с учетом условий (14) определяет многочлен (11), который относится к классу СМ. Данный СМ минимизирует целевую функцию в выражении (15) и тем самым обеспечивает наилучшую среднеквадратическую аппроксимацию экспертных оценок $q_0^j = q^j$ при $j = 1, \dots, E$. Если $q^1 \in (q_{\min}^1; q_{\max}^1)$, то найдется точка вида $(q^1, q^2, \dots, q^E) \in \Omega_1$. Пусть $q_0^1 \in (q_{\min}^1; q_{\max}^1)$. Тогда выпуклый непустой многогранник $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^E$ является пересечением многогранника Ω_1 с $(E-1)$ -мерной плоскостью $q^1 = q_0^1$ и состоит из точек вида (q_0^1, q^2, \dots, q^E) , по которым в силу выражения (18) можно построить СМ, обеспечивающий наилучшую аппроксимацию оценок $q_0^1, q_0^j = q^j$ при $j = 2, \dots, E$. Если $q^2 \in (q_{\min}^2; q_{\max}^2)$, то найдется точка $(q_0^1, q^2, \dots, q^E) \in \Omega_2$. Пусть $q_0^2 \in (q_{\min}^2; q_{\max}^2)$. Тогда найдется точка $(q_0^1, q_0^2, q^3, \dots, q^E) \in \Omega_1$, а выпуклый непустой многогранник $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^E$ является пересечением многогранника Ω_2 с $(E-2)$ -мерной плоскостью $q^1 = q_0^1, q^2 = q_0^2$ и состоит из точек вида

$(q_0^1, q_0^2, q_0^3, \dots, q_0^E)$, по которым можно построить СМ, обеспечивающий наилучшую аппроксимацию оценок $q_0^1, q_0^2, q_0^j = q^j$ при $j=3, \dots, E$. Продолжая по аналогии, в итоге получим такой набор экспертных оценок $q^j = q_0^j$ при $j=1, \dots, E$, что соответствующее решение a_i, b_{kl}, c_i системы (18) с учетом условий (14) определяет СМ (11), который обеспечивает наилучшую среднеквадратическую аппроксимацию оценок q_0^j .

Замечание. Условие (22) выполняется автоматически, если число свободных коэффициентов СМ, удовлетворяющих системе (18), не меньше числа экспертных оценок E . Тогда вместо регрессии этих оценок возможна их интерполяция, поэтому минимальное значение целевой функции в задаче (15) будет равно нулю, т. е. существует такой СМ (11), что $\forall j \in \{1, \dots, E\} \quad q_0^j = f(q_1^j, \dots, q_n^j)$.

Отсюда сразу следует справедливость условия (22). В случае СМ степеней 2 и 3 число свободных коэффициентов равно $n(n+1)/2-1$ и $n(n+1)(n+2)/6-1$ соответственно. ♦

Резюмируем предшествующие рассуждения.

Алгоритм вычисления коэффициентов для СМ степени 2, организующий также процесс получения необходимых экспертных оценок; назовем его *интерактивной аппроксимацией*, представляет собой следующую последовательность действий.

Шаг 1. Объекты эмпирической совокупности (выборки) произвольным образом нумеруются от 1 до E . Экспертиза осуществляется последовательно, в порядке возрастания номеров. Если для какой-либо пары объектов один хуже другого поддается экспертизе, то пусть его номер будет больше. Впрочем, это условие не является существенным. Индексу j присваивается значение 1.

Шаг 2. С помощью описанного выше метода вычисляются значения q_{\min}^j и q_{\max}^j . Эксперту (или экспертам) предлагается оценить значение комплексного показателя качества q_0^j для объекта j , выбирая его из промежутка (21) при условии (22). При этом эксперты должны оценивать среднее качество объекта по отношению ко всем объектам гиперкубической совокупности, а не относительно объектов из выборки (это, в частности, означает, что лучший и худший объекты выборки отнюдь не обязательно имеют показатели качества $q=1$ и $q=0$).

Шаг 3. Если $j < E$, то значение индекса j увеличивается на единицу и осуществляется переход к шагу 2, иначе – переход к шагу 4.

Шаг 4. Из систем уравнений (18) и (14) определяются значения коэффициентов a_i, b_{kl}, c_i искомого СМ (11). Заметим, что условия (13) для него выполняются автоматически.

Полученный таким образом СМ обеспечивает глобальный минимум среднеквадратического отклонения σ экспертных оценок q_0^j от расчетных значений показателей $q = q^j$ для всех объектов из эмпирической совокупности.

В связи с этим возникает вопрос: насколько объективными могут быть экспертные оценки комплексного качества объектов, составляющих эмпирическую совокупность? Ранжирования этих объектов недостаточно, так как нужно оценивать их относительно *всей* гиперкубической совокупности. Последняя в основном является гипотетической, хотя и содержит все реальные объекты. Наилучший объект B из этой совокупности имеет показатели $q_1 = \dots = q_n = q = 1$, а наихудший объект W – $q_1 = \dots = q_n = q = 0$. Задача экспертов, таким образом, состоит в том, чтобы оценить комплексное качество q , сравнивая объект с B и W , а также с теми реальными объектами, которые уже оценены. Его также можно сравнивать с гипотетическими объектами, имеющими показатели $q_1 = \dots = q_n = q = 0,5$ и т. д. Таким образом, для экспертной оценки показателя q нет необходимости держать в уме всю гиперкубическую совокупность (которая может быть необъятной).

Способность экспертов объективно назначать оценки качества отнюдь не очевидна, однако она вполне допускается. Интересный метод Терстоуна [18] оценки показателей качества, основанный на парных сравнениях альтернатив, базируется на неявном предположении о том, что эксперты способны выдавать объективные, нормально распределенные оценки показателей. В работе [3, с. 54] описано исследование, в рамках которого опытных работников крупной больницы попросили дать субъективную оценку каждой из 12-ти *гипотетических* больничных палат по шкале от 0 до 100 баллов. Полученные результаты показали, что специалисты (эксперты) «могут разработать весьма надежные, субъективные модели оценки» [3].

В рамках метода интерактивной аппроксимации каждая экспертная оценка $q = q_0^j$ выбирается



из некоторого промежутка $[a; b] \subset [0; 1]$. Последний может оказаться малым, что существенно упростит экспертизу.

4. ПРИМЕРЫ ИНТЕРАКТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Рассмотрим примеры интерактивной аппроксимации экспертных оценок. Первый из них является абстрактным и служит простой иллюстрацией метода. Второй пример имеет реальную интерпретацию.

Пример 1. Пусть эмпирическая совокупность состоит из трех объектов, пронумерованных индексами $j = 1, 2, 3$ и характеризуемых частными показателями качества $(q_1^1; q_1^2; q_1^3) = (0,578; 0,361; 0,437)$ и $(q_2^1; q_2^2; q_2^3) = (0,701; 0,762; 0,675)$. Требуется так организовать получение экспертных оценок комплексного качества q_0^j и найти такой СМ $f(q_1, q_2)$ степени 2, чтобы среднеквадратическое отклонение σ_0 оценок q_0^j от расчетных значений комплексного качества $q^j = f(q_1^j, q_2^j)$ было минимальным среди всех таких отклонений σ , вычисленных для всевозможных СМ степени 2. Заметим, что такой многочлен будет определен однозначно.

Произвольный СМ степени 2 с двумя переменными записывается в виде

$$f(q_1, q_2) = \alpha(q_1 - q_2)^2 + (1 - \beta)q_1 + \beta q_2,$$

где коэффициенты α и β удовлетворяют системе неравенств

$$\alpha \neq 0, 2|\alpha| \leq \beta \leq 1 - 2|\alpha|, 0 < \beta < 1. \quad (23)$$

Многогранник \wp в пространстве \mathbb{R}^2 параметров α, β определяется системой (23). Система (18) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 \left(\alpha(q_1^j - q_2^j)^2 + (1 - \beta)q_1^j + \beta q_2^j - q^j \right) \cdot (q_1^j - q_2^j)^2 = 0, \\ \sum_{j=1}^3 \left(\alpha(q_1^j - q_2^j)^2 + (1 - \beta)q_1^j + \beta q_2^j - q^j \right) \cdot (q_1^j - q_2^j) = 0. \end{cases}$$

После подстановки в нее числовых значений показателей q_1^j и q_2^j получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0,029\alpha + 0,08\beta - 0,015q^1 - 0,161q^2 - \\ \quad - 0,057q^3 + 0,092 = 0, \\ -0,08\alpha - 0,232\beta + 0,123q^1 + 0,401q^2 + \\ \quad + 0,238q^3 - 0,32 = 0, \end{cases}$$

из которой выразим коэффициенты искомого многочлена:

$$\begin{cases} \alpha = 9,617 - 14,303q^1 - 12,234q^2 - 13,199q^3, \\ \beta = -4,675 + 5,435q^1 - 2,471q^2 + 5,551q^3. \end{cases} \quad (24)$$

Трехмерный многогранник Ω_1 в пространстве $\mathbb{R}^E = \mathbb{R}^3(q^1, q^2, q^3)$ определяется системой неравенств (23), где переменные α и β выражены через q^1, q^2, q^3 согласно формуле (24). При этом $0 \leq q^j \leq 1$ для каждого $j = 1, 2, 3$.

Вычисляя максимальное q_{\max}^1 и минимальное q_{\min}^1 значения функции $g_1(q^1, q^2, q^3) = q^1$ на (компактном и выпуклом) многограннике $\bar{\Omega}_1$, получим тривиальные значения $q_{\max}^1 = 1$ и $q_{\min}^1 = 0$. С учетом условия (22) имеем диапазон для экспертной оценки $0,578 < q_0^1 < 0,701$. Предположим, что эксперты выбрали в нем оценку $q_0^1 = 0,652$ (в реальности эта оценка, вероятно, выглядела бы так: $q_0^1 = 0,65$).

Двумерный многогранник Ω_2 в пространстве $\mathbb{R}^E = \mathbb{R}^3(q^1, q^2, q^3)$ определяется системой (23) и равенством $q^1 = q_0^1$, где переменные α и β выражены через q^1, q^2, q^3 (24). При этом $0 \leq q^j \leq 1$ для каждого $j = 2, 3$. Вычисляя максимальное q_{\max}^2 и минимальное q_{\min}^2 значения функции $g_2(q^1, q^2, q^3) = q^2$ на (компактном и выпуклом) многоугольнике $\bar{\Omega}_2$, получим $q_{\max}^2 = 0,751$ и $q_{\min}^2 = 0,377$. Условие (22) дает несколько более широкий интервал $(0,361; 0,762)$, поэтому имеем диапазон $0,377 < q_0^2 < 0,751$. Предположим, что эксперты выбрали в нем оценку $q_0^2 = 0,6$.

Одномерный многогранник Ω_3 в пространстве $\mathbb{R}^E = \mathbb{R}^3(q^1, q^2, q^3)$ определяется системой (23) и равенствами $q^1 = q_0^1, q^2 = q_0^2$, где переменные α и β выражены через q^1, q^2, q^3 (24). При этом $0 \leq q^3 \leq 1$. Вычисляя максимальное q_{\max}^3 и минимальное q_{\min}^3 значения функции $g_3(q^1, q^2, q^3) = q^3$ на отрезке $\bar{\Omega}_3$, получим $q_{\max}^3 = 0,599$ и $q_{\min}^3 = 0,561$. Условие (22) дает более широкий интервал $(0,437; 0,675)$, поэтому имеем диапазон $0,561 < q_0^3 < 0,599$. Предположим, что эксперты выбрали в нем оценку $q_0^3 = 0,584$.

Подставляя оценки q_0^j в систему (24), получим коэффициенты искомого СМ: $\alpha = -0,051$ и $\beta = 0,622$.

Таким образом, комплексный показатель качества q , обеспечивающий наилучшую (в среднеквадратическом) аппроксимацию этих экспертных оценок, вычисляется по формуле

$$q = f(q_1, q_2) = -0,051(q_1 - q_2)^2 + 0,378q_1 - 0,622q_2.$$

Заметим, что этот многочлен степени 2 является единственным, поэтому показатель q определен корректно. Погрешность (16), с которой многочлен $f(q_1, q_2)$ аппроксимирует экспертные оценки q_0^j , равна $\Delta = 0,002$.

Пример 2. В работе [19] для некоторой совокупности из десяти смартфонов (табл. 1) был построен комплексный рейтинг по семи потребительским качествам.

Параметры из табл. 1 пронумерованы в частные показатели качества $q_i = q_i^j$, характеризующие цену, память, ОЗУ, батарею, размер дисплея, фронтальную

камеру, частоту процессора соответственно для смартфона j , $i=1, \dots, 7$, $j=1, \dots, 10$. Данные показатели представлены в табл. 2.

Вычислим СМ $f(\mathbf{q})$ степени 2, аппроксимирующий экспертные оценки q_0^j комплексных показателей качества $q = q^j = f(\mathbf{q}^j)$, $j=1, \dots, 10$, и $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7)$. Множество таких точек \mathbf{q} , что все $q_i \in [0; 1]$, является гиперкубом Q^7 . Его вершинами служат точки вида $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7)$, где $B_i \in \{0; 1\}$, – всего 128 вершин. Искомый многочлен (11) при $n=7$ определяется системой уравнений (14). Для его строгой монотонности (5), (6) необходимо и достаточно, чтобы в каждой из вершин гиперкуба Q^7 выполнялись все условия (13).

Таблица 1

Параметры смартфонов [19]

№	Модель устройства	Потребительские качества						
		Цена, долл. США	Память, Гб	ОЗУ, Гб	Емкость батареи, мА·ч	Диагональ дисплея, см	Камера, Мпк	Частота процессора, ГГц
1	Redmi 7a	85	16	2	4 000	13,84	12	2
2	Samsung Galaxy A10	105	32	2	3 400	15,75	13	1,6
3	Samsung J6 Plus	171	64	4	3 300	15,24	13	1,4
4	Oppo k1	197	64	4	3 600	16,28	16	1,95
5	Realme 3	124	64	3	4 230	15,8	13	2,1
6	Redmi Note 7S	131	32	3	4 000	16	48	2,2
7	Honor 10 Lite	160	64	6	3 400	15,77	13	2,2
8	Realme 5i	144	128	4	5 000	16,56	12	2,2
9	Redmi 8a	98	32	3	5 000	15,8	12	1,95
10	Redmi k20 pro	355	128	6	4 000	16,23	48	2,84

Таблица 2

Частные показатели качества смартфонов

№	Модель устройства	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
1	Redmi 7a	0,000	0,000	0,000	0,206	0,000	0,000	0,208
2	Samsung Galaxy A10	0,037	0,071	0,000	0,029	0,351	0,014	0,069
3	Samsung J6 Plus	0,159	0,214	0,250	0,000	0,257	0,014	0,000
4	Oppo k1	0,207	0,214	0,250	0,088	0,449	0,056	0,191
5	Realme 3	0,072	0,214	0,125	0,274	0,360	0,014	0,243
6	Redmi Note 7S	0,085	0,071	0,125	0,206	0,397	0,500	0,278
7	Honor 10 Lite	0,139	0,214	0,500	0,029	0,355	0,014	0,278
8	Realme 5i	0,109	0,500	0,250	0,500	0,500	0,000	0,278
9	Redmi 8a	0,024	0,071	0,125	0,500	0,360	0,000	0,191
10	Redmi k20 pro	0,500	0,500	0,500	0,206	0,439	0,500	0,500



Таблица 4

Общий рейтинг смартфонов, построенный с помощью СМ (24)

Ранг	Модель устройства	q^j , расчетная оценка
1	Samsung J6 Plus	0,091
2	Redmi 7a	0,104
5	Samsung Galaxy A10	0,113
6	Honor 10 Lite	0,212
3	Oppo k1	0,218
8	Realme 3	0,244
7	Redmi 8a	0,257
9	Redmi Note 7S	0,268
4	Realme 5i	0,360
10	Redmi k20 pro	0,398

Путем реализации алгоритма из § 3 с помощью надстройки «Поиск решения» в Excel были последовательно найдены диапазоны (21) для q_0^j . В силу Замечания из § 3 условие (22) здесь выполняется автоматически, так как число свободных параметров СМ (11) при $n=7$ равно 27, что больше числа экспертных оценок $E=10$. В роли оценок q_0^j выбирались центры промежутков (21). В реальности они назначались бы экспертами в промежутках (21).

Исходя из представленных в табл. 3 оценок q_0^j и системы уравнений (18), с учетом условий (14) были найдены коэффициенты a_i, b_{ik}, c_l многочлена (11). В результате получен следующий СМ:

$$\begin{aligned}
 f(q) = & -0,017q_1^2 - 0,032q_2^2 - 0,032q_3^2 - 0,13q_4^2 - \\
 & - 0,049q_5^2 - 0,033q_6^2 - 0,093q_7^2 + 0,034q_1q_4 + \\
 & + 0,063q_2q_4 + 0,023q_3q_4 + 0,013q_3q_5 + \\
 & + 0,028q_3q_7 + 0,067q_4q_6 + 0,073q_4q_7 + \\
 & + 0,086q_5q_7 + 0,034q_1 + 0,063q_2 + 0,064q_3 + \\
 & + 0,259q_4 + 0,238q_5 + 0,067q_6 + 0,275q_7.
 \end{aligned} \quad (25)$$

Таблица 3

Диапазоны экспертных оценок комплексного качества

№	Модель устройства	q_{\min}^j	q_{\max}^j	q_0^j
1	Redmi 7a	0,000	0,208	0,104
2	Samsung Galaxy A10	0,015	0,210	0,113
3	Samsung J6 Plus	0,055	0,117	0,091
4	Oppo k1	0,186	0,249	0,218
5	Realme 3	0,223	0,264	0,244
6	Redmi Note 7S	0,236	0,299	0,268
7	Honor 10 Lite	0,198	0,227	0,212
8	Realme 5i	0,350	0,371	0,360
9	Redmi 8a	0,227	0,286	0,257
10	Redmi k20 pro	0,398	0,424	0,411

Погрешность (16), с которой многочлен (25) аппроксимирует экспертные оценки q_0^j , равна $\Delta=0,013$. Средний рейтинг смартфонов, построенный с помощью показателя качества $q=f(q)$, приведен в табл. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлена и теоретически обоснована идея вычисления комплексных показателей качества (многомерных функций ценности, предпочтения или полезности), которые выражаются через частные показатели сдвиг-инвариантными монотонными многочленами (СМ). Описаны методы получения СМ степеней 2 и 3. Главной це-

лью настоящего исследования была разработка алгоритма вычисления СМ степени 2, называемого интерактивной аппроксимацией экспертных оценок, который решает задачу минимизации среднеквадратического отклонения между экспертными оценками и расчетными значениями комплексных показателей качества для объектов из выборки (эмпирической совокупности). Последняя должна быть репрезентативной для гиперкубической совокупности или какой-то ее части. Понятие гиперкубической совокупности введено для того, чтобы придать вполне определенный смысл понятию комплексного показателя качества, связав его с задачей многокритериального ранжирования.

Данный метод сужает промежутки возможных значений для оценок, которые в остальном назначаются по усмотрению экспертов. Это уменьшает неопределенность, что упрощает работу экспертов и повышает объективность их суждений. Одновременно повышается взаимная согласованность экспертных оценок. Коэффициенты искомого СМ выражаются через получаемые таким образом экспертные оценки в ходе единого процесса, который называется интерактивной аппроксимацией и осуществляется в соответствии с алгоритмом, описанным в заключительной части § 3.

Принципиальная осуществимость метода интерактивной аппроксимации экспертных оценок подтверждается примерами, приведенными в § 4. Этот метод нуждается в обобщении на случай СМ степени 3 и выше, а также в проверке его практической полезности, включая проведение реальных экспертиз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азгальдов Г.Г., Райхман Э.П. О квалиметрии / под ред. А.В. Гличева. – М.: Издательство стандартов, 1973. – 172 с.

- [Azgaldov, G.G., Raikhman, E.P. About Qualimetry / Ed. by A.V. Glichev. – Moscow: Standards Publishing House, 1973. – 172 p. (In Russian)]
2. Петровский А.Б. Теория принятия решений: учебник для студентов высших учебных заведений. – М.: Академия, 2009. – 400 с. [Petrovsky, A.B. Theory of Decision Making: A Textbook for Students of Higher Educational Institutions. – M.: Academia, 2009. – 400 p. (In Russian)]
 3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 256 с. [Podinovskii, V.V., Noghin, V.D. Pareto-Optimal Solutions to Multicriteria Problems. – M.: PhysmathLit, 2007. – 256 p. (In Russian)]
 4. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с. [Mirkin, B.G. The Problem of Group Choice. – Moscow: Science, 1974. – 256 s. (In Russian)]
 5. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с. [Keeney, R.L., Raiffa, H., Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. – New York: Wiley, 1976.]
 6. Анохин А.М., Глотов В.А., Павельев В.В., Черкашин А.М. Методы определения коэффициентов важности критериев // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 8. – С. 3–35. [Anokhin, A.M., Glotov, V.A., Pavel'ev, V.V., Cherkashin, A.M. Methods for Determination of Criteria Importance Coefficients // Avtomatika i telemekhanika. – 1997. – No. 8. – P. 3–35. (In Russian)]
 7. Орлов А.И. Экспертные оценки // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 1996. – № 1 (62). – С. 54–60. [Orlov, A.I. Expert assessments // Zavodskaya Laboratoria. Diagnostika materialov. – 1996. – No. 1 (62). – P. 54–60. (In Russian)]
 8. Подиновский В.В. Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. – М.: Наука, 2019. – 104 с. [Podinovskii, V.V. Ideas and methods of the theory of criteria importance in multicriteria decision-making problems. – M.: Nauka, 2019. – 104 p. (In Russian)]
 9. Брызгалин Г.И. Введение в теорию качества. – В.: Издательство Волгоградского политехнического института, 1988. – 91 с. [Bryzgalin, G.I. Introduction to the Theory of Quality. – Volgograd: Publishing house of the Volgograd Polytechnic Institute, 1988. – 91 s. (In Russian)]
 10. Джофрион А., Дайер Д., Файнберг А. Решение задачи оптимизации при многих критериях на основе человеко-машинных процедур. Применение к задаче организации учебного процесса факультета университета // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир. – 1976. – С. 126–145. [Geoffrion, A.M., Dyer, J. S., and Feinberg, A., Interactive Approach for Multicriterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department // Manage. Sci., Appl. – 1972. – Vol. 19. – P. 357–368.]
 11. Marler, R., Arora, J. The Weighted Sum Method for Multi-objective Optimization: New Insights // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2010. – No. 41. – P. 853–862.
 12. Calvo, T., Kolesárová, A., Komorniková, M., Mesiari, R. Aggregation Operators: Properties, Classes and Construction Methods, Aggregation operators // New Trends and Applications. – Heidelberg: Physica-Verlag, 2002. – P. 3–106.
 13. Зотьев Д.Б. Нормализованные средние функции и проблема свертывания показателей качества // Справочник. Инженерный журнал. – 2009. – № 5 (146). – С. 43–48. [Zotev, D.B. Normalized Averages Functions and Problem of Aggregation of Quality Indexes // Handbook. Engineering magazine. – 2009. – No. 5 (146). – P. 43–48. (In Russian)]
 14. Брызгалин Г.И. Теория качеств и системные приложения // Справочник. Инженерный журнал. – 2009. – № 5 (146). – С. 57–63. [Bryzgalin, G.I. Theory of Qualities and System Applications // Handbook. Engineering magazine. – 2009. – No. 5 (146). – P. 57–63. (In Russian)]
 15. Зотьев Д.Б. О нормализованных средних критериях, интерполирующих экспертные оценки // Справочник. Инженерный журнал. – 2012. – № 7 (184). – С. 50–56. [Zotev, D.B. On Normalized Average Criteria Interpolating Expert Estimates // Handbook. Engineering Magazine. – 2012. – No. 7 (184). – P. 50–56. (In Russian)]
 16. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 606 с. [Ayvazyan, S.A., Bukhstaber, V.M., Enyukov, I.S., Meshalkin, L.D. Applied Statistics. Classification and Dimensionality Reduction. – Moscow: Finance and Statistics, 1989. – 606 p. (In Russian)]
 17. Зотьев Д.Б. К проблеме определения весовых коэффициентов на основании экспертных оценок // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2011. – № 1 (77). – С. 75–78. [Zotev, D.B. On the Problem of Determining Weight Coefficients Based on Expert Assessments // Factory Laboratory. Diagnostics of Materials. – 2011. – No. 1 (77). – P. 75–78. (In Russian)]
 18. Литвак Б.Г. Экспертная информация: методы получения и анализа. – М.: Радио и связь. – 1982. – 184 с. [Litvak, B.G. Expert Information: Methods of Obtaining and Analysis. – Moscow: Radio and Communications. – 1982. – 184 p. (In Russian)]
 19. Goswami, S.S., Behera, D. K. Evaluation of the Best Smartphone Model in the Market by Integrating Fuzzy-AHP and PROMETHEE Decision-Making Approach // Decision. – 2021. – No. 1–(48). – P. 71–96.
- Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.
- Поступила в редакцию 17.06.2024,
после доработки 24.12.2024.
Принята к публикации 20.01.2025.
- Зотьев Дмитрий Борисович** – д-р физ.-мат. наук,
✉ zotev@inbox.ru
- Махин Александр Александрович** – аспирант,
✉ kislik0fist@mail.ru
- Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИНХ», г. Новосибирск
- © 2025 г. Зотьев Д. Б., Махин А. А.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



POLYNOMIAL REGRESSION OF EXPERT ESTIMATES OF COMPLEX QUALITY

D. B. Zot'ev* and A. A. Makhin**

*Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russia

*✉ zotev@inbox.ru, **✉ kislik0fist@mail.ru

Abstract. The multicriteria ranking problem of objects with several useful qualities is considered. Relating to the field of multicriteria optimization, this problem also arises when management decisions are chosen among several alternatives. The goal of this study is to develop a solution method based on calculating complex (generalized mean) quality indicators that represent polynomials from the class of normalized mean functions. The latter belong to strictly monotonic, shift-invariant aggregation operators. Such polynomials are called SPs for short. For example, the weighted arithmetic mean indicators of complex quality are SPs of degree 1. Apparently, SPs have all the properties of such linear functions that are essential for multicriteria ranking. Within the method presented, called the interactive approximation of expert estimates, we SPs of arbitrary degree for calculating complex quality indicators. This approach is similar to the expert-statistical method for determining weights. It provides the best root-mean-square approximation of any number of expert estimates, reducing their uncertainty and increasing their mutual consistency during the expertise procedure. The SPs of degrees 1, 2, and 3 are described below. The interactive approximation method of expert estimates is tested for SPs of degree 2 in the problem of calculating a complex quality indicator for smartphones ranked by seven partial qualities.

Keywords: multicriteria optimization, decision-making, normalized mean function, shift-invariant polynomial, aggregation operator, weight coefficient, complex indicator, expert estimate.

ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ: АНИЗОТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД[#]

А. В. Юрченков

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

✉ alexander.yurchenkov@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена линейная дискретная стационарная система с мультипликативными шумами и управлением, находящаяся под влиянием внешнего возмущения из специального класса. Описание динамики выбранного объекта управления производится в пространстве состояний. Класс внешних возмущений содержит множество стационарных гауссовских последовательностей с ограниченным уровнем средней анизотропии. В качестве критерия качества управления выбрана анизотропийная норма замкнутой управления системы. Требуется предложить схему управления на основе динамического звена, при замыкании которым анизотропийная норма была бы ограничена минимально возможным числом. На первом этапе решения задачи выписывается динамика управления и производится расширение рассматриваемого объекта. На основе критерия ограниченности анизотропийной нормы в терминах матричных неравенств выписываются достаточные условия существования решения выпуклой задачи оптимизации, в которой минимизируется верхняя граница анизотропийной нормы. В полученных неравенствах производится специальная замена переменных, чтобы избавиться от нелинейной зависимости по неизвестным матрицам регулятора. После линеаризующей обратимой замены переменных производится численное решение задачи оптимизации стандартными методами. На последнем этапе производится вычисление матриц регулятора в пространстве состояний, гарантирующего ограниченность анизотропийной нормы замкнутой этим регулятором системы.

Ключевые слова: стационарные дискретные системы, анизотропийная теория, динамический регулятор, линейные матричные неравенства, выпуклая оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

Активное развитие теории автоматического управления в XX в. обусловило разработку инструментария для решения задач подавления влияния внешних возмущений, которые стали одними из наиболее важных в этой теории. С тех пор, как был разработан подход для подавления гауссовских возмущений с линейно-квадратичным критерием качества [1], было предложено множество методов борьбы с внешними воздействиями. Неко-

торые из таких методов настроены на случай, когда стохастические характеристики входных сигналов известны. С другой стороны, подход на основе \mathcal{H}_∞ -оптимизации [2] предлагает способ парирования «наихудшего» варианта возмущения. Однако \mathcal{H}_∞ -управление отличается чрезмерным консерватизмом, а оптимальные \mathcal{H}_2 -регуляторы чувствительны к малым вариациям параметров, что делает их неробастными, вследствие чего оптимальность управления нарушается. Несмотря на принципиальные отличия \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -теорий, были опубликованы некоторые исследования, объединяющие эти два метода [3–6].

[#] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-20055).



Одна из областей теории управления, исследующая способы подавления влияния внешних возмущений, была разработана И. Г. Владимировым около тридцати лет назад [7, 8], она объединяет как \mathcal{H}_2 -, так и \mathcal{H}_∞ -оптимальные теории в качестве предельных случаев. Эта теория, названная автором анизотропией теории управления, предлагает стохастический подход к \mathcal{H}_∞ -управлению и одновременно тесно связана своими терминами с теорией информации. Центральным понятием анизотропией теории является анизотропия случайного вектора, которая изначально соответствовала относительной энтропии нормированной функции распределения случайного вектора на единичной сфере относительно равномерного распределения. Таким образом, для равномерного распределения анизотропия равна нулю, и чем более плотным вдоль определенных осей становится распределение, тем выше уровень анизотропии, вплоть до бесконечности. Позже эта концепция была модифицирована [9]. В последнее время под анизотропией случайного вектора понимают отклонение Кульбака – Лейблера между двумя плотностями распределения, одна из которых принадлежит фиксированному случайному вектору, а вторая – гауссову семейству случайных векторов с нулевым средним значением и скалярной ковариационной матрицей. Основываясь на этом определении, можно дать простую геометрическую интерпретацию анизотропии: это мера отличия (расстояния) случайного вектора от набора центрированных гауссовых векторов со скалярной ковариационной матрицей. Функционал качества в анизотропией теории связан с анизотропией нормой – стохастическим аналогом \mathcal{H}_∞ -нормы динамической системы.

В рамках теории, основанной на анизотропии случайных векторов, были решены многие задачи анализа и синтеза как для нестационарных [9], так и для стационарных систем [10]. Однако до недавнего времени рассматривались только линейные и детерминированные объекты. Первая попытка изучения стохастических объектов с точки зрения анизотропией теории была предпринята в работе [11]. Этот анализ позволил заменить подход, предложенный в статьях [12, 13], который основывался на мажорантах норм для систем с мультипликативным шумом.

Системы с мультипликативным шумом являются важным примером стохастических систем. Они описывают механические, гибридные, биологические системы, финансовые модели и многие другие объекты и процессы [14, 15]. Основанный на анизотропии анализ робастного качества нестационарных систем был изучен в работе [16], а стационарные системы были рассмотрены в статье [17]. Задача построения оценки выхода для нестационарной системы уже успешно решена [18], а настройка матрицы смежности сети датчиков с отказами выполнена в работе [19]. С учетом результатов, полученных в рамках анизотропией анализа для стационарных систем [17], задача синтеза управления тоже может быть поставлена и решена. В данной статье рассматривается динамический регулятор и формулируется задача выпуклой оптимизации для вычисления матриц этого регулятора в пространстве состояний. Линеаризация матричных неравенств выполняется аналогично описанной в публикации [20] процедуре. Разработанный регулятор может быть применен для автоматического управления любыми подвижными объектами. В § 1 содержится краткое изложение анизотропией теории, § 2 включает описание системы и постановку задачи, в § 3 описывается решение рассматриваемой задачи, § 4 демонстрирует результаты численного моделирования.

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данном разделе будут упомянуты базовые понятия анизотропией теории относительно стационарных систем. Более подробную информацию можно найти в работах [10, 21–23].

Анизотропия случайного вектора W со значениями из пространства \mathbb{R}^m с функцией плотности распределения вероятностей f определяется как

$$A(W) = \min_{\lambda > 0} D(f \parallel p_\lambda),$$

где

$$D(f \parallel p_\lambda) = \mathbf{E} \left[\ln \frac{f}{p_\lambda} \right]$$

представляет собой относительную энтропию (или информационное отклонение Кульбака – Лейблера) по отношению к эталонной функции плотности распределения вероятностей

$$p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\lambda}\right),$$

которая выбрана в виде гауссовской с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей вида λI_m , где I_m – единичная матрица порядка m . Здесь и далее обозначение $\mathbf{E}[\cdot]$ соответствует оператору математического ожидания, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Анизотропия случайного вектора не является нормой из-за нарушения аксиом нормы, при этом анизотропия является мерой близости случайного вектора к векторам, распределенным по стандартному нормальному закону.

Рассмотрим расширенный вектор из элементов последовательности случайных векторов $\{w_k\}$:

$$W_{s:t} = (w_s^T, w_{s+1}^T, \dots, w_t^T)^T, \quad s \leq t.$$

Для расширенного вектора $W_{s:t}$ вводится предел [10]

$$\bar{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

который называется средней анизотропией последовательности $\{w_k\}$. В анизотропийной теории вводится собственный показатель качества – анизотропийная норма. Для начала рассмотрим среднеквадратичный коэффициент усиления

$$Q(Z, W) = \sqrt{\frac{\mathbf{E}(\|Z\|^2)}{\mathbf{E}(\|W\|^2)}},$$

где Z и W – выход и вход линейной системы с передаточной матрицей $F \in \mathbb{C}^{p \times m}$ соответственно. Выражение

$$\sup_{W \in \mathcal{L}_2^m} Q(Z, W) = \sqrt{\max_{1 \leq k \leq m} \lambda_k(F^T F)} = \|F\|_\infty$$

представляет собой определение \mathcal{H}_∞ -нормы, где \mathcal{L}_2^m соответствует суммируемому с квадратом сигналам, λ_k – k -е собственное число. Если входной сигнал для системы F имеет ограниченную числом a среднюю анизотропию, то анизотропийная норма может быть определена в виде

$$\sup_{\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a} Q(Z, W) = \|F\|_a.$$

Если рассматривается несферичная система (т. е. система, масштабированная \mathcal{H}_2 -норма кото-

рой меньше \mathcal{H}_∞ -нормы), то анизотропийная норма имеет одно замечательное свойство: в качестве предельных случаев можно получить либо масштабированную \mathcal{H}_2 -, либо \mathcal{H}_∞ -норму:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|F\|_2 \leq \|F\|_a \leq \|F\|_\infty.$$

При этом левая граница достигается при условии нулевого значения средней анизотропии, в то время как правая граница будет достигаться при стремлении средней анизотропии к бесконечности, что соответствует случаю, когда последовательность утрачивает свойство случайности.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе будет применен способ описания динамических объектов (как объекта управления, так и управляющего устройства) во временной области с помощью пространства состояний. Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему с мультипликативными шумами

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k), \\ z(k) &= C_1 x(k) + D_{12} u(k), \\ y(k) &= C_2 x(k) + D_{21} w(k) \end{aligned} \quad (1)$$

с нулевым начальным условием $x(0) = 0$. Здесь $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние; $\{w(k)\}_{k \geq 0}$, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_w}$ – окрашенная последовательность с известным ограничением a на уровень средней анизотропии; $u(k) \in \mathbb{R}^{m_u}$ – управляющее воздействие; $z(k) \in \mathbb{R}^{p_z}$ – управляемый выход; $y(k) \in \mathbb{R}^{p_y}$ – наблюдаемый выход; размерности матриц в системе (1) имеют согласующиеся с входными и выходными векторами размерности. Предполагается также, что система (1) является управляемой. В отличие от системы, рассмотренной в работе [13], где мультипликативные шумы входили в коэффициент при управлении, в текущей постановке матрица A системы представима в виде

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^n \mu_i(k) A_i,$$

где матрицы A_i известны и имеют соответствующие размерности. Случайные величины $\mu_i(k)$, $i = 1, \dots, n$, имеют стандартное нормальное распределение с нулевым средним и единичной ковариацией, взаимно независимы



между собой и векторами внешнего возмущения $w(t)$ для всех моментов времени k, t .

Задача состоит в поиске матриц A_c, B_c, C_c и D_c реализации в пространстве состояний такого динамического регулятора полного порядка

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A_c \xi(k) + B_c y(k), \\ u(k) &= C_c \xi(k) + D_c y(k), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\xi_i(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – внутреннее состояние регулятора, при котором анизотропийная норма системы, замкнутой данным регулятором, была бы ограничена сверху числом $\gamma > 0$.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Перед тем как перейти к формулировке основного результата, рассмотрим линейную дискретную стационарную систему F с мультипликативными шумами следующего вида:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A_0 + \sum_{i=1}^n \mu_i(k) A_i) x(k) + Bw(k), \\ z(k) &= Cx(k) + Dw(k), \end{aligned} \quad (3)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ обозначает состояние, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_w}$ – возмущение, а $z(k) \in \mathbb{R}^{p_z}$ – выход системы. Действительные матрицы имеют соответствующие размерности. Предполагается, что входная последовательность является случайной с заданным ограничением a на среднюю анизотропию. В работе [17] было получено условие ограниченности для анизотропийной нормы в терминах решения специальной системы уравнений и неравенства. А анализ систем с мультипликативным шумом был сведен к задаче выпуклой оптимизации в статье [24].

Для системы (3) ограниченность анизотропийной нормы будет гарантирована, если будут выполнены условия следующего утверждения.

Теорема 1 [24]. Для заданного порогового значения γ и известного ограничения на уровень средней анизотропии $a \geq 0$ внешнего возмущения анизотропийная норма системы (3) имеет ограничение сверху на анизотропийную норму

$$\| \| F \| \|_a \leq \gamma,$$

если система неравенств

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n A_i^T R A_i - R + C^T C & * \\ B^T R A_0 + D^T C & -\eta I_{m_w} + D^T D + B^T R B \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - S - D^T D & * \\ RB & R \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5)$$

$$\ln \det S \geq 2a + m_w \ln(\eta - \gamma^2)$$

разрешима относительно симметричных положительно определенных матриц R, S и скалярного параметра $\eta > \gamma^2$.

В неравенствах (4), (5) и далее по тексту выражение $[\cdot] \prec 0$ следует понимать в смысле отрицательной определенности соответствующей матрицы, * обозначает симметричный относительно главной диагонали блок.

Сформируем замкнутую управление (2) систему (1):

$$\begin{aligned} \zeta(k+1) &= (A_0 + \sum_{i=1}^n \mu_i(k) A_i) \zeta(k) + Bw(k), \\ z(k) &= C\zeta(k) + Dw(k), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\zeta(k) \in \mathbb{R}^{2n_x}$ обозначает расширенное состояние

$$\zeta(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix},$$

а матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $i=0, \dots, n$, $B \in \mathbb{R}^{2n_x \times m_w}$, $C \in \mathbb{R}^{p_z \times 2n_x}$, $D \in \mathbb{R}^{p_z \times m_w}$ имеют следующую блочную структуру:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A_0 + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}, \\ A_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$C = [C_1 + D_{12} D_c C_2 \quad D_{12} C_c], D = D_{12} D_c D_{21}.$$

Теперь для замкнутой системы (6) сформулируем утверждение об ограниченности анизотропийной нормы в виде выпуклой задачи на основе результатов, описанных в работах [20, 25].

Теорема 2. Пусть для системы с мультипликативными шумами (1) внешнее возмущение имеет среднюю анизотропию, ограниченную заданным числом $a \geq 0$. Тогда для фиксированного числа $\gamma > 0$ динамический регулятор вида (2) гарантирует ограниченность анизотропийной нормы $\| \| F \| \|_a < \gamma$, если система неравенств

$$\begin{bmatrix}
 -\Pi_{11} & * & * & * & * & * & * & \dots & * & * & * \\
 -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * & * & * & * & * & \dots & * & * & * \\
 0 & 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & * & * & \dots & * & * & * \\
 A_0 \Pi_{11} + B_2 C & A_0 + B_2 D C_2 & B_1 + B_2 D D_{21} & -\Pi_{11} & * & * & * & \dots & * & * & * \\
 \mathbf{A} & \Phi_{11} A_0 + B C_2 & \Phi_{11} B_1 + B D_{21} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * & * & \dots & * & * & * \\
 A_1 \Pi_{11} & A_1 & 0 & 0 & 0 & -\Pi_{11} & * & \dots & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Pi_{12}^T & -\Pi_{22} & * & * & * & * \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 A_n \Pi_{11} & A_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\Pi_{11} & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\Pi_{12}^T & -\Pi_{22} & * \\
 C_1 \Pi_{11} + D_{12} C & C_1 + D_{12} D C_2 & D_{12} D D_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -I_{p_z}
 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix}
 \Psi - \eta I_{m_w} & * & * & * \\
 B_1 + B_2 D D_{21} & -\Pi_{11} & * & * \\
 \Phi_{11} B_1 + B D_{21} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * \\
 D_{12} D D_{21} & 0 & 0 & -I_{p_z}
 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (9)$$

$$\eta > \gamma^2, \Pi_{11} \succ 0, \Phi_{11} \succ 0, \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (10)$$

$$\ln \det \Psi \geq 2a + m_w \ln (\eta - \gamma^2), \quad (11)$$

разрешима относительно переменных $\eta > 0$, $\Psi = \Psi^T$, $\Phi_{11} = \Phi_{11}^T$, $\Pi_{11} = \Pi_{11}^T$, $\Pi_{22} = \Pi_{22}^T$, Π_{12} , $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$, причем матрицы регулятора связаны с решением неравенств (8)–(11) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_c &= \Phi_{12}^{-1} (\mathbf{A} + \Phi_{11} B_2 D C_2 \Pi_{11} - B C_2 \Pi_{11} - \\
 &\quad - \Phi_{11} B_2 C - \Phi_{11} A_0 \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-T}, \\
 B_c &= \Phi_{12}^{-1} (\mathbf{B} - \Phi_{11} B_2 D_c), \\
 C_c &= (\mathbf{C} - D_c C_2 \Phi_{11}) \Pi_{12}^{-T}, \\
 D_c &= \mathbf{D}
 \end{aligned} \quad (12)$$

с учетом обозначения

$$\Phi_{12} = (I_{n_x} - \Phi_{11} \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-T},$$

где матрицы Φ_{12} , Π_{12} являются обратимыми, а $\Pi_{12}^{-T} = (\Pi_{12}^T)^{-1}$.

Доказательство этого утверждения приведено в приложении.

Замечание 1. Важным является требование о совпадении размерностей векторов состояния объекта управления $x(k)$ и динамического регулятора $\xi(k)$. В этом случае матрицы

регулятора (2) могут быть найдены единственным образом. В работе [25] указано, что при полном столбцовом ранге матриц Φ_{12} и Π_{12} матрицы регулятора A_c, B_c, C_c, D_c существуют, но не единственны. ♦

На основе теоремы 2 легко сформулировать утверждение, ставшее уже классическим для задач анизотропной теории, решаемых в терминах выпуклой оптимизации.

Теорема 3. Анизотропная норма системы (6) ограничена минимальным пороговым значением γ , если существует решение задачи выпуклой оптимизации

$$\gamma^2 \xrightarrow{(8)-(11)} \min$$

относительно переменных γ^2 , η , $\Psi = \Psi^T \succ 0$, $\Phi_{11} = \Phi_{11}^T \succ 0$, $\Pi_{11} = \Pi_{11}^T \succ 0$, $\Pi_{22} = \Pi_{22}^T \succ 0$, Π_{12} , $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Матрицы динамического регулятора (2) при этом вычисляются согласно выражениям (12).

Замечание 2. Благодаря присутствию мультипликативных шумов в системе (1) выпуклая задача оптимизации содержит матрицу Π , что позволяет обойти условие проверки существования двух матриц, удовлетворяющих уравнению $\Phi_{12} \Pi_{12}^T = I_{n_x} - \Phi_{11} \Pi_{11}$, появляющееся в случае рассмотрения систем без мультипликативных шумов [23]. ♦

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В этом разделе будет проанализирован численный эксперимент, проведенный на модели взлета – посадки летательного аппарата, рассмотренной в работе [26]. Управление осуществляется путем изменения угла наклона заднего сопла самолета, тяги через заднее сопло и



тяги через переднее сопло, положение которого постоянно; в качестве состояния выбраны угол тангажа и положение центра масс летательного аппарата, а также скорости их изменения. Линейная дискретная модель в пространстве состояний описывается с помощью матриц

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0004 & -0,0536 & -0,0976 \\ -0,0007 & 0,9966 & 0,4938 & -0,0100 \\ 0,0000 & 0,0001 & 0,9980 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0100 & 1,0000 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,0003 & 0,0000 & -0,0001 \\ -0,0002 & 0,0005 & 0,0008 \\ -0,0006 & 0,0000 & 0,0034 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0001 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,0021 & 0,0000 & -0,0003 \\ 0,0000 & 0,0020 & 0,0004 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0012 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0,7071 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_{12} = [0 \ 0 \ 0,7071],$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 57,2958 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57,2958 \\ 0,1045 & -0,9945 & 0,1375 & 51,5791 \\ -0,0002 & 0,0045 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,0212 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

мультипликативный шум в виде одного слагаемого входит в уравнение динамики с матричным коэффициентом $A_1 = A_0 \cdot 10^{-2}$. Средний уровень анизотропии выбран равным 5. При расчете были получены следующие матрицы анизотропийного динамического регулятора:

$$A_c = \begin{bmatrix} 1,9773 & -2,3361 & -7,8981 & 49,2172 \\ -0,0232 & 1,7152 & -1,1628 & 4,7785 \\ -0,0368 & 0,6143 & -0,1482 & 0,1708 \\ -0,1262 & 0,4600 & 0,2936 & -2,2690 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0,0078 & 0,5486 & -1,0382 & -0,0013 \\ 0,0024 & -0,8364 & 0,08879 & 0,0003 \\ 0,0115 & -0,2878 & 0,3202 & -0,0187 \\ 0,0017 & -0,1795 & 0,2283 & -0,0028 \end{bmatrix},$$

$$C_c \cdot 10^{-4} = \begin{bmatrix} -0,0640 & -1,9133 & 1,2458 & -5,1640 \\ -0,0311 & -0,0188 & 0,1100 & -0,6393 \\ 0,0000 & -0,0068 & 0,0039 & -0,0149 \end{bmatrix},$$

$$D_c \cdot 10^{-3} = \begin{bmatrix} -0,0250 & 9,3135 & -9,8997 & -0,0111 \\ -0,0067 & -0,2866 & 0,3740 & 0,0037 \\ -0,0001 & 0,0329 & -0,0353 & 0,000 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи выпуклой оптимизации производилось с помощью стандартных средств MATLAB с дополнительными пакетами численного решения задач полуопределенного программирования [27, 28].

На рис. 1 приведены ЛАФЧХ для двух уровней анизотропии, равных 1 и 5, соответственно. Стоит отметить, что при любых значениях средней анизотропии, превосходящих 10, моделирование дает примерно одни и те же результаты, характерные для \mathcal{H}_∞ -управления.

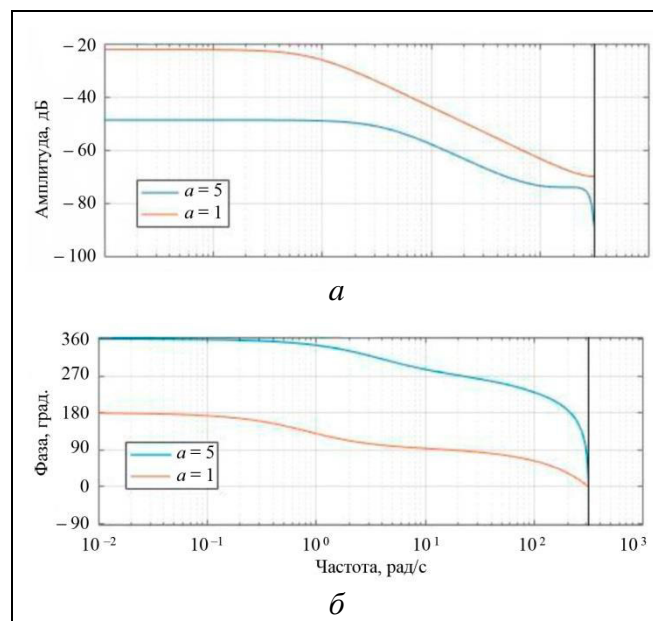


Рис. 1. ЛАФЧХ замкнутых управлением систем

В таблице приводятся результаты по вычислению верхней границы анизотропийной нормы замкнутой системы при различных значениях уровня средней анизотропии.

Границы анизотропийной нормы

a	0	1	5	10	15
γ	0,0012	0,2197	0,3087	0,3142	0,3142

Также интерес представляет сравнение управляемых выходов при использовании

анизотропийного управления и стандартного \mathcal{H}_2 -управления. Зафиксируем среднюю анизотропию, равную 5. Вычислим евклидову норму для управляемого выхода, графики которого приведены на рис. 2, где применение анизотропийного управления обозначено через сокращение АВ. Оказывается, что для анизотропийного управления такая норма равна 0,0158, в то время как для \mathcal{H}_2 -подхода – 0,0856. То есть при использовании анизотропийного управления можно улучшить квадратичный критерий качества на 72 %.

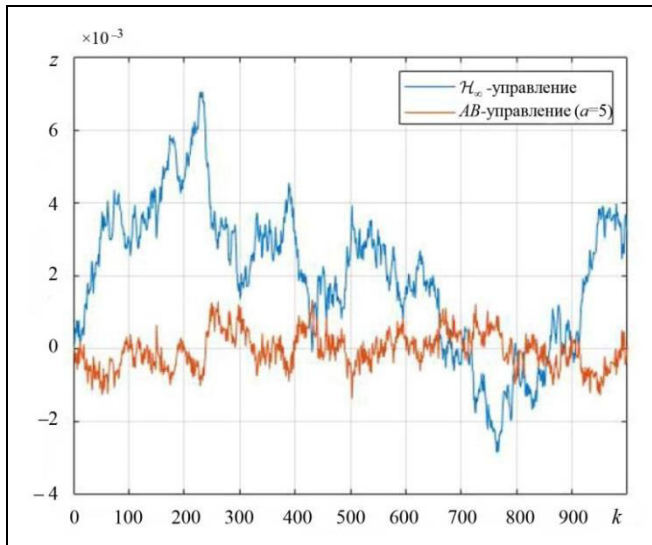


Рис. 2. Управляемые выходы системы при различных типах управления

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был рассмотрен алгоритм вычисления матриц динамического регулятора в пространстве состояний на основе анизотропийного подхода. В качестве основного инструмента использовалась лемма о вещественной ограниченности для стационарных систем. Предполагалось, что динамический регулятор имеет полную размерность, что гарантирует единственность такого регулятора. Для замкнутой системы были получены достаточные условия существования анизотропийного динамического регулятора в терминах решения специальной системы нелинейных матричных неравенств. Была использована линеаризующая обратимая замена переменных, позволившая свести условия ограниченности анизотропийной нормы замкнутой системы к условию разрешимости специальной системы неравенств. В процессе решения выпуклой задачи оптимизации получено поро-

говое ограничение на границу сверху анизотропийной нормы замкнутой системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме 1, замкнутая управлением на основе динамического регулятора (2) система (6) будет иметь ограниченную анизотропийную норму, если неравенства

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n A_i^T \Phi A_i - \Phi + C^T C & * \\ B^T \Phi A_0 + D^T C & -\eta I_{m_w} + D^T D + B^T \Phi B \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{П1})$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi - D^T D & * \\ \Phi B & \Phi \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{П2})$$

$$\ln \det \Psi \geq 2a + m_w \ln(\eta - \gamma^2) \quad (\text{П3})$$

имеют решения, при этом $\eta > 0$, $\Psi = \Psi^T$, $\Phi = \Phi^T$. Система неравенств (П1)–(П3) является нелинейной относительно матриц системы, зависящих от матриц регулятора (7). Для того, чтобы исправить это, применим лемму Шура [29] к неравенству (П1):

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * & \dots & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & \dots & * & * \\ A_0 & B & -\Phi^{-1} & * & \dots & * & * \\ A_1 & 0 & 0 & -\Phi^{-1} & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & 0 & 0 & 0 & \dots & -\Phi^{-1} & * \\ C & D & 0 & 0 & \dots & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{П4})$$

Обозначим Φ^{-1} в качестве новой матричной переменной Π . Очевидно, что $\Phi \Pi = I_{2n_x}$, а сами матрицы Φ и Π имеют блочную структуру:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} I_{n_x} & \Phi_{11} \\ 0 & \Phi_{12}^T \end{bmatrix}, \quad \Pi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ \Pi_{12}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко показать, что имеют место следующие равенства:

$$\Pi_1^T \Phi \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi \Phi_1 = \Pi_1^T \Phi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix}. \quad (\text{П5})$$

Теперь применим конгруэнтное преобразование с матрицей

$$\text{block diag} (\Pi_1^T, I_{m_w}, \Phi_1^T, I_{n_x}, \dots, I_{n_x}, I_{p_z})$$



к неравенству (П4). Получим новое неравенство:

$$\begin{bmatrix} -\Pi_1^T \Phi \Pi_1 & * & * & * & \dots & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & \dots & * & * \\ \Phi_1^T A_0 \Pi_1 & \Phi_1^T B & -\Phi_1^T \Pi \Phi_1 & * & \dots & * & * \\ A_1 \Pi_1 & 0 & 0 & -\Pi & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n \Pi_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\Pi & * \\ C \Pi_1 & D & 0 & 0 & \dots & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (\text{П6})$$

Можно заметить, что неравенство (П6) все еще является нелинейным по некоторым матричным переменным. Блоки $-\Pi_1^T \Phi \Pi_1$ и $-\Phi_1^T \Pi \Phi_1$ можно переписать согласно обозначению (П5). Рассмотрим третий блок в первом столбце, он также имеет блочную структуру:

$$\Phi_1^T A_0 \Pi_1 = \begin{bmatrix} A_0 \Pi_{11} + B_2 C & A + B_2 D C_2 \\ \mathbf{A} & \Phi_{11} A_0 + \mathbf{B} C_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \Phi_{12} A_c \Pi_{12}^T + \Phi_{12} B_c C_2 \Pi_{11} + \\ &+ \Phi_{11} B_2 C_c \Pi_{12}^T + \Phi_{11} (A_0 + B_2 D_c C_2) \Pi_{11}, \\ \mathbf{B} &= \Phi_{12} B_c + \Phi_{11} B_2 D_c, \\ \mathbf{C} &= C_c \Pi_{12}^T + D_c C_2 \Phi_{11}, \\ \mathbf{D} &= D_c \end{aligned}$$

представляет собой линеаризующую замену переменных, аналогичную предложенной в работах [20, 30]. Блоки $\Phi_1^T B$ и $C \Pi_1$ можно представить в виде

$$\Phi_1^T B = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D D_{21} \\ \Phi_{11} B_1 + \mathbf{B} D_{21} \end{bmatrix},$$

$$C \Pi_1 = [C_1 \Pi_{11} + D_{12} \mathbf{D} \quad D_{12} D D_{21}].$$

Таким образом, получено неравенство (8). Далее можно применить лемму Шура к неравенству (П2), после чего оно преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \Phi B & -\Phi & * \\ D & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Теперь произведем конгруэнтное преобразование последнего неравенства с помощью матрицы

$$\text{block diag}(I_{m_w}, \Pi_1^T, I_{p_z}).$$

Можно убедиться, что после указанного преобразования получено неравенство вида (9). При этом неравенство специального вида (11) меняться не будет. Обратная замена переменных (12) будет однозначно определена при условии невырожденности матриц Φ_{12} , Π_{12} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Astrom, K.J. Introduction to Stochastic Control Theory. – Academic Press, 1970. – 322 p.
2. Zames, G. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1981. – Vol. 26, no. 2. – P. 301–320.
3. Haddad, W.M., Bernstein, D.S., Mustafa, D. Mixed-Norm H2/H ∞ Regulation and Estimation: The Discrete-Time Case // Systems & Control Letters. – 1991. – Vol. 16, no. 4. – P. 235–247.
4. Zhou, K., Glover, K., Bodenheimer, B., Doyle, J. Mixed H2 and H ∞ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1994. – Vol. 38. – P. 1564–1574.
5. Khargonekar, P.P., Rotea, M.A., Baeyens, E. Mixed H2/H ∞ Filtering // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 1996. – Vol. 6. – P. 313–330.
6. Scherer, C.W. Mixed H2/H ∞ Control. – Springer-Verlag, 1995. – 216 p.
7. Semyonov, A.V., Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P. Stochastic Approach to H ∞ -optimization // Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control. – 1994. – P. 2249–2250.
8. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады РАН. – 1995. – Т. 342, № 5. – С. 583–585. [Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semyonov, A.V. Anisotropy Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems // Doklady Mathematics. – 1995. – Vol. 51, no. 3. – P. 388–390.]
9. Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.Е. Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 8. – С. 92–111. [Vladimirov, I.G., Diamond, P., Kloeden, P. Anisotropy-based Robust Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems // Automation and Remote Control. – 2006. – Vol. 67, no. 7. – P. 1265–1282.]
10. Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semyonov, A.V. On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-time-invariant Systems // Proceedings of 13th IFAC World Congr. – San Francisco, 1996. – P. 179–184.
11. Kustov, A.Yu. State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic System // Proceedings of 15th Int. Conf. on Electr. Eng., Comp. Science and Autom. Control. – Porto, 2018. – P. 1–6.
12. Юрченков А.В., Кустов А.Ю., Курдюков А.П. Условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 467, № 4. – С. 396–399. [Yurchenkov, A.V., Kustov, A.Yu., Kurdyukov, A.P. Anisotropy-based Bounded Real Lemma for Discrete-Time Systems with Multiplicative Noise // Doklady Mathematics. – Vol. 93, no. 2. – P. 238–240.]
13. Юрченков А.В. Синтез анизотропийного управления для линейной дискретной системы с мультипликативными шумами // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2018. – № 6. – С. 33–44. [Yurchenkov, A.V. Anisotropy-Based Controller Design for Linear Discrete-Time Systems with Multiplicative Noise // Journal of Computer and Systems Sciences Int. – 2018. – Vol. 57, no. 6. – P. 864–873.]

14. *Won, M. and Ranade, G.* Control of systems with multiplicative observation noise // Proceedings of the 62nd IEEE Conference on Decision and Control. – Singapore, 2023. – P. 3950–3955.
15. *Lu, C., Lu, X., Wang, H., et al.* Control for Multiplicative Noise Systems with Packet Dropouts and Multiple Delays // Proceedings of the 40th Chinese Control Conference. – Shanghai, 2021. – P. 1544–1549.
16. *Belov, I.R., Yurchenkov, A.V., Kustov, A.Yu.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: The Finite Horizon Case // Proceedings of the 27th Med. Conf. on Control and Automation. – Akko, 2019. – P. 148–152.
17. *Kustov, A.Yu., Timin, V.N., Yurchenkov, A.V.* Boundedness Condition for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time-invariant Systems with Multiplicative Noise // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1864. – Art. no. 012068.
18. *Yurchenkov, A.V., Kustov, A.Yu., Timin, V.N.* The Sensor Network Estimation with Dropouts: Anisotropy-Based Approach // Automatica. – 2023. – Vol. 151. – Art. no. 110924.
19. *Юрченков А.В.* Настройка сети датчиков с отказами на основе анизотропного критерия // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. – 2023. – № 1. – С. 45–63. [*Yurchenkov, A.V.* Default Sensor Network Setup based on the Anisotropic Criterion // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. – 2023. – Vol. 106, no. 1. – P. 45–63. (In Russian)]
20. *Gahinet, P.* Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis // Automatica. – 1996. – Vol. 32. – P. 1007–1014.
21. *Diamond, P., Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semyonov, A.V.* Anisotropy-Based Performance Analysis of Linear Discrete Time Invariant Control Systems // International Journal of Control. – 2001. – Vol. 74, no. 1. – P. 28–42.
22. *Diamond, P., Kloeden, P., Vladimirov, I.G.* Mean Anisotropy of Homogeneous Gaussian Random Fields and Anisotropic Norms of Linear Translation-Invariant Operators on Multidimensional Integer Lattices // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 2003. – Vol. 16, no.3. – P. 209–231.
23. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Стохастическая проблема H_∞ -оптимизации. // Доклады РАН. – 1995. – Т. 343, № 5. – С. 607–609. [*Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semyonov, A.V.* The Stochastic Problem of H_∞ -Optimization // Doklady Mathematics. – 1995. – Vol. 52. – P. 155–157.]
24. *Юрченков А.В.* Условие ограниченности анизотропной нормы для стационарных систем с мультипликативными шумами // Проблемы управления. – 2022. – № 5. – С. 16–24. [*Yurchenkov, A.V.* An Anisotropy-Based Boundedness Criterion for Time-Invariant Systems with Multiplicative Noises // Control Sciences. – 2022. – No. 5. – P. 13–20.]
25. *Scherer, C.W., Gahinet, P., Chilali, M.* Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42. – P. 896–911.
26. *Toffner-Clausen, S.* System Identification and Robust Control: A Case Study Approach. – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 311 p.
27. *Lofberg, J.* YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB // Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation. – New Orleans, 2004. – P. 284–289.
28. *Sturm, J.F.* Using SeDuMi 1.02, a MATLAB Toolbox for Optimization over Symmetric Cones // Optimization Methods and Software. – 1999. – Vol. 11. – P. 625–653.
29. *Boyd, S., Vandenberghe, L.* Convex Optimization. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 730 p.
30. *Чайковский М.М.* Синтез анизотропных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования // Управление большими системами. – 2013. – Вып. 42. – С. 100–152. [*Tchaikovsky, M.M.* Synthesis of Anisotropic Controllers via Convex Optimization and Semidefinite Programming // Large-Scale Systems Control. – 2013. – Iss. 42. – P. 100–152. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии
М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 03.11.2024,
после доработки 31.01.2025.
Принята к публикации 06.02.2025.

Юрченков Александр Викторович – канд. физ.-мат. наук,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Москва,
✉ alexander.yurchenkov@yandex.ru,
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2088-5577>

© 2025 г. Юрченков А. В.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



DYNAMIC ANISOTROPY-BASED CONTROLLER DESIGN FOR TIME-INVARIANT SYSTEMS WITH MULTIPLICATIVE NOISE

A. V. Yurchenkov

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ alexander.yurchenkov@yandex.ru

Abstract. This paper considers a linear discrete time-invariant system with multiplicative noise and a control input under an external disturbance from a special class. The plant's dynamics are described in the state space. The class of external disturbances contains a set of stationary Gaussian sequences with a bounded mean anisotropy. The anisotropic norm of the closed-loop control system is chosen as the performance criterion. It is required to design a dynamic link-based control scheme under which the anisotropic norm of the closed-loop control system will be bounded by the minimum possible threshold. At the first stage of solving this problem, the controller's dynamics are written out and the plant under consideration is augmented. The boundedness criterion of the anisotropic norm in terms of matrix inequalities is used to derive sufficient conditions for the existence of a solution of a convex optimization problem to minimize the upper bound of the anisotropic norm. A special change of variables is performed in the resulting inequalities to eliminate the nonlinear dependence on the unknown controller matrices. After a linearizing invertible change of variables, the optimization problem is solved numerically using standard methods. At the last stage, the desired controller matrices are calculated in the state space to ensure the bounded anisotropic norm of the closed-loop control system.

Keywords: linear discrete time-invariant systems, anisotropy-based theory, dynamic control, LMI, convex optimization.

Acknowledgments. This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 24-21-20055.

О КОАЛИЦИОННОЙ РАЦИОНАЛЬНОСТИ В ИГРЕ ТРЕХ ЛИЦ

В. И. Жуковский*, Л. В. Жуковская**, Л. В. Смирнова***, М. И. Высокок****

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

**ФГБУН Центральный экономико-математический институт Российской академии наук, г. Москва,

***ГОУ ВО МО Государственный гуманитарно-технологический университет, г. Орехово-Зуево

*✉ zhkvlad@yandex.ru, **✉ zhukovskaylv@mail.ru, ***✉ smirnovaidiya@rambler.ru, ****✉ mvysokos@mail.ru

Аннотация. В математической теории игр для определения решения любой игры требуется установить, какое поведение игроков следует считать оптимальным. В бескоалиционных играх понятие оптимальности связано, например, с концепциями равновесия по Нэшу и равновесия по Бержу. Для оптимальности в теории кооперативных игр характерны условия индивидуальной и коллективной рациональности. В работе рассматривается кооперативная игра трех лиц в нормальной форме. Для этой игры вводится понятие коалиционной рациональности, которое сочетает в себе, кроме условий индивидуальной и коллективной рациональности, определенное объединение концепций равновесия по Нэшу и равновесия по Бержу. Для предложенного коалиционного равновесия игры устанавливаются достаточные условия существования. Кроме того, доказано существование такого решения в смешанных стратегиях при непрерывных функциях выигрыша и компактности множества стратегий.

Ключевые слова: максимин, максимум по Парето, максимум по Слейтеру, коалиционная рациональность, гермейеровская свертка, смешанные стратегии.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается игра трех лиц, математическая модель которой задается упорядоченной тройкой:

$$\Gamma = \left\langle \{1, 2, 3\}, \{X_i\}_{i=1,2,3}, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \right\rangle.$$

В игре Γ $\{1, 2, 3\}$ – множество порядковых номеров игроков, каждый из которых выбирает свою стратегию $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ($i=1, 2, 3$), в результате чего образуются ситуации $x = (x_1, x_2, x_3) \in X =$

$$= \prod_{i=1}^3 X_i \subset \mathbb{R}^n, \quad n = \sum_{i=1}^3 n_i.$$

На множестве ситуаций

X определены функции выигрыша $f_i(x)$ каждого из игроков ($i=1, 2, 3$), значение которых называется выигрышем игрока i . Количество игроков в данной игре ограничено тремя лицами, поскольку для того, чтобы проиллюстрировать основную идею вводимого в дальнейшем понятия решения этой игры, такого числа игроков достаточно. Кроме того, рассмотрение игры четырех и более лиц приво-

дит к большому многообразию коалиционных структур и, как следствие, к более громоздким выкладкам.

Изучение конфликтов, математическая модель которых представлена, в частности, игрой трех лиц вида Γ обычно проводится с нормативной точки зрения, устанавливающей, какое поведение игроков следует считать оптимальным (разумным, целесообразным). Основными содержательными чертами оптимальности в математической теории игр считаются [1, с. 13] интуитивные представления о *выгодности, устойчивости и справедливости*. На свойстве устойчивости основана «царствующая» в бескоалиционных играх концепция равновесности по Нэшу (РН) [2, 3], а также появившиеся под ее непосредственным влиянием [4] равновесность по Бержу (РБ), активное равновесие, равновесие угроз и контругроз. Эти и некоторые другие понятия оптимальности [5] бытуют в теории бескоалиционных игр. В них каждый игрок обычно преследует свои индивидуальные цели; кроме того, он не имеет возможности объединиться с другими игроками в коалицию для совместно-



го выбора своих стратегий. Антиподом этому случаю являются кооперативные игры [6], где допускаются любые объединения игроков с целью «борьбы» за общие для этой коалиции интересы, а также возможность неограниченных переговоров между игроками, результатом которых будет выбор и использование совместной ситуации; при этом, конечно, предполагается, что договоры будут соблюдаться. Для оптимальности в теории кооперативных игр характерны условия *индивидуальной* [6, с. 117] и *коллективной* [6, с. 125] *рациональности*. Индивидуальная рациональность означает, что выигрыш каждого игрока не меньше его гарантированного выигрыша, который игрок может себе «обеспечить», действуя самостоятельно (применяя свою максиминную стратегию). Коллективная рациональность обеспечивается одним из векторных максимумов (по Слейтеру, Парето, Джоффриону, Борвейну и т. д.), возникающих при объединении всех игроков в одну общую коалицию.

Важным в настоящей статье является понятие *коалиционной структуры* игры (разбиение игроков на попарно непересекающиеся подмножества). Для игры Γ трех лиц таких коалиционных структур может быть пять: $\mathfrak{F}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\mathfrak{F}_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\mathfrak{F}_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\mathfrak{F}_4 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\mathfrak{F}_5 = \{\{1, 2, 3\}\}$. Здесь структура \mathfrak{F}_1 отвечает бескоалиционному «характеру» игры, а \mathfrak{F}_5 – кооперативному. Упомянутые условия индивидуальной рациональности сформулируем для коалиционной структуры \mathfrak{F}_1 . При этом используем следующее обозначение: $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ считаем $-i = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.

Тогда условие индивидуальной рациональности для ситуации $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in X$ означает

$$\begin{aligned} f_i^0 &= \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) = \\ &= \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i^0, x_{-i}) \leq f_i(x^*), i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

т. е. при применении максиминной стратегии x_i^0 имеют место неравенства

$$f_i^0 \leq f_i(x^*), i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Для коалиционной структуры \mathfrak{F}_5 в игре Γ условие коллективной рациональности будет обеспечено максимумом по Парето. Именно, на множестве ситуаций $X^* \subset X$ ситуация $x^* \in X^* \subset X$ *максимальна по Парето* в трехкрите-

риальной задаче $\Gamma_{X^*} = \langle X^*, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \rangle$, если $\forall x \in X^*$ несовместна система неравенств $f_i(x) \geq f_i(x^*)$, $i = 1, 2, 3$, причем хотя бы одно неравенство строгое. Согласно лемме Карлина [7, с. 71], если

$$\sum_{i=1}^3 f_i(x) \leq \sum_{i=1}^3 f_i(x^*) \quad \forall x \in X^*, \quad (3)$$

то ситуация x^* *максимальна по Парето* в задаче Γ_{X^*} .

1. УСЛОВИЕ КОАЛИЦИОННОЙ РАЦИОНАЛЬНОСТИ

Это условие формализуем для коалиционных структур $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ и \mathfrak{F}_4 , основываясь будем на подходящем объединении концепции РН и РБ.

Для коалиционной структуры \mathfrak{F}_2 условие коалиционного равновесия означает выполнение четырех неравенств

$$f_1(x_1^*, x_2^*, x_3) \leq f_1(x^*) \quad \forall x_3 \in X_3, \quad (4)$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*, x_3) \leq f_2(x^*) \quad \forall x_3 \in X_3, \quad (5)$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3^*) \leq f_1(x^*) \quad \forall x_j \in X_j, j = 1, 2, \quad (6)$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3^*) \leq f_2(x^*) \quad \forall x_j \in X_j, j = 1, 2, \quad (7)$$

для структуры \mathfrak{F}_3 это условие означает

$$f_1(x_1^*, x_2, x_3^*) \leq f_1(x^*) \quad \forall x_2 \in X_2, \quad (8)$$

$$f_3(x_1^*, x_2, x_3^*) \leq f_3(x^*) \quad \forall x_2 \in X_2, \quad (9)$$

$$f_1(x_1, x_2^*, x_3) \leq f_1(x^*) \quad \forall x_k \in X_k, k = 1, 3, \quad (10)$$

$$f_3(x_1, x_2^*, x_3) \leq f_3(x^*) \quad \forall x_k \in X_k, k = 1, 3, \quad (11)$$

и, наконец, для структуры \mathfrak{F}_4 оно означает

$$f_2(x_1, x_2^*, x_3^*) \leq f_2(x^*) \quad \forall x_1 \in X_1, \quad (12)$$

$$f_3(x_1, x_2^*, x_3^*) \leq f_3(x^*) \quad \forall x_1 \in X_1, \quad (13)$$

$$f_2(x_1^*, x_2, x_3) \leq f_2(x^*) \quad \forall x_l \in X_l, l = 2, 3, \quad (14)$$

$$f_3(x_1^*, x_2, x_3) \leq f_3(x^*) \quad \forall x_l \in X_l, l = 2, 3. \quad (15)$$

Ситуацию $x^* \in X$, для которой выполняются все эти 12 ограничений, назовем *коалиционно рациональной* для игры Γ . Множество таких ситуаций обозначим через X^* ; очевидно, $X^* \subset X$.

При определении оптимального решения игры Γ будем использовать не все 16 неравенств – три неравенства (2), одно (3) и двенадцать неравенств (4)–(15) – а лишь семь из них, ибо они являются импликацией остальных (см. следующие две леммы).

Лемма 1. Если выполнены неравенства (6), (14) и (15), то из них следуют соответственно

$$\begin{aligned} f_i(x^*) &\geq f_i^0 = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) = \\ &= \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i^0, x_{-i}), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Доказательство. Действительно, согласно неравенству (6) имеем $f_1(x_1, x_2, x_3^*) \leq f_1(x^*) \quad \forall x_j \in X_j, j = 1, 2$. При стратегии первого игрока $x_1 = x_1^0$ из предыдущего неравенства получаем

$$\begin{aligned} f_1(x^*) &\geq f_1(x_1^0, x_2, x_3^*) \geq \min_{x_2, x_3} f_1(x_1^0, x_2, x_3) = \\ &= \max_{x_1} \min_{x_2, x_3} f_1(x_1, x_2, x_3) = f_1^0. \end{aligned}$$

Аналогичные утверждения доказываются для $i = 2, 3$ из неравенств (14) и (15). ♦

Лемма 2. Верны очевидные импликации (10)→(4), (14)→(5), (6)→(8), (15)→(9), (7)→(12), (11)→(13).

Замечание 1. Из лемм 1 и 2 сразу следует, что в определении оптимального решения игры Γ , базирующегося на условиях индивидуальной, коллективной и коалиционной рациональностей, достаточно вместо 16-ти требований (2)–(15) использовать лишь семь из них, а именно (3), (6), (7), (10), (11), (14) и (15). ♦

Таким образом, приходим к следующему понятию оптимального решения игры Γ . Далее $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$.

Определение. Пару $(x^*, f(x^*)) \in X \times \mathbb{R}^3$ назовем коалиционно равновесной для игры Γ , если:

– имеют место следующие шесть равенств:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} f_j(x_1, x_2, x_3^*) &= f_j(x^*), \quad j = 1, 2, \\ \max_{x_1, x_3} f_k(x_1, x_2^*, x_3) &= f_k(x^*), \quad k = 1, 3, \\ \max_{x_2, x_3} f_l(x_1^*, x_2, x_3) &= f_l(x^*), \quad l = 2, 3, \end{aligned} \quad (16)$$

– ситуация $x^* \in X$ максимальна по Парето на множестве всех коалиционно равновесных ситуаций X^* игры Γ .

Замечание 2. В качестве оптимального решения игры Γ взята пара: ситуация x^* и соответствующий вектор выигрышей $f(x^*) = (f_1(x^*), f_2(x^*), f_3(x^*))$, ибо наличие пары $(x^*, f(x^*))$ сразу отвечает на два вопроса, возникающих в математической теории игр:

- Что делать игрокам в Γ ?
- Что они в результате «получат»?

Ответ: следовать своим стратегиям x_i^* из ситуации $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$.

Замечание 3. Перечислим достоинства предлагаемого коалиционно равновесного решения игры Γ .

- Согласно лемме 1 применение x^* обеспечит выполнение условий индивидуальной рациональности.

- Ситуация x^* «выводит» всех игроков на «самые большие» выигрыши (максимальные по Парето относительно остальных коалиционно равновесных ситуаций игры Γ). Этот факт представляется авторам аналогом условия коллективной рациональности из математической теории кооперативных игр.

- Выполнение требований (4)–(15) означает, например, для первого игрока двухцелевое распределение его ресурсов, именно не забывая о своих интересах:

- игрок 1 стремится оказать максимальную помощь игроку 2 в союзе (коалиции) $\{1, 2\}$ как участник коалиционной структуры \mathfrak{F}_2 (требования (6) и (7));

- игрок 1 помогает игроку 3 как участник союза $\{1, 3\}$ коалиционной структуры \mathfrak{F}_3 (требования (10) и (11)).

Формализация этих двух требований в первой и второй строках из формулы (16) представляется авторам модификацией идеи концепции РН на случай двухкритериальной функции выигрыша игроков; третью строку из формулы (16) уже можно понимать как реализацию идеи РБ для того же двухкритериального варианта. Аналогично для второго и третьего игроков.

Наконец, в основу свойства коалиционного равновесия положен также *принцип устойчивости*, ибо благодаря условию (16) отклонение от x^* любых коалиций (из одного или двух игроков) не может привести в игре Γ к «улучшению» выигрыша участников отклонившейся коалиции (по сравнению с $f_i(x^*), i = 1, 2, 3$).

Замечание 4. После того, как определено оптимальное решение, математическая теория игр рекомендует ответить на два вопроса:

- Существует ли такое решение?
- Как его найти? ♦

Ответы на эти вопросы будут даны в следующем разделе.



2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Перейдем к результату, который, по мнению авторов, является важнейшим в настоящей статье. Будем использовать два n -вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in X \subset \mathbb{R}^n$, $n = \sum_{i=1}^3 n_i$, и $z = (z_1, z_2, z_3) \in X$, а также следующие семь скалярных функций

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, z) &= f_1(x_1, x_2, z_3) - f_1(z), \\ \varphi_2(x, z) &= f_2(x_1, x_2, z_3) - f_2(z), \\ \varphi_3(x, z) &= f_1(x_1, z_2, x_3) - f_1(z), \\ \varphi_4(x, z) &= f_3(x_1, z_2, x_3) - f_3(z), \\ \varphi_5(x, z) &= f_2(z_1, x_2, x_3) - f_2(z), \\ \varphi_6(x, z) &= f_3(z_1, x_2, x_3) - f_3(z), \\ \varphi_7(x, z) &= \sum_{i=1}^3 f_i(x) - \sum_{i=1}^3 f_i(z). \end{aligned} \quad (17)$$

По функциям выигрыша игроков в игре Γ построим гермейеровскую свертку этих семи функций:

$$\varphi(x, z) = \max_{k=1, \dots, 7} \varphi_k(x, z), \quad (18)$$

заданную на множестве $X \times (Z = X) \subset \mathbb{R}^{2n}$, где $X = \prod_{i=1}^3 X_i$ – множество ситуаций в игре Γ .

Седловая точка $(\bar{x}, z^*) \in X \times Z$ скалярной функции $\varphi(x, z)$ (из формул (17), (18)) в антагонистической игре

$$\Gamma^\alpha = \langle X, Z = X, \varphi(x, z) \rangle \quad (19)$$

определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x, z^*) \leq \varphi(\bar{x}, z^*) \leq \varphi(\bar{x}, z) \quad \forall x, z \in X, \quad (20)$$

причем $z^* \in X^*$ является минимаксной стратегией, т. е. $\min_{z \in X} \max_{x \in X} \varphi(x, z) = \max_{x \in X} \varphi(x, z^*)$.

Утверждение. Если в игре Γ^α существует седловая точка (\bar{x}, z^*) , то минимаксная стратегия $z^* \in X$ из игры Γ^α является ситуацией КР исходной игры Γ .

Доказательство. Положив в неравенствах (20) ситуацию $z = \bar{x}$, получим из формулы (17), что $\varphi(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, $k = 1, \dots, 7$, ибо все $\varphi_k(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, $k = 1, \dots, 7$.

Тогда согласно неравенствам (20) (по свойству транзитивности)

$$\begin{aligned} \varphi(x, z^*) &= \max \{f_1(x_1, x_2, z_3^*) - f_1(z^*), \\ &f_2(x_1, x_2, z_3^*) - f_2(z^*), f_1(x_1, z_2^*, x_3) - f_1(z^*), \\ &f_3(x_1, z_2^*, x_3) - f_3(z^*), f_2(z_1^*, x_2, x_3) - f_2(z^*), \\ &f_3(z_1^*, x_2, x_3) - f_3(z^*), \sum_{i=1}^3 f_i(x) - \sum_{i=1}^3 f_i(z^*)\} \leq 0 \\ &\quad \forall x_i \in X_i, i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость семи неравенств:

$$\begin{aligned} f_j(x_1, x_2, z_3^*) &\leq f_j(z^*) \quad \forall x_j, j = 1, 2, \\ f_k(x_1, z_2^*, x_3) &\leq f_k(z^*) \quad \forall x_k, k = 1, 3, \\ f_l(z_1^*, x_2, x_3) &\leq f_l(z^*) \quad \forall x_l, l = 2, 3, \\ \sum_{r=1}^3 f_r(x) &\leq \sum_{r=1}^3 f_r(z^*) \quad \forall x \in X^* \subset X. \end{aligned} \quad (21)$$

Первые три неравенства (21) означают, что ситуация $z^* \in X$ является (в силу равенств (16)) коалиционно рациональной в игре Γ . Последнее из неравенств (21) и включение $X^* \subset X$ «обеспечит» [7, с. 71] максимальность по Парето ситуации x^* в трехкритериальной задаче $\Gamma_{X^*} = \langle X^*, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \rangle$.

Замечание 5. Из приведенного выше утверждения получаем следующий конструктивный способ построения коалиционного равновесного решения игры Γ :

- построить по формулам (17) и (18) функцию $\varphi(x, z)$;
- найти седловую точку (\bar{x}, z) функции $\varphi(x, z)$ (удовлетворяет цепочке неравенств (20)) [8];
- найти значения трех функций $f_i(z^*)$, $i = 1, 2, 3$.

Тогда пара $(z^*, f(z^*) = (f_1(z^*), f_2(z^*), f_3(z^*))) \in X \times \mathbb{R}^3$ как раз и образует коалиционное равновесие игры Γ .

Замечание 6. Если $N+1$ скалярных функций $\varphi_j(x, z)$, $j = 1, \dots, 7$, непрерывны на множестве $X \times Z$, а множества $X, Z \in \text{comp } \mathbb{R}^n$, то и функция $\varphi(x, z) = \min_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x, z)$ также непрерывна на множестве $X \times Z$.

Доказательство даже более общего результата имеется во многих учебных пособиях по исследо-

ванию операций (см., например, книгу [9, с. 54]), оно появилось даже в учебниках по выпуклому анализу [10, с. 146]. ♦

Наконец, крайне важной в данной статье является следующая теорема.

Теорема (существование в смешанных стратегиях). Если в игре Γ множества $X_i \in \text{comp } \mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot) \in C(X)$, $i=1, 2, 3$, то в этой игре существует коалиционно равновесная ситуация в смешанных стратегиях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первую очередь отметим *новые в теории кооперативных игр* результаты, полученные в настоящей статье.

- Формализовано понятие коалиционного равновесия (КР), учитывающее интересы любой коалиции в игре Γ .

- Установлен конструктивный способ нахождения КР, сводящийся к отысканию минимаксной стратегии для специальной гермейеровской свертки, эффективно строящейся по функциям выигрыша игроков.

- Доказано существование КР в смешанных стратегиях при «привычных» для математического программирования условиях (непрерывность функции выигрыша и компактность множества стратегий игроков).

По мнению авторов, важны и *новые качественные результаты*, следующие из настоящей статьи:

- результаты распространяются на кооперативные игры с любым конечным числом участников (больше трех), в них РН (РБ) соответственно равновесие по Нэшу (по Бержу);

- КР «обеспечивает» устойчивость коалиционной структуры к отклонению от КР любых коалиций;

- КР применимо, если даже в течение игры меняются коалиционные структуры или даже если все коалиции остаются в наличии;

- КР можно использовать при создании устойчивых союзов (альянсов) игроков.

Причем это далеко не все достоинства КР.

Но есть еще одно позитивное свойство, которое считаем нужным отметить. До сих пор в теории кооперативных игр акцентировались условия индивидуальной и коллективной рациональности. Но индивидуальным интересам игроков отвечает концепция РН с ее «эгоистическим» характером; кол-

лективной рациональности больше соответствует концепция РБ с ее «альтруизмом». Однако такая «забывчивость» несвойственна человеческой сущности игроков. Эти недостатки обеих концепций нивелирует коалиционная рациональность. В самом деле, в условиях коалиционной рациональности первый игрок, не забывая о себе и являясь участником коалиции $\{1, 2\}$ коалиционной структуры \mathfrak{F}_2 , помогает второму, а являясь участником коалиции $\{1, 3\}$ структуры \mathfrak{F}_3 , поддерживает третьего, но напоминая, «не забывая о себе». Аналогично действуют и остальные игроки. Таким образом, КР заполняет пробел между РН и РБ, прибавляя к РН «заботу о других», а к РБ «заботу о себе».

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с. [Vorob'ev, N.N. Teoriya igr dlya ehkonomistov-kibernetikov. – М.: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi li-teratury, 1985. – 272 s. (In Russian)]
2. Nash, J. Non-cooperative Games // The Annals of Mathematics – 1951. – Vol. 54, iss. 2. – P. 286–295.
3. Nash, J. Equilibrium Points in N-person Games // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1950. – Vol. 36. – P. 48–49.
4. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. – Киев: Наукова Думка, 1994. – 320 с. [Zhukovskii, V.I., Chikrii, A.A. Lineino-kvadratichnye differentsial'nye igr. – Kiev: Naukova Dumka, 1994. – 320 s. (In Russian)]
5. Viale, R. Routledge Handbook of Bounded Rationality. – London–New York: Routledge Taylor & Francis Group, 2021. – 680 p.
6. Жуковский В.И. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2009. – 336 с. [Zhukovskii, V.I. Kooperativnye igrы pri neopredelennosti i ikh prilozheniya. – М.: Editorial URSS, 2009. – 336 s. (In Russian)]
7. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 256 с. [Podinovskii, V.V., Nogin, V.D. Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach. – М.: Fizmatlit, 2007. – 256 s. (In Russian)]
8. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984. – 496 с. [Vorob'ev, N.N. Osnovy teorii igr. Beskoalitsionnye igrы. – М.: Nauka, 1984. – 496 s. (In Russian)]
9. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 1968. – 286 с. [Morozov, V.V., Sukharev, A.G., Fedorov, V.V. Issledovanie operatsii v zadachakh i upravleniyakh. – М.: Vysshaya shkola, 1968. – 286 s. (In Russian)]
10. Дмитрук А.В. Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. – М.: МАКС-ПРЕСС, 2012. – 172 с. [Dmitruk, A.V. Vypuklyi analiz. Ehlementarnyi vvodnyi kurs. – М.: MAKS-PRESS, 2012. – 172 s. (In Russian)]



Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком РАН Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 28.10.2024,
после доработки 09.02.2025.
Принята к публикации 27.02.2025.

Жуковский Владислав Иосифович – д-р физ.-мат. наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва,
✉ zhkvlad@yandex.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2345-9474>

Жуковская Лидия Владиславовна – д-р экон. наук, ФГБУН Центральный экономико-математический институт Российской академии наук, г. Москва,
✉ zhukovskaylv@mail.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4152-3161>

Смирнова Лидия Викторовна – канд. физ.-мат. наук, ГОУ ВО МО Государственный гуманитарно-технологический университет, г. Орехово-Зуево,
✉ smirnovaidiya@rambler.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8366-4675>

Высокос Мария Ивановна – канд. физ.-мат. наук, ГОУ ВО МО Государственный гуманитарно-технологический университет, г. Орехово-Зуево,
✉ mvysokos@mail.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9892-5735>

© 2025 г. Жуковский В.И., Жуковская Л.В., Смирнова Л.В., Высокос М.И.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

ON COALITIONAL RATIONALITY IN A THREE-PERSON GAME

V. I. Zhukovskiy*, L. V. Zhukovskaya**, L. V. Smirnova***, and M. I. Vysokos****

* Moscow State University, Moscow, Russia

**Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*****State University of Humanities and Technology, Orekhovo-Zuyevo, Russia

✉ zhkvlad@yandex.ru, ✉ zhukovskaylv@mail.ru, ✉ smirnovaidiya@rambler.ru, ✉ mvysokos@mail.ru

Abstract. To determine the solution of any game in mathematical game theory, it is necessary to establish what behavior of the players should be considered optimal. In noncooperative games (games without coalitions), the concept of optimality is related, e.g., to the concepts of Nash and Berge equilibria. Optimality in the theory of cooperative games is characterized by the conditions of individual and collective rationality. This paper considers a three-person cooperative game in normal form. For this game, the concept of coalitional rationality is introduced by embracing the conditions of individual and collective rationality with some combination of the concepts of Nash and Berge equilibria. Sufficient conditions are established under which the game has a coalitional equilibrium of this type. In addition, the existence of such a solution in mixed strategies is proved in the case of continuous payoff functions and compact strategy sets of players.

Keywords: maximin, Pareto maximum, Slater maximum, coalitional rationality, Germeier convolution, mixed strategies.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ НА ОСНОВЕ ТЕКСТОВ И СВЯЗЕЙ СОАВТОРСТВА (НА ПРИМЕРЕ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ)

Д. А. Губанов*, В. С. Мельничук**

***Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва

*✉ dmitry.a.g@gmail.com, **✉ vs.melnichuk09@gmail.com

Аннотация. Расчет профилей научных публикаций играет ключевую роль в систематизации научных знаний и поддержке принятия научных решений. Предложен метод формирования профилей публикаций в области теории управления, основанный на интеграции анализа текстов и анализа сетей соавторства. Сначала описан базовый алгоритм, который позволяет анализировать тексты публикаций при помощи тематического классификатора, затем приведена его усовершенствованная версия, учитывающая сетевые связи с помощью эвристического подхода. Исследование методов с применением экспертных оценок и количественных метрик показало, что комбинирование текстовых и сетевых данных значительно повышает точность профилей публикаций. Проверка гипотез о взаимосвязи тематического сходства и сетевой близости публикаций показывает обоснованность предложенного подхода, а также позволяет определить направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: сеть публикаций, профиль публикации, теория управления, графовые нейронные сети, анализ текстов.

ВВЕДЕНИЕ

Тематический анализ научных публикаций является важным инструментом для обоснования научных решений и выявления тенденций в различных областях знаний [1–6]. Одним из наиболее распространенных подходов к анализу текстов является тематическое моделирование [7], которое используется для расчета профилей научных публикаций. Однако когда аннотации или тексты публикаций ограничены по объему и (или) содержат неточные термины, использование только текстовой информации может привести к невысокой точности профилей.

Включение в рассмотрение сетевых данных, таких как связи соавторства или цитирования, уже продемонстрировало свою пользу в ряде дисциплин: учет структурных взаимосвязей между публикациями позволяет повысить качество классификации и более адекватно отразить скрытые тематические зависимости [8–10]. В частности, гра-

фовые нейронные сети (англ. *graph neural networks*, GNN) [11, 12] зарекомендовали себя как эффективный инструмент для анализа сетей, поскольку они позволяют одновременно учитывать и признаки узлов, и топологию графа.

Целью настоящего исследования является разработка и оценка улучшенных методов построения профилей публикаций, которые комбинируют анализ текстов и сетевой информации. Ниже кратко перечислены основные результаты работы.

- Рассмотрен базовый алгоритм для расчета профилей публикаций на основе тематического классификатора в области теории управления.

- Разработаны «расширенные» алгоритмы, учитывающие сетевые данные. В частности, эвристический метод, который дополняет базовый профиль за счет публикаций, связанных соавторством или цитированием, а также метод на основе графовых нейронных сетей (GNN), позволяющий глубоко интегрировать структурную информацию о связях между публикациями.

- Выполнена оценка эффективности предложенных алгоритмов, показавшая, что их применение дает более высокую точность, чем использование исключительно текстовой информации.

- Исследованы взаимосвязи между тематической схожестью публикаций (оцененной по их профилям) и сетевыми характеристиками (например, общими соседями в графе). В рамках этого анализа были сформулированы и проверены несколько гипотез.

В последующих разделах статьи приводятся детали реализации алгоритмов, используемые метрики и результаты экспериментов.

1. МЕТОДЫ

1.1. Базовый алгоритм расчета профилей

В данной работе для каждой научной публикации l строится *базовый профиль* $p(l)$ с использованием тематического классификатора Информационной системы анализа научной деятельности ИСАНД [13], основанного на принципах, которые изложены в работе [14]. Классификатор представляет собой иерархическую онтологию тем в теории управления (см. фрагмент на рис. 1, на котором длинные названия тем сокращены; полная версия классификатора доступна по адресу https://www.ipu.ru/sites/default/files/page_file/ClassifierCS.xlsx). Разработанная авторами форма¹ использовалась для разметки публикаций группой экспертов в целях дальнейшего сравнения результатов применения базового и сетевого алгоритмов разметки публикаций с экспертной разметкой.



Рис. 1. Тематический классификатор (онтология ИСАНД)

Профиль публикации $p(l)$ — это стохастический вектор $(p_{l_1}, p_{l_2}, \dots, p_{l_m})$, в котором каждая

компонента p_{li} равна нормированной частоте терминов, относящихся к теме i в публикации l .

1.2. Расширенные методы расчета профилей

Рассмотрим граф $G(V, E)$, в котором каждая вершина $l \in V$ соответствует одной публикации, а каждое ребро $(l, m) \in E$ означает связь соавторства, т. е. публикации l и m имеют непустое пересечение авторов публикаций $|K(l) \cap K(m)| > 0$, где $K(l)$ — множество авторов (соавторов) публикации l . В исходном графе каждая вершина l инициализируется вектором базового профиля $p(l)$.

1.2.1. Эвристический метод

Для повышения точности базового профиля публикации l учитываются публикации, связанные с l отношением соавторства и вышедшие в свет в течение фиксированного временного интервала $\delta \in \mathbb{N}$. По умолчанию $\delta = 4$ года, однако оно может быть скорректировано на основе эмпирических данных. Выбор данного значения обусловлен тем, что в ряде научных дисциплин, включая теорию управления, при оценке научной активности часто рассматривается период в 3–5 лет. В частности, методические рекомендации Высшей аттестационной комиссии (ВАК) предусматривают учет публикаций, вышедших в свет за последние пять лет. Таким образом, выбор $\delta = 4$ года является обоснованным с точки зрения оценки научной активности исследователей.

Расширенный профиль $p_e(l)$ является взвешенной комбинацией

$$p_e(l) = \alpha p(l) + (1 - \alpha) \frac{\sum_{m \in L_\delta(l)} w_{lm} p(m)}{\sum_{m \in L_\delta(l)} w_{lm}},$$

где $L_\delta(l)$ — множество публикаций, связанных с l и вышедших в свет в пределах временного окна δ , а $\alpha \in (0; 1]$ — коэффициент, регулирующий вклад исходного и сетевого профилей. Значение параметра α может быть выбрано эмпирически — например, подобрано по результатам кросс-валидации на отложенной выборке.

Коэффициент $w_{lm} \in [0; 1]$ отражает вклад публикации m в профиль l . В данном случае учитывается доля общих авторов:

$$w_{lm} = \frac{|K(l) \cap K(m)|}{|K(m)|}.$$

¹ URL: https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfR47ZQyjI9wrMgqRPP85j_uZCeUI95dNFnMR-2ruCfq3Xtlg/viewform

Заметим, что, если $\sum_{m \in L_\delta(l)} w_{lm} = 0$, т. е. у l нет связанных публикаций за последние δ лет, профиль $p_e(l)$ по определению равен $p(l)$. В целом эвристический метод позволяет сглаживать «шумы» в базовых профилях, а также формировать сетевой профиль для публикаций с отсутствующей или малоинформативной аннотацией.

1.2.2. Метод на основе графовых нейронных сетей

Для дальнейшего повышения точности профилей применяется графовая нейронная сеть (GNN), обучающаяся на графе $G(V, E)$. Изначально каждый узел $i \in V$ получает вектор признаков $\mathbf{h}_i^{(0)} = p(i)$. На k -м слое GNN вектор $\mathbf{h}_i^{(k)}$ пересчитывается с учетом соседей $\mathcal{N}(i)$ по формуле

$$\mathbf{h}_i^{(k)} = \sigma \left(\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{c_{ij}} W^{(k)} \mathbf{h}_j^{(k-1)} \right),$$

где $\mathbf{h}_i^{(k)}$ – новое представление (профиль) узла i в k -м слое нейронной сети; $W^{(k)}$ – обучаемая матрица весов (параметры модели); σ – нелинейная функция активации (например, ReLU); c_{ij} – нормировочный коэффициент, регулирующий вклад соседних узлов (например, $c_{ij} = \sqrt{\deg(i)\deg(j)}$); $\mathcal{N}(i)$ – множество соседей узла i в графе публикаций.

После прохождения нескольких слоев сети GNN получается итоговый вектор $\mathbf{h}_i^{(k)}$, который можно рассматривать как «глубоко интегрированный» в топологию сети профиль публикации i . При соответствующем обучении (с использованием метрики качества и целевой функции) данный подход позволяет выявить и учесть сложные зависимости между публикациями, что зачастую повышает точность и информативность профилей.

Таким образом, в настоящей работе предложены следующие подходы к расширению базового профиля научных публикаций.

- **Эвристический метод**, задающий линейную комбинацию профиля публикации с профилями связанных работ.

- **GNN-метод**, обеспечивающий более сложное агрегирование признаков на основе обучающей выборки.

Эти подходы обогащают базовые профили, учитывая косвенные тематические связи через соавторство, что способствует решению задач анали-

за научных публикаций, таких как классификация и рекомендация релевантных статей. Эвристический метод характеризуется высокой интерпретируемостью и простотой реализации; однако его точность может быть ограничена в сложных сетевых структурах, в которых взаимосвязи неочевидны. В свою очередь, метод на основе GNN способен выявлять сложные зависимости между публикациями, что делает его предпочтительным для задач, требующих глубокого анализа структуры соавторства. Однако этот метод может требовать больших объемов данных и значительных вычислительных ресурсов для эффективного обучения модели.

2. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для оценки эффективности методов расчета профилей публикаций в области теории управления использовалась выборка из 20 тысяч статей (база публикаций ИПУ РАН). Данные включали тексты (для построения текстовых признаков) и информацию о соавторстве (для построения сетевых признаков).

Были рассчитаны два вида профилей:

- базовые профили (только по текстам аннотаций),
- расширенные профили (с учетом сетевой структуры, т. е. связей соавторства).

Для количественной оценки качества рассчитанных профилей использовались следующие критерии.

- Экспертные оценки: специалисты предметной области оценивали релевантность тем, приписанных каждой публикации.

- Метрики качества: рассчитывались значения $\text{Precision}@k$, полноты и F_1 -меры. Для определения $\text{Precision}@k$ было отобрано k наиболее вероятных тем из профиля и выполнено их сопоставление с эталонными темами, определенными экспертами.

Далее в § 3 приведены результаты экспериментов, включающие анализ расстояний между различными профилями и проверку гипотез о взаимосвязи тематического сходства и сетевой близости публикаций.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Применение расширенного алгоритма, в котором учитывалась сетевая информация, позволило добиться существенного повышения точности относительно базового подхода. Например, эвристический метод (рис. 2) позволил достичь значения $\text{Precision}@k$ 37 %, в то время как базовый метод

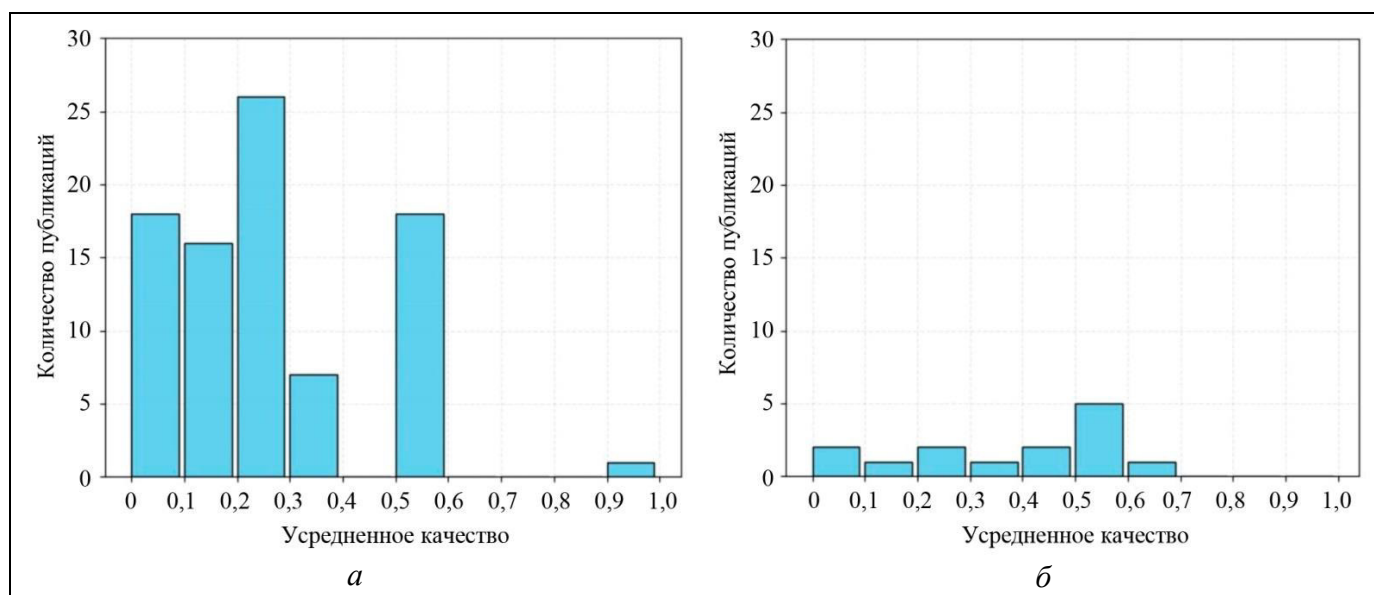


Рис. 2. Оценки качества методов построения профилей публикаций: *a* – базового (BaseAlgo, точность 25 % по аннотациям), *б* – сетевого (HAdvAlgo, точность 37 % по аннотациям). По горизонтали – усредненное качество профилей, по вертикали – число публикаций с таким качеством

обеспечил лишь 25 % (на размеченной экспертами выборке). Это свидетельствует о высокой полезности сетевых признаков для формирования тематических профилей.

В данном исследовании была разработана архитектура графовой нейронной сети (GNN), включающая три последовательных слоя графовой сверточной сети (англ. *graph convolutional network*, GCN) и слои регуляризации Dropout. Для оценки качества модели использовалось разбиение размеченной экспертами выборки (несколько сотен публикаций) в пропорции 70 % / 15 % / 15 % на обучающее, валидационное и тестовое подмножества. Обучение проводилось в течение 100 эпох, при этом итоговые параметры модели выбирались на основе наилучших результатов, достигнутых на валидационной выборке. Среднее значение показателя $Precision@k$ (при $k = 3$) по всем запускам составило 39 %, это на 2 % выше по сравнению с ранее применявшимся эвристическим методом, что свидетельствует о повышении точности предсказаний.

3.1. Анализ расстояний между профилями

Для более детального сравнения было проанализировано распределение расстояний между расширенными и базовыми профилями для всего множества публикаций (рис. 3). Поскольку использовалась метрика $d \in [0, 1]$ (L1), на графике заметны два характерных пика:

- Первый пик при $d = 0$ соответствует случаям, когда у автора только одна публикация. В такой ситуации сетевой профиль практически совпадает с базовым.

- Второй пик при высоких значениях d наблюдается для публикаций, в которых сетевая информация (соавторство) сильно влияет на итоговый профиль и (или) у которых текстовые данные слишком скудны (что затрудняет адекватный расчет базового профиля).

В частности, если аннотация очень коротка или содержит мало релевантных терминов, то базовый профиль может оказаться слабоинформативным. В этих случаях влияние сетевых данных

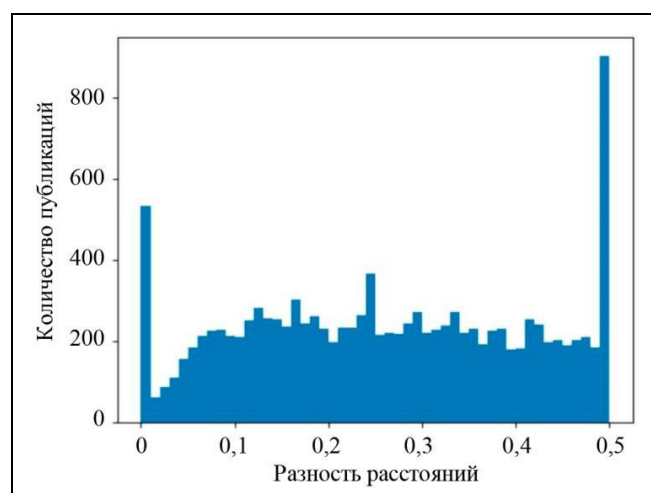


Рис. 3. Распределение расстояний между базовыми и расширенными профилями

оказывается наиболее существенным, и расстояние между профилями (базовым и расширенным) заметно возрастает.

3.2. Проверка гипотез о взаимосвязи тематического сходства и сетевой близости публикаций

Также были исследованы гипотезы, касающиеся связи между тематическим сходством (по профилям) и сетевой близостью (по графу соавторства) публикаций.

Гипотеза 1. Профили случайно выбранных публикаций отличаются друг от друга.

Расчеты подтверждают эту гипотезу: среднее расстояние между профилями случайных публикаций составляет около 0,9 (при значениях от 0 до 1), что указывает на значительное разнообразие тем в области теории управления.

Гипотеза 2. Чем ближе содержание аннотаций двух случайно выбранных публикаций, тем ближе их профили.

Проверка с помощью векторных представлений (эмбеддингов, англ. *embeddings*; для их построения использовались различные языковые модели – RuSciBert, SciBert, Sentence Embeddings) не показала существенной корреляции. Вероятно, текстовые аннотации слишком коротки или неоднородны, чтобы гарантировать согласование с тематическими профилями, дополненными сетевой информацией. В дальнейшем необходим более детальный анализ природы расхождений (количество терминов, вариативность языка и т. д.)

Гипотеза 3. Чем больше терминов в аннотации, тем выше корреляция между профилями и векторными представлениями (*embeddings*) этих аннотаций.

Эта гипотеза подтверждается: коэффициент корреляции возрастает от 0,25 (при пяти терминах) до 0,88 (при восьми терминах). Результат подчеркивает важность полноты и точности аннотаций в части используемых терминов.

Гипотеза 4. Сходство профилей двух публикаций зависит от:

- наличия связи соавторства,
- совпадения состава авторов.

Данная гипотеза подтверждается: для пар публикаций с общими авторами среднее расстояние между профилями (0,63) оказывается заметно меньше, чем для всех прочих пар (0,88).

Гипотеза 5. Чем меньше временной интервал между публикациями, тем ближе их профили.

Предполагается, что в определенные периоды в данной области исследований могут возникать

всплески интереса к конкретным технологиям или явлениям (например, «большие данные», «машинное обучение»), что должно быть отражено в содержании публикаций. Такие всплески могут быть связаны с фазами цикла популярности технологий. Однако в области теории управления данная гипотеза не находит подтверждения. Анализ показывает, что для случайных пар публикаций значимых изменений в уровне схожести их профилей в зависимости от временного интервала не наблюдается. В то же время для неслучайных пар публикаций такая зависимость имеет место (неслучайными называются пары публикаций, которые связаны между собой в сети).

Гипотеза 6. Сходство профилей двух публикаций зависит от топологической силы связи между ними.

Гипотеза не подтверждена: полученные данные (рис. 4) не выявили значимой корреляции между количеством общих соседей в сети и расстоянием между профилями (расстояние равно нулю, если профили равны). Под топологической силой связи понимается количество связей соавторства между публикациями (топологическая сила связи равна нулю, если связи соавторства отсутствуют).

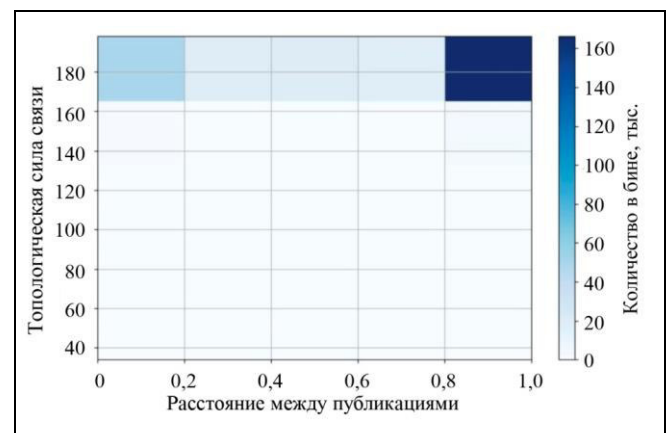


Рис. 4. Зависимость близости публикаций от топологической силы связи между ними. Бин – ячейка, разбиение N на M равных прямоугольников

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты подтверждают, что учет сетевых признаков (соавторства) действительно повышает точность построения тематических профилей. Эвристический метод ценен своей простотой и интерпретируемостью, что особенно удобно на этапе первичной оценки профилей и анализа предметной области. В то же время применение этого метода показывает и его недостатки: если у авторов мало



статей либо аннотации слишком короткие, то качество базового профиля остается низким, и даже сетевая информация не всегда компенсирует дефицит текстовых данных.

При анализе гипотез было определено значительное разнообразие тем в области теории управления (гипотеза 1) и то, что «текстовое сходство» (гипотеза 2) не обязательно ведет к сходству профилей, особенно при неполных аннотациях. При этом чем больше терминов в публикации, тем больше сходство эмбедингов определяет сходство профилей (гипотеза 3). Сходство профилей зависит от наличия связи между публикациями (гипотеза 4). Но результаты проверки других гипотез (5 и 6) также говорят о том, что близость по времени или большое число общих соседей еще не гарантируют близости тематических профилей – требуется учет дополнительных факторов и дополнительные исследования.

К ограничениям исследования можно отнести разреженность данных (небольшое число публикаций на одного автора) и неоднородное качество аннотаций, используемых для построения базовых профилей публикаций. Перспективны дальнейшие исследования того, как использование сетей цитирования, ключевых слов, более длинных текстов (полнотекстовые статьи) и продвинутых GNN-моделей (например, с механизмом внимания, англ. *graph attention networks*) может повысить точность профилей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложенные гибридные методы, объединяющие текстовые и сетевые признаки, значительно превосходят базовый (текстовый) подход при построении тематических профилей научных публикаций. Проверка гипотез о тематическом сходстве и сетевой близости показала, что в ряде случаев сетевые связи оказываются гораздо более полезным показателем для определения тематики, чем содержание коротких аннотаций. Полученные результаты будут использованы для развития методов анализа научных публикаций и систематизации знаний в области теории управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крыжановская С.Ю., Власов А.В., Еремеев М.А., Воронцов К.В. Полуавтоматическая суммаризация тематических подборок научных публикаций: задачи и подходы // Тезисы докладов 20-й Всероссийской конференции с международ-

ным участием «Математические методы распознавания образов». – Москва, 2021. – С. 333–338. [Kryzhanovskaya, S.Y., Vlasov, A.V., Eremeev, M.A., Vorontsov, K.V. Poluavtomaticheskaya summarizatsiya tematicheskikh podborok nauchnykh publikatsii: zadachi i podkhody // Tezisy dokladov 20-i Vserossiiskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem «Matematicheskie metody raspoznavaniya obrazov». – Moscow, 2021. – P. 333–338. (In Russian)]

2. Shibayama, S., Yin, D., Matsumoto, K. Measuring Novelty in Science with Word Embedding // PLoS ONE. – 2021. – No. 7. – P. 1–16.

3. Yuan, W., Liu, P., Neubig, G. Can We Automate Scientific Reviewing? // Journal of Artificial Intelligence Research. – 2022. – No. 75. – P. 171–212.

4. Cachola, I., Lo, K., Cohan, A., Weld, D. TLDR: Extreme Summarization of Scientific Documents // Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP 2020. – 2020. – P. 4766–4777.

5. Bao, P., Hong, W., Li, X. Predicting Paper Acceptance via Interpretable Decision Sets. // In: Companion Proceedings of the Web Conference 2021 (WWW '21). – New York: Association for Computing Machinery, 2021. – P. 461–467.

6. Kasanishi, T., Isonuma, M., Mori, J., Sakata, I. SciReviewGen: A Large-scale Dataset for Automatic Literature Review Generation. – arXiv:2305.15186, 2023. – P. 1–19. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.15186>

7. Blei, D.M., Ng, A.Y., Jordan, M.I. Latent Dirichlet Allocation // Journal of Machine Learning Research. – 2003. – No. 3. – P. 993–1022.

8. Hasegawa, T., Arvidsson, H., Tudzarovski, N., et al. Edge-Based Graph Neural Networks for Cell-Graph Modeling and Prediction // Information Processing in Medical Imaging. – 2023. – Vol. 13939. – P. 265–277.

9. Xiong, C., Li, W., Liu, Y., Wang, M. Multi-Dimensional Edge Features Graph Neural Network on Few-Shot Image Classification // IEEE Signal Processing Letters. – 2021. – Vol. 28. – P. 573–577.

10. Faber, L., Lu, Y., Wattenhofer, R. Should Graph Neural Networks Use Features, Edges, Or Both? – arXiv: 2103.06857.arXiv, 2021. – P. 1–12. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.06857>

11. Zhou, J., Cui, G., Hu, S., et al. Graph Neural Networks: A Review of Methods and Applications // AI Open. – 2020. – Vol. 1. – P. 57–81.

12. Kipf, T.N., Welling, M. Semi-Supervised Classification with Graph Convolutional Networks. – arXiv:1609.02907, 2017. – P. 1–14. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1609.02907>

13. Губанов Д.А., Кузнецов О.П., Суховеров В.С., Чхартшвили А.Г. О построении профилей в тематическом пространстве теории управления // Материалы 9-й Международной конференции «Знания-Онтологии-Теории». – Новосибирск, 2023. – С. 89–94. [Gubanov, D.A., Kuznetsov, O.P., Sukhoverov, V.S., Chkhartshvili, A.G. O postroenii profilei v tematicheskom prostranstve teorii upravleniya // Materialy 9-i Mezhdunarodnoi konferentsii “Znaniya-Ontologii-Teorii”. – Novosibirsk, 2023. – P. 89–94. (In Russian)]

14. Кузнецов О.П., Суховеров В.С. Онтологический подход к оценке тематики научного текста // Онтология проектирования. – 2016. – Т. 6, № 1. – С. 55–66. [Kuznetsov, O.P., Sukhoverov, V.S. An Ontological Approach to Determining the Subject Matter of Scientific Text // Ontology of Designing. – 2016. – Vol. 6, no. 1. – P. 55–66. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии
О.П. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 01.11.2024,
после доработки 28.02.2025.
Принята к публикации 06.03.2025.

Губанов Дмитрий Алексеевич – д-р техн. наук, Институт
проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва
✉ dmitry.a.g@gmail.com
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0099-3386>

Мельничук Владислав Сергеевич – техник, Институт про-
блем управления им. В. А. Трапезникова РАН; студент (бака-
лавр), МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва
✉ vs.melnichuk09@gmail.com
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-8252-0804>

© 2025 г. Губанов Д. А., Мельничук В. С.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)
«Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

CONSTRUCTING SCIENTIFIC PUBLICATION PROFILES BASED ON TEXTS AND COAUTHORSHIP CONNECTIONS (IN THE FIELD OF CONTROL THEORY AND ITS APPLICATIONS)

D. A. Gubanov* and V. S. Melnichuk**

***Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia,
**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*✉ dmitry.a.g@gmail.com, **✉ vs.melnichuk09@gmail.com

Abstract. The calculation of scientific publication profiles is crucial in the systematization of scientific knowledge and support for scientific decision-making. This paper proposes a method for forming publication profiles in the field of control theory, based on the integration of text analysis and coauthorship network analysis. We describe a basic algorithm that analyzes publication texts by a thematic classifier as well as its enhanced version that considers network connections within a heuristic approach. The methods are examined using expert assessments and quantitative metrics; according to the examination results, combining textual and network data significantly improves the accuracy of publication profiles. Hypotheses about a relationship between the thematic similarity and network proximity of publications are tested, and the approach proposed is validated accordingly. In addition, directions for further research are identified.

Keywords: publication network, publication profile, control theory, graph neural networks, text analysis.



XXXII МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТЬЮ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ»

Состоявшаяся в ноябре 2024 г. в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН) XXXII Международная научная конференция «Проблемы управления безопасностью сложных систем» была посвящена памяти заслуженного деятеля науки РФ, доктора технических наук, профессора, основателя конференции Владимира Васильевича Кульбы. Конференция проводилась в очном формате, в заседании приняли участие более 100 человек.

Пленарное заседание открыл директор Института проблем управления академик РАН *Д.А. Новиков*, вступительное слово которого было посвящено памяти бессменного руководителя программного комитета конференции В.В. Кульбы.

Основным этапам научной деятельности и направлениям фундаментальных и прикладных исследований В.В. Кульбы посвятил свое выступление председательствовавший на пленарном заседании *И.В. Чернов*. Как подчеркнул докладчик, за время работы в ИПУ РАН с 1962 по 2024 г. В.В. Кульба возглавлял целый ряд крупных научных направлений. Под руководством Владимира Васильевича и при его непосредственном участии разработаны: методы анализа сложных систем управления; теоретические основы использования принципов модульности и типизации при проектировании систем обработки данных; методы и технологии автоматизации проектирования программного и информационного обеспечения систем с открытой архитектурой и реального времени; методологические основы повышения эффективности организационного управления в условиях чрезвычайных ситуаций; методы решения теоретических и прикладных проблем обеспечения информационной безопасности систем управления на организационном и программно-техническом уровнях; методология информационного управления; теоретические и методологические основы сценарного управления.

Особое внимание выступающий уделил любимому детищу Владимира Васильевича – конференции «Проблемы управления безопасностью слож-

ных систем». История организации конференции уходит своими корнями в начало 1990-х гг., когда, поддержав предложение В.В. Кульбы, Институт проблем управления выступил с инициативой проведения Международной научной конференции «Проблемы управления в чрезвычайных ситуациях». Инициатива была поддержана Президиумом РАН и Государственным комитетом по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий при Президенте РСФСР (впоследствии преобразованном в МЧС РФ). К числу организаторов конференции помимо ИПУ РАН были привлечены Научный совет по государственной научно-технической программе «Безопасность», Институт прикладной математики РАН, Институт автоматизации проектирования РАН, Институт проблем передачи информации РАН, Санкт-Петербургский государственный университет. Начиная с 1999 г. (VII конференция) одним из организаторов конференции стал Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ).

Первоначально основной тематикой конференции были фундаментальные и прикладные исследования в области повышения эффективности управления в условиях чрезвычайных ситуаций. В дальнейшем в связи с появлением новых научных направлений в рассматриваемой и смежных предметных областях и с существенным расширением тематики представляемых докладов, а также в соответствии с пожеланиями большинства постоянных участников оргкомитетом конференции было принято решение изменить ее название на нынешнее. С тех пор (а точнее, с 1998 г.) и по настоящее время не только название, но и состав секций конференции остаются практически неизменными, и нынешняя XXXII-я конференция не является исключением.

В мероприятии приняли участие 104 автора из 33 организаций, представившие 73 доклада. Работа велась в рамках следующих секций.

1. Общетеоретические и методологические вопросы обеспечения безопасности.

2. Проблемы обеспечения экономической и социально-политической безопасности.
3. Проблемы обеспечения информационной безопасности.
4. Кибербезопасность. Особенности обеспечения безопасности в социальных сетях.
5. Экологическая и техногенная безопасность.
6. Методы моделирования и принятия решений при управлении безопасностью сложных систем.
7. Автоматизированные системы и средства обеспечения безопасности сложных систем.

Значительное число докладов, представленных на конференции, посвящено исследованию и поиску путей решения проблем обеспечения ключевых составляющих национальной безопасности – военно-политической, научно- и производственно-технологической, социальной, экономической, информационной, техногенной. Актуальность рассматриваемой проблематики, представляющей собой один из наиболее сложных комплексов задач теории и методологии организационного управления, а также ряда смежных научных дисциплин, существенно возросла в последние годы, что связано с широким множеством объективных причин геополитического характера и продолжающимся ростом международной напряженности.

В докладе *В.В. Шумова* «Анализ факторов, влияющих на достижение целей специальной военной операции» рассмотрена концептуальная формализованная модель оценки уровня национальной безопасности государства с использованием степенной производственной функции, отражающая дихотомию человеческих ценностей развития и самосохранения. Разработанное автором формализованное представление функции безопасности структурно является производением двух компонент: функции суверенности (развития), основанной на использовании степенной функции типа Кобба – Дугласа, и функции сохранения. Первая функция учитывает комплекс географических, демографических и социотехнологических факторов, позволяющих оценивать геопотенциал государства, вторая функция отражает способность государства противостоять деструктивным процессам (в том числе инспирированным извне) и устойчиво развиваться. В докладе приведены результаты моделирования, на основе анализа которых сформированы оценки уровня безопасности России и ее места и роли в мировых процессах на фоне происходящей геополитической инверсии (смены мирового лидера), а также оценки безопасности Европейского Союза и Украины в разрезе ее регионов (по состоянию на 2013 г., т. е. на период, предшествующий «евромайдану»,

спровоцировавшему острый политический и экономический кризис).

Основной целью модельных исследований является оценка возможных последствий существенного усложнения военно-политической ситуации в мире, связанного с ростом агрессивности действий геополитических противников нашей страны, направленных на ее ослабление, нанесение России стратегического поражения и в конечном итоге ее расчленение. Результаты проведенного анализа, как отмечается в докладе, показывают, что потенциал наших ответных действий по парированию экзистенциальных угроз российскому государству и обществу превышает возможности западных стран, действия правящих элит которых не отвечают жизненным интересам их народов, что создает объективные условия, благоприятствующие достижению поставленных целей обеспечения безопасности и суверенитета Российской Федерации.

Проблемам повышения эффективности разработки современных систем вооружений посвящен доклад *С.В. Чваркова, С.Н. Подчуфарова, Р.М. Куфрика* «О новом подходе к проектированию сложных организационно-технических систем». В первой части доклада в качестве одной из существенных проблем авторы выделяют не всегда соответствующий современным реалиям уровень исходных целевых постановок задач, которые содержатся в тактико-технических заданиях на разработку сложных изделий и систем, а также неполное соответствие задаваемых требований потребностям практики, что касается прежде всего разработки информационно-управляющих систем, являющихся неотъемлемой частью современных комплексов и систем вооружений, во многом определяющей эффективность их боевого применения. Причиной такого положения, по мнению авторов, является недостаточный уровень корректности описаний конкретных предметных областей (включая смежные), что, с одной стороны, объясняется высоким динамизмом развития информационных технологий, с другой – нерешенностью проблем перехода от неформализованного (лингвистического) описания к формализованному (математическому) представлению решаемых сложными организационно-техническими системами задач управления.

В работе проводится детальный анализ целого ряда организационно-технологических недостатков существующей в настоящее время практики управления разработкой сложных систем рассматриваемого класса, к которым относятся: определенные диспропорции в распределении средств на разработку и модернизацию программно-



математического и аппаратно-технического обеспечения процессов проектирования; нерациональное стремление к созданию дорогих или уникальных, а не унифицированных комплексов управления; недостаточное внимание к разработке прогнозных моделей, позволяющих определять направления развития систем вооружения и проводить анализ характера вооруженной борьбы с учетом асимметрии применения вооруженных сил и невоенных средств и т. д.

На основе результатов проведенного анализа (в том числе и зарубежного опыта решения аналогичных задач) авторами предложен подход к решению рассматриваемых проблем, который позволяет объединить задачи обеспечения национальной безопасности и обороны с задачами экономического, научно-технического и производственно-технологического развития государства с учетом имеющихся реальных возможностей и ограничений, а также уровня развития аналогичных разработок у вероятных противников.

В докладе *Н.И. Комкова, В.В. Сутягина, Н.Н. Володиной* «Возможности активной адаптации экономики РФ к новым вызовам» рассматривается комплекс проблем развития экономического потенциала как важнейшего компонента национальной безопасности нашей страны. Как отмечается в докладе, необходимость противодействия страны военно-политическому и санкционному давлению геополитических противников России, а также попыткам изолировать ее национальную экономику потребовала быстрой адаптации системы государственного управления к возникшим угрозам, благодаря которой, вопреки ожиданиям недоброжелателей, экономика РФ стабильно растет, как и уровень поддержки населением руководства страны. Одновременно с этим сегодня на первый план выходит комплекс новых проблем обеспечения экономического роста в сложившихся неблагоприятных условиях.

Основное внимание в докладе уделено построению и анализу инфологической модели полного воспроизводственного цикла на основе достижений научно-технического прогресса в условиях регулярной смены высоких технологий, формируемых на основе инноваций. Ключевым звеном рассматриваемой модели, подчеркивают авторы, является наука, эффективная реализация потенциала которой во многом определяет базовые направления и темпы инновационного развития современной экономики.

Проведенный авторами ретроспективный анализ показал, что низкая доля высокотехнологической продукции в экономике России с начала с

2000-х гг. была во многом обусловлена доминированием и доступностью импортируемых из стран ЕС и США инновационных технологий. Это фактически блокировало развитие отечественной научной сферы и способствовало снижению интереса промышленных компаний к перспективам своего развития, что в конечном итоге привело к падению объемов и уровня прогнозных исследований по проблемам научно-технологического развития. Оценивая возможности экономического роста в современных условиях, авторы выделяют ряд ключевых факторов, непосредственно влияющих на рассматриваемые процессы, среди которых важнейшими являются: состояние инновационной сферы и ее сопряженность с экономикой; управляемость и скоординированность процессов развития экономики и инновационной сферы; способность к адаптации экономики к эффективному освоению прогрессивных инновационных решений и технологий; наличие необходимых и достаточных финансовых ресурсов, а также решительность и целенаправленность действий органов исполнительной власти по обеспечению согласованности интересов хозяйствующих субъектов и развитию потенциала инновационной сферы и экономики в целом. Инструментом решения поставленных задач инновационного развития, считают авторы работы, должен стать механизм государственного индикативного планирования, формирующий плановые задания компаниям и предприятиям, согласованные с устойчивой налоговой системой, стабильным финансированием и координацией деятельности Центрального банка с финансовыми структурами, обеспечивающими эмиссию денежных средств и облигаций.

Изложению результатов исследования различных методологических и прикладных проблем повышения эффективности процессов управления обеспечением национальной безопасности посвящена достаточно широкая группа представленных на конференции докладов: *Г.Г. Малинецкий, Т.С. Ахромеева, С.А. Торопыгина* «Управление безопасностью сложных систем в новой реальности»; *В.В. Цыганов* «Комплекс моделей стратегической безопасности периметра России»; *Е.А. Дербин* «Актуальные критические угрозы информационно-психологической безопасности социальных объектов»; *А.Н. Фомичев* «Метод псевдоретроспективного манипулирования сознанием как инструмент информационной войны»; *Н.Г. Кереселидзе* «Модель информационной безопасности в случае двух источников дезинформации»; *Г.Г. Малинецкий, В.С. Смолин* «Синергетические основы системного подхода к безопасности

сложных систем»; *А.В. Рожнов* «Обоснование применимости гибридных моделей анализа среды функционирования в описательных примерах оценивания эффективности сложных систем»; *О.И. Кривошеев* «Военная безопасность как фактор социально-экономического и инновационного развития общественных систем»; *Д.Е. Фесенко* «Обоснование Проекта разработки Карты градостроительных рисков применительно к актуальным военно-стратегическим условиям в РФ»; *В.И. Меденников* «Математическое моделирование экономической безопасности в рамках единой цифровой платформы управления производством»; *В.В. Леценко, И.Н. Пантелеймонов* «Средства систем лазерной космической связи»; *Н.Н. Лантер* «Перспективы сетевого сотрудничества в инновационной системе РФ в новых условиях»; *А.Е. Абрамов, А.А. Сороколад, М.И. Чернова* «Потенциал Программы долгосрочных сбережений как инструмента улучшения пенсионного благосостояния граждан»; *Р.Е. Торгаев* «Экологический суверенитет в условиях устойчивого развития региональных мезосистем»; *О.Б.о. Байрамов* «Об устойчивости страхования инвестиций и займов в микрофинансировании».

Методологическим и прикладным вопросам использования технологий сценарного и когнитивного моделирования в качестве инструмента информационной поддержки процессов подготовки и реализации управленческих решений в условиях неопределенности и риска посвящен целый ряд интересных докладов, среди которых можно отметить работы *И.В. Чернова* «Направления применения сценарного подхода к управлению безопасностью организационных систем»; *З.К. Авдеевой, О.А. Волгиной, Е.Д. Ермолаева, А.А. Черешко* «Разработка системы поддержки прогнозирования на основе интеграции методов когнитивного анализа, мониторинга информационных источников и анализа временных рядов»; *Д.А. Кононова* «Исследование характеристик управления безопасностью сложных систем»; *В.Л. Шульца, И.В. Чернова, А.Б. Шелкова* «Сценарные технологии снижения неопределенности в управлении безопасностью»; *Г.В. Гореловой* «К вопросу анализа устойчивости развития территорий, имитационное моделирование»; *Н.В. Команича* «Структура, принципы и проблемы группового иерархического управления региональной безопасностью»; *Е.Д. Ермолаева, С.В. Феоктистова* «Применимость методов сценарного анализа в сфере информационной безопасности РФ»; *В.Р. Фейзова* «Влияние государ-

ственной системы управления на протестный потенциал общества».

Большая группа представленных на конференции докладов посвящена проблемам обеспечения информационной и кибербезопасности, актуальность которых в эпоху бурного развития цифровых технологий непрерывно возрастает.

В докладе *Р.В. Мецрякова, О.О. Евсютина, А.О. Исхаковой, А.В. Душкина* «Обеспечение информационной безопасности слабоструктурированной информации при решении задач защиты информации» рассматриваются вопросы совершенствования механизмов защиты данных, не имеющих фиксированного формата и четкой структуры. Как отмечается в представленной работе, неоднородность слабоструктурированных данных, сложность их обработки и обеспечения сохранности, а также значительный объем (здесь можно добавить, что, по различным оценкам, доля данных рассматриваемого типа в общем объеме корпоративной информации может достигать 80-90 %) требуют создания новых методов оценки информационной безопасности. Основное внимание авторы уделяют анализу перспективных направлений развития систем информационной безопасности, которые, с одной стороны, должны обеспечивать достаточный уровень защиты инфраструктуры и обеспечения сохранности слабоструктурированных данных с учетом особенностей их сбора, обновления, обработки и анализа, с другой – удовлетворять требованиям по скорости обработки и коммуникации информационной системы с источниками данных и конечными пользователями.

Проблемам предотвращения инцидентов, связанных с хакерскими кибератаками на российские распределенные информационные системы и ресурсы, посвящен доклад *Н.Ф. Володиной, А.Д. Козлова, Н.Л. Ноги* «Методика оценки риска информационной безопасности сложных систем». Авторы отмечают, что в настоящее время в результате глобальной цифровизации и в условиях непрекращающихся атак на российские информационные ресурсы со стороны геополитических противников нашей страны актуальность и одновременно с этим сложность решения задач обеспечения информационной безопасности существенно возрастают. В настоящее время изменяется и направленность хакерских атак, целью которых становится как дестабилизация социально-политической обстановки в стране, так и нанесение прямого экономического ущерба путем организации утечек персональных данных и наруше-



ния работоспособности (вплоть до полного разрушения) объектов критической информационной инфраструктуры.

В докладе изложены результаты разработки методологии оценки рисков информационной безопасности на основе математического аппарата нечеткой логики и регрессионного анализа, позволяющей определять совокупность параметров, значения которых в наибольшей степени влияют на возможность реализации различного рода угроз через выявленные уязвимости в узлах и иных структурных компонентах сложных распределенных информационных систем. Практическое применение разработанной авторами методологии позволяет вычислять прогнозные значения уровня риска в условиях неопределенности и неочевидности его зависимости от широкого множества факторов, включая субъективные. Это позволяет повысить эффективность принятия решений по разработке и организации превентивных мер по предотвращению или снижению ущерба от вредоносных атак на информационные системы на наиболее опасных направлениях, а также минимизировать затраты на мероприятия по защите информационных ресурсов.

Повышению эффективности защиты информации в корпоративных сетях крупных организаций посвящен доклад *В.М. Алексеева, С.Н. Чичкова* «Разработка модели анализатора фишинговых атак». Для решения рассматриваемой проблемы авторами разработана двухуровневая структура системы защиты информации в корпоративной полносвязной сети с применением интеллектуальных анализаторов различного типа, позволяющих распознавать и блокировать компьютерные атаки. На первом (внешнем) уровне анализаторы осуществляют контроль и анализ потоков информации на входе в корпоративную сеть, обеспечивая выявление и предотвращение атак типа «отказ в обслуживании» различных видов, фишинговых атак, атак на приложения и иных попыток проникновения внутрь сети извне. На втором уровне анализаторы осуществляют мониторинг активности внутри корпоративной сети, просматривая трафик между автоматизированными рабочими местами пользователей и администраторов, серверами систем, подключенными мобильными устройствами, а также сетевым и периферийным оборудованием, что позволяет выявлять зараженные устройства, предотвращать распространение вредоносного программного обеспечения и т. д.

При разработке и реализации анализаторов применяются методы статистического анализа, временных рядов, теории вероятностей и стати-

стики, машинного обучения, оптимизации параметров сетевого мониторинга и распределения ресурсов, а также алгоритмы хеширования и графовые алгоритмы моделирования сетевых взаимодействий. В докладе детально рассмотрены особенности основных методов и подходов к разработке анализатора фишинговых атак на базе их математической интерпретации, а также технологий сигнатурного и эвристического анализа.

Поиску путей решения широкого круга разнообразных задач обеспечения информационной безопасности автоматизированных систем и требуемого уровня защиты данных посвящена большая группа представленных на конференции докладов: *В.В. Ведищев, Р.В. Батищев* «Постановка задачи оптимизации выбора мер и средств защиты информации для государственных информационных систем»; *Р.Э. Асратян, С.С. Владимирова, Е.А. Курако, В.Л. Орлов* «Особенности обеспечения технологической независимости в разработках систем с сервис-браузерной архитектурой»; *А.Д. Домашкин, Л.Н. Логинова* «Сравнительный анализ алгоритмов машинного обучения для обнаружения аномалий в информационных системах»; *М.В. Ведмедева, В.Г. Миронова* «Эволюция информационных систем: от простых решений к комплексным инфраструктурам»; *Л.Е. Мистров* «Основы обоснования критерия информационной безопасности организационно-технических систем»; *А.А. Широкий* «Метод экспресс-оценки рисков компьютерной сети с топологией “звезда”»; *И.А. Андронов, В.Г. Сидоренко* «Преимущества применения искусственного интеллекта при работе с документами в части обеспечения информационной безопасности»; *А.А. Сидоренко, Ю.Р. Тедеев* «Повышение информационной безопасности каналов управления путем применения корректирующих кодов»; *А.Ю. Исхаков, М.В. Мамченко* «Алгоритм аутентификации пользователей на основе поведенческой аналитики и машинного обучения для веб-ресурсов»; *А.Г. Уймин* «Система непрерывно-дискретной биометрической идентификации на основе анализа потока данных компьютерной мыши»; *А.А. Саломатин* «Алгоритм аутентификации пользователей на основе статических характеристик аппаратного обеспечения компьютеров»; *А.Г. Чебан, Е.А. Анисимова* «Принципы организации и построения защищенных систем видеоконференции»; *Л.Н. Логинова, А.Д. Дроздов* «Анализ угроз информационной безопасности при использовании Telegram-ботов в бизнесе»; *В.П. Куминов, В.Г. Сидоренко* «Решение задач анализа криптографической стойкости генераторов псевдослучайных чисел с использованием машин-

ного обучения»; *Д.И. Правиков, В.А. Мурашкин* «Подходы к количественной оценке информационной безопасности на предприятии ТЭК»; *В.О. Сиротюк* «Решение задач повышения безопасности цифровых систем управления интеллектуальной собственностью»; *С.К. Сомов* «Способы сокращения вычислительной сложности алгоритмов поиска оптимального размещения массивов данных в распределенных системах обработки данных».

Традиционно разнообразными по тематике являются представленные на конференции доклады, посвященные проблемам предупреждения и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера, а также обеспечения безопасности и надежности функционирования транспортных систем.

В первой тематической группе представленных докладов можно выделить следующие работы: *В.А. Акимов, Д.В. Буряк, Е.О. Иванова* «Формы статистического наблюдения в отношении гидрологической обстановки в населенных пунктах при паводках, вызванных обильными осадками»; *И.Ю. Олтян* «Об управлении индивидуальным риском гибели и получения вреда здоровью в ЧС, обусловленных катастрофическими наводнениями»; *В.А. Акимов, Е.О. Иванова, М.А. Пуликов* «Формы статистического наблюдения в отношении противопожарной обстановки на территориях лесных массивов»; *В.А. Ткаченко* «Обратная связь при проведении аудита систем управления промышленной безопасностью»; *В.А. Зорин* «Атака на робототехнические системы как способ информационно-технического воздействия»; *В.К. Мусаев* «Численное моделирование сосредоточенного вертикального взрывного воздействия на плиту со сплошным фундаментом»; *О.Б. Скворцов, В.И. Стащенко* «Методы виброакустической диагностики оборудования».

Проблемам обеспечения безопасности транспортных систем и объектов посвящены работы *Е.А. Куклева, Д.М. Мельника* «Интеллектуальная поддержка принятий решений при управлении безопасностью полетов поставщиков услуг гражданской авиации на основе сценарного моделирования редких событий»; *В.Г. Новикова* «Обеспечение безопасности движения поездов при координатном способе интервального регулирования»; *С.В. Макишаква* «Система поддержки принятия решений в задачах технического переоснащения в железнодорожной отрасли»; *В.М. Алексева, Д.Н. Хусенова* «Модель распределенного сенсора с использованием технологии многоволоконного мультиплексирования для контроля местоположе-

ния подвижного состава»; *Л.А. Баранова, Чжан Юнцян* «Повышение безопасности движения поездов на линии метрополитена при компенсируемых возмущениях»; *А.И. Сафронова* «Применение дополненного аппарата сетей Петри для моделирования процесса автоматизированного построения плановых графиков движения пассажирских поездов метрополитена»; *Н.Д. Ивановой, И.Ф. Михалевича* «Применение эмулируемой виртуальной среды PNETLab для моделирования интеллектуальных систем водного транспорта»; *Л.А. Баранова, И.Ф. Михалевича, С.С. Соколова* «Концепция создания доверенной среды функционирования объектов автономного судоходства».

Подробнее ознакомиться с представленными работами можно в опубликованных в электронном виде материалах¹ либо на официальном сайте конференции: <https://iccss2024.ipu.ru/prcdngs>.

Проведение очередной XXXIII-й конференции «Проблемы управления безопасностью сложных систем» планируется в ноябре-декабре 2025 г. в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. О дате и времени проведения конференции будет сообщено в информационном письме оргкомитета, которое будет опубликовано на официальном сайте (<https://iccss2025.ipu.ru/>), а также разослано участникам, заинтересованным лицам и профильным организациям. Телефон оргкомитета (495) 198-17-20, доб. 1407, e-mail: iccss@ipu.ru. Технический секретарь конференции – *Альфия Фариссовна Ибрагимова*.

Ученый секретарь Оргкомитета конференции
А. Б. Шелков

Шелков Алексей Борисович – канд. техн. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ abshelkov@gmail.com
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-1408-5212>

© 2025 г. Шелков А. Б.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

¹ Проблемы управления безопасностью сложных систем: материалы XXXII Международной конференции, 13 ноября 2024 г., Москва / под общей редакцией А.О. Калашникова, И.В. Чернова; Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН Минобрнауки РФ [и др.]. – Электрон. текстовые дан. (9,1 Мб). – Москва: ИПУ РАН. – 2024.



32ND INTERNATIONAL CONFERENCE ON PROBLEMS OF COMPLEX SYSTEMS SECURITY CONTROL

A.B. Shelkov

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ abshelkov@gmail.com

Abstract. The conference took place in November 2024. Scientific results presented by the conference participants are briefly described below. The conference included the following sections: general theoretical and methodological issues of security support; problems of economic and sociopolitical security support; problems of information security support; cybersecurity and security aspects in social networks; ecological and technogenic security; modeling and decision-making for complex systems security control; automatic systems and means of complex systems security support. Special attention was paid to the theoretical and applied problems of improving the effectiveness of Russia's national economic, information, and technogenic security management processes. In total, 104 authors from 33 organizations presented 73 papers at the conference.

Keywords: conference, complex systems, security control.