

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ¹

Фёдорова Е. А.², Тюленина Я. А.³, Мелошников Н. П.⁴
(Национальный исследовательский Томский государственный
университет, Томск)

Предлагается новый математический подход к оценке эффективности гибридных электроэнергетических установок, использующих альтернативный источник энергии совместно с центральной сетью электроснабжения, основанный на методах теории массового обслуживания и позволяющий учитывать стохастический характер природных процессов. В качестве математической модели гибридной энергетической системы, использующей альтернативную (непостоянную) энергию как один из источников электроэнергии, предлагается система массового обслуживания с двумя блоками приборов, один из которых имеет случайное время работы и ограниченную мощность. Исследуется трехмерный марковский случайный процесс. С помощью метода начальных моментов получены формулы стационарных характеристик системы. Выполнен численный анализ зависимости характеристик системы от входных параметров, а также представлен пример расчёта эффективности использования источника солнечной электроэнергии для бытовых нужд на основе реальных данных.

Ключевые слова: математическое моделирование, гибридные энергетические системы, теория массового обслуживания.

1. Введение

Переход к возобновляемым источникам энергии является одним из приоритетных направлений развития страны и мирового сообщества. Альтернативная энергетика (солнечная, ветровая, гидроэнергетика) способствует экологической устойчивости региона, позволяет избежать зависимости бюджета от объемов до-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант №24-71-00022, <https://rscf.ru/project/24-71-00022/>.

² Екатерина Александровна Фёдорова, к.ф.-м.н., доцент
(ekat_fedorova@mail.ru).

³ Яна Андреевна Тюленина, м.н.с. (yanccch@yandex.ru).

⁴ Наталья Павловна Мелошниковна, м.н.с. (meloshnikovana@gmail.com).

бычи полезных ископаемых и их цены на мировом рынке, кроме того, исследования в этой области могут стимулировать инновации и развитие новых технологий в сфере энергетики, привлекая внимание инвесторов и ускоряя внедрение новых энергетических решений [4]. Однако при очевидных достоинствах на сегодняшний день такая энергетика не находит всеобщего распространения. Так, в европейских странах чистая энергетика в среднем занимает 30% всей вырабатываемой энергии, а в России доля возобновляемых источников составляет менее 1% [11]. Основной причиной этого является меньшая вырабатываемая мощность (по сравнению с традиционными источниками электроэнергии) и, конечно, сильная зависимость от климатических условий [12]. Компромиссным решением является внедрение гибридных энергетических систем, сочетающих несколько источников энергии (например, центральную сеть электроснабжения и собственные солнечные панели) [8].

Теоретических работ, посвященных анализу гибридных энергетических систем, не так много [15, 17, 19], в основном это экономические расчеты инвестиционных проектов перехода на альтернативную энергетику [9, 20] или расчеты технических возможностей проектируемой энергосистемы, базирующиеся на уравнениях математической физики и электротехнике [2, 5, 6, 13]. В большинстве работ используются среднестатистические значения, не учитывается стохастический характер природных явлений и объема потребляемой электроэнергии в течение периода наблюдения [16, 18]. Это может приводить к достаточно большой погрешности в полученных оценках показателей проектируемой станции. Имитационное моделирование также применяется для расчета характеристик конкретных энергетических систем [3].

Методы стохастического моделирования, в частности теория массового обслуживания (ТМО), используются для энергетических систем крайне редко [14, 21]. Это объясняется высокой степенью детерминированности традиционных энергетических объектов, что не характерно для альтернативной энергетики, поэтому стохастическое моделирование здесь оправдано.

Теория массового обслуживания – это научная дисциплина, являющаяся разделом теории вероятностей и занимающаяся анализом процессов в системах обслуживания, в которых однородные действия (события, задачи) повторяются многократно в одних и тех же условиях [7]. В исследуемых гибридных энергетических системах такими действиями являются запросы на электроэнергию от потребителей. Наиболее близкое по математическому подходу исследование представлено в статье [1], где авторы применяют аппарат теории массового обслуживания для анализа гибридных сетей связи, сочетающих радиоканал с оптическим и таким образом обеспечивающих более высокую скорость передачи информации и надежность системы.

В рамках данной работы предлагается применить аппарат теории массового обслуживания к моделированию гибридных энергетических систем, использующих источник альтернативной энергии в дополнение к центральному энергоснабжению. В разделе 2 описывается рассматриваемая техническая система и формулируется постановка задачи. В разделе 3 представлено подробное описание предлагаемой математической модели в терминах теории массового обслуживания. В разделе 4 выполняется исследование математической модели методом начальных моментов. В разделах 5 и 6 представлены численные примеры расчетов характеристик системы, анализ их зависимости от входных параметров и оценка экономической эффективности использования альтернативного источника энергии.

2. Постановка задачи

Для демонстрации предлагаемого подхода рассмотрим следующую систему: некоторый объект (производственный цех, «умный дом» и т.п.) потребляет электрическую энергию от двух источников: центральной сети и собственной установки альтернативной энергии (например, солнечные панели). Альтернативная энергия не вырабатывается постоянно, а имеет стохастический характер, зависящий от природных условий конкретной местности, и используется для дополнительных целей, напрямую

не влияющих на производство, которые могут быть реализованы в отложенный момент времени (например, заряд аккумуляторных устройств). Ставится задача оценки экономической эффективности установки альтернативной энергии в такой системе. На решение об использовании дополнительного источника электроэнергии влияют ряд факторов, главным образом, климатические особенности местности нахождения объекта и объемы потребления электроэнергии. Аппарат математического моделирования позволит нам выявить характер зависимости конечной стоимости электроэнергии от этих факторов, а также сделать выводы о наиболее оптимальных характеристиках оборудования альтернативного источника.

3. Математическая модель

Для того чтобы учитывать стохастический характер природных условий и объем потребления в течение суток, мы предлагаем использовать аппарат теории случайных процессов, а именно теорию массового обслуживания.

Предлагается следующая модель. В систему поступает простейший поток заявок (запросов на электроэнергию) с интенсивностью λ . Имеется два блока обслуживания: в первом блоке (альтернативной электроэнергии) ограниченное число приборов, равное K . Во втором блоке (городской электроэнергии) количество приборов не ограничено. Данные блоки могут работать совместно, второй блок работает всегда, а первый включается и выключается с некоторой периодичностью. Время работы первого блока распределено по экспоненциальному закону с параметром для нахождения во включенном состоянии γ_1 , а в выключенном – γ_0 . Когда накопленная энергия в первом блоке заканчивается, использующий её блок выключается и остается работать только второй блок с городской электрической сетью. При поступлении заявки в систему приоритетным считается обслуживание на первом блоке, если он включен и не переполнен. Если обслуживание на первом блоке невозможно, то заявка начинает обслуживание на втором блоке. Время обслуживания заявки в блоках распре-

делено по экспоненциальному закону с параметром для первого блока μ_1 , а для второго – μ_2 . При включении и выключении первого блока заявки не переходят с одного блока на другой, а продолжают обслуживание во время нового периода включения. Схематически предлагаемая модель представлена на рис. 1.

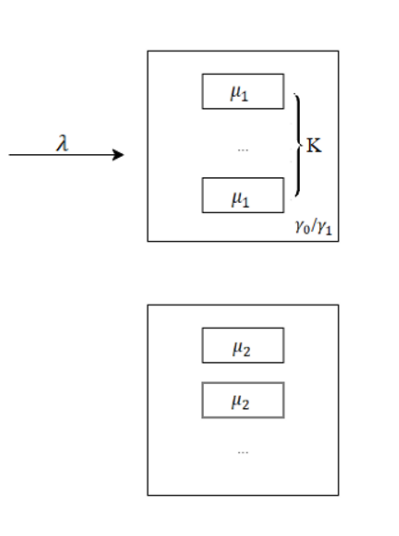


Рис. 1. Математическая модель

Обозначим случайные процессы: $i_1(t)$ – число заявок в первом блоке в момент времени t , $0 \leq i_1 \leq K$; $i_2(t)$ – число заявок во втором блоке в момент времени t , $i_2 \geq 0$; $k(t)$ – состояние первого блока, $k(t) = \{0, 1\}$, где 1 – первый блок включен, 0 – первый блок выключен.

Введём следующие обозначения для вероятностей: $P(k, i_1, i_2, t)$ – вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии k и в ней находится i_1 заявок на первом блоке и i_2 на втором.

Трехмерный случайный процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$ является марковским, запишем систему дифференциальных уравнений

Колмогорова для распределения $P(k, i_1, i_2, t)$:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P(0, i_1, i_2, t)}{\partial t} = -P(0, i_1, i_2, t)(\lambda + i_2\mu_2 + \gamma_0) + \\ \quad + P(1, i_1, i_2, t)\gamma_1 + P(0, i_1, i_2 + 1, t)(i_2 + 1)\mu_2 + \\ \quad + P(0, i_1, i_2 - 1, t)\lambda, \quad i_1 < K, i_2 \geq 0, \\ \frac{\partial P(1, i_1, i_2, t)}{\partial t} = -P(1, i_1, i_2, t)(\lambda + i_1\mu_1 + i_2\mu_2 + \gamma_1) + \\ \quad + P(0, i_1, i_2, t)\gamma_0 + P(1, i_1, i_2 + 1, t)(i_2 + 1)\mu_2 + \\ \quad + P(1, i_1 + 1, i_2, t)(i_1 + 1)\mu_1 + \\ \quad + P(1, i_1 - 1, i_2, t)\lambda, \quad i_1 < K, i_2 \geq 0, \\ \frac{\partial P(0, K, i_2, t)}{\partial t} = -P(0, K, i_2, t)(\lambda + i_2\mu_2 + \gamma_0) + \\ \quad + P(1, K, i_2, t)\gamma_1 + P(0, K, i_2 + 1, t)(i_2 + 1)\mu_2 + \\ \quad + P(0, K, i_2 - 1, t)\lambda, \quad i_2 \geq 0, \\ \frac{\partial P(1, K, i_2, t)}{\partial t} = -P(1, K, i_2, t)(\lambda + K\mu_1 + i_2\mu_2 + \gamma_1) + \\ \quad + P(0, K, i_2, t)\gamma_0 + P(1, K, i_2 + 1, t)(i_2 + 1)\mu_2 + \\ \quad + P(1, K - 1, i_2, t)\lambda + P(1, K, i_2 - 1, t)\lambda, \quad i_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Запишем систему уравнений для стационарных вероятностей $P(k, i_1, i_2)$:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -P(0, i_1, i_2)(\lambda + i_2\mu_2 + \gamma_0) + P(1, i_1, i_2)\gamma_1 + \\ \quad + P(0, i_1, i_2 + 1)(i_2 + 1)\mu_2 + P(0, i_1, i_2 - 1)\lambda = 0, \\ -P(1, i_1, i_2)(\lambda + i_1\mu_1 + i_2\mu_2 + \gamma_1) + P(0, i_1, i_2)\gamma_0 + \\ \quad + P(1, i_1, i_2 + 1)(i_2 + 1)\mu_2 + P(1, i_1 + 1, i_2)(i_1 + 1)\mu_1 + \\ \quad + P(1, i_1 - 1, i_2)\lambda = 0, \\ -P(0, K, i_2)(\lambda + i_2\mu_2 + \gamma_0) + P(1, K, i_2)\gamma_1 + \\ \quad + P(0, K, i_2 + 1)(i_2 + 1)\mu_2 + P(0, K, i_2 - 1)\lambda = 0, \\ -P(1, K, i_2)(\lambda + K\mu_1 + i_2\mu_2 + \gamma_1) + P(0, K, i_2)\gamma_0 + \\ \quad + P(1, K, i_2 + 1)(i_2 + 1)\mu_2 + P(1, K - 1, i_2)\lambda + \\ \quad + P(1, K, i_2 - 1)\lambda = 0. \end{array} \right.$$

4. Метод моментов

Для нахождения стационарных характеристик исследуемого процесса применим метод начальных моментов [7, 10] к системе уравнений (2).

Введём характеристические функции следующего вида:

$$H_k(i_1, u) = \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju i_2} P(k, i_1, i_2), \quad j = \sqrt{-1}.$$

Тогда из системы уравнений (2), можно получить следующую систему дифференциальных уравнений для частичных характеристических функций:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -H_0(i_1, u)(\lambda + \gamma_0) - \frac{1}{j} H'_0(i_1, u) \mu_2 + H_1(i_1, u) \gamma_1 + \\ + \frac{1}{j} H'_0(i_1, u) \mu_2 e^{-ju} + H_0(i_1, u) \lambda e^{ju} = 0, \quad i_1 < K, \\ -H_1(i_1, u)(\lambda + \gamma_1) - H_1(i_1, u) i_1 \mu_1 - \frac{1}{j} H'_1(i_1, u) \mu_2 + \\ + H_0(i_1, u) \gamma_0 + \frac{1}{j} H'_1(i_1, u) \mu_2 e^{-ju} + \\ + H_1(i_1 + 1, u)(i_1 + 1) \mu_1 + H_1(i_1 - 1, u) \lambda = 0, \quad i_1 < K, \\ -H_0(K, u)(\lambda + \gamma_0) - \frac{1}{j} H'_0(K, u) \mu_2 + H_1(K, u) \gamma_1 + \\ + \frac{1}{j} H'_0(K, u) \mu_2 e^{-ju} + H_0(K, u) \lambda e^{ju} = 0, \\ -H_1(K, u)(\lambda + \gamma_1) - H_1(K, u) K \mu_1 - \frac{1}{j} H'_1(K, u) \mu_2 + \\ + H_0(K, u) \gamma_0 + \frac{1}{j} H'_1(K, u) \mu_2 e^{-ju} + H_1(K - 1, u) \lambda + \\ + H_1(K, u) \lambda e^{ju} = 0, \end{array} \right.$$

где $H'_k(i_1, u) = \frac{\partial H_k(i_1, u)}{\partial u}$.

Обозначим стационарные вероятности состояний первого блока (включен или выключен и сколько на нем заявок):

$$R_k(i_1) = H_k(i_1, 0).$$

Тогда вероятности того, что первый блок включен или выключен, определяются как

$$R_k = \sum_{i_1=0}^K H_k(i_1, 0) = \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^{\infty} P(k, i_1, i_2), \quad k = 0, 1.$$

Полагая в системе (3) $u = 0$ и добавляя условия нормировки, имеем следующие уравнения:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -R_0(i_1) \gamma_0 + R_1(i_1) \gamma_1 = 0, \quad i_1 < K, \\ -R_0(i_1)(\lambda + \gamma_1 + i_1 \mu_1) + R_0(i_1) \gamma_0 + \\ + R_1(i_1 + 1)(i_1 + 1) \mu_1 + R_1(i_1 - 1) \lambda = 0, \quad i_1 < K, \\ -R_0(K) \gamma_0 + R_1(K) \gamma_1 = 0, \\ -R_1(K)(\gamma_1 + K \mu_1) + R_0(K) \gamma_0 + R_1(K - 1) \lambda = 0, \\ \sum_{i_1=0}^K (R_0(i_1) + R_1(i_1)) = 1. \end{array} \right.$$

Откуда нетрудно получить

$$(5) \quad R_1 = \sum_{i_1=0}^K R_1(i_1) = \frac{\gamma_0}{\gamma_1 + \gamma_0}, \quad R_0 = \sum_{i_1=0}^K R_0(i_1) = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_0},$$

а значения $R_k(i_1)$ вычисляются через соотношения

$$(6) \quad R_0(i_1) = R_1(i_1) \frac{\gamma_1}{\gamma_0},$$

$$R_1(i_1) = R_1(K) \left(\frac{\mu_1}{\lambda} \right)^{K-i_1} \prod_{m=0}^{K-i_1-1} (K-m),$$

где $R_1(K)$ находится из условия нормировки:

$$(7) \quad R_1(K) = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + \gamma_1} \left(1 + \sum_{i=0}^{K-1} \left(\frac{\mu_1}{\lambda} \right)^{K-i} \prod_{m=0}^{K-i-1} (K-m) \right)^{-1}.$$

Из свойств характеристической функции:

$$\left. \frac{\partial H_0(i_1, u)}{\partial u} \right|_{u=0} = j m_0(i_1), \quad \left. \frac{\partial H_1(i_1, u)}{\partial u} \right|_{u=0} = j m_1(i_1),$$

где $m_0(i_1)$ и $m_1(i_1)$ – частичные моменты первого порядка, т.е. математические ожидания числа заявок на втором блоке при нахождении первого блока в состоянии k и i_1 заявок на нем.

Дифференцируя систему уравнений (3) по u и принимая $u = 0$, имеем следующую систему уравнений:

$$(8) \quad \begin{cases} -m_0(i_1)(\gamma_0 + \mu_2) + m_1(i_1)\gamma_1 + R_0(i_1)\lambda = 0, \\ -m_1(i_1)(\lambda + \gamma_1 + i_1\mu_1 + \mu_2) + m_0(i_1)\gamma_0 + \\ + m_1(i_1 + 1)(i_1 + 1)\mu_1 + m_1(i_1 - 1)\lambda = 0, \\ -m_0(K)(\gamma_0 + \mu_2) + m_1(K)\gamma_1 + R_0(K)\lambda = 0, \\ -m_1(K)(\gamma_1 + K\mu_1 + \mu_2) + m_0(K)\gamma_0 + \\ + m_1(K - 1)\lambda + R_1(K)\lambda = 0. \end{cases}$$

Путем суммирования соответствующих уравнений по всем $i_1 = \overline{0, K}$ получаем формулы для частичных первых моментов числа заявок во втором блоке:

$$(9) \quad m_1 = \sum_{i_1=0}^K m_1(i_1) = \frac{\gamma_0 \lambda R_0 + R_1(K) \lambda (\gamma_0 + \mu_2)}{(\gamma_1 + \mu_2)(\gamma_0 + \mu_2) - \gamma_0 \gamma_1},$$

$$m_0 = \sum_{i_1=0}^K m_0(i_1) = \frac{\gamma_1 m_1 + R_0 \lambda}{\mu_2 + \gamma_0}.$$

Таким образом, математическое ожидание числа заявок во втором блоке вычисляется по формуле

$$(10) \quad m = (R_0 + R_1(K)) \cdot \lambda / \mu_2,$$

т.е. оно равно отношению интенсивности входящего потока на интенсивность обслуживания на втором блоке, умноженной на вероятность того, что первый блок не доступен (по любой из причин).

Применяя дальше метод моментов к системе (3), можно при желании получить формулы для частичных моментов более высоких порядков.

5. Численный анализ

Выполним численный анализ чувствительности характеристик системы к входным параметрам. Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$K = 3, \mu_1 = 0,5, \mu_2 = 1, \gamma_1 = 0,4, \gamma_0 = 0,6.$$

Продemonстрируем зависимость полученных характеристик от интенсивности входящего потока λ . На рис. 2 представлены значения частичных первых моментов числа заявок на втором блоке при включенном ($m1$) и выключенном ($m0$) первом блоке приборов для различных значений λ .

На рис. 3 представлена зависимость среднего числа заявок на первом блоке для разных значений интенсивности входящего

потока, вычисляемая как
$$M = \sum_{k=0}^K k \cdot (R_0(k) + R_1(k)).$$

Очевидно, что с ростом числа поступающих заявок в единицу времени растет и среднее число заявок, находящихся в системе, при этом для процесса $i_2(t)$ этот рост линейный, тогда как для процесса $i_1(t)$ имеет нелинейный характер. Рассмотрим процесс $i_1(t)$ подробнее. На рис. 4 представлены значения стационарных вероятностей числа заявок на первом блоке $R(i_1(t)) = P\{i_1(t) = i_1\}$ при различных λ . В рассматриваемом примере $i_1(t)$ принимает целые значения $0 \leq i_1 \leq 3$.

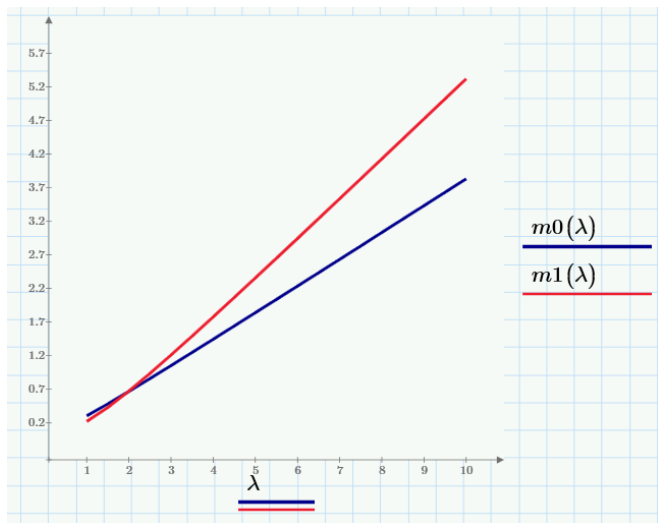


Рис. 2. Математическое ожидание числа заявок на втором блоке при различных λ

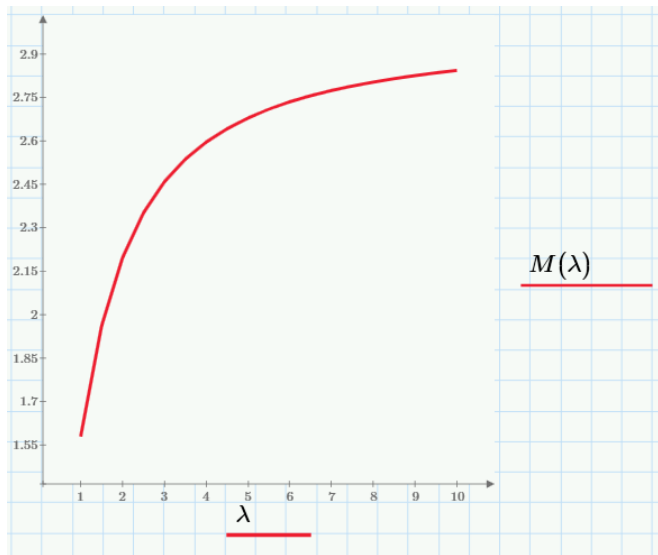


Рис. 3. Изменение среднего числа заявок на первом блоке от интенсивности входящего потока

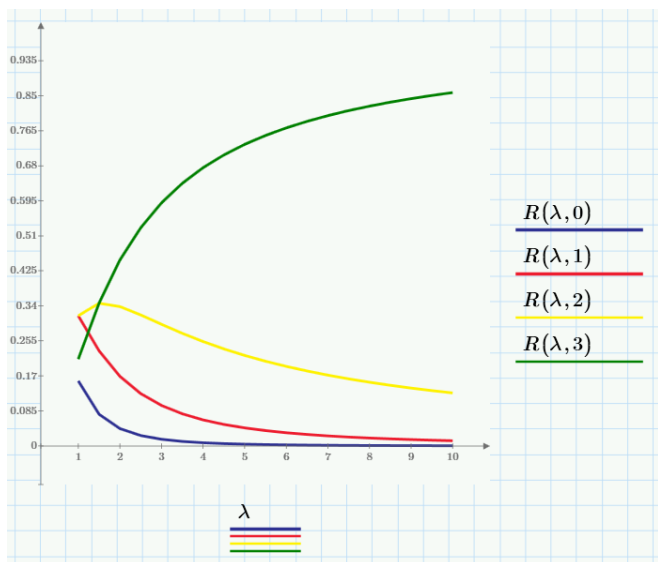


Рис. 4. Стационарные вероятности числа заявок на первом блоке при различных λ

Из графика можно сделать вывод о том, что при увеличении интенсивности входящего потока заявок значительно увеличивается вероятность $P(i_1(t)) = K$, т.е. того, что все обслуживающие приборы на первом блоке будут заняты. Поэтому и математическое ожидание числа заявок при увеличении интенсивности входящего потока стремится к числу количества приборов на первом блоке K .

Двумерное стационарное распределение вероятностей числа заявок на первом блоке и состояния самого блока для фиксированного значения $\lambda = 2$ представлено в таблице 1.

Выполним анализ зависимости параметров системы от времени работы первого блока. Введем параметр среднего времени работы первого блока t в часах ($t = \overline{1, 16}$), где 16 часов – максимальная долгота дня на территории России. Тогда интенсивности включения и выключения первого блока определяются как

$$\gamma_1 = 1/t, \quad \gamma_0 = 1/(24 - t).$$

Таблица 1. Распределение вероятностей состояний первого блока при $\lambda = 2$

	$i_1 = 0$	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$	$i_1 = 3$
$k = 0$	0,017	0,068	0,135	0,180
$k = 1$	0,025	0,101	0,203	0,270

В таблице 2 представлены значения стационарных вероятностей включенного и выключенного состояния первого блока для разных t .

Таблица 2. Значения вероятностей состояния первого блока для разных t

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 5$	$t = 10$
R_0	0,958	0,917	0,792	0,583
R_1	0,042	0,083	0,208	0,417

На рис. 5 представлено изменение значений частичных первых моментов числа заявок на втором блоке при включенном (m_1) и выключенном (m_0) первом блоке приборов в зависимости от t . Среднее же значение числа заявок на первом блоке на всем интервале принимает постоянное значение $M = 2,923$.

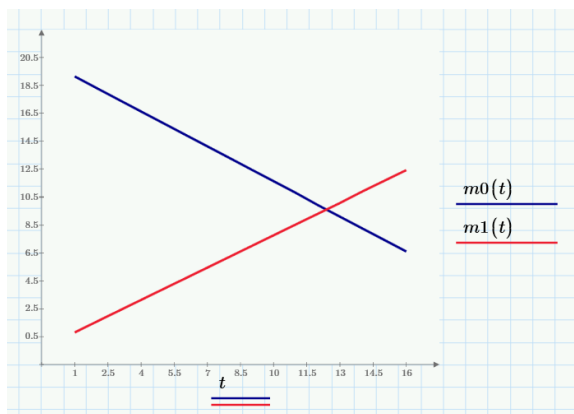


Рис. 5. Математическое ожидание числа заявок на втором блоке при различных t

6. Расчет эффективности

Решим задачу оценки экономической эффективности установки солнечной панели для бытовых нужд на примере г. Москвы. Введем функцию затрат на электроэнергию на основе предлагаемой модели в следующем виде:

$$L_1 = c_1(R_0m_0 + R_1m_1) + c_2,$$

где c_1 – стоимость электроэнергии из городской сети за кВт·ч, c_2 – «стоимость» производимой альтернативной электроэнергии.

Средняя стоимость электроэнергии в Москве составляет $c_1 = 7,33$ руб./кВт·ч. Стоимость альтернативной электроэнергии c_2 за кВт·ч будем рассчитывать как дисконтированную на весь период использования полную стоимость устанавливаемого оборудования и его обслуживания. Бытовые солнечные станции бывают различных характеристик, для примера выберем сетевую солнечную электростанцию СЗ-ДН мощностью 5 кВт. Стоимость такой солнечной панели составляет примерно 46 4120 руб., а срок службы – 25 лет. Дисконтированная полная стоимость установки с учетом ставки дисконтирования (например, 8%) составит $cost = 1\,168\,464$ руб. Примем расходы на обслуживание этой станции в размере $\Delta = 5\%$ от стоимости в год. Тогда

$$c_2 = \frac{cost \cdot (1 + \Delta)}{T} \approx 5,6 \text{ руб./кВт·ч, где } T = 25 \cdot 365 \cdot 24 \text{ ч.}$$

Средняя длительность работы солнечной панели на территории г. Москвы в сутки составляет в зимние месяцы 4 часа, а в летний период – 8 часов [12]. Тогда параметры работы первого блока зададим следующими: $\gamma_0 = \frac{1}{20}$, $\gamma_1 = \frac{1}{4}$ и $\gamma_0 = \frac{1}{16}$, $\gamma_1 = \frac{1}{8}$ в зимний и летний период соответственно. Параметры обслуживания примем $\mu_1 = \mu_2 = 1$, а $K = 5$.

Параметр входящего потока в модели λ имеет физический смысл объема потребления электроэнергии в единицу времени (т.е. среднему значению запрашиваемой мощности). Для среднестатистического потребителя он составляет около $\lambda = 1,33$ кВт. Стоит отметить, что весь объем потребления можно разложить на постоянную (постоянно работающее электрооборудование, например, охранная и противопожарная системы) и переменную

часть (например, освещение). В рамках данного исследования анализируется переменная составляющая.

Для оценки эффективности описанной гибридной энергетической системы будем сравнивать затраты L_1 с затратами в системе без использования альтернативной электроэнергии. Математической моделью негибридной системы является классическая бесконечнолинейная система массового обслуживания $M|M|\infty$ с известным математическим ожиданием числа заявок в системе $M = \lambda/\mu_2$ и функций затрат

$$L_2 = c_1 M.$$

На рис. 6, 7 представлено сравнение значений L_1 и L_2 в зависимости от параметра λ в летний и зимний периоды.

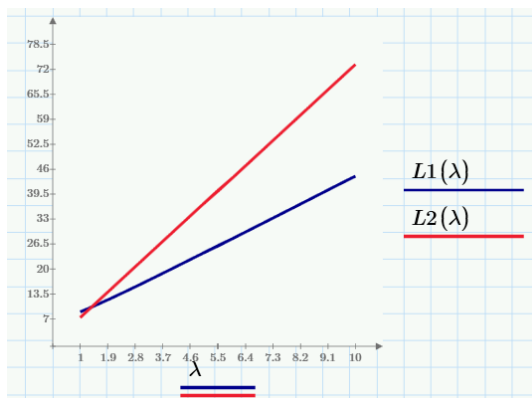


Рис. 6. Зависимость затрат от потребления в летний период

По точкам пересечения прямых L_1 и L_2 можно сделать вывод, при каком объеме потребляемой электроэнергии в час установка солнечной панели будет иметь положительный экономический эффект. В рассмотренном примере такими значениями является $\lambda^* = 1,374$ кВт для летнего периода (рис. 6) и $\lambda^* = 2,439$ кВт для зимнего (рис. 7).

Заметим, что в приведённых примерах был сделан упор на анализ зависимости конечной стоимости электроэнергии в гибридной системе от объемов потребления электроэнергии в еди-

ницу времени (т.е. от λ в обозначениях математической модели). Однако результаты моделирования можно также использовать для анализа экономической эффективности гибридной системы в зависимости от климатических условий (т.е. среднего времени работы установки альтернативной энергии γ_1) или выбора оптимальных характеристик приобретаемого оборудования – заявленной мощности среднесуточной выработки (задавая значения K и μ_1), срока службы T и др.

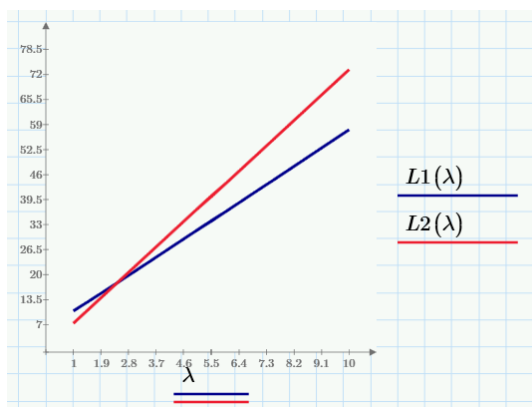


Рис. 7. Зависимость затрат от потребления в зимний период

7. Заключение

В работе была предложена математическая модель гибридной энергетической системы в виде системы массового обслуживания с дополнительным непостоянным блоком приборов. С помощью метода начальных моментов найдены стационарные вероятности состояний непостоянного блока и среднее число заявок на втором блоке. Проведён численный анализ результатов моделирования. Представлен пример оценки экономической эффективности гибридной энергетической системы при использовании источника солнечной энергии для бытовых нужд на среднестатистических данных в выбранной местности.

Результаты аналитического исследования могут быть применены для анализа гибридных энергетических систем различных конфигураций и географических особенностей местности путем задания нужных значений параметров модели, соответствующих техническим и климатическим данным.

Отметим, что данная работа представляет первый этап исследования. В будущем планируется учесть, что объем потребления электроэнергии имеет неэкспоненциальный вид распределения. В частности, интенсивности запросов в разное время суток имеют разные значения, что в дальнейшем предполагается описать входящим ММРР-потокм заявок.

Литература

1. ВИШНЕВСКИЙ В.М., СЕМЕНОВА О.В., ШАРОВ С.Ю. *Моделирование и анализ гибридного канала связи на базе лазерной и радио технологий* // Управление большими системами. – 2011. – Вып. 35. – С. 237–249.
2. ГРИГОРАШ О.В. КРИВОШЕЙ А.А., СМЫК В.В. *Автономные гибридные электростанции* // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2016. – №124(10). – С. 1–12.
3. ГОРДИЕВСКИЙ Е.М., МИРОШНИЧЕНКО А.А., КУЛГАНАТОВ А.З. и др. *Разработка имитационной модели мобильного энергокомплекса на базе ВИЭ в программе MatLab* // Вестник ПНИПУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2019. – №31. – С. 51–71.
4. ИВАНОВА А.Ю. *Альтернативные источники в энергетике: виды и принципы функционирования* // Int. Scientific Review. – 2016. – С. 29–32.
5. МАРЧЕНКО О.В. *Математическая модель энергосистемы с возобновляемыми источниками энергии* // Известия РАН. Энергетика. – 2006. – №3. – С. 154–161.

6. МИТРОФАНОВ С.В., ПЕРЕПЕЛКИН К.А. *Математическое моделирование гибридной ветро-солнечной станции для электроснабжения собственных нужд* // Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика». – 2022. – №22(3). – С. 18–26.
7. НАЗАРОВ А.А., ТЕРПУГОВ А.Ф. *Теория массового обслуживания*. – Томск: НТЛ, 2004. – 228 с.
8. НОВОКРЕЩЕНОВ О.В., ОТМАХОВ Г.С., ХУАДЕ М.Ю. *Комбинированные системы электроснабжения на возобновляемых источниках энергии* // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2017. – №132(08). – С. 1–12.
9. РЕЗИНЬКОВ А.А., ЩЕКЛЕИН С.Е. *Сравнительный анализ эффективности гибридных (солнечно-дизельных) электростанций для регионов России* // Энерго- и ресурсосбережение. Энергообеспечение. Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии. Атомная энергетика : сборник научных трудов. – Екатеринбург : Издательство Уральского университета. – 2021. – С. 385–388.
10. СИНЯКОВА И.А., МОИСЕЕВА С.П. *Метод моментов для исследования математической модели параллельного обслуживания кратных заявок потока Марковского восстановления* // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – №321(5). – С. 24–28.
11. *Enerdata* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://yearbook.enerdata.net/renewables/wind-solar-share-electricity-production.html>.
12. *Global Solar Atlas* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://globalsolaratlas.info/map>.
13. HERBST A., TORO F., REITZE F., JOCHEM E. *Introduction to Energy Systems Modelling* // Swiss Journal of Economics and Statistics. – 2012. – Vol. 148(2). –P. 111–135.

14. FERRETTI I., CAMPARADA M., ZAVANELLA L.E. *Queuing Theory-Based Design Methods for the Definition of Power Requirements in Manufacturing Systems* // Energies. – 2022. – No. 15. – 7621.
15. KING M., DACHENG LI., DOONER M. et al. *Mathematical Modelling of a System for Solar PV Efficiency Improvement Using Compressed Air for Panel Cleaning and Cooling* // Energies. – 2021. – No. 14.
16. KUMAR A., SOOD Y., RAM N.M. *Hybrid Energy System Simulation and Modelling Incorporating Wind and Solar Power* // IEEE Int. Students' Conf. on Electrical, Electronics and Computer Science (SCEECS-2024). – 2024.
17. MOHAMMED I., ABUASHOUR M.W., THA'ER O.S. et al. *Modelling, simulations and operational performance of a stand-alone hybrid wind/PV energy system supplying induction motor for pumping applications* // Int. Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation (IJESMS). – 2018. – Vol.10, No. 1. – P. 12–25.
18. PERVEEN G., RIZWAN M., GOEL N. *Comparison of intelligent modelling techniques for forecasting solar energy and its application in solar PV based energy system* // IET Energy Systems Integration. – 2019. – No. 11. – P. 34–51.
19. TYAGI S., GOYAL N., KUMAR A. et al. *Stochastic hybrid energy system modelling with component failure and repair* // Int. Journal of System Assurance Engineering and Management. – 2021. – Vol. 13. – P. 842–852.
20. VARSHNEY S., SHEKHAR C. *Optimal management strategies of renewable energy systems with hyperexponential service provisioning: an economic investigation* // Frontiers. Energy Research. – 2023. – No. 11. – P. 1–22.
21. WATERMEYER M., THOMAS M., GROTHE O. et al. *A hybrid model for day-ahead electricity price forecasting: Combining fundamental and stochastic modelling* // Engineering, Economics. – 2023. – P. 1–38.

MATHEMATICAL MODELING OF HYBRID ENERGY SYSTEMS USING QUEUEING THEORY

Ekaterina Fedorova, National Research Tomsk State University, Tomsk, Associate Professor, (ekat_fedorova@mail.ru).

Yana Tyulenina, National Research Tomsk State University, Tomsk, Junior Researcher (yancch@yandex.ru).

Natalia Meloshnikova, National Research Tomsk State University, Tomsk, Junior Researcher (meloshnikovana@gmail.com).

Abstract: In the paper, a new mathematical approach for assessing the efficiency of hybrid energy system, using alternative energy sources (solar panels, wind turbines) based on queueing theory is proposed, which allows to consider into account the stochastic nature of natural processes. As a mathematical model of a hybrid energy system using an alternative (non-permanent) energy as one of the source of electricity, we propose a queueing system with two units of servers, one of which is non-permanent and limited. A three-dimensional Markov random process is studied. Using the initial moments method, formulas for stationary characteristics are derived. A numerical analysis of the system characteristics dependency on input parameters is performed. An example of assessment of the efficiency of using solar energy for personal needs based on statistical data is presented.

Keywords: mathematical modeling, hybrid energy systems, queueing theory.

УДК 519.872

ББК 31.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.С. Манделем.*

Поступила в редакцию 27.01.2025.

Дата опубликования 31.05.2025.