УДК 519.863

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2024.2.2

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЕНТЕРАБЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ НА СЕТЕВЫХ ГРАФИКАХ#

О. А. Косоруков*, Д. В. Лемтюжникова**

*МГУ им. М. В. Ломоносова; РАНХиГС при Президенте РФ, г. Москва
**Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН;
МАИ (национальный исследовательский университет), г. Москва

*✉ kosorukovoa@mail.ru, **✉ darabbt@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача распределения реентерабельных ресурсов при выполнении комплекса взаимозависимых работ, представленного в виде сетевого графика. Предполагается линейная зависимость времени выполнения работ от используемых ресурсов. Обосновывается алгоритм построения решения для работ с предопределенной последовательностью наступления событий в сетевом графике комплекса работ. Предлагается алгоритм сведения задачи общего вида к вспомогательной задаче с упорядоченными временами наступления событий, а также алгоритм построения оптимального решения исходной задачи. Сходимость данного алгоритма обусловлена конечностью итераций на каждом из этапов. Общая вычислительная сложность алгоритма может быть оценена как $O(n^2)$, где n – количество вершин в исходном сетевом графике. Представляется перспективным применение предложенного алгоритма для планирования комплексов взаимосвязанных работ с использованием реентерабельных ресурсов.

Ключевые слова: сетевой график, неупорядоченные события, объединение событий, расщепление событий, поиск путей.

ВВЕДЕНИЕ

Задачам сетевого планирования посвящен значительный объем литературы и научных публикаций. В частности, постановки оптимизационных задач на сетевых графиках приведены в монографии [1], однако в отличие от динамических задач распределения ресурсов, рассматриваемых в настоящей статье, они являются статическими. Задачи, исследуемые в данной работе, по своей постановке отличаются от задач, приведенных в работе [1], где рассматриваются сепарабельные или, как их часто называют, материально-технические ресурсы. В настоящей статье рассматривается другой вид ресурсов, а именно ресурсы, допускающие повторное использование на различных работах в различные моменты времени, например персонал или техника. Такой вид ресурса будем называть реентерабельным, в литературе он часто называется нескладируемым или ресурсом типа «мощности». Приведем краткий обзор результатов для задач данного типа.

В книге [2] утверждается, что не существует точных алгоритмов для нахождения оптимального распределения ресурсов в общем случае, но существует ряд эвристических алгоритмов. Под общим случаем понимается: комплекс работ, заданный произвольным сетевым графиком; наличие нескольких ресурсов известных объемов; каждая работа выполняется одним видом ресурсов; операции выполняются с фиксированной интенсивностью (т. е. от начала до окончания интенсивность не изменяется). Приводятся результаты для независимых работ с вогнутыми функциями интенсивностей. Отмечается, что в случае, когда одна работа выполняется несколькими видами ресурсов, но с фиксированным распределением долей использования ресурсов (для каждой работы своя структура), результаты остаются справедливыми.

Результаты исследований частично получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 22-71-10131).

Утверждается, что, если функции интенсивностей не вогнутые (общий случай), то всегда существует оптимальное решение, содержащее не более n интервалов постоянства, т. е. на них интенсивности не меняются. Приводится результат для независимых работ с выпуклыми функциями интенсивностей. Для случая фиксированных интенсивностей и независимых работ рассматривается оптимизационный алгоритм, аналог симплекс-метода для конкретного класса задач.

В статье [3] рассматривается случай проектов с зависимыми работами (произвольный сетевой график), которые выполняются с фиксированными априори заданными интенсивностями. В качестве критерия эффективности расписания рассматривается средневзвешенное время завершения всех работ проекта.

В публикации [4] для множества матриц-планов стандартной транспортной задачи построен критерий, при выполнении которого это множество содержит матрицу, элементы которой не превосходят фиксированного значения, и построены тождества, определяющие общие свойства всех матриц-планов с ограничениями для элементов матрицы. Построенные критерий и тождества позволяют найти (минимаксную) матрицу, у которой наибольший элемент минимален, и определить это минимаксное значение. Получены необходимые и достаточные условия, при которых минимаксная матрица единственна.

В статье [5] рассмотрены вопросы оценивания параметров работы сетевых моделей управления проектами. Описаны особенности построения сетевых моделей при различных условиях применения сетевого планирования. Оценено влияние агрегирования моделей на точность календарных планов.

Близким по постановке задачам динамического управления ресурсами посвящена работа [6]. В ней рассматривалась гидростатическая модель. С опорой на физические аналогии и законы было показано, что оптимальное использование ресурсов достигается при минимуме функционала, который выражает величину потенциальной энергии.

В докладе [7] рассматривались задачи теории расписаний с нескладируемыми ресурсами и алгоритмы их решения на основе методов ветвей и границ.

Отметим также несколько работ зарубежных авторов. В статье [8] рассматриваются задачи планирования проектов с ограниченными потоками ресурсов и материалов (англ. *resource-and-material-flow-constrained project scheduling problem*, RMCPSP). В публикации [9] приводится сопоставление некоторых алгоритмов распределения ресурсов на сетевых графиках. В работе [10] представлен обзор результатов по вопросам динамического распределения ресурсов на сетевых графиках, а также приведена подробная библиография.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется некоторое множество взаимозависимых работ l_j ($j = 1,\ldots, m$). Предположим также, что каждой работе соответствуют две числовые характеристики, а именно $Q_j > 0$ и $\tau_j > 0$ ($j= 1,\ldots, m$), где Q_j – объем работы l_j, а τ_j – время выполнения работы l_j. Допустим, что ограничения на последовательность выполнения работ определяются структурой ориентированного графа $\{M, N\}$, где $M =\{z_i\}$, $i = 0,\ldots, n$, – множество вершин или событий, а $N=\{l_j\}$, $j = 1,\ldots, m$, – множество дуг графа, каждая из которых соответствует одной из работ. Задачи данного вида исследованы в теории сетевого планирования. Методы построения таких сетевых моделей и анализа их характеристик известны [1]. Согласно теории сетевого планирования определим для каждого события z_i новую переменную, а именно время его наступления t_i ($i = 1,\ldots, n$). Основными ограничениями в сетевом планировании являются следующие: событие, соответствующее данной вершине, не может произойти раньше, чем будут завершены все входящие в него работы, и любая работа, исходящая из некоторой вершины, не может быть начата раньше, чем наступит событие, соответствующее данной вершине.

Согласно определению сетевого графика, для графа $\{M, N\}$ предполагаем выполнение следующих условий [1]:

а) существует единственная вершина z_0 такая, что не существует работ вида (z_i, z_0), где z_0 – начало выполнения комплекса работ (если таких вершин несколько, то их можно объединить, сопоставив им t_0^* – время начала выполнения комплекса работ);

б) существует единственная вершина z_0 такая, что не существует дуг вида (z_n, z_i) (в противном случае совместим эти понятия, положив времена их наступления равными t_n^*, где t_n^* – время завершения выполнения комплекса работ);

в) в графе отсутствуют замкнутые пути;

г) для любой вершины z_i ($i = 1,\ldots, n$–1) существует путь из z_0 в z_n, проходящий через z_i. Для любой дуги l_j ($j =1,\ldots, m$) существует путь, содержащий эту дугу.

Вышеперечисленные ограничения и определяют понятие сетевого графика.

Предположим, что в течение всего периода выполнения работы l_j выделенный на ее выполнение ресурс не изменяется и равен величине c_j. Зависимость времени выполнения работы τ_j от выделенного на нее ресурса c_j определяется соотношением

$$\tau_j = \theta_j^2 - \theta_j^1 = \frac{Q_j}{c_j},\ j = 1,\ldots, m.$$

Пусть работа l_j соответствует дуге сетевого графика (z_{j1}, z_{j2}), тогда времена ее начала и окончания и времена наступления стартового и финального события связаны следующими соотношениями:

$$t_{j1} \le Q_j^1 < Q_j^2 \le t_{j2},\ j = 1, \ldots, m,$$

где θ_j^1 – время начала выполнения работы l_j; θ_j^2 – время окончания выполнения работы l_j.

Эти соотношения определяют невозможность наступления события z_{j2} до момента выполнения всех работ, входящих в вершину z_{j2}. Кроме того, заданы время начала выполнения всех работ t_0^* и время завершения выполнения всех работ t_n^*.

Задача состоит в определении таких времен наступления событий t_i ($i = 1,\ldots, n–1$), времен начала и окончания всех работ $(\theta_j^1,\ \theta_j^2)$ ($j = 1,\ldots, m$) и функций распределения ресурса по работам $c_j(t)$, чтобы максимальное количество ресурсов, задействованных одновременно на выполнении данного множества работ, было минимальным.

Математическую постановку задачи можно представить следующим образом:

$$\min_{\bar t,\bar\theta}\ \max_{t\in\left[t_0^*,t_n^*\right]} u(t), \tag{1}$$

$$\bar t = (t_1,\ldots, t_{n-1}),\ \bar\theta = (\theta_1^1,\ \theta_1^2,\ldots,\ \theta_m^1,\ \theta_m^2);$$

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j(t),\ t\in[t_0^*,\ t_n^*],$$

$$c_j(t) = \begin{cases} \dfrac{Q_j}{\theta_j^2 - \theta_j^1},\ t\in[\theta_j^1,\ \theta_j^2], \\ 0, \quad t\notin[\theta_j^1,\ \theta_j^2], \end{cases}$$

$$t_{j1} \le \theta_j^1 < \theta_j^2 < t_{j2},\ j = 1,\ldots,\ m,$$

$$t_0 = t_0^*,\ t_n = t_n^*,$$

где $j1$ – номер вершины начала дуги j, а $j2$ – номер вершины окончания дуги j.

Утверждение 1. *Если существует допустимое решение задачи* (1) $(\bar t,\ \bar\theta)$ *такое, что*

$$u(t) \equiv c = \frac{\sum_{j=1}^{m} Q_j}{t_n^* - t_0^*},\ \ t\in[t_0^*, t_n^*], \tag{2}$$

то вектор $(\bar t,\ \bar\theta)$ *является ее оптимальным решением.*

Доказательство. Если решение задачи (1) является допустимым, то верны следующие соотношения:

$$\int_{t_0^*}^{t_n^*} u(t)\,dt = \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0^*}^{t_n^*} c_j(t)\,dt = \sum_{j=1}^{m}\int_{\theta_j^1}^{\theta_j^2} \frac{Q_j}{\theta_j^2 - \theta_j^1}\,dt = \sum_{j=1}^{m} Q_j.$$

Предположим далее, что существует допустимое решение $(\bar t',\ \bar\theta')$ с функцией одновременно задействованных ресурсов $u_1(t)$ такое, что $\max\limits_{t\in[t_0^*,t_n^*]} u_1(t) < c.$

Тогда

$$\int_{t_0^*}^{t_n^*} u_1(t)dt \le \max_{t\in[t_0^*,t_n^*]} u_1(t)(t_n^* - t_0^*) < c(t_n^* - t_0^*) = \sum_{j=1}^{m} Q_j.$$

Следовательно, вопреки сделанному предположению, вектор $(\bar t',\ \bar\theta')$ не является допустимым решением. Из данного противоречия и следует справедливость утверждения 1.

2. ЗАДАЧА С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ВРЕМЕНАМИ НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЙ

Рассмотрим сначала задачу (1) при условии, что времена наступления событий строго упорядочены, т. е. во всех допустимых решениях задачи (1) порядок наступления событий одинаков. Упорядочим события в соответствии со временем их наступления: $\bar t = (t_1, \ldots, t_{n-1}),\ t_0^* < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n^*$.

В этом случае задача (1) может быть представлена в виде:

$$\min_{\bar t,\bar\theta}\ \max_{t\in[t_0^*,t_n^*]} u(t), \tag{3}$$

$$\bar t = (t_1, \ldots, t_{n-1}),\ \bar\theta = (\theta_1^1,\ \theta_1^2,\ldots,\ \theta_m^1,\ \theta_m^2),$$

$$u(t) = \sum_{\substack{j:\ j1\le k \\ j2\ge k+1}} c_j(t),\ \ t\in[t_k, t_{k+1}],\ \ k = 0, \ldots, n-1;$$

$$c_j(t) = \begin{cases} \dfrac{Q_j}{\theta_j^2 - \theta_j^1},\ t\in[\theta_j^1,\ \theta_j^2], \\ 0, \quad t\notin[\theta_j^1,\ \theta_j^2], \end{cases}$$

$$t_{j1} \le \theta_j^1 < \theta_j^2 \le t_{j2},\ j = 1, \ldots, m,$$

$$t_0^* < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n^*,$$

$$t_0 = t_0^*,\ t_n = t_n^*.$$

Теорема 1. *Существует оптимальное решение задачи* (3) *такое, что оно удовлетворяет соотношению* (2).

Доказательство. Достаточно установить существование допустимого решения $(\bar t,\ \bar\theta)$, для которого справедливы условия теоремы 1. Тогда из утверждения 1 будет следовать его оптимальность. Пусть

$$\theta_j^1 = t_{j1}, \ \theta_j^2 = t_{j1+1}. \quad (4)$$

Убедимся в том, что ограничения (3) не нарушатся. Действительно, поскольку $\theta_j^1 = t_{j1} < t_{j1+1} = \theta_j^2 \le t_{j2}$, имеем:

$$c_j(t) = \begin{cases} \dfrac{Q_j}{\theta_j^2 - \theta_j^1} = \dfrac{Q_j}{t_{j1+1} - t_{j1}}, \ t \in [t_{j1}, t_{j1+1}], \\ 0, \qquad t \notin [t_{j1}, t_{j1+1}]. \end{cases}$$

Откуда для $k = 0,\ldots, n-1$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$u(t) = \sum_{\substack{j: j1 \le k, \\ j2 \ge k+1}} c_j(t) = \sum_{\substack{j: j2 = k, \\ j2 \ge k+1}} c_j(t) =$$

$$= \sum_{\substack{j: j1 = k, \\ j2 \ge k+1}} \frac{Q_j}{t_{k+1} - t_k} = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \sum_{\substack{j: j1 = k, \\ j2 \ge k+1}} Q_j.$$

Положим далее $u(t) \equiv c, \ t \in [t_0^*, t_n^*].$ Получаем систему уравнений

$$\sum_{\substack{j: j1 = k, \\ j2 \ge k+1}} Q_j = c(t_{k+1} - t_k), \ k = 0,\ldots, n-1. \quad (5)$$

Количество уравнений в системе n, а количество неизвестных n–1. Покажем теперь, что уравнения системы линейно зависимы. Пусть $k = n-1$, $l_m = (z_{n-1}, z_n)$, тогда

$$\frac{1}{t_n^* - t_{n-1}} \sum_{\substack{j: j1 = n-1, \\ j2 \ge n}} Q_j = \frac{1}{t_n^* - t_{n-1}} Q_m = \frac{\sum_{j=1}^{m} Q_j - c(t_{n-1} - t_0^*)}{t_n^* - t_{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{t_n^* - t_{n-1}} \left[\sum_{j=1}^{m} Q_j - \frac{\sum_{j=1}^{m} Q_j}{t_n^* - t_0^*} (t_{n-1} - t_0^*) \right] =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{m} Q_j}{t_n^* - t_0^*} \frac{t_n^* - t_0^* - t_{n-1} + t_0^*}{t_n^* - t_{n-1}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Q_j}{t_n^* - t_0^*} = c.$$

Как можно заметить, при выполнении условия (5) для $k = 0,\ldots, n-2$, следует, что для $k = n-1$ условие выполнено и его можно исключить это из системы уравнений (5). Оставшиеся уравнения допускают явное аналитическое решение, а именно:

$$\bar{t} = (t_1,\ldots, t_{n-1}), \ t_{k+1} = t_k + \frac{\sum_{\substack{j: j1 = k, \\ j2 \ge k+1}} Q_j}{c}, \quad (6)$$

$$k = 1,\ldots, \ n-2, \ t_0 = t_0^*.$$

На основе уравнений (4) вычислим вектор $\bar{\theta} = (\theta_1^1, \theta_1^2,\ldots, \theta_m^1, \theta_m^2)$. Очевидно, что векторы $\bar{t}$ и $\bar{\theta}$ удовлетворяют ограничениям задачи (3). Согласно нашему построению функция $u(t)$ не изменяется на всем отрезке $t \in [t_0^*, t_n^*]$, а как следует из утверждения 1, полученное решение $(\bar{t}, \ \bar{\theta})$ является оптимальным решением задачи (3). ♦

Замечание. Выше из-за линейной зависимости системы уравнений не использовалось последнее из них. Однако исключать можно и любое другое уравнение. Если не рассматривается уравнение с номером i, то решение в явном виде будет таким:

$$t_{k+1} = \frac{\sum_{\substack{j: j1 = k, \\ j2 \ge k+1}} Q_j}{c} + t_k, \ k = 0,\ldots, i-1, \ t_0 = t_0^*,$$

$$t_k = t_{k+1} - \frac{\sum_{\substack{j: j1 = k, \\ j2 \ge k+1}} Q_j}{c}, \ k = n-1,\ldots, i+1, \ t_n = t_n^*.$$

3. ЗАДАЧА С НЕУПОРЯДОЧЕННЫМ НАБОРОМ ВРЕМЕН НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЙ

В исходной постановке задача (1) не предписывает заданную последовательность событий. Можно доказать, что последовательность наступления событий z_i и z_j предопределена тогда и только тогда, когда существует путь из вершины z_i в z_j, что в силу свойств сетевых графиков, определенных ранее, равносильно существованию пути из z_0 в z_n, содержащего вершины z_i и z_j.

Теорема 2. *Задача* (1) *всегда имеет оптимальное решение такое, что оно удовлетворяет соотношению* (2).

Доказательство. Пусть для некоторых событий z_{i1} и z_{i2} времена их наступления не упорядочены. Модифицируем задачу (1) путем объединения событий z_{i1} и z_{i2} и приписывания им одного и того же времени наступления t_i': $t_{i1} = t_{i2} = t_i'$.

Данная модификация задачи соответствует объединению вершин сетевого графика $\{M, N\}$. Можно показать, что модифицированный таким образом график попрежнему удовлетворяет всем условиям, приведенным выше для сетевых графиков. Очевидно, что преобразованный сетевой график будет соответствовать требованиям а), б), г) (см. § 1). Для проверки выполнения пункта в) заметим, что операция объединения в сетевом графике может повлечь возникновение замкнутого пути тогда и только тогда, когда в исходном графе существует путь между объединяемыми вершинами. В силу предположения о неупорядоченности времен наступления этих событий, сделанного выше, такого пути нет, а в этом случае ограничение в) будет выполнено.

Покажем, что если векторы $\bar{t}' = (t_1,\ldots, \ t_i,\ldots, \ t_{n-1})$, $\bar{\theta} = (\theta_1^1, \theta_1^2,\ldots, \theta_m^1, \theta_m^2)$ – допустимое решение для модифицированного сетевого графика, то

$$\bar{t} = (t_1, ..., t_{i1}, ..., t_{i2}, ..., t_{n-1}), \bar{\theta} = (\theta_1^1, \theta_1^2, ..., \theta_m^1, \theta_m^2), \quad (7)$$

где $t_{i1} = t_{i2} = t'_i$, – допустимое решение для первоначального сетевого графика. Поскольку события z_{i1} и z_{i2} не упорядочены, между ними не существует какого-либо пути в графе. В этом случае ограничения на компоненты векторов $\bar{t}$ и $\bar{\theta}$ будут совпадать с точностью до замены переменных в модифицированной и первоначальной задаче.

Пусть сетевой график модифицирован вышеизложенным способом. Если в нем по-прежнему присутствуют пары событий с неустановленным порядком, то повторим вышеописанную операцию объединения для данных вершин. Очевидно, что, применяя данную процедуру конечное число раз мы получим граф с упорядоченным набором событий. Выше уже было доказано, что для задач такого типа существует оптимальное решение с функцией, удовлетворяющей условию (2), общий вид которого представляется как $\bar{\theta} = (\theta_1^1, \theta_1^2, ..., \theta_m^1, \theta_m^2)$ и $\overline{t^*} = (t_1^*, ..., t_q^*)$. Пусть размерность вектора $\bar{t}$ в исходной задаче есть n–1. Тогда $q < n$–1. Последовательно разделяя объединенные события, построим вектор $\bar{t}$, содержащий n–1 компоненту, являющуюся компонентами вектора $\overline{t^*}$, который будет допустимым для задачи (1). Вычислим далее функцию $u(t)$, используя компоненты построенных векторов $(\bar{t}, \bar{\theta})$. Нетрудно убедиться, что она удовлетворяет условию (2). В этом случае, исходя из утверждения 1, вектор $(\bar{t}, \bar{\theta})$ есть оптимальное решение. ♦

По-видимому, можно было бы рассмотреть и иные способы сведения общей задачи к задаче с упорядоченными временами наступления событий. Например, декларативно определить некоторый порядок наступления неупорядоченных событий. Однако рассмотренный выше процесс объединения событий выгоден тем, что он влечет уменьшение количества переменных.

Теорема 3. *Соотношение* (2) *справедливо для любого оптимального решения задачи* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем обратное предположение, т. е. предположим, что для некоторого оптимального решения $(\bar{t}, \bar{\theta})$ условие (2) не выполнено, а именно $u(t) \not\equiv c$. На основе теоремы 1 имеем $u(t) \le c$, $t \in [t_0^*, t_n^*]$. Все компоненты вектора $(\bar{t}, \bar{\theta})$ принадлежат отрезку $[t_0^*, t_n^*]$, их множество обозначим как

$$T = \{t_0^*, t_1, ..., t_{n-1}, t_n^*, \theta_1^1, \theta_1^2, ..., \theta_m^1, \theta_m^2\}.$$

На каждом интервале, образованном соседними точками данного множества, функция $u(t)$ является константой. Отсюда следует, что найдутся такие точки $\tau_1 \in T$, $\tau_2 \in T$, что $u(t) \equiv \tilde{c} \le c$, $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Следовательно,

$$\int_{t_0^*}^{t_n^*} u(t)dt = \int_{t_0^*}^{\tau_1} u(t)dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} u(t)dt + \int_{\tau_2}^{t_n^*} u(t)dt \le$$

$$\le c(\tau_1 - t_0^*) + \tilde{c}(\tau_2 - \tau_1) + c(t_n^* - \tau_2) < c(t_n^* - t_0^*) = \sum_{j=1}^{m} Q_j.$$

Данное строгое неравенство не согласуется с утверждением 1, что и доказывает теорему 3.

4. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Обобщим результаты, представленные в статье. Для задачи (1) динамического распределения ресурсов на сетевом графике всегда существует оптимальное решение, для которого интегральная функция динамического использования ресурсов определяется соотношением (2).

В статье обосновывается следующий алгоритм формирования оптимального решения.

1) *Формирование модифицированного сетевого графика.* Применяя один из методов поиска путей в графах [11], находим и объединяем события с неупорядоченными временами наступления. Это может быть реализовано, например, с использованием алгоритма бэктрекинга [12]. Если для задания структуры графа используется матрица смежности, то вычислительную сложность данного алгоритма можно оценить, как $O(n^2)$, где n – количество вершин в графе.

2) *Решение модифицированной задачи.* Элементы оптимального решения вычисляются на основе соотношений (4) и (6).

3) *Построение решения первоначальной задачи.* На основе метода расщепления отождествленных событий формируем решение первоначальной задачи в виде (7).

Сходимость данного алгоритма обусловлена, как было показано в статье, конечностью итераций на каждом из этапов. Поскольку на этапах 2 и 3 реализуются расчетные процедуры, вычислительная сложность которых не превосходит $O(n^2)$, то с учетом оценки вычислительной сложности этапа 1 представленного алгоритма общая вычислительная сложность алгоритма может быть оценена, как $O(n^2)$, где n – количество вершин в исходном графе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена задача динамического распределения ресурсов для реализации комплекса взаимозависимых работ по критерию минимизации общего объема распределяемых ресурсов. Задача решается с учетом предположения о линейной зависимости времени выполнения работ от используемых ресурсов. Обоснован алгоритм построения решения для работ с предопределенной последовательностью наступления событий в сетевом графике комплекса работ. Предложен алгоритм сведения задачи общего вида к вспомогательной задаче с упорядоченными временами наступления событий, а также алгоритм построения оптимального решения исходной задачи. Конечность итераций на каждом из этапов данного алгоритма обусловливает его сходимость. Общая вычислительная сложность алгоритма может быть оценена, как $O(n^2)$, где n – количество вершин в исходном сетевом графике. Предложенный алгоритм представляется полезным при планировании комплексов взаимосвязанных работ, при выполнении которых используются реентерабельные ресурсы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Давыдов Э.Г.* Игры, графы, ресурсы. – М.: Радио и связь, 1981. – 113 с. [*Davydov, E.G.* Igry, grafy, resursy. – M.: Radio I svyaz’, 1981. – 113 s. (In Russian)]]
2. *Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е.* Прикладные задачи теории графов. – Тбилиси: Мецниереба, 1974. – 234 с. [*Burkov, V.N., Gorgidze ,I.A., Loveckij, S.E.* Prikladnye zadachi teorii grafov. – Tbilisi: Mecniireba, 1974. – 234 s. (In Russian)]
3. *Косоруков О.А., Лемтюжникова Д.В., Мищенко А.В.* Методы и модели управления ресурсами проекта в условиях неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2023. – № 3. – С. 38–56. [*Kosorukov, O.A., Lemtyuzhnikova, D.V., Mishchenko, A.V.* Metody i modeli upravleniya resursami proekta v usloviyah neopredelennosti // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. – 2023. – No. 3. – P. 38–56. (In Russian)]
4. *Mironov, A.A., Tsurkov, V.I.* Transport-Type Problems with a Minimax Criterion // Automation and Remote Control. – 1995. – No. 12. – P. 109–118.
5. *Ляхов О.А.* Ресурсы в сетевом планировании сложных комплексов работ // Проблемы информатики. – 2013. – № 1 (18). – С. 27–36. [*Lyahov, O.A.* Resursy v setevom planirovanii slozhnyh kompleksov rabot // Problemy informatiki. – 2013. – No. 1 (18). – P. 27–36. (In Russian)]
6. *Разумихин Б.С.* Задача об оптимальном распределении ресурсов // Автоматика и телемеханика. – 1965. – Т. 26. – Вып. 3. – С. 1227–1247. [*Razumikhin, B.S.* The Problem on Optimal Resources Distribution // Automation and Remote Control. – 1965. – Vol. 26, no. 7. – P. 1227–1246. (In Russian)]
7. *Mishenko, A., Kosorukov, O., Sviridova, O.* Optimization of Works Management of the Investment Project // The 2-nd International & European Conference «Modelling and Simulation of Social-Behavioural Phenomena in Creative Societies» (MSBC-2022). – Vilnius, 2022. – P. 201–217.
8. *Gehring, M., Volk, R., Schultmann, F.* On the Integration of Diverging Material Flows into Resource-Constrained Project Scheduling // European Journal of Operational Research. – 2022. – Vol. 303, iss. 3. – P. 1071–1087.
9. *Bianco, L., Caramia, M., Giordani, S.* Project Scheduling with Generalized Precedence Relations: A New Method to Analyze Criticalities and Flexibilities // European Journal of Operational Research. – 2022. – Vol. 298, iss. 2. – P. 451–462.
10. *de Lima, V.L., Alves, C., Clautiaux, F.*, et al. Arc Flow Formulations Based on Dynamic Programming: Theoretical Foundations and Applications // European Journal of Operational Research. – 2022. – Vol. 296, iss. 1. – P. 3–21.
11. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Изд-во «Мир», 1981. – 319 с. [*Minieka, E.* Optimization Algorithms for Networks and Graphs. – New York: M. Dekker, 1978.]
12. *Филиппова А.С., Поречный С. С., Рамазанова Р.Р.* Основы комбинаторных алгоритмов. – Уфа: Изд-во БГПУ, 2018. – 131 с. [*Filippova, A.S., Porechnyj, S.S., Ramazanova, R.R.* Osnovy kombinatornyh algoritmov. – Ufa: Izd-vo BGPU, 2018. – 131 s. [(In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии В. Н. Бурковым.

Поступила в редакцию 03.02.2024,
после доработки 19.03.2024.
Принята к публикации 03.04.2024.

Косоруков Олег Анатольевич – д-р техн. наук, МГУ им. М. В. Ломоносова; РАНХиГС при Президенте РФ, г. Москва, ✉ kosorukovoa@mail.ru,
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8235-4360

Лемтюжникова Дарья Владимировна – канд. физ.-мат. наук, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН; МАИ (национальный исследовательский университет), г. Москва, ✉ darabbt@gmail.com
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-5311-5552

AN OPTIMAL ALLOCATION ALGORITHM FOR REENTRANT RESOURCES ON NETWORK GRAPHS

O. A. Kosorukov* and D. V. Lemtyuzhnikova**

*Moscow State University, Moscow, Russia;
The Presidential Academy (RANEPA), Moscow, Russia
**Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

*✉ kosorukovoa@mail.ru, **✉ darabbt@gmail.com

Abstract. This paper considers the problem of allocating reentrant resources when performing a set of interdependent works that are represented by a network graph. By assumption, the work completion time linearly depends on the resource amount used. We justify a solution algorithm in the case of a set of works with a predetermined sequence of events in the network graph. Also, we propose an algorithm for reducing the general problem to an auxiliary one with ordered event times and an algorithm for constructing an optimal solution of the original problem. The convergence of this algorithm is ensured by finite iterations at each stage. The overall computational complexity of the algorithm can be estimated as $O(n^2)$, where n denotes the number of vertices in the original network graph. It seems promising to apply this algorithm for planning the sets of interdependent works using reentrant resources.

Keywords: network graph, unordered events, event merging, event splitting, pathfinding.

Acknowledgments. This work was supported in part by the Russian Science Foundation, project no. 22-71-10131.