

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Юрченков И. А.¹

(МИРЭА – Российский технологический университет,
Москва)

Целью исследования является разработка численной схемы с использованием итерационных методов решения систем уравнений для решения объемных задач акустики с неоднородным индексом рефракции. Приводится постановка задачи распространения акустических волн в виде объемного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Для дискретизации задачи с целью последующего численного решения использована структурированная объемная прямоугольная сетка. С использованием дискретизации постановка задачи сводится к дискретизированному оператору в виде системы уравнений с большим количеством неизвестных и матрицей оператора высокой размерности. Учитывая особенности интегральных ядер уравнения Гельмгольца в интегральной форме, приводятся численные методы решения систем уравнений с использованием модификаций матрично-векторного умножения трёхплечевых матриц на вектор на основе быстрого дискретного преобразования Фурье. Продемонстрированы численные результаты работы комплекса программ моделирования распространения реализаций модели плоской волны в объемной среде с неоднородным индексом рефракции. Особое внимание уделяется возможности быстрого решения задач математической физики на структурированной сетке большой размерности, что позволит рассматривать особенности решения на сложных неоднородных границах, а также упростить аппроксимацию решения. В завершение будут сделаны выводы о качестве получаемых решений на различных примерах неоднородностей рассматриваемой объемной области.

Ключевые слова: объемные интегральные уравнения, задача акустики, уравнение Фредгольма, итерационные методы, быстрое преобразование Фурье, уравнение Гельмгольца.

1. Введение

В настоящем исследовании рассматриваются задачи распространения и рассеяния акустических волн, которые формулируются в виде объемного интегрального уравнения Фредгольма второго рода [3, с. 19]. Это уравнение получается напрямую из

¹ Иван Александрович Юрченков, аспирант, ст. преп. (yurchenkov@mirea.ru).

дифференциального уравнения Гельмгольца, описывающего поведение волновых процессов в выбранной среде. При численном решении такого класса задач возникает необходимость в дискретизации пространства, что ведет к большим системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В представленном исследовании обсуждается специфика итерационных алгоритмов решения крупных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих при численном моделировании волновых процессов методом коллокации на равномерной сетке. Ключевые критерии эффективности (по памяти и времени вычисления) формализуются соотношениями

$$(1) \quad M \sim M_A, \quad T \sim L \cdot T_A,$$

где M_A – количество элементов массива значений матрицы системы, которое необходимо хранить в памяти вычислительного устройства для достижения решения; L – количество итераций для получения решения с заданной точностью; T_A – число арифметических операций для умножения матрицы системы уравнений на вектор.

Скорость алгоритма оценивается самой требовательной операцией для вычисления, коей является умножение матрицы на вектор для получения очередной итерации приближения искомого решения. Параметр T_A является основным критерием для оценки скорости алгоритма, и для каждого итерационного метода его стараются минимизировать, как и значение числа итераций L без потери качества решения конечной задачи.

При переходе к численному решению используется метод коллокации на равномерной сетке [2, с. 32], который позволяет аппроксимировать искомые функции в дискретных узлах. В результате такой дискретизации получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), чья матрица обладает почти трёхдиагональной структурой, т.е. элементы зависят главным образом от разности индексов строк и столбцов.

Объемные интегральные уравнения Фредгольма второго рода возникают при моделировании задач рассеяния акустических волн на неоднородных структурах. Такие уравнения выводятся из дифференциального уравнения Гельмгольца, которое описывает гармонические волновые процессы [12, с. 34]. Неоднородность задач понимается в выражении рефракции среды

в виде функции координат области решения задачи. Для задачи распространения акустических волн в форме интегрального уравнения также доказаны теоремы существования и единственности решения [6, с. 1261].

Для аппроксимации интегральных уравнений применяются методы коллокации на равномерных или адаптивных сетках. В случае сложных границ или неоднородностей используется неравномерная сетка, которая затем преобразуется во вспомогательную равномерную через интерполяцию. Это позволяет сохранить структуру матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) близкой к блочно-треугольной, что критично для эффективного умножения матрицы на вектор [8, с. 879]. Метод коллокации на равномерной сетке обеспечивает высокую точность за счет использования B -сплайнов или кубических сплайнов, которые минимизируют погрешность интерполяции [5]. Например, в работах [8, с. 879, 9] показано, что переход к равномерной сетке с числом узлов, сопоставимым с исходной сеткой, сохраняет вычислительную эффективность.

Для эффективного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые характеризуются большим количеством неизвестных, часто используются итерационные методы, позволяющие существенно сократить вычислительные затраты и упростить процедуру нахождения точного или приближенного решения.

Среди итерационных методов заметную роль играет обобщенный метод минимальных невязок GMRES [14], отличающийся высокой эффективностью при решении широкого класса задач, а также стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGSTAB) [13], предназначенный для работы с несимметричными системами, которые нередко встречаются при решении интегральных уравнений. Дополнительный интерес вызывают модификации итерационных методов градиентного спуска, о которых подробно изложено в работе [7]. Здесь авторы исследуют различные варианты алгоритмов, ориентированных на решение систем уравнений высокой размерности, и демонстрируют, что двухшаговая модификация итерационного метода градиентного спуска, основанная на принципе минимизации не-

вязки, отличается не только хорошей доказываемой сходимостью, но и практической эффективностью. Благодаря этим преимуществам данные методы могут применяться в задачах из самых разных областей, где требуется решить крупные системы уравнений с высокими требованиями к точности и быстродействию вычислений.

Полная исчерпывающая методологическая база исследования постановки задачи была предложена ранее в работе [6]. Для данного исследования предлагается модификация численного метода решения соответствующих уравнений на случай блочно-тёплицевой матрицы оператора, а также сравнительные численные результаты сходимости метода.

2. Постановка задачи

2.1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Будем решать интегральное уравнение, описывающее распространение и рассеяние акустических волн на прозрачных структурах, характеризующихся индексом рефракции $\eta(x)$ [12, с. 45]:

$$(2) \quad u(x) - k_0^2 \int_Q G(R) \hat{n}(x) u(y) dy = u^0(x);$$

$$\hat{n}(x) = \eta(x) - 1; \quad G(R) = \frac{\exp(ikR)}{4\pi R};$$

$$u^0(x) = - \int_Q G(R) f(y) dy; \quad x \in Q,$$

где $G(R)$ – ядро интегрального уравнения, зависящее от разности координат $R=|x - y|$; Q – объемная область задачи, для которой ищется распространение скалярного поля $u(x)$, $u(x)$ – неизвестная функция скалярного поля в области Q , k_0 – волновое число внешнего источника излучения, $u_0(x)$ – внешнее моделируемое излучение источника $f(x)$, заданное интегралом.

Данное интегральное уравнение Фредгольма второго рода будем решать численно, применяя итерационные методы решения систем уравнений. Для дискретизации задачи будем использовать метод кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций [2, с. 32], используя прямоугольную структурированную сетку Π ,

сведя уравнение к дискретизированному виду [3, с. 21], неизвестное решение u которого будет определено в дискретных точках, принадлежащих Q [4, с. 54].

В прямоугольной декартовой системе координат определим параллелепипед Π , внутри которого находится область Q . Ребра параллелепипеда параллельны осям координат, а длины ребер равны $N_l \times h_l$, $l = 1, 2, 3$, где h_l – шаги сетки по декартовым координатам. Тогда параллелепипед Π можно представить как объединение ячеек (элементарных параллелепипедов) $\Pi(p)$, $p = (p_1, p_2, p_3)$, $p_l = 0, 1, \dots, N_l - 1$. Определим область \hat{Q} как объединение N_Q ячеек, центры которых лежат внутри области Q . Узловые точки, в которых определяются значения функций, будем задавать в центрах ячеек и обозначать как $x(p)$, а значения функций в этих точках как $f(p)$.

Таким образом получим дискретный вид для задачи (2) в форме системы уравнений [11]:

$$(3) \quad u(p) - \sum_{y(q) \in Q} A(p - q) \hat{\eta}(q) u(q) = u^0(p), x(p) \in Q,$$

$$A(p - q) = k^2 \int_{\Pi(q)} \frac{\exp(ik|x(p) - y|)}{4 \cdot \pi \cdot |x(p) - y|} dy, p \neq q, A(0) = 0.$$

Поскольку точки коллокации находятся в центрах прямоугольных разбиений, то для дискретизации применяется оценка сверху по точности аппроксимации в $O(h^2)$, $h = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^{1/2}$.

Основные затраты в (3) связаны с вычислением сумм:

$$(4) \quad W(p) = \sum_{q_1=0}^{N_1-1} \sum_{q_2=0}^{N_2-1} \sum_{q_3=0}^{N_3-1} A(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) u(q_1, q_2, q_3).$$

Ввиду особенности ядра интегрального уравнения (2) матрица системы (3) является трехуровневой блочно-тёплицевой. На основе определения значений матрицы A в точках $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$, $\hat{p}_l = N_l, \dots, 2N_l$, определяя таким образом прямоугольную дискретизацию Π_2 за пределами дискретизации Π [10, с. 173], а также доопределив в этих точках искомое приближение решения $u(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ нулями в этих точках, получим возможность использовать быстрое умножение уже блочно-циркулянтной матрицы на вектор, ускорив вычисления (4) с помощью вычисления прямого и обратного быстрого преобразований Фурье для функций трех аргументов:

$$(5) \quad W(p) = \sum_{q_1=0}^{2N_1-1} \sum_{q_2=0}^{2N_2-1} \sum_{q_3=0}^{2N_3-1} A(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) u(q_1, q_2, q_3),$$

$$(6) \quad W^F(k_1, k_2, k_3) = A^F(k_1, k_2, k_3) u^F(k_1, k_2, k_3), k \in \Pi_2.$$

Количество операций T_A и необходимая память M_A для реализации алгоритма в таком случае оцениваются как [10, с. 174]

$$(7) \quad T_A \sim 10N \text{ LOG}(N), \quad M_A \sim 10N, \quad N = N_1 N_2 N_3.$$

Представленная оценка асимптотически меньше полиномиальной сложности, в результате чего ожидается выигрыш в скорости решения.

Задачу (3) в дискретном виде будем решать с помощью модификации двухшагового итерационного метода градиентного спуска [7] в случае блочно-тёплицевой матрицы оператора.

2.2. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Задача (3) сводится к поиску решения системы уравнений и состоит в решении операторного уравнения, записанного в символическом виде:

$$(8) \quad (H)u = b, \quad (H)u = u - A(\hat{\eta}u),$$

где (H) – заранее известный (при этом не исключается комплексный характер) матричный оператор; b – вектор правой части (также в общем случае комплексный); u – вектор, подлежащий определению.

В качестве итерационного метода решения системы (3) будем использовать модификацию двухшагового метода градиентного спуска [7] с использованием умножений (5)–(6) в (8). Итерационный метод ставит своей задачей поиск приближения $u_\tau(p) \approx u(x(p))$ неизвестной искомой функции. Итерации модифицированного итерационного метода градиентного спуска определяются следующим образом:

$$r_0 = (H)u_0 - b;$$

$$u_1 = u_0 - \|(H^*)r_0\|^2 / \|(H)(H^*)r_0\|^2 \cdot (H^*)r_0;$$

$$(9) \quad r_k = (H)u_k - b; \quad \Delta r_k = r_k - r_{k-1};$$

$$t_k \|\Delta r_k\|^2 + h_k \text{Re}(\Delta r_k, (H)(H^*)r_k) = \text{Re}(r_k, \Delta r_k),$$

$$t_k \text{Re}(\Delta r_k, (H)(H^*)r_k) + h_k \|(H)(H^*)r_0\|^2 = \text{Re}(r_k, (H)(H^*)r_k),$$

$$u_{k+1} = u_k - t_k(u_k - u_{k-1}) - h_k(H^*)r_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tau,$$

где u_0 – начальное приближение неизвестного вектора, а u_k – приближения неизвестного вектора на итерациях.

Единственным ограничением на итерационный метод (9) является существование ограниченного обратного оператора к H . Доказательство сходимости итераций (9) представлены в работе [7].

В итерациях модифицированного итерационного метода градиентного спуска [7] также представлено действие сопряженного оператора (H^*) на вектор u . Учитывая, что по определению для матричного оператора

$$H^* = \overline{H}^T,$$

где \overline{H} – это матрица с комплексно-сопряженными элементами к элементам матрицы H , то действие оператора (8) может быть переписано в виде

$$(10) (H^*)u = u - \overline{\eta} \left(\overline{A}^T u \right),$$

$$(H^*)u = u(p) - \overline{\eta}(p) \sum_{y(q) \in Q} \overline{A}(q-p)u(q), p \in Q,$$

где $\overline{\eta}$ – также вектор рефракции с комплексно-сопряженными элементами к вектору $\hat{\eta}$.

Критерием остановки итераций (9) выберем метрику δ_k относительной ошибкой приближаемого вектора на шаге k итераций:

$$(11) \delta_k = \|u_k - u_{k-1}\| / \|b\| < \varepsilon,$$

где ε – заданная точность итераций, которая чаще всего устанавливается равной 10^{-d+1} , где d – количество значащих цифр компьютерного представления чисел с плавающей точкой.

В результате имеем метод, который эффективно справляется с задачей решения операторных уравнений [6]. В качестве апробации результатов используем в сравнении стабилизированный итерационный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab) [13] для которого также будем использовать быстрые матрично-векторные умножения (5)–(6) и операторную форму матрицы системы (3).

3. Результаты

3.1. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для вычисления поставленной задачи объемного интегрального уравнения итерационными методами был разработан ком-

плекс программ с использованием библиотеки numru. Все проделанные вычислительные эксперименты, представленные далее, были проведены на вычислительной машине с центральным процессором Intel Core i5-10400 под управлением ОС Windows 10. Среда выполнения программы – Jupyter Notebook.

Для численных результатов предложено два эксперимента. Первый эксперимент показывает работу итерационных методов решения для простой задачи распространения волн без неоднородности рефракционной характеристики среды. Второй эксперимент добавляет сферическую неоднородность с уменьшением длины плоской волны моделируемого источника излучения.

Для простоты изложения условимся сокращать названия итерационных методов, применяемых в экспериментах. Для стабилизированного метода бисопряженных градиентов (BiCGStab) [1] примем сокращение в виде BG, а для модификации двухшагового метода градиентного спуска (TwoSGD) примем сокращение TS.

Для сравниваемых итерационных методов в процессе итераций будем измерять их метрики качества сходимости от количества операторных умножений m на итерациях k , т.е. $k \times m$. Первой метрикой является норма невязки итераций $r_k = (H)u_k - b$, второй метрикой станет значение критерия останова δ_k . В завершение для методов сравним значения последней невязки системы r_τ и замерим время работы алгоритма.

Главным отличием реализаций методов является возможность минимизации числа операторных умножений (5)–(6), (8), (10) на одной итерации приближения как самой ресурсоемкой операции. Для метода BG количество операторных умножений равно двум [13], в то время как для метода TS оно равно трём [7]. В этом смысле установим разное максимальное количество итераций методов. Для TS установим количество итераций $\tau_1 = 50$, в то время как для BG установим $\tau_2 = 75$. Целевое значение для останова метода для δ_k установим, как $\varepsilon = 10^{-7}$.

Прямоугольная область решения Q характеризуется линейными размерами $L = 3$ по каждой из декартовых осей $x = (x_1, x_2, x_3)$, а также точкой центра кубической области $c = (0, 0, 0)$ в начале координат. Дискретизация объемной обла-

сти решения выбрана как $N_j = 100$ элементов по каждому из измерений $j = 1, 2, 3$, т.е. итоговое количество неизвестных равно $N_j = 10^6$, что в действительности отвечает системе с большим количеством неизвестных. Реализация численных экспериментов с таким количеством неизвестных является задачей моделирования с достаточно большими требованиями к вычислениям.

Внешнее излучение $f(x)$ из (2) моделируется в виде плоской волны комплексных гармонических колебаний:

$$(12) f_0(x) = \exp(ik_0(x, \mathbf{d})), \quad x \in Q,$$

с заданным значением волнового числа k_0 и вектором направления распространения \mathbf{d} . После вычисления $f_0(x)$ в точках $x(p)$ их значения подставляются вместо $f(y)$ в (2) для получения вектора свободных членов $u^0(p)$ системы уравнений (3). Далее данные значения будут фигурировать как вектор b свободных значений СЛАУ в итерациях (9) и итерациях метода бисопряженных градиентов.

3.1. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Первый численный эксперимент проведен в объемной области Q с однородным комплексным индексом рефракции $\eta(x) = 2 + 1,5i$. Для задачи было выбрано волновое число $k_0 = 5$, вектор направления плоской волны $\mathbf{d} = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ из области положительных значений сетки в отрицательную, амплитуда колебаний волны равна $E_0 = 1$.

Для первого эксперимента отобразим график сходимости методов на рис. 1, где по оси абсцисс отложено количество операторных умножений метода $k \cdot m$, а по оси ординат – метрика δ_k в логарифмическом масштабе для детальной визуализации сходимости.

В первом эксперименте на графике сходимости рис. 1 по критерию останова видим, что метод ВГ сходится быстрее до целевого значения останова ε , чем метод ТС. В то время как метод ТС не дошел до целевого значения сходимости ε , метод ВГ дошел до него с запасом по количеству итераций. Конечная норма невязки интегрального уравнения в первом эксперименте для метода ТС приблизительно составляет $\|r_\tau\| = \|(Hu_\tau^{TS} - b)\| = 0,22 \times 10^{-4}$,

в то время как для метода BG $\|r_i\| = \|(H)u_i^{BG} - b\| = 0,26 \times 10^{-5}$. Вторым методом по конечной норме невязки системы оказался приоритетным по сравнению с первым.

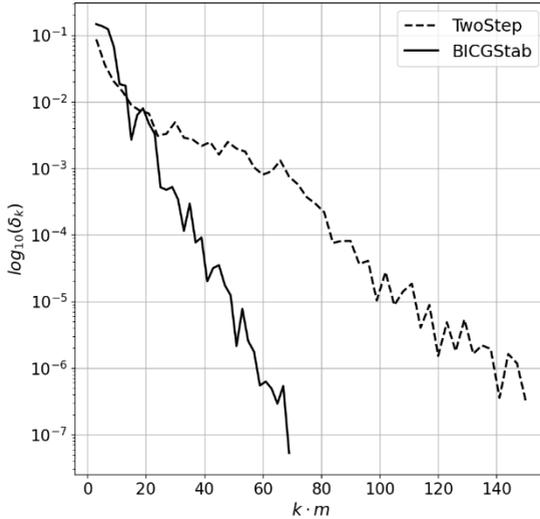


Рис. 1 Сходимость итерационных методов, оцененная по динамике δ_k относительно числа итераций k в первом эксперименте

Рядом покажем трёхмерную визуализацию полученного численного решения для дискретизации скалярного поля методом TS (рис. 2). Цветом на рисунке показано вычисленное значение амплитуды вещественных значений скалярного поля в точках дискретизации области П. На визуализации затухающего скалярного поля видим хорошую ожидаемую картину решения, соответствующую обоим методам.

Второй численный эксперимент проведен на неоднородности в форме окружности единичного радиуса. Волновое число для внешнего излучения $k_0 = 20$, вектор направления плоской волны $\mathbf{d} = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ из области положительных значений сетки в отрицательную, амплитуда колебаний волны равна $E_0 = 1$.

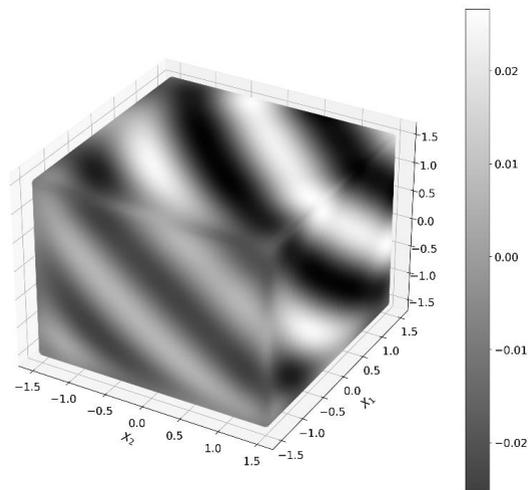


Рис. 2 Приближение скалярного поля $u(x(p))$ в объемной дискретизации Π , найденное с помощью модификации двухшагового метода градиентного спуска в первом эксперименте

Внутри окружности единичного радиуса значение коэффициента рефракции равно $\eta_2(x) = 4 + 1,5i$, вне окружности на остальной объемной области данное значение равно $\eta_1(x) = 2 + 0i$. Таким образом индекс рефракции для задачи составлен в виде кусочно-постоянной функции координат:

$$\eta(x) = \begin{cases} \eta_1(x) = 2 + 0i, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1, \\ \eta_2(x) = 4 + 1.5i, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1. \end{cases}$$

Для второго эксперимента отобразим график сходимости методов на рис. 3, где по оси ординат отложим уже норму невязки r_k в логарифмическом масштабе для детальной визуализации сходимости.

Во втором эксперименте по графику сходимости на рис. 3 видим, что результаты работы метода TS являются более удовлетворительными ввиду того, что сходимость происходит гладко и без скачков, а конечная норма невязки системы минимальна на интервале. Метод BG не достиг сходимости в процессе итераций, что видно на графике. Характер сходимости после достижения

минимального значения невязки резко меняется, что может быть связано с реализацией быстрых умножений матрицы на вектор.

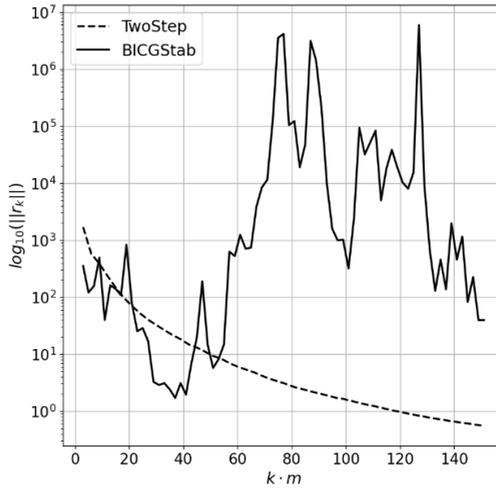


Рис. 3 Сходимость итерационных методов, оцененная по динамике $\|r_k\|$ относительно числа итераций k во втором эксперименте

Конечная норма невязки интегрального уравнения для метода TS приблизительно составляет $\|r_\tau\| = \|(H)u_\tau^{TS} - b\| = 0,7333$, в то время как для стабилизированного метода BG составляет $\|r_\tau\| = \|(H)u_\tau^{BG} - b\| = 6,2869$, что показывает более качественное приближение решения первого рассматриваемого метода относительно второго.

Далее на рис. 4, 5 покажем сравнение полученного численного решения для дискретизации скалярного поля методом TS (рис. 4) и BG (рис. 5) в виде двумерных диаграмм уровня на среде значения дискретизации $x_3 = 0$. Цветом на рисунке показано вычисленное значение амплитуды вещественных значений u_τ .

На визуализации двумерного среза решения на рис. 4 отметим более качественную картину решения для скалярного поля, полученного методом TS. Решение, полученное методом BG на рис. 5 не отвечает дискретизированной системе по конечному

значению нормы невязки, что также подтверждается визуализацией.

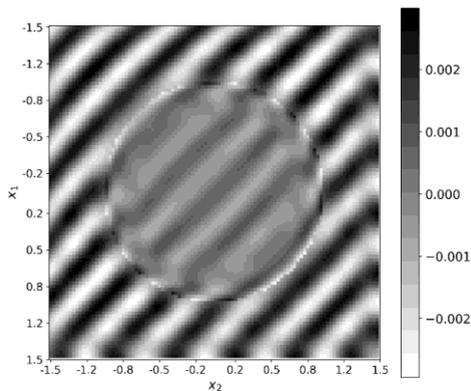


Рис. 4 Визуализация двумерного среза решения в плоскости x_1Ox_2 для вещественных значений приближения u_τ , полученных методом TS

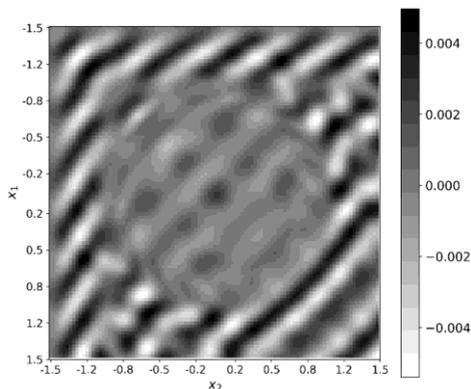


Рис. 5 Визуализация двумерного среза решения в плоскости x_1Ox_2 для вещественных значений приближения u_τ , полученных методом BG

В таблице 1 представлено время работы методов и конечная норма невязки по завершению итераций на экспериментах.

Таблица 1. Сводная таблица экспериментов.

Методы	TwoSGD		BiCGStab	
	Время работы, с	Невязка	Время работы, с	Невязка
Эксперимент № 1	172,9	$0,22 \times 10^{-4}$	86,68	$0,26 \times 10^{-5}$
2	171,9	0,6333	164,5	6,2869

Из таблицы видим, что время работы алгоритма BiCGStab меньше, чем для алгоритма TwoSGD, однако отметим более стабильную сходимость второго метода в условиях повышающихся значений волнового числа k_0 .

В результате реализации метода получаем возможность моделировать процессы, связанные с распространением или рассеянием скалярного поля в области неоднородности с реально высокой дискретизацией ($N_Q > 10^6$). На это влияет настройка параметра дискретизации N_i , $i = 1, 2, 3$, количество разбиений объемной области решения задачи вдоль каждой из осей декартовой системы координат.

4. Обсуждение

Условием применимости данного вычислительного метода заключается в требовании наличия ядра интегрального оператора, зависящего от разности координат, ввиду чего основные вычисления сопряжены с вычислениями коэффициентов оператора в виде блочно-теплицевой матрицы. В представленном численном эксперименте наглядно продемонстрирован эффективный подход к решению такой постановки задач, а также качественные картины решения задач распространения акустической волны в среде с затуханием и рассеяния волны на границе рефракции прозрачных объемных сред.

Примечательным является то, что требований к структуре функции рефракции, за исключением физических ограничений моделируемых материалов, не ставится, что позволяет производить математическое моделирование представленных выше задач на областях высокой сложности. Основным ограничением будет являться размер области, на которой будет задана функция.

Предложенный для решения задачи модифицированный итерационный метод градиентного спуска показал себя как эффективный метод решения операторного уравнения с плотной матрицей оператора по количеству арифметических операций, времени вычисления на однопроцессорном выполнении, а также эффективности использования памяти системы.

Для реализации алгоритма требуется хранить и использовать для вычисления не квадратные матрицы огромной размерности, а только компоненты системы, необходимые для построения трёхлинейного оператора до циркулянтного. Этот аспект позволяет рассматривать решение задач на сверхбольших сетках дискретизации с количеством неизвестных более миллиона на одном вычислительном узле в задачах моделирования с точечными неоднородностями.

По результатам численного эксперимента показано, что разработанный метод устойчиво сходится при изменении размерности задачи, а также стабильно сходится за разумное число умножений матрицы на вектор. Полученная численная схема позволяет серьезно ускорить вычисления в общих постановках решения СЛАУ или операторных уравнений, а с применением специальной дискретизации также позволит решать большие по числу неизвестных прикладные задачи моделирования.

5. Заключение

Представленные в работе результаты и обсуждение подтверждают высокую эффективность разработанного подхода к моделированию волновых процессов в средах со сложной рефракционной структурой. Возможность описывать широкий класс включений прямоугольными параллелепипедами в сочетании с реализацией плотных матриц большого размера позволяет решать многомерные акустические задачи при различных физических ограничениях на свойства материалов.

Ключевым моментом при этом является использование интегрального оператора с ядром, зависящим от разности координат, что упрощает приведение к задаче с трёхлинейной матрицей и обеспечивает значительный выигрыш в вычислительной производительности.

Литература

1. БУКАНСУС С., МАНДЭ С., ТАИР Б. и др. *Построение обобщенных итерационных методов, используемых для решения интегрального уравнения Фредгольма* // Вычислительные методы и программирование. – 2022. – Т. 23, №4. – С. 350–364.
2. ДЕМИДОВИЧ Б.П. *Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учебное пособие.* – СПб.: Лань, 2022. – 400 с.
3. КУДРЯШОВА Н.Ю. *Граничные интегральные уравнения: учебное пособие.* – Пенза: ПГУ, 2018. – 72 с.
4. НУРУТДИНОВА И.Н., ПОЖАРСКИЙ Д.А. *Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Ряды: учебное пособие.* – Ростов-на-Дону: Донской ГТУ, 2021. – 96 с.
5. ТАИР Б., СЕГНИ С., ГИББИ Х. и др. *Два численных метода решения линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма со слабо сингулярным ядром* // Вычислительные методы и программирование. – 2022. – Т. 23, №2. – С. 117–136.
6. САМОХИН А.Б., САМОХИНА А.С., ЮРЧЕНКОВ И.А. *Интегральное уравнение Фредгольма для задач акустического рассеяния на трёхмерных прозрачных структурах* // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59, №9. – С. 1260–1265.
7. САМОХИН А.Б., САМОХИНА А.С., ШЕСТОПАЛОВ Ю.В. и др. *Итерационные методы градиентного спуска для решения линейных уравнений* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, №8. – С. 1331–1339.
8. САМОХИН А.Б. *Численный метод решения объемных интегральных уравнений на неравномерной сетке* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, №5. – С. 878–884.
9. САМОХИН А.Б., ЮРЧЕНКОВ И.А. *Численные методы решения стационарных объемных интегральных уравнений Фредгольма второго рода для задач распространения и рассеяния электромагнитных волн* // Материалы Всероссийской открытой научной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распростране-

ния и дифракции волн: Всероссийские открытые Армандовские чтения», Муром, 25–27 июня 2024 года. – Муром: Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, 2024. – С. 103–112.

10. САМОХИН А.Б. *Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики: монография.* – М.: Техносфера, 2021. – 218 с.
11. САМОХИН А.Б. *Методы и эффективные алгоритмы решения многомерных интегральных уравнений* // Russian Technological Journal. – 2022. – Т.10, №6. – С. 70–77.
12. COLTON D., KRESS R. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory.* – Springer-Verlag, Berlin, 1992. – 328 p.
13. SCHOUTROP C.E.M., TEN THIJJE BOONKKAMP J.H.M., VAN DIJK J. *Reliability Investigation of BiCGStab and IDR Solvers for the Advection-Diffusion-Reaction Equation.* // Communications in Computational Physics. – 2022. – Vol. 32, No. 1. – P. 156–188.
14. ZOU Q. *GMRES algorithms over 35 years* // Applied Mathematics and Computation. – 2023. – Vol. 445. – P. 127869.

AN EFFICIENT METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF VOLUME INTEGRAL FREDHOLM EQUATIONS FOR ACOUSTIC WAVE PROPAGATION MODELING PROBLEMS

Ivan Yurchenkov, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Graduate Student, Senior Lecturer (yurchenkov@mirea.ru).

Abstract: The purpose of the research is to develop a numerical scheme using iterative methods for solving systems of equations for solving bulk acoustic problems with inhomogeneous refraction index. The paper presents a formulation of the acoustic wave propagation problem in the form of a volume integral Fredholm equation of the second kind. A structured volume rectangular mesh is used to discretize the problem for the purpose of subsequent numerical solution. Using discretization, the problem formulation is reduced to a discretized operator in the form of a system of equations with a large number of variables and an operator matrix of high dimensionality. Taking into account the peculiarities of the integral kernels of the Helmholtz equation in integral form, numerical methods for solving the systems of equations using modifications of the matrix-vector multiplication of Toeplitz matrices by a vector based on the

fast discrete Fourier transform are given. Numerical results of a set of programs for modeling propagation realizations of a plane wave model in a volumetric medium with inhomogeneous refraction index are demonstrated. Special attention in this paper is paid to the possibility of fast solution of mathematical physics problems on a structured grid of high dimensionality, which will allow us to consider the features of the solution on complex inhomogeneous boundaries, as well as to simplify the approximation of the solution. Finally, conclusions will be drawn about the quality of the obtained solutions on different examples of inhomogeneities of the considered volume domain.

Keywords: volume integral equations, acoustic problem, Fredholm equation, iterative methods, fast Fourier transform, Helmholtz equation.

УДК 519.642+51-73

ББК 22.19

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.Г. Лосевым.*

Поступила в редакцию 17.02.2025.

Опубликована 31.05.2025.