

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОБЩИМ БУФЕРОМ<sup>1</sup>

Вытовтов К. А.<sup>2</sup>, Барабанова Е. А.<sup>3</sup>, Шабанова Е. В.<sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Исследованы нестационарные характеристики производительности трехфазной системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком, экспоненциально распределенным временем обслуживания на всех фазах и ограничением на суммарный размер общего буфера. Записана система дифференциальных уравнений Колмогорова с использованием специально введенных функций, учитывающих закономерности функционирования системы. Для решения системы уравнений использован метод матрицы преобразования вероятностей. Получены выражения для нахождения вероятности потерь и производительности системы. В качестве примера рассмотрена система с размером буфера, равного трем. Исследована длительность переходного режима в зависимости от соотношений интенсивностей обслуживания на отдельных фазах обслуживания. Сделан вывод, что наибольшее влияние на длительность переходного режима оказывают интенсивности обслуживания на первой и второй фазах. Проанализированы зависимости максимальных значений нестационарной вероятности потерь и соответствующих стационарных вероятностей для различных значений интенсивностей обслуживания. Анализ характеристик производительности системы проведен для параметров, соответствующих современным оптическим сетям. Полученные выводы представляют интерес для проектирования высокопроизводительных вычислительных систем.*

Ключевые слова: трехфазная СМО, уравнения Колмогорова, переходной режим, нестационарные характеристики.

### 1. Введение

Многофазные системы массового обслуживания (СМО) имеют большое значение для построения математических моделей в области телекоммуникаций. В частности, они используются для

<sup>1</sup> Работа выполнена при гранта Российского научного фонда № 25-29-00926, <https://rscf.ru/project/25-29-00926/>

<sup>2</sup> Константин Анатольевич Вытовтов, д.т.н., доцент (vytovtov\_konstan@mail.ru).

<sup>3</sup> Елизавета Александровна Барабанова, д.т.н., доцент (elizavetaalex@yandex.ru).

<sup>4</sup> Екатерина Владиславовна Шабанова, техник (shabanovaev@gmail.com).

математического описания процесса работы систем связи с многоэтапным процессом обработки заявок. Пример такой системы – сеть базовых станций линейной топологии. Стационарный режим работы многофазных систем изучен достаточно глубоко как в случае пуассоновского, так и коррелированного входных потоков [3, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 16].

В последнее время все более актуальной становится проблема работы многофазных СМО в переходном режиме. Например, ввиду перехода к высокоскоростным способам передачи информации для проектирования оптических телекоммуникационных сетей необходимо исследовать поведение характеристик производительности системы в переходном режиме, в том числе время переходного режима, в случае перезагрузки системы или неисправности обслуживающих устройств [8]. Одна из первых работ на эту тему была написана в 1967 г. [12]. В этой работе рассмотрена двухфазная система с бесконечным буфером на первой фазе и нулевым – на второй. В дальнейшем рассматривались более сложные системы: системы с временем обслуживания фазового типа [10, 13], различные тандемные сети [15, 17] и др. Большинство работ на эти темы основывается на использовании численных методов существующих пакетов программ. Также был проведен анализ устойчивости нестационарных марковских процессов с непрерывным временем для основных классов СМО с нестационарными входными потоками [4, 21, 22]; анализ основных характеристик одно- и многолинейных систем в нестационарном режиме [18, 19, 20].

Однако работа многофазных систем в переходном режиме еще мало изучена, хотя увеличение скорости передачи и обработки информации в современных устройствах требует учета зависимости параметров систем от времени. Кроме того, особый интерес с практической точки зрения представляют собой системы с общим буфером, поскольку они адекватно описывают многие процессы, например, функционирование процессоров ЭВМ, промышленных контроллеров и микроконтроллеров с одним общим оперативным запоминающим устройством. В одной из ра-

бот на эту тему [2] рассматривалась двухфазная система с общим буфером, получены и проанализированы характеристики ее производительности.

В данной работе исследуются нестационарные характеристики производительности трехфазной СМО с общим буфером (раздел 2). В разделе 3 приведена система уравнений Колмогорова, описывающая функции вероятностей состояний системы, и описан метод ее аналитического решения. В разделе 4 представлены численные результаты, графики вероятностей состояний и нестационарных характеристик производительности, проведено исследование зависимости характеристик и длины переходного режима от соотношения между значениями интенсивностей обработки на трех фазах системы.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается трехфазная СМО с одним однолинейным обслуживающим устройством на каждой фазе и общим для трех фаз буфером. Входящий поток заявок имеет пуассоновское распределение с интенсивностью  $\lambda$ , время обслуживания распределено экспоненциально таким образом, что интенсивность обслуживания на каждой фазе равна  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  соответственно, максимальное число заявок в системе не превышает  $N$ . После обработки заявки в первой фазе заявка переходит во вторую фазу, после завершения обслуживания во второй фазе заявка переходит в третью. Если при переходе на следующую фазу оказывается, что процесс обработки предыдущей заявки на ней еще не завершился, заявка переходит в буфер. После освобождения фазы заявка переходит из буфера в обработку. Схема описываемого процесса приведена на рис. 1.

Число заявок на 1, 2 и 3 фазах обозначаются  $n_1, n_2, n_3$  соответственно. Размер буфера накладывает ограничение на количество заявок в системе:  $n_1 + n_2 + n_3 \leq N$ ,  $n_i = \overline{0, N}$  для  $i = 1, 2, 3$ . Новая заявка может поступить в систему только при  $n_1 + n_2 + n_3 < N$ , иначе заявка теряется.

Целью настоящей работы является исследование вероятно-

стей нахождения системы в возможных состояниях, вероятности потерь, производительности системы при известных параметрах.

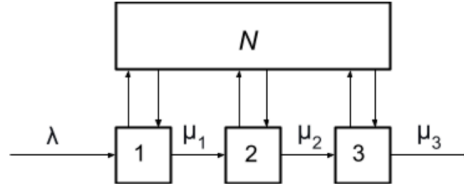


Рис. 1. Схема трехфазной системы с общим буфером

### 3. Математическая модель

Исследуемый процесс является марковским с числом состояний системы  $(n_1, n_2, n_3)$ , равным  $R = \frac{1}{6}(N+1)(N+2)(N+3)$ . Прежде всего для рассматриваемого случая построен граф состояний, в соответствии с графом построена система уравнений Колмогорова.

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(0, 0, 0, t)}{dt} &= -\lambda P(0, 0, 0, t) + \mu_3 P(0, 0, 1, t); \\
 \frac{dP(0, 0, n_3, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_3)P(0, 0, n_3, t) + \mu_2 P(0, 1, n_3 - 1, t) + \\
 &\quad + \mu_3 P(0, 0, n_3 + 1, t), \\
 &\quad (n_3 \neq 0, n_3 \neq N); \\
 (1) \quad \frac{dP(0, 0, N, t)}{dt} &= -\mu_3 P(0, 0, N, t) + \mu_2 P(0, 1, N - 1, t); \\
 \frac{dP(0, n_2, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2)P(0, n_2, 0, t) + \mu_1 P(1, n_2 - 1, 0, t) + \\
 &\quad + \mu_3 P(0, n_2, 1, t), \\
 &\quad (n_2 \neq 0, n_2 \neq N); \\
 \frac{dP(0, N, 0, t)}{dt} &= -\mu_2 P(0, N, 0, t) + \mu_1 P(1, N - 1, 0, t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(0, n_2, n_3, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2 + \mu_3)P(0, n_2, n_3, t) + \\
 &+ \mu_1 P(1, n_2 - 1, n_3, t) + \mu_2 P(0, n_2 + 1, n_3 - 1, t) + \\
 &+ \mu_3 P(0, n_2, n_3 + 1, t), \\
 (n_2, n_3 &\neq 0, n_2 + n_3 \neq N); \\
 \frac{dP(0, n_2, n_3, t)}{dt} &= -(\mu_2 + \mu_3)P(0, n_2, n_3, t) + \\
 &+ \mu_1 P(1, n_2 - 1, n_3, t) + \mu_2 P(0, n_2 + 1, n_3 - 1, t), \\
 (n_2, n_3 &\neq 0, n_2 + n_3 = N); \\
 \frac{dP(n_1, 0, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1)P(n_1, 0, 0, t) + \lambda P(n_1 - 1, 0, 0, t) + \\
 &+ \mu_3 P(n_1, 0, 1, t), \\
 (n_1 &\neq 0, n_1 \neq N); \\
 \frac{dP(N, 0, 0, t)}{dt} &= -\mu_2 P(N, 0, 0, t) + \lambda P(N - 1, 0, 0, t); \\
 \frac{dP(n_1, 0, n_3, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_3)P(n_1, 0, n_3, t) + \\
 &+ \lambda P(n_1 - 1, 0, n_3, t) + \mu_2 P(n_1, 1, n_3 - 1, t) + \\
 &+ \mu_3 P(n_1, 0, n_3 + 1, t), \\
 (n_1, n_3 &\neq 0, n_1 + n_3 \neq N); \\
 \frac{dP(n_1, 0, n_3, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_3)P(n_1, 0, n_3, t) + \\
 &+ \lambda P(n_1 - 1, 0, n_3, t) + \mu_2 P(n_1, 1, n_3 - 1, t), \\
 (n_1, n_3 &\neq 0, n_1 + n_3 = N); \\
 \frac{dP(n_1, n_2, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, 0, t) + \\
 &+ \lambda P(n_1 - 1, n_2, 0, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, 0, t) + \\
 &+ \mu_3 P(n_1, n_2, 1, t), \\
 (n_1, n_2 &\neq 0, n_1 + n_2 \neq N); \\
 \frac{dP(n_1, n_2, 0, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, 0, t) + \\
 &+ \lambda P(n_1 - 1, n_2, 0, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, 0, t), \\
 (n_1, n_2 &\neq 0, n_1 + n_2 = N);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP(n_1, n_2, n_3, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)P(n_1, n_2, n_3, t) + \\ &+ \lambda P(n_1 - 1, n_2, n_3, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, t) + \\ &+ \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, t) + \mu_3 P(n_1, n_2, n_3 + 1, t), \\ &(n_1, n_2, n_3 \neq 0, n_1 + n_2 + n_3 \neq N); \\ \frac{dP(n_1, n_2, n_3, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)P(n_1, n_2, n_3, t) + \\ &+ \lambda P(n_1 - 1, n_2, n_3, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, t) + \\ &+ \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, t), \\ &(n_1, n_2, n_3 \neq 0, n_1 + n_2 + n_3 = N).\end{aligned}$$

Запись уравнений (1) аналогична записи уравнений для двухфазной системы [20]. Однако она неудобна для дальнейшего практического использования при произвольном размере буфера ввиду большого числа условий «если». В связи с этим были рассмотрены закономерности в построении системы уравнений Колмогорова (1).

В частности, в соответствии с постановкой задачи, уравнения Колмогорова записываются только для случаев  $n_1 + n_2 + n_3 = \overline{0, N}$ . Слагаемые  $\lambda S(n_1, n_2, n_3)$  со знаком «плюс» присутствуют во всех уравнениях для любых  $n_1, n_2, n_3, n_1 + n_2 + n_3 = N$ . Слагаемые  $\mu_1 S(n_1, n_2, n_3)$  со знаком «плюс» присутствуют в уравнениях для любых  $n_1, n_2, n_3$ , кроме  $n_1 = 0$ . Слагаемые  $\mu_2 S(n_1, n_2, n_3)$  со знаком «плюс» присутствуют в уравнениях для любых  $n_1, n_2, n_3$ , кроме  $n_2 = 0$ . Слагаемые  $\mu_3 S(n_1, n_2, n_3)$  со знаком «плюс» присутствуют в уравнениях для любых  $n_1, n_2, n_3$ , кроме  $n_3 = 0$ . Слагаемые  $\lambda S(n_1 - 1, n_2, n_3)$  со знаком «минус» присутствуют в уравнениях во всех случаях, кроме  $n_1 = 0$ . Слагаемые  $\mu_1 S(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3)$  со знаком «минус» присутствуют в уравнениях во всех случаях, кроме  $n_2 = 0$ . Слагаемые  $\mu_2 S(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1)$  со знаком «минус» присутствуют в уравнениях во всех случаях, кроме  $n_3 = 0$ . Слагаемые  $\mu_3 S(n_1, n_2, n_3 + 1)$  со знаком «минус» присутствуют в уравнениях во всех случаях, кроме  $n_1 + n_2 + n_3 = 0$  и  $n_1 + n_2 + n_3 = N$ .

Для учета этих закономерностей была использована функция, введенная в [20]:

$$(2) \quad \vartheta(x, M, K) = \frac{(|2(x - M) + 1| + 2(x - M) + 1)}{4|2(x - M) + 1| \cdot |2(K - x) - 1|} \cdot \frac{(|2(K - x) - 1| + 2(K - x) - 1)}{4|2(x - M) + 1| \cdot |2(K - x) - 1|}$$

и получена следующая общая форма системы уравнений Колмогорова для рассматриваемого случая:

$$(3) \quad \begin{aligned} & \vartheta(n_1 + n_2 + n_3, 0, N) \frac{dP(n_1, n_2, n_3, t)}{dt} = \vartheta(n_1 + n_2 + n_3, 0, N) \cdot \\ & \cdot \left\{ [\lambda \vartheta(n_1 + n_2 + n_3, 0, N - 1) + \mu_1 \vartheta(n_1, 1, N) + \right. \\ & \mu_1 \vartheta(n_2, 1, N) + \mu_1 \vartheta(n_3, 1, N)] P(n_1, n_2, n_3, t) + \lambda \vartheta(n_1, 1, N) \cdot \\ & \cdot \vartheta(n_1 + n_2 + n_3, 0, N) P(n_1 - 1, n_2, n_3, t) + \mu_1 \vartheta(n_2, 1, N) \cdot \\ & \cdot P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, t) + \mu_2 \vartheta(n_3, 1, N) P(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, t) + \\ & \left. + \mu_3 \vartheta(n_1 + n_2 + n_3, 0, N - 1) P(n_1, 0, n_3 + 1, t) \right\}, \\ & (n_1, n_2, n_3 = \overline{0, N}). \end{aligned}$$

Для решения системы (3) целесообразно использовать метод матрицы преобразования вероятностей [20]. Однако при больших размерах буфера использование ряда  $(n_1, n_2, n_3)$  крайне неудобно для записи матрицы коэффициентов уравнений Колмогорова. Для упрощения построения матрицы коэффициентов комбинации  $n_1, n_2, n_3$  ставится в соответствие значение функции  $\varrho$ , где

$$(4) \quad \begin{aligned} & \varrho(N, n_1, n_2, n_3) = n_3 + (N + 1)n_2 - \frac{n_2(n_2 - 1)}{2} + \\ & + \sum_{i=0}^{n_1} \left[ \frac{(N - i + 3)(N - i - 2)}{2} \vartheta(i, 1, N) \right] - n_1 n_2 + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, строке для  $P(0, 0, 0)$  (3) соответствует индекс 1, строке  $P(0, 0, 1)$  соответствует индекс 2 и т.д. Таким образом, введение авторами функции (4) позволяет без ограничений и дополнительных преобразований использовать матричные методы решения (3).

#### 4. Численный пример

Для иллюстрации работы системы примем  $N = 3$ . В этом случае система уравнений Колмогорова принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(0,0,0,t)}{dt} &= -\lambda P(0,0,0,t) + \mu_3 P(0,0,1,t); \\
 \frac{dP(0,0,1,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_3)P(0,0,1,t) + \mu_3 P(0,0,2,t) + \\
 &\quad + \mu_2 P(0,1,0,t); \\
 \frac{dP(0,0,2,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_3)P(0,0,2,t) + \mu_3 P(0,0,3,t) + \\
 &\quad + \mu_2 P(0,1,1,t); \\
 \frac{dP(0,0,3,t)}{dt} &= -\mu_3 P(0,0,3,t) + \mu_2 P(0,1,2,t); \\
 \frac{dP(0,1,0,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2)P(0,1,0,t) + \mu_3 P(0,1,1,t) + \\
 &\quad + \mu_1 P(1,0,0,t); \\
 \frac{dP(0,1,1,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2 + \mu_3)P(0,1,1,t) + \mu_3 P(0,1,2,t) + \\
 &\quad + \mu_2 P(0,2,0,t) + \mu_1 P(1,0,1,t); \\
 \frac{dP(0,1,2,t)}{dt} &= -(\mu_2 + \mu_3)P(0,1,2,t) + \mu_2 P(0,2,1,t) + \\
 &\quad + \mu_1 P(1,0,1,t); \\
 \frac{dP(0,2,0,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2)P(0,2,0,t) + \mu_3 P(0,2,1,t) + \\
 &\quad + \mu_1 P(1,1,0,t); \\
 \frac{dP(0,2,1,t)}{dt} &= -(\mu_2 + \mu_3)P(0,2,1,t) + \mu_2 P(0,3,0,t) + \\
 &\quad + \mu_1 P(1,1,1,t); \\
 \frac{dP(0,3,0,t)}{dt} &= -\mu_2 P(0,3,0,t) + \mu_1 P(1,2,0,t); \\
 \frac{dP(1,0,0,t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1)P(1,0,0,t) + \mu_3 P(1,0,1,t) + \\
 &\quad + \lambda P(0,0,0,t);
 \end{aligned}
 \tag{5}$$



$$\begin{aligned}\frac{dP(1,0,1,t)}{dt} = & -(\lambda + \mu_1 + \mu_3)P(1,0,1,t) + \mu_3P(1,0,2,t) + \\ & + \mu_2P(1,1,0,t) + \lambda P(0,0,1,t);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP(1,0,2,t)}{dt} = & -(\mu_1 + \mu_3)P(1,0,2,t) + \mu_2P(1,1,1,t) + \\ & + \lambda P(0,0,2,t);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP(1,1,0,t)}{dt} = & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(1,1,0,t) + \mu_3P(1,1,1,t) + \\ & + \mu_1P(2,0,0,t) + \lambda P(0,1,0,t);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP(1,1,1,t)}{dt} = & -(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)P(1,1,1,t) + \mu_2P(1,2,0,t) + \\ & + \mu_1P(2,0,1,t) + \lambda P(0,1,1,t);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP(1,2,0,t)}{dt} = & -(\mu_1 + \mu_2)P(1,2,0,t) + \mu_2P(2,1,0,t) + \\ & + \lambda P(0,2,0,t);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP(2,0,0,t)}{dt} = & -(\lambda + \mu_1)P(2,0,0,t) + \mu_3P(2,0,1,t) + \\ & + \lambda P(1,0,0,t);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP(2,0,1,t)}{dt} = & -(\mu_1 + \mu_3)P(2,0,1,t) + \mu_2P(2,1,0,t) + \\ & + \lambda P(1,0,1,t);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP(2,1,0,t)}{dt} = & -(\mu_1 + \mu_2)P(2,1,0,t) + \mu_1P(3,0,0,t) + \\ & + \lambda P(1,1,0,t);\end{aligned}$$

$$\frac{dP(3,0,0,t)}{dt} = \mu_1P(3,0,0,t) + \lambda P(2,0,0,t).$$

Рассматриваемая система моделирует работу процессора с частотой 1 ГГц. Для получения численного решения системы были выбраны значения: интенсивность поступления информации  $\lambda = 83 \cdot 10^6$  бит/с, интенсивности обработки  $\mu_1 = 5 \cdot 10^6$  бит/с,  $\mu_2 = 10 \cdot 10^6$  бит/с,  $\mu_3 = 20 \cdot 10^6$  бит/с. Длительность переходного режима можно определить, считая переходный процесс завершенным в момент установления стационарных значений вероятностей состояний системы. Критерий установления стационарных значений:  $|P_i(t - 5 \cdot 10^{-8}) - P_i(t)| < 10^{-5}$ ,  $i = \overline{1, 20}$ . Для вычислений использованы начальные условия

$\bar{P}(0) = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$ , т.е. в начальный момент буфер пуст, нет заявок в обработке. Значения вероятностей определяются по формуле

$$\bar{P}(t) = M(t)\bar{P}(0),$$

где  $M(t)$  — матрица преобразования вероятностей, детально описанная в целом ряде работ [1, 4, 20].

На рис. 2 представлена зависимость вероятностей состояний от времени. По результатам численных расчетов видно, что эти вероятности являются не монотонно изменяющимися, а имеют экстремумы в переходном режиме. Это объясняется наличием комплексно-сопряженных характеристических чисел системы (1). Длительность переходного режима для заданных исходных данных  $\tau = 8,98 \cdot 10^{-7}$  с.

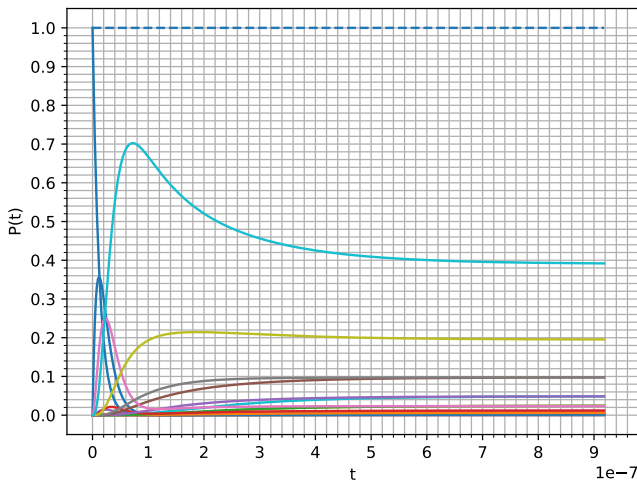


Рис. 2. Вероятности состояний системы

Остановимся подробнее на зависимости характера решения для вероятностей состояний от вида собственных чисел инфинитезимальной матрицы. Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение системы линейных однородных диффе-

ренциальных уравнений с постоянными коэффициентами находится в виде суммы  $\sum_{i=1}^m (A_i \exp \gamma_i t)$  экспонент от собственных чисел  $\gamma_i$  с постоянными коэффициентами  $A_i$ . В [16] было показано, что собственные числа любой инфинитезимальной матрицы могут быть либо действительными отрицательными, либо комплексно сопряженными с отрицательной действительной частью. Если все собственные числа  $\gamma_i$  действительные и отрицательные, то переходной процесс очевидно монотонно затухает с течением времени  $t$  и стремится к стационарному режиму. Если в решении характеристического уравнения присутствуют комплексно-сопряженные числа ( $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ , где  $i$  – мнимая единица), то для них можно записать

$$\begin{aligned} & A \exp(\gamma' + i\gamma'')t + A \exp(\gamma' - i\gamma'')t = \\ (6) \quad & = A \exp(\gamma't) \exp(i\gamma''t) + A \exp(\gamma't) \exp(-i\gamma''t) = \\ & = 2A \exp(\gamma't) \cos(\gamma''t). \end{aligned}$$

Таким образом, при отрицательной действительной части  $\gamma'$  процесс имеет волнообразный затухающий характер.

Основными характеристиками СМО являются вероятность потерь информации и производительность системы. Вероятность потерь трехфазной системы с общим буфером может быть рассчитана как

$$(7) \quad P_{loss}(t) = \sum_{n_1+n_2+n_3=N} P(n_1, n_2, n_3, t).$$

Производительность системы вычисляется по формуле

$$(8) \quad A(t) = [1 - P_{loss}(t)]\lambda.$$

По результатам расчетов (рис. 3, рис. 4) видно, что в переходном режиме (например, при инсталляции системы) наблюдается резкое возрастание вероятности потерь и падение производительности системы. При этом максимальное значение вероятности потерь в переходном режиме  $P_{loss} = 0,96$  в момент времени  $t = 0,11$  мкс превышает это же значение в стационарном режиме  $P_{loss} = 0,942$ , а минимальное значение производительности  $A = 0,4 \cdot 10^7$  бит/с в этот момент времени меньше производительности в стационарном режиме  $A = 0,6 \cdot 10^7$  бит/с.

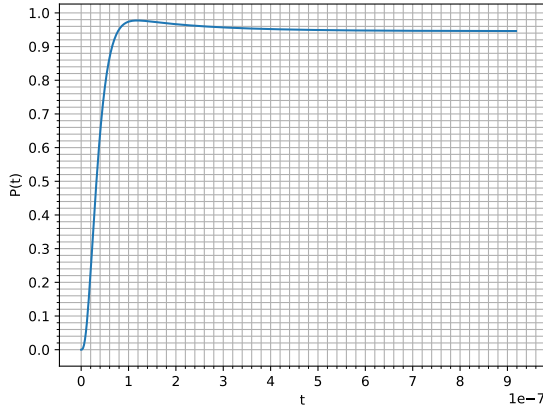


Рис. 3. Вероятность потерь заявок

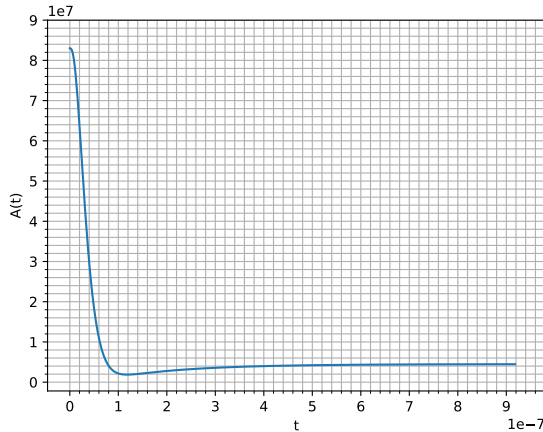


Рис. 4. Производительность системы

На рис. 5 представлена зависимость вероятностей состояний системы от времени для  $\mu_1 = 5 \cdot 10^6$  бит/с,  $\mu_2 = 20 \cdot 10^6$  бит/с,  $\mu_3 = 10 \cdot 10^6$  бит/с. Здесь длительность переходного процесса  $10,02 \cdot 10^{-7}$  с. На рис. 6 и рис. 7 представлены зависимости от времени вероятности потерь и производительности системы. Экстремумы в переходном режиме обусловлены комплексно-сопряженными собственными числами матрицы коэффициентов в (1).

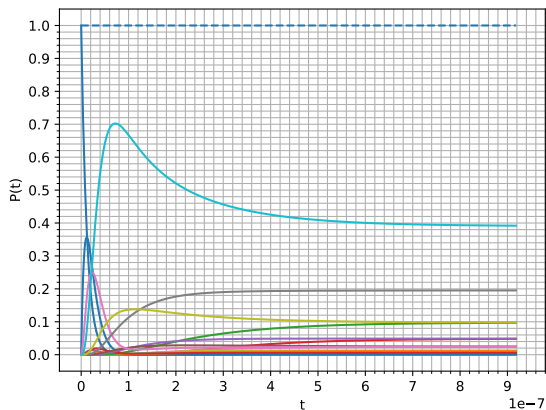


Рис. 5. Вероятности состояний системы

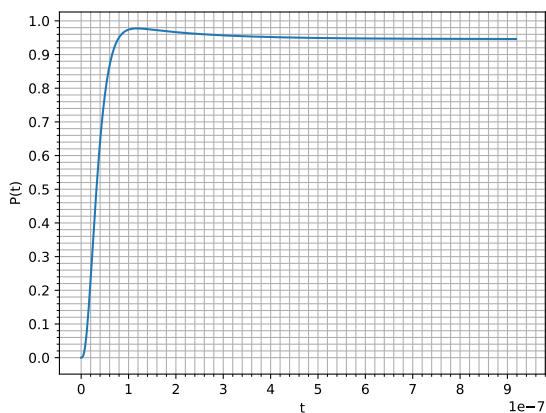


Рис. 6. Вероятность потерь заявок

Важнейшим аспектом при проектировании многофазных систем является исследование зависимости их характеристик не просто от интенсивности обслуживания, а от соотношения интенсивностей обслуживания в каждой фазе. Действительно, при низкой интенсивности обслуживания в последней фазе вероятность потерь будет достаточно большой вне зависимости от интенсив-

ности обслуживания в предыдущих фазах. В результате анализа зависимости характеристик системы от соотношений параметров  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  построены двухмерные графики длительности переходного режима, максимальных вероятностей потерь, минимальных производительностей.

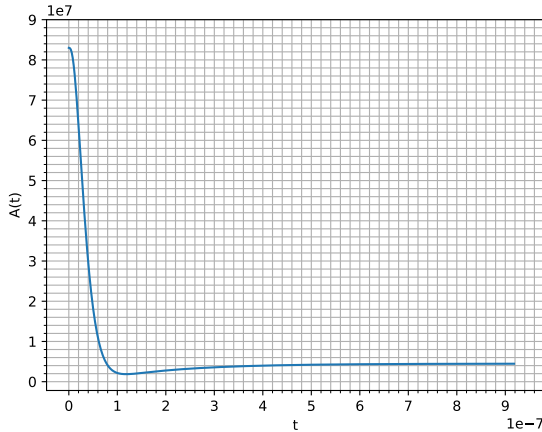


Рис. 7. Производительность системы

На рис. 8 представлен график зависимости длительности переходного режима от соотношения параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$  при  $\mu_3 = 10 \cdot 10^6$  пакеты/с, значения  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  изменяются от  $1 \cdot 10^6$  до  $20 \cdot 10^6$  бит/с. На графиках отмечены линии уровня с шагом  $0,5 \cdot 10^{-7}$ .

На рис. 9 представлен график зависимости длительности переходного режима от соотношения параметров  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  при  $\mu_1 = 10 \cdot 10^6$  пакеты/с. Значения  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  изменяются от  $1 \cdot 10^6$  до  $20 \cdot 10^6$  пакеты/с.

Максимальная длительность переходного режима для всех рассмотренных параметров равна 1,038 мкс, при этом наибольшие значения получены в окрестности кривой  $\mu_{i1} \cdot \mu_{i2} = 45 \cdot 10^{12}$  бит<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>, где  $\mu_{i1}$ ,  $\mu_{i2}$  — изменяемые параметры. При возрастании изменяемых интенсивностей обработки с малой разницей между

ними длительность переходного режима сокращается, при малом значении одного из параметров с увеличением второго длина переходного режима увеличивается.

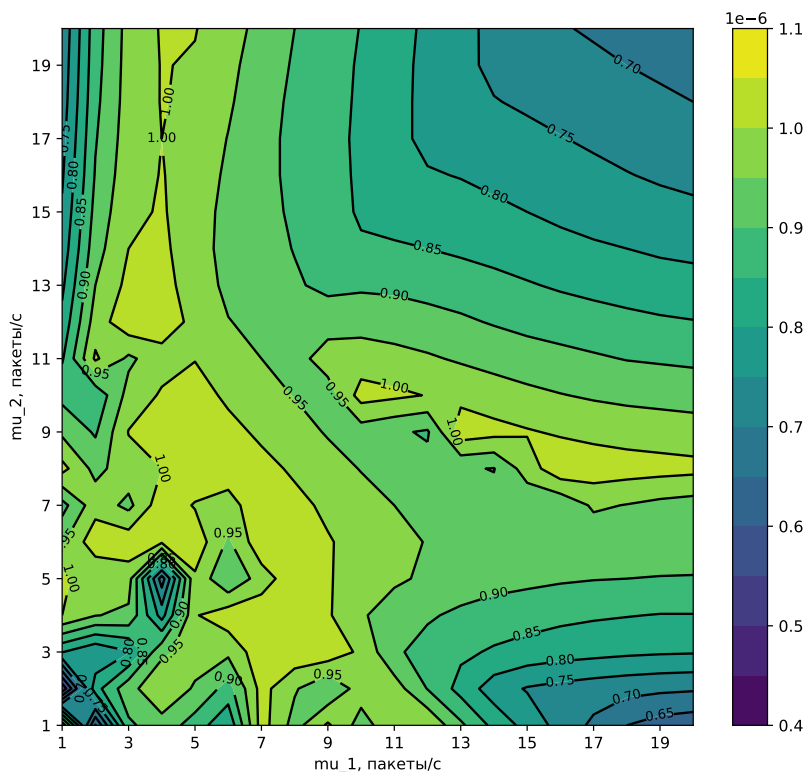


Рис. 8. График зависимости длительности переходного режима от соотношения параметров  $\mu_1$ ,  $\mu_2$

При фиксированном  $\mu_1$  разница между минимальной и максимальной длительностью переходного режима равна  $4,94 \cdot 10^{-7}$  с, при фиксированном  $\mu_2 = 5,28 \cdot 10^{-7}$  с. Из этого можно сделать вывод, что соотношение параметров  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  оказывает большее влияние на длительность переходного режима.

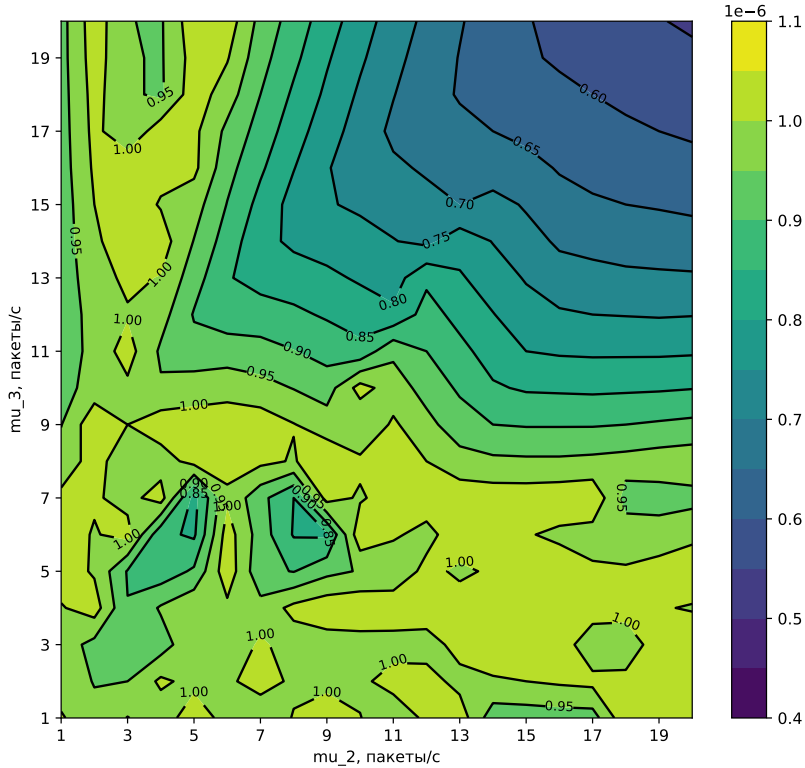


Рис. 9. График зависимости длительности переходного режима от соотношения параметров  $\mu_2$ ,  $\mu_3$

Из-за наличия комплексных чисел среди собственных значений матрицы системы уравнений Колмогорова вероятность потерь изменяется не монотонно, т.е. максимум вероятности потерь больше стационарного и различен для разных соотношений интенсивностей обработки.

Для любого распределения интенсивностей при фиксированном наборе значений стационарные производительность и вероятность потерь, а также переходные вероятности потерь равны, следовательно достаточно исследовать зависимость различия максимума вероятности потерь и ее стационарного значения



от изменения только двух параметров. На рис. 10 приведен график зависимостей максимума вероятности потерь и ее стационарного значения при фиксированном параметре  $\mu_3 = 10 \cdot 10^6$  бит/с, изменяемых параметрах  $\mu_1, \mu_2 = \overline{1, 20} \cdot 10^6$  бит/с.

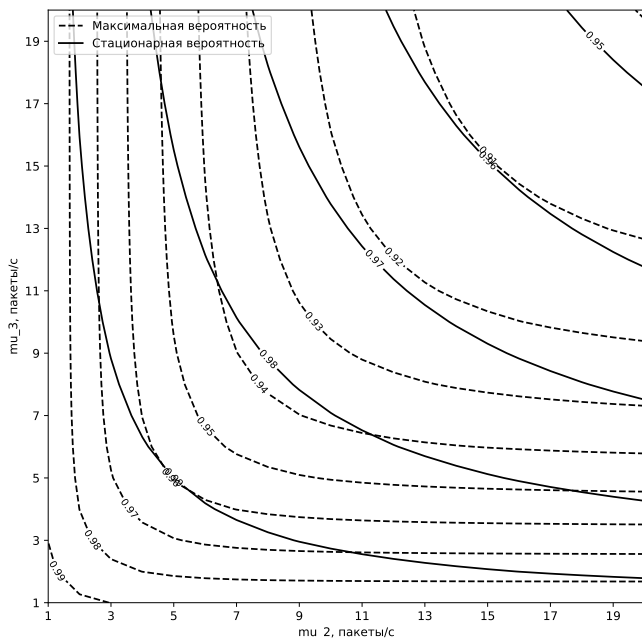


Рис. 10. График зависимости максимальной и стационарной вероятностей потерь от соотношения параметров  $\mu_2, \mu_3$

Максимальные вероятности потерь имеют такой же характер изменения в зависимости от соотношения изменяемых параметров, как и стационарные вероятности потерь: максимальная вероятность зависит от произведения параметров  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  прямо пропорционально (линии уровня имеют уравнения вида  $P_{loss} = \mu_{i1}\mu_{i2} \cdot \text{const}$ , где  $\mu_{i1}, \mu_{i2}$  — изменяемые параметры). Так как  $A(t) = (1 - P_{loss})\lambda$ , минимальная производительность имеет линии уровня с уравнениями вида  $A = (1 - \mu_{i1}\mu_{i2} \cdot \text{const})$  (рис. 11), т.е. зависит от произведения интенсивностей обработки, но не от их соотношения.

## 5. Выводы

В данной работе рассмотрена трехфазная система массового обслуживания с общим для трех фаз буфером в переходном режиме при пуассоновском входном потоке. Для системы записаны дифференциальные уравнения Колмогорова. Для этого использовалась функция (3) [17] и введена функция (4).

Для решения системы уравнений Колмогорова применен метод матрицы преобразования вероятностей [19]. Для различных значений интенсивности обслуживания заявок получены вероятности состояний системы, вероятность потерь, производительность, время переходного режима. По результатам расчетов проведен анализ характеристик системы.

При вычислении характеристик производительности системы, основанном на параметрах, соответствующих работе процессора с частотой 1 ГГц, получены длительности переходного режима порядка  $10^{-7}$  с. Наибольший разброс значений длительностей наблюдается при вариации соотношения параметров  $\mu_1, \mu_2$ .

Вероятности состояний, вероятность потерь и производительность с течением времени изменяются не монотонно. Это объясняется наличием комплексно-сопряженных чисел с отрицательной действительной частью среди собственных значений матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова [16]. При этом максимальная вероятность потерь и минимальная производительность зависят от соотношения интенсивностей обработки на фазах так же, как стационарные значения. При рассмотренных значениях параметров  $1 \cdot 10^6 \leq \mu_i \leq 20 \cdot 10^6$  бит/с получены максимальные значения потерь  $P_{loss} \geq 0,94$ , стационарные вероятности потерь  $P_{loss} \geq 0,89$ . Такие высокие вероятности получены из-за малого размера рассматриваемого буфера.

## Литература

1. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ДУДИН А.Н., КЛИМЕНЮК В.И. *Стохастические системы с коррелированными потоками.*

- Теория и применение в телекоммуникационных сетях.* – М.: Изд-во «ТЕХНОСФЕРА», 2018. –564 с.
2. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ВЫТОВТОВ К.А., БАРАБАНОВА Е.А. *Исследование переходного режима двухфазной системы массового обслуживания с ограничением на суммарный размер буфера* // Автоматика и телемеханика. – 2024. – №1. – С. 64–82.
  3. ГОРБУНОВА А.В., ЛЕБЕДЕВ А.В. *Двумерные распределения максимальных остаточных времен обслуживания в бесконечнолинейных системах с разделением заявок* // Пробл. передачи информ. – 2020. – Т. 56, вып. 1. – С. 80–98; Problems Inform. Transmission. – 2020. – Vol. 56, Iss. 1. – P. 73–90.
  4. КОВАЛЕВ И.А., САТИН Я.А., СИНИЦИНА А.В. и др. *Об одном подходе к оцениванию скорости сходимости нестационарных марковских моделей систем обслуживания* // Информ. и её применение. – 2022. – Т. 16. Вып. 3. – С. 75–82.
  5. СЕМЕНОВА О.В. *Стационарное распределение вероятностей состояний СМО с двумя режимами функционирования и потоком катастрофических сбоев* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – №10 – С. 73–86.
  6. ФАРХАДОВ М.П., ПЕТУХОВА Н.В., ЕФРОСИНИН Д.В. и др. *Двухфазная модель с неограниченными очередями для расчета характеристик и оптимизации речевых порталов самообслуживания* // Пробл. управл. – 2010. – №6. – С. 53–57.
  7. AL-RAWI Z.R., AL SHBOUL K.M.S. *A Single Server Queue with Coxian-2 Service and One-Phase Vacation (M/C-2/M/1 Queue)* // Open J. Appl. Sci. 2021. – Vol. 11, No. 6. – P. 766–774.
  8. BARABANOVA E.A., VYTOVTOV K.A., VYSHNEVSKY V.M. et al. *High-capacity strictly non-blocking optical switches based on new dual principle* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2021. – Vol. 2091, No. 1. – URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2091/1/012040> (дата обращения: 06.04.2025).

9. DUDIN A.N., KLIMENOK V.I., VISHNEVSKY V.M. *Methods to Study Queuing Systems with Correlated Arrivals* // The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows. Springer, Cham. – DOI: 10.1007/978-3-030-32072-0\_2.
10. KEMPA WPJCIECH M., PAPROCKA I. *Transient behavior of a queueing model with hyper-exponentially distributed processing times and finite buffer capacity* // Sensors. – 2022. – Vol. 22, No. 24. – DOI: 10.3390/s22249909.
11. MURAT SAGIR, VEDAT SAGLAM. *Optimization and analysis of a tandem queueing system with parallel channel at second station* // Communications in Statistics P Theory and Methods. – 2022. – Vol. 51, No. 21. – P. 1–14.
12. PRABHU N.U. *Transient Behaviour of a Tandem Queue* // Management Science. – 1967. – Vol. 13, No. 9. – P. 631–639. – DOI: 10.1287/mnsc.13.9.631.
13. RUBINO G. *Transient analysis of Markovian queueing systems: a survey with focus on closed forms and uniformization* // Queueing Theory 2: Advanced Trends; Wiley-ISTE: Hoboken. NJ. – 2021. – P. 269–307.
14. SERITE OZKAR. *Two-commodity queueing-inventory system with phase-type distribution of service times* // Annals of Operations Research. – 2022. – URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-022-04865-3> (дата обращения: 06.04.2025).
15. SITA RAMA MURTHY M., SRINIVASA RAO K., RAVINDRANATH V. et al. *Transient Analysis of K-node Tandem Queueing Model with Load Dependent Service Rates* // Int. J. Engin. Techno. – 2018. – Vol. 7, No. 3.31. – P. 141–149.
16. SUDHESH R., VAITHIYANATHAN A. *Stationary analysis of infinite queueing system with two P stage network server* // RAIRO-Oper. Res. – 2021. – Vol. 55. – P. 2349–2357.
17. SUHASINI A.V.S., SRINIVASA RAO K., REDDY P.R.S. *Transient analysis of tandem queueing model with nonhomogenous poisson bulk arrivals having statedependent service rates* // Int. J. Advanc. Comput. Math. Sci. – 2012. –

- Vol. 3, No. 3. – P. 272–289.
18. VISHNEVSKY V.M., VYTOVTOV K.A., BARABANOVA E.A. et al. *Analysis of an M AP/M/1/N queue with periodic and non-periodic piecewise constant input rate* // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, No. 10. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/10/1684> (дата обращения: 06.04.2025).
  19. VISHNEVSKY V.M., VYTOVTOV K.A., BARABANOVA E.A. et al. *Transient behavior of the M AP/M/1/N queuing system* // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, No. 2559. – DOI: 10.3390/math9202559.
  20. VYTOVTOV K.A., BARABANOVA E.A., VISHNEVSKY V.M. *Modeling and Analysis of Multi-channel Queuing System Transient Behavior for Piecewise-Constant Rates* // LNCS. Springer. – 2023. – Vol. 13766. – P. 397–409.
  21. ZEIFMAN A.I., KOROLEV V., SATIN Y.A. *Review Two Approaches to the Construction of Perturbation Bounds for Continuous-Time Markov Chains* // Mathematics. – 2020. – Vol. 8. – DOI: 10.3390/math8020253.
  22. ZEIFMAN A.I., RAZUMCHIK R.V., SATIN Y.A. et al. *Ergodicity bounds for the markovian queue with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy* // Appl. Math. Comput. – 2021. – Vol. 395. – Article 125846.

## ANALYSIS OF THE THREE PHASE QUEUING SYSTEM WITH COMMON BUFFER

**Konstantin Vytovtov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Assistant Professor (vytovtov\_konstan@mail.ru).

**Elizaveta Barabanova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Assistant Professor (elizavetaalex@yandex.ru).

**Ekaterina Shabanova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Technician (shabanovaev@gmail.com).

*Abstract: This paper examines the non-stationary performance metrics of a three-phase queuing system with a Poisson input flow, exponentially distributed service time across all phases, and a constraint on the total size of the shared buffer. A system of Kolmogorov differential equations is written using specially introduced functions that account for the system's operating principles. A probability translation matrix method is used to solve the system of equations. Expressions are derived for finding the loss probability and system performance. A system with a buffer size of three is considered as an example. The duration of the transient mode is analyzed as a function of the ratios of service rates in individual service phases. It is concluded that the service rates in the first and second phases have the greatest impact on the duration of the transient mode. The dependences of the maximum values of the non-stationary loss probability and the corresponding stationary probabilities for various service rates are analyzed. The analysis of the system performance metrics is conducted for parameters corresponding to modern optical networks. The obtained conclusions are of interest for the design of high-performance computing systems.*

Keywords: queuing system, Kolmogorov equations, transient mode, non-stationary characteristics.

УДК 519.7

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.С. Манделем.*

*Поступила в редакцию 12.07.2025.*

*Дата опубликования 30.09.2025.*