

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ПОВЕДЕНИЯ ОДНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПОМОЩЬЮ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ

**Зверкина Г. А.**<sup>1</sup>

*(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

**Кошелев А. А.**<sup>2</sup>

*(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Московский  
государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва)*

*Ранее авторами был предложен метод имитационного моделирования случай-  
ной величины по интенсивности – одной из характеристик функции распреде-  
ления. В данной работе представлены результаты тестирования этого ме-  
тода для имитационного моделирования поведения стохастической модели,  
в данном случае – модели пары восстанавливаемых зависимых элементов. Ха-  
рактеристики периодов безотказной работы и периодов восстановления по-  
добраны таким образом, что возможно аналитическое исследование поведе-  
ния исследуемой модели. Результаты имитационного моделирования «класси-  
ческим» методом и методом моделирования случайных величин по интен-  
сивности были сравнены с аналитическим решением задачи о поведении коэффи-  
циента готовности исследуемой модели. В результате численных эксперимен-  
тов показано, что моделирование поведения случайного процесса с методом  
моделирования случайных величин не уступает по точности «классическому»  
методу моделирования.*

Ключевые слова: интенсивность случайной величины, численное моде-  
лирование Марковского процесса, вопросы оптимизации моделирова-  
ния, моделирование случайной величины по интенсивности.

### **1. Введение**

Для прогнозирования и анализа поведения сложных стоха-  
стических моделей теории массового обслуживания (ТМО), тео-  
рии надёжности (ТН) и смежных областей в случае, когда теоре-  
тическими методами этого сделать невозможно или очень слож-

<sup>1</sup> Галина Александровна Зверкина, к.ф.-м.н., доцент (zverkina@gmail.com).

<sup>2</sup> Александр Анатольевич Кошелев, (koshelev030698@yandex.ru).

но, используется имитационное моделирование поведения таких моделей. Анализ полученных статистических данных по большому количеству таких моделирований позволяет прогнозировать поведение реальных сложных стохастических моделей.

Как правило, в таких моделях предполагается интенсивность (скорость) поступления заявок, обслуживания, времени ремонта/простоя и пр. постоянной или, в случае переменной интенсивности, – с заданным заранее «графиком» её изменения, определяемой функцией распределения (ф.р.), например, времени обслуживания (ремонта и пр.) – см. ниже определение ???. В этом случае имитационное моделирование проводится хорошо известными методами с использованием моделирования сл.в. по функции распределения этих сл.в. – см., например, [9, 12, 11].

Но хорошо известно, что в реальных сетях связи интенсивность (частота) появления новых соединений меняется как в зависимости от времени, так и в связи с внешними событиями; например, количество телефонных вызовов резко возрастает во время знаковых событий (важный спортивный матч, стихийное бедствие, авария на дороге и пр.).

Поэтому важно уметь моделировать поведение сложных стохастических систем в случае, когда интенсивность появления интересующих исследователя событий зависит от состояния всей системы (а также от неких внешних событий).

По-видимому, впервые асимптотический анализ поведения стохастических систем с зависящими от полного состояния системы интенсивностями был предложен в [19, 20]; вопросы вычисления оценок поведения такого рода стохастических систем исследовались, например, в [16, 17, 18, 21, 22, 23] и др. Но полученные в этих работах результаты дают только грубые оценки, а более точные оценки могут быть получены с помощью имитационного моделирования.

Имитационное моделирование поведения стохастических систем обслуживания и др. обычно сводится к последовательному моделированию случайных величин (длин периодов рабо-

ты/ремонта/обслуживания и пр.). При этом моделирование сл.в. чаще всего строится с использованием обратной функции к функции распределения (см., например, [9] и ниже раздел 2.2).

Однако для стохастических систем с зависящими от полного состояния системы интенсивностями стандартные методы моделирования малоприменимы: распределение периодов работы/ремонта/обслуживания и пр. не известны заранее, они могут меняться по ходу изменения полного состояния системы.

Поэтому в публикациях [5, 6, 7] был предложен метод моделирования сл.в. по её интенсивности. (Этот метод кратко упоминается в [14], но алгоритма использования интенсивности для моделирования сл.в. не приводится.)

В настоящей работе предполагается сравнить моделирование небольшой стохастической системы с зависящими от полного состояния системы интенсивностями «классическим» методом (методом обратной функции) и методом моделирования сл.в. по её интенсивности с явно вычисленными характеристиками поведения этой системы.

Естественно, будет выбрана небольшая система, поведение которой может быть описано с помощью цепи Маркова в непрерывном времени; для таких систем существует хорошо известный аппарат исследования их поведения. В следующих исследованиях будут изучаться системы с более сложной зависимостью поведения элементов от полного состояния системы.

## **2. Интенсивность и метод моделирования сл.в. по интенсивности**

Сначала напомним определение интенсивности отказов/восстановлений/входящих потоков/обслуживания и пр.

### **2.1. Интенсивность**

Рассмотрим протекающий во времени процесс, поведение которого определяется некоторыми периодами, длины которых – сл.в. с непрерывной ф.р. (простейший случай – процесс восстановления, см., например, [3, 10, 15]).

Одной из величин, характеризующих распределение сл.в., является интенсивность.

**Определение 1.** Интенсивностью случайной величины  $\xi$  с функцией распределения  $F(t)$  называется функция

$$(1) \quad \lambda(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}\{\xi \in (t, t + \Delta) \mid \xi > t\}}{\Delta} = \frac{F'(t)}{F(t)}.$$

**Замечание 1.** Здесь мы предполагаем, что  $F(t)$  непрерывна и  $F'(t)$  существует п.в., т.е. распределение сл.в.  $\xi$  абсолютно непрерывно.

Понятие интенсивности может быть распространено и на неабсолютно непрерывные (но не сингулярные) распределения (см., например, [13]), однако здесь мы ограничиваемся рассмотрением только абсолютно непрерывных распределений.

**Замечание 2.** Поскольку

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(v) dv\right),$$

интенсивность определяет распределение неотрицательной сл.в.

Далее мы будем рассматривать только неотрицательные случайные величины.

**Замечание 3.** Поскольку  $F(+\infty) = 1$ , то

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \lambda(t) dt = +\infty,$$

т.е. некоторая функция  $\lambda(t)$  будет задавать интенсивность некоторой сл.в., если выполнено условие (2).

## 2.2. Схема алгоритма моделирования сл.в. по интенсивности

Предположим, что  $\lambda(t)$  – интенсивность сл.в.  $\xi$ .

Возьмём  $\{\mathcal{U}_i\}_{i=0,1,2,\dots}$  – последовательность независимых сл.в., равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1)$ .

Рассмотрим точки  $\{t_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_i < t_{i+1}$ ; обозначим  $\Delta_i \stackrel{\text{def}}{=} t_{i+1} - t_i$ .

Если  $\lambda(t_0)\Delta_0 > \mathcal{U}_0$ , то полагаем  $\xi = 0$ .

В противном случае, если  $\lambda(t_1)\Delta_1 > \mathcal{U}_1$ , то полагаем  $\xi = t_1$ .

В противном случае, если  $\lambda(t_2)\Delta_2 > \mathcal{U}_2$ , то полагаем  $\xi = t_2$ .

...

... если  $\lambda(t_i)\Delta_i > U_i$ , то полагаем  $\xi = t_i$ ...

Эта процедура с вероятностью 1 конечна, и её качество зависит от выбора длины шагов  $\Delta_i$  – см. [5, 6, 7]. В работе [6] с помощью методов математической статистики было получено, что шаг моделирования зависит от значения интенсивности в рассматриваемый в момент  $t$  и вычисляется по формуле

$$\Delta(t) = \frac{K}{\lambda(t)}, \quad K = 0,001,$$

но данная процедура применима только к положительным сл.в.

**Замечание 4.** Если известна ф.р.  $F(t)$  сл.в.  $\xi$ , то для компьютерного моделирования сл.в.  $\xi$  удобно применять следующее соотношение:

$$(3) \quad F^{-1}(U) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi,$$

где  $U$  равномерно распределена на  $[0; 1]$ ,

$$F^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq y\},$$

об этом см., например, [9].

Хотелось бы отметить различие возможности применения в сложных системах массового обслуживания моделирования реализаций сл.в. (времени работы, восстановления и пр.) методом моделирования по интенсивности и методом обратной функции.

Моделируя значения некоторого случайного промежутка времени в системе массового обслуживания методом обратной функции, мы можем не учесть изменения состояния нашей системы массового обслуживания в течение этого промежутка (из-за сложности системы массового обслуживания). Метод моделирования по интенсивности автоматически учитывает любые сложности системы массового обслуживания, поскольку реализация всех действующих в каждый момент времени  $t$  сл.в. производится одновременно на малом промежутке  $(t, t + \Delta t)$ .

Очевидно, что моделирование сл.в. с помощью интенсивности требует гораздо большего числа операций, чем моделирование с помощью обратной функции. Именно поэтому требуется

тестирование метода моделирования сл.в. с помощью интенсивности на примере моделирования поведения стохастической системы и сравнение результатов как с результатом моделирования с помощью обратных функций, так и с теоретически вычисленными характеристиками поведения этой стохастической системы.

### **3. Выбор стохастической системы для тестирования метода имитационного моделирования её поведения с помощью интенсивностей**

Рассматриваем систему надёжности, состоящую из двух зависимых восстанавливаемых элементов. В качестве примера можно привести две кассы в магазине, две взлётно-посадочные полосы аэропорта и пр. Зависимость состоит в том, что во время нерабочего состояния одного элемента второй должен работать с бóльшей нагрузкой, а значит, и изнашивается быстрее, т.е. повышается вероятность его отказа в ближайшее время. С другой стороны, если оба элемента находятся в отказавшем (нерабочем) состоянии, то скорость ремонтных работ изменяется, так как мощности ремонтников имеют некоторые ограничения.

Иначе говоря, интенсивности отказов и восстановлений обоих элементов зависят от полного состояния системы, которое включает в себя показатели состояния обоих элементов (работа или ремонт), а также прошедшее время нахождения обоих элементов в этом состоянии.

Пространство состояний такой системы – это произведение  $\mathcal{S} := \{0; 1\} \times \mathbb{R}^+ \times \{0; 1\} \times \mathbb{R}^+$  со стандартной  $\sigma$ -алгеброй.

Элементами  $\mathcal{S}$  являются векторы  $Z = (i, x; j, y)$  с  $i, j = 0, 1$  и  $x, y \geq 0$ .

Значение  $i = 0$  (или 1) означает, что первый элемент системы находится в рабочем состоянии (или в состоянии ремонта); значение  $x$  обозначает время, прошедшее с момента последнего изменения первой переменной  $i$ . Аналогично значения  $j$  и  $y$  интерпретируются для второго элемента системы.

Процесс  $Y_t$  на пространстве  $\mathcal{S}$  задан случайными величинами

нами:  $X_t^1, \xi_t^1, X_t^2, \xi_t^2$ .  $X_t^1$  принимает значения 0 и 1 в зависимости от состояния первого прибора (работы/ремонта/пр.), а  $\xi_t^1$  – случайное время с последнего изменения состояния прибора до момента  $t$ . Величины  $X_t^2, \xi_t^2$  вводятся аналогичным образом для второго прибора. Тогда обозначим по определению  $Y_t = (X_t^1, \xi_t^1, X_t^2, \xi_t^2)$  – состояние всей системы в момент времени  $t$ , и вероятности переходов (изменения компонент  $i, j$ ) задаются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_{t+\Delta}^1 = |i_t - 1|, \xi_{t+\Delta}^1 \in (0; \Delta), X_{t+\Delta}^2 = j_t, \xi_{t+\Delta}^2 = y_t + \Delta \mid \\ | X_t^1 = i_t, \xi_t^1 = x_t, X_t^2 = j_t, \xi_t^2 = y_t \} = \\ = \rho_1(Y_t)\Delta + o(\Delta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_{t+\Delta}^1 = i_t, \xi_{t+\Delta}^1 = x_t + \Delta, X_{t+\Delta}^2 = |j_t - 1|, \xi_{t+\Delta}^2 \in (0; \Delta) \mid \\ | X_t^1 = i_t, \xi_t^1 = x_t, X_t^2 = j_t, \xi_t^2 = y_t \} = \\ = \rho_2(Y_t)\Delta + o(\Delta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_{t+\Delta}^1 = i_t, \xi_{t+\Delta}^1 = x_t + \Delta, X_{t+\Delta}^2 = j_t, \xi_{t+\Delta}^2 = y_t + \Delta \mid \\ | X_t^1 = i_t, \xi_t^1 = x_t, X_t^2 = j_t, \xi_t^2 = y_t \} = \\ = 1 - \rho_1(Y_t)\Delta - \rho_2(Y_t)\Delta + o(\Delta), \end{aligned}$$

где  $\rho_1(Y_t), \rho_2(Y_t)$  – интенсивности переходов для первого и второго элемента соответственно. Обозначения  $\rho_1(Y_t), \rho_2(Y_t)$  как раз подразумевают  $\rho_1(Y_t) = \rho_1(i_t, x_t, j_t, y_t), \rho_2(Y_t) = \rho_2(i_t, x_t, j_t, y_t)$  для  $i_t, j_t = 0, 1$ .

Понятно, что в общем случае решить соответствующие поведению этой системы уравнения Колмогорова в явном виде не представляется возможным.

Поэтому в этой работе мы ограничимся случаем, когда  $\rho_1(Y_t) = \rho_1(i_t, j_t)$  и  $\rho_2(Y_t) = \rho_2(i_t, j_t)$ ; обозначим  $X_t$  – компоненты  $(i_t, j_t)$  процесса  $Y_t$ :  $X_t = (i_t, j_t)$ . Для упрощения формул обозначаем:

$\rho_1(0, 0) = \lambda_{11}$  (интенсивность отказа первого элемента, второй элемент исправен);

$\rho_1(1, 0) = \mu_{11}$  (интенсивность восстановления первого элемента,

второй элемент исправен);

$\rho_1(0, 1) = \lambda_{12}$  (интенсивность отказа первого элемента, второй элемент неисправен);

$\rho_1(1, 1) = \mu_{12}$  (интенсивность восстановления первого элемента, второй элемент неисправен).

$\rho_2(0, 0) = \lambda_{21}$  (интенсивность отказа второго элемента, первый элемент исправен);

$\rho_2(0, 1) = \mu_{21}$  (интенсивность восстановления второго элемента, первый элемент исправен);

$\rho_2(1, 0) = \lambda_{22}$  (интенсивность отказа второго элемента, первый элемент неисправен);

$\rho_2(1, 1) = \mu_{22}$  (интенсивность восстановления второго элемента, первый элемент неисправен).

#### 4. Поведения изучаемой системы надёжности

Итак, процесс  $X_t = (i_t, j_t)$ ,  $i_t, j_t \in \{0; 1\}$ , описывает поведение изучаемой системы надёжности; здесь  $i_t$  описывает состояние первого элемента, а  $j_t$  – второго; нулю соответствует рабочее состояние элемента, единице – состояние ремонта. Процесс  $X_t$  является цепью Маркова в непрерывном времени с пространством состояний  $\mathcal{X} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$  (см. диаграмму на рис. 1). Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  оба элемента исправны.

Изучение поведения процесса  $X_t$  – это изучение поведения вероятностей состояний  $\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ ; обозначим эти вероятности:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \mathbf{P}\{X_t = (0,0)\}, & p_2(t) &= \mathbf{P}\{X_t = (1,0)\}, \\ p_3(t) &= \mathbf{P}\{X_t = (0,1)\}, & p_4(t) &= \mathbf{P}\{X_t = (1,1)\}. \end{aligned}$$

Важной характеристикой системы, состоящей из восстанавливаемых элементов, является коэффициент готовности – вероятность того, что в данный момент времени система находится в работоспособном состоянии:  $K_{\Gamma}(t) = 1 - p_4(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$ .

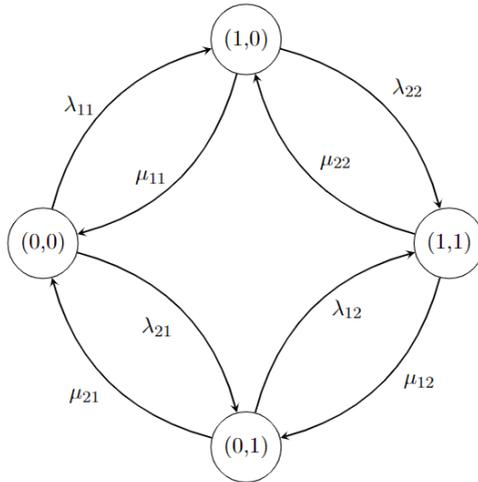


Рис. 1. Диаграмма процесса  $X_t$

Для изучаемой системы надёжности система прямых уравнений Колмогорова с учётом начальных условий и условия нормировки имеет вид

$$(4) \quad \begin{cases} p_1'(t) = -(\lambda_{11} + \lambda_{21})p_1(t) + \mu_{11}p_2(t) + \mu_{21}p_3(t), \\ p_2'(t) = \lambda_{11}p_1(t) - (\mu_{11} + \lambda_{22})p_2(t) + \mu_{22}p_4(t), \\ p_3'(t) = \lambda_{21}p_1(t) - (\mu_{21} + \lambda_{12})p_3(t) + \mu_{12}p_4(t), \\ p_4'(t) = \lambda_{22}p_2(t) + \lambda_{12}p_3(t) - (\mu_{22} + \mu_{12})p_4(t), \\ p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1, \quad p_1(0) = 1, \\ p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0. \end{cases}$$

Используя нормировочное условие, получаем дифференциальные уравнения для  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$ :

$$(5) \quad \begin{cases} p_1'(t) = -(\lambda_{11} + \lambda_{21})p_1(t) + \mu_{11}p_2(t) + \mu_{21}p_3(t), \\ p_2'(t) = (\lambda_{11} - \mu_{22})p_1(t) - \\ \quad - (\mu_{11} + \lambda_{22} + \mu_{22})p_2(t) - \mu_{22}p_3(t) + \mu_{22}, \\ p_3'(t) = (\lambda_{21} - \mu_{12})p_1(t) - \mu_{12}p_2(t) - \\ \quad - (\mu_{21} + \lambda_{12} + \mu_{12})p_3(t) + \mu_{12}, \\ p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = p_3(0) = 0. \end{cases}$$

Из свойств  $X_t$ , являющейся невырожденной цепью Маркова в непрерывном времени с конечным числом состояний следует, что решения уравнений (5)  $p_i(t)$  имеют предел при  $t \rightarrow \infty$  (см. [8]).

### 5. Решение уравнения (5) и стационарные значения вероятностей

Поскольку цепь Маркова  $X_t$  имеет конечное число состояний и возвратна, то существуют пределы

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p_i(t) = \pi_i, \quad i = \overline{1, 4},$$

которые можно получить, решив систему

$$(7) \quad \begin{cases} -(\lambda_{11} + \lambda_{21})\pi_1 + \mu_{11}\pi_2 + \mu_{21}\pi_3 = 0, \\ (\lambda_{11} - \mu_{22})\pi_1 - (\mu_{11} + \lambda_{22} + \mu_{22})\pi_2 - \mu_{22}\pi_3 = -\mu_{22}, \\ (\lambda_{21} - \mu_{12})\pi_1 - \mu_{12}\pi_2 - (\mu_{21} + \lambda_{12} + \mu_{12})\pi_3 = -\mu_{12}. \end{cases}$$

Обозначив

$$(8) \quad \begin{aligned} \ell_{11} &= -\lambda_{11} - \lambda_{21}, & \ell_{12} &= \mu_{11}, & \ell_{13} &= \mu_{21}, \\ \ell_{21} &= \lambda_{11} - \mu_{22}, & \ell_{22} &= -\mu_{11} - \lambda_{22} - \mu_{22}, & \ell_{23} &= -\mu_{22}, \\ \ell_{31} &= \lambda_{21} - \mu_{12}, & \ell_{32} &= -\mu_{12}, & \ell_{33} &= -\mu_{21} - \lambda_{12} - \mu_{12}, \end{aligned}$$

имеем

$$(9) \quad \begin{cases} \ell_{11}\pi_1 + \ell_{12}\pi_2 + \ell_{13}\pi_3 = 0, \\ \ell_{21}\pi_1 + \ell_{22}\pi_2 + \ell_{23}\pi_3 = \ell_{23}, \\ \ell_{31}\pi_1 + \ell_{32}\pi_2 + \ell_{33}\pi_3 = \ell_{32}. \end{cases}$$

Или в векторном виде

$$(10) \quad \mathbb{L}\vec{\pi} = (0, \ell_{23}, \ell_{32})^\top, \quad \mathbb{L} = (\ell_{ij}).$$

Решение системы (9) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{\Delta_\ell} (\ell_{23}\ell_{32}(\ell_{13} + \ell_{12}) - \ell_{32}\ell_{22}\ell_{13} - \ell_{23}\ell_{12}\ell_{33}), \\ \pi_2 &= \frac{1}{\Delta_\ell} (\ell_{11}\ell_{23}(\ell_{33} - \ell_{32}) + \ell_{21}\ell_{32}\ell_{13} - \ell_{31}\ell_{22}\ell_{13}), \\ \pi_3 &= \frac{1}{\Delta_\ell} (\ell_{11}\ell_{22}\ell_{32} + \ell_{31}\ell_{12}\ell_{23} - \ell_{11}\ell_{32}\ell_{23} - \ell_{21}\ell_{12}\ell_{33}), \\ \Delta_\ell &= \det \mathbb{L}. \end{aligned}$$

Для решения системы (5) воспользуемся преобразованием Лапласа для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями:  $p_i(t) \doteq \Pi_i(r)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Используя замену (8), получаем

$$(11) \quad \begin{cases} (\ell_{11} - r)\Pi_1(r) + \ell_{12}\Pi_2(r) + \ell_{13}\Pi_3(r) = -1, \\ \ell_{21}\Pi_1(r) + (\ell_{22} - r)\Pi_2(r) + \ell_{23}\Pi_3(r) = \frac{\ell_{23}}{r}, \\ \ell_{31}\Pi_1(r) + \ell_{32}\Pi_2(r) + (\ell_{33} - r)\Pi_3(r) = \frac{\ell_{32}}{r}. \end{cases}$$

В векторном виде система (11) имеет вид

$$(12) \quad (\mathbb{L} - r\mathbb{E})\vec{\Pi} = \left(-1, \frac{\ell_{23}}{r}, \frac{\ell_{32}}{r}\right)^T,$$

где  $\mathbb{E}$  – единичная матрица. Решением этой системы будут дробно-рациональные функции, зависящие от  $r$ :

$$(13) \quad \begin{aligned} \Pi_1(r) &= \frac{r^3 + a_1r^2 + b_1r + c_1}{r(r^3 + ar^2 + br + c)}, \\ \Pi_i(r) &= \frac{a_i r^2 + b_i r + c_i}{r(r^3 + ar^2 + br + c)}, \quad i = 2, 3. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a &= -\ell_{11} - \ell_{22} - \ell_{33}, c = -\det \mathbb{L}, \\ b &= -\ell_{12}\ell_{21} + \ell_{11}\ell_{22} - \ell_{13}\ell_{31} - \ell_{23}\ell_{32} + \ell_{11}\ell_{33} + \ell_{22}\ell_{33}; \\ a_1 &= -\ell_{22} - \ell_{33}, b_1 = -\ell_{12}\ell_{23} - \ell_{13}\ell_{32} - \ell_{23}\ell_{32} + \ell_{22}\ell_{33}, \\ c_1 &= \ell_{13}\ell_{22}\ell_{32} - \ell_{12}\ell_{23}\ell_{32} - \ell_{13}\ell_{23}\ell_{32} + \ell_{12}\ell_{23}\ell_{33}, \\ a_2 &= \ell_{21} - \ell_{23}, b_2 = \ell_{11}\ell_{23} + \ell_{23}\ell_{31} - \ell_{23}\ell_{32} - \ell_{21}\ell_{33} + \ell_{23}\ell_{33}, \\ c_2 &= \ell_{13}\ell_{23}\ell_{31} - \ell_{13}\ell_{21}\ell_{32} + \ell_{11}\ell_{23}\ell_{32} - \ell_{11}\ell_{23}\ell_{33}, \\ a_3 &= \ell_{31} - \ell_{32}, b_3 = -\ell_{22}\ell_{31} + \ell_{11}\ell_{32} + \ell_{21}\ell_{32} + \ell_{22}\ell_{32} - \ell_{23}\ell_{32}, \\ c_3 &= -\ell_{12}\ell_{23}\ell_{31} + \ell_{12}\ell_{21}\ell_{32} - \ell_{11}\ell_{22}\ell_{32} + \ell_{11}\ell_{23}\ell_{32}. \end{aligned}$$

Для обращения преобразований Лапласа  $\Pi_i(r)$  необходимо разложить на множители знаменатель  $r^3 + ar^2 + br + c$ , т.е. найти корни уравнения

$$(14) \quad r^3 + ar^2 + br + c = 0.$$

Поскольку система (5) является невырожденной, то величина  $c$  не обращается в ноль. Воспользуемся тригонометрическими

формулами Виета для вычисления корней кубического уравнения (14) (см., например, [1]).

Вычислим

$$Q = \frac{a^2 - 3b}{9}, \quad R = \frac{2a^3 - 3ab + 27c}{54}, \quad S = Q^3 - R^2.$$

В зависимости от значений  $Q, R, S$  имеют место следующие случаи.

1.  $S > 0$ . В этом случае есть три различных вещественных корня:

$$r_1 = -2\sqrt{Q} \cos \varphi - \frac{a}{3}, \quad r_{2,3} = -2\sqrt{Q} \cos \left( \varphi \pm \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{a}{3},$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos \frac{R}{\sqrt{Q^3}},$$

и решения уравнений Колмогорова (5) примут вид

$$(15) \quad p_1(t) = -\frac{c_1}{r_1} \left( \frac{1}{r_2 r_3} - \frac{e^{r_2 t}}{r_2(r_3 - r_2)} - \frac{e^{r_3 t}}{r_3(r_2 - r_3)} \right) +$$

$$+ \frac{r_1^3 + a_1 r_1^2 + b_1 r_1 + c_1}{r_1} \left( \frac{e^{r_1 t}}{(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{r_2 t}}{(r_1 - r_2)(r_3 - r_2)} + \frac{e^{r_3 t}}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)} \right) +$$

$$+ \frac{(a_1 + r_1 + r_2)e^{r_2 t} - (a_1 + r_1 + r_3)e^{r_3 t}}{r_2 - r_3},$$

$$(16) \quad p_i(t) = \frac{(a_i r_1^2 + b_i r_1 + c_i)e^{r_1 t}}{r_1(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)} + \frac{(a_i r_1 r_2 + b_i r_1 + c_i)e^{r_2 t}}{r_1(r_1 - r_2)(r_3 - r_2)} +$$

$$+ \frac{(a_i r_1 r_3 + b_i r_1 + c_i)e^{r_3 t}}{r_1(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)} - \frac{c_i}{r_1} \left( \frac{1}{r_2 r_3} - \frac{e^{r_2 t}}{r_2(r_3 - r_2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{r_3 t}}{r_3(r_2 - r_3)} \right), \quad i = 2, 3.$$

2.  $S = 0$ . В этом случае есть три вещественных корня, причем один из корней имеет кратность 2:

$$r_1 = -2\sqrt[3]{R} - \frac{a}{3}, \quad r_2 = \sqrt[3]{R} - \frac{a}{3},$$

и решения уравнений Колмогорова (5) примут вид

$$(17) \quad p_1(t) = (1 + r_2 t)e^{r_2 t} + \frac{(r_1^3 + a_1 r_1^2 + b_1 r_1 + c_1)(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})}{r_1(r_1 - r_2)^2} - \frac{(r_1^2 r_2 + a_1 r_1 r_2 + b_1 r_1 + c_1)e^{r_2 t}}{(r_1 - r_2)} + \frac{c_1}{r_1 r_2^2} (e^{r_2 t}(1 - r_2 t) - 1),$$

$$(18) \quad p_i(t) = \frac{(a_i r_1^2 + b_i r_1 + c_i)(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})}{r_1(r_1 - r_2)^2} - \frac{(a_i r_1 r_2 + b_i r_1 + c_i)t e^{r_2 t}}{r_1(r_1 - r_2)} + \frac{c_i}{r_1 r_2^2} (e^{r_2 t}(1 - r_2 t) - 1), \quad i = 2, 3.$$

3.  $S = 0, R = 0$ . В этом случае есть один вещественный корень кратности 3:

$$r_0 = -\frac{a}{3},$$

и решения уравнений Колмогорова (5) примут вид

$$(19) \quad p_1(t) = (r_0^2 + b_1 r_0 + c_1) \frac{t^2 e^{r_0 t}}{2r_0} + (1 + (a_1 + 2r_0)t)e^{r_0 t} + \frac{c_1}{r_0^3} (e^{r_0 t}(1 - r_0 t) - 1),$$

$$(20) \quad p_i(t) = a_i t e^{r_0 t} + (a_i r_0^2 + b_i r_0 + c_i) \frac{t^2 e^{r_0 t}}{2r_0} + \frac{c_i}{r_0^3} (e^{r_0 t}(1 - r_0 t) - 1), \quad i = 2, 3.$$

4.  $S < 0$ . В этом случае есть один вещественный корень  $r_1$  и два комплексно сопряжённых корня  $r_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ . В зависимости от значения величины  $Q$  имеется три случая.

а)  $Q > 0$ . В этом случае

$$r_1 = -2 \operatorname{sgn} R \sqrt{Q} \operatorname{ch} \varphi - \frac{a}{3}, \quad \alpha = \operatorname{sgn} R \sqrt{Q} \operatorname{ch} \varphi - \frac{a}{3},$$

$$\beta = \sqrt{3Q} \operatorname{sh} \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{3} \operatorname{Arch} \frac{|R|}{\sqrt{Q^3}}.$$

б)  $Q < 0$ . В этом случае

$$r_1 = -2 \operatorname{sgn} R \sqrt{|Q|} \operatorname{sh} \varphi - \frac{a}{3}, \quad \alpha = \operatorname{sgn} R \sqrt{|Q|} \operatorname{sh} \varphi - \frac{a}{3},$$

$$\beta = \sqrt{3|Q|} \operatorname{ch} \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{3} \operatorname{Arsh} \frac{|R|}{\sqrt{|Q|^3}}.$$

в)  $Q = 0$ . В этом случае

$$r_1 = -\sqrt[3]{c - \frac{a^3}{27}} - \frac{a}{3}, \quad \alpha = -\frac{a + r_1}{2},$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{|(a - 3r_1)(a + r_1) - 4b|},$$

и решения уравнений Колмогорова (5) примут вид

$$(21) \quad p_1(t) = \frac{1}{(r_1 - \alpha)^2 + \beta^2} \times$$

$$\times \left\{ \left[ r_1^2 e^{r_1 t} + ((\alpha - r_1)^2 + \beta^2 - r_1^2) e^{\alpha t} \cos \beta t + \right. \right.$$

$$\left. + \left( r_1 \beta + \alpha \left( \beta + \frac{(\alpha - r_1) \alpha}{\beta} \right) \right) e^{\alpha t} \sin \beta t \right] +$$

$$+ a_1 \left[ r_1 e^{r_1 t} - r_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + \right.$$

$$\left. + \left( \beta + \frac{(\alpha - r_1) \alpha}{\beta} \right) e^{\alpha t} \sin \beta t \right] + \frac{b_1 r_1 + c_1}{r_1} \left[ e^{r_1 t} - e^{\alpha t} \cos \beta t + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha - r_1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t \right] \Big\} -$$

$$- \frac{c_1}{r_1(\alpha^2 + \beta^2)} \left( 1 - e^{\alpha t} \left( \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right),$$

$$(22) \quad p_i(t) = \frac{1}{(r_1 - \alpha)^2 + \beta^2} \left\{ a_i \left[ r_1 e^{r_1 t} - r_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + \right. \right.$$

$$\left. + \left( \beta + \frac{(\alpha - r_1) \alpha}{\beta} \right) e^{\alpha t} \sin \beta t \right] +$$

$$+ \frac{b_i r_1 + c_i}{r_1} \left[ e^{r_1 t} - e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\alpha - r_1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t \right] \Big\} -$$

$$- \frac{c_i}{r_1(\alpha^2 + \beta^2)} \left( 1 - e^{\alpha t} \left( \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right), \quad i = 2, 3.$$

## **6. Результаты моделирования методом, основанном на интенсивностях, и методом обратной функции**

С помощью указанного выше в разделе 2.2 метода моделирования сл.в. по интенсивности ([5, 6, 7]) и метода моделирования с помощью обратной функции (3) было проведено моделирование различного количества  $N$  реализаций процесса  $X_t$  с различными параметрами  $\lambda_{k\ell}, \mu_{k\ell}$  на достаточно небольших интервалах, поскольку скорость сходимости к стационарному значению в формулах (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), экспоненциальна со скоростью выше, чем  $\min_{i=1,2,3} \{-\operatorname{Re} r_i\}$ . Количество  $N$  реализаций процесса  $X_t$ , необходимое для получения достаточно близкого к теоретическому поведению  $K_\Gamma(t)$  графика эмпирических значений  $K_\Gamma(t)$ , существенно зависит от  $\min_{i=1,2,3} \{-\operatorname{Re} r_i\}$ : чем меньше это значение, тем больше требуется реализаций процесса  $X_t$ , что можно увидеть на нижеприведённых данных.

Реализация методов моделирования, как и в работах [5, 6], проводилась на языке программирования С. Количество реализаций бралось разное; для больших значений  $\min\{\lambda_{k\ell}, \mu_{k\ell}\}$ , естественно, требуется меньшее количество реализаций для получения достаточно близкого к теоретическому графика поведения эмпирических значений  $K_\Gamma(t)$ ; при этом  $\lim_{t \rightarrow \infty} K_\Gamma(t) = \widetilde{K}_\Gamma = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$  (см. (6)), и к этому значению должны приближаться (а потом около него осциллировать) графики эмпирических значений  $K_\Gamma(t)$ .

Важно отметить, что, как правило, интенсивность отказов восстанавливаемых элементов обычно существенно меньше интенсивности восстановления: обычно восстанавливаемый элемент работает долго, а восстанавливается быстро. Поэтому при имитационном моделировании сложных стохастических систем, как правило, для получения достоверного результата потребуется очень большое количество реализаций моделируемого процесса, см. ниже графики на рис. 6, 7.

На графиках ниже приведены результаты моделирования коэффициента готовности для систем с различными параметрами.

Везде на графиках поведения коэффициента готовности: голубой цвет – моделирование по интенсивности, оранжевый цвет – моделирование методом обратной функции, фиолетовый цвет – аналитическое решение, зелёный цвет – предельное значение коэффициента готовности. Напомним, что коэффициент готовности  $K_{\Gamma}(t)$  – это вероятность того, что в момент времени  $t$  система работоспособна, т.е. хотя бы один элемент находится в исправном состоянии. Обнаружилось, что, несмотря на существенно большее число вычислений при моделировании по интенсивности, результаты моделирования обоими способами близки между собой.

### 6.1. Случай комплексных корней уравнения (14)

Результаты моделирования поведения коэффициента готовности в случае параметров  $\lambda_{11} = 2$ ;  $\lambda_{12} = 3$ ;  $\lambda_{21} = 4$ ;  $\lambda_{22} = 3$ ;  $\mu_{11} = 7$ ;  $\mu_{12} = 8$ ;  $\mu_{21} = 6$ ;  $\mu_{22} = 7$  представлены на рис. 2, 3, 4. Решение уравнения (5) соответствует формулам (21), (22). При этом  $Q = 12,444$ ;  $S = -207,583$ ;  $R = 46,203$ ;  $\widetilde{K}_{\Gamma} = 0,911450$ .

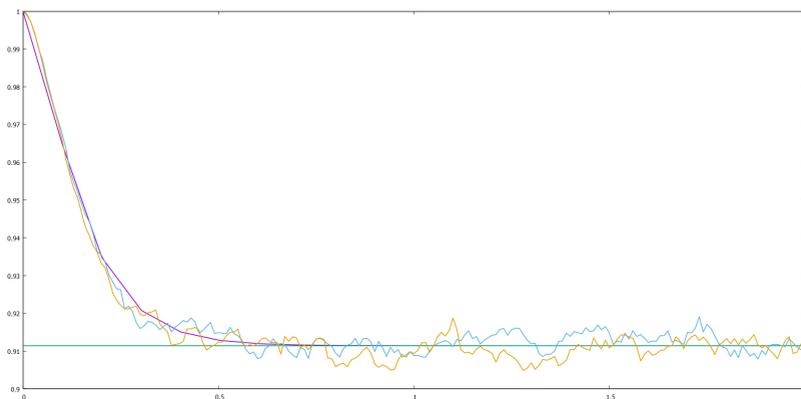


Рис. 2.  $N = 10^4$ ; осцилляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_{\Gamma}$  в пределах  $\pm 0,01$

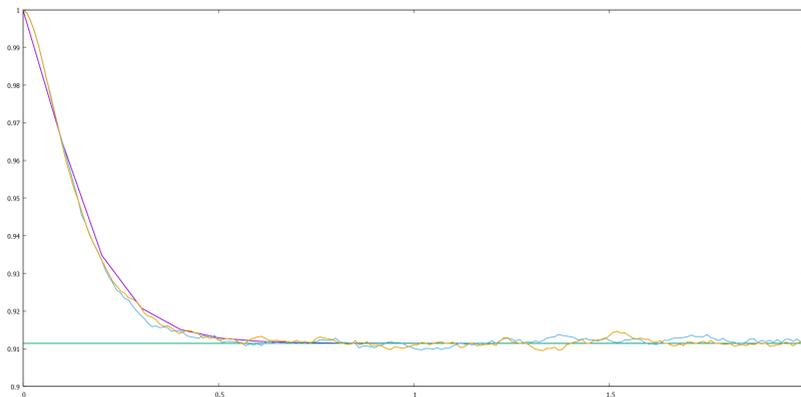


Рис. 3.  $N = 10^5$ ; осцилляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_\Gamma$  в пределах  $\pm 0,003$

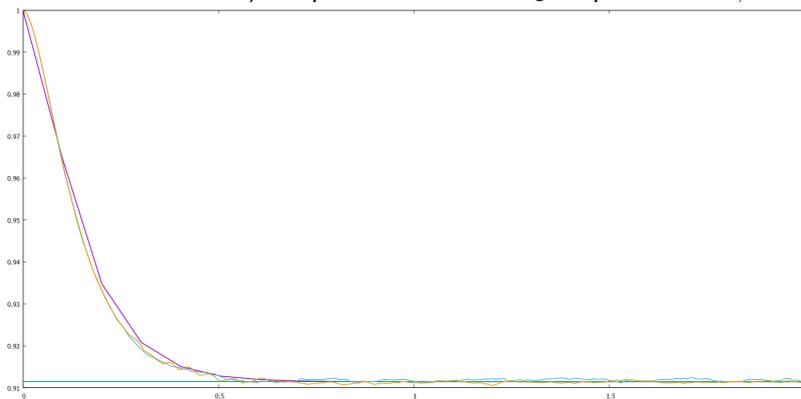


Рис. 4.  $N = 10^6$ ; осцилляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_\Gamma$  в пределах  $\pm 0,0008$

### 6.2. Случай двух действительных корней уравнения (14) (один корень кратный)

Результаты моделирования поведения коэффициента готовности в случае параметров  $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{22} = 1$  представлены на рис. 5, 6, 7. Решение уравнения (5) соответствует формулам (17), (18). При этом  $Q = 0,444$ ;  $S = 0$ ;  $R = 0,296$ ;  $\widetilde{K}_\Gamma = 0,75$ .

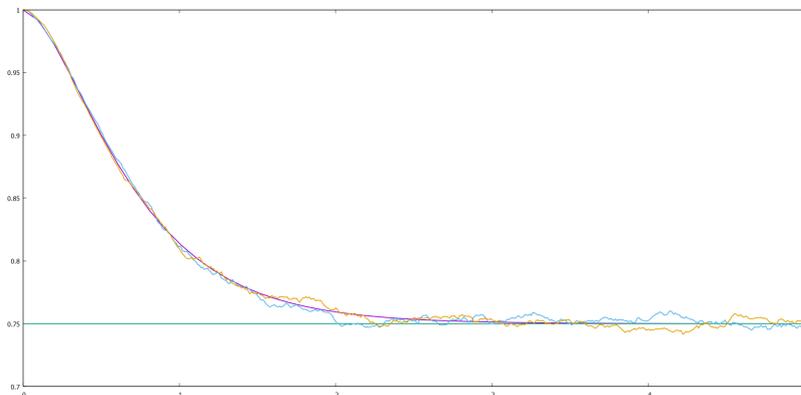


Рис. 5.  $N = 10^4$ ; осцилляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_\Gamma$  в пределах  $\pm 0,01$

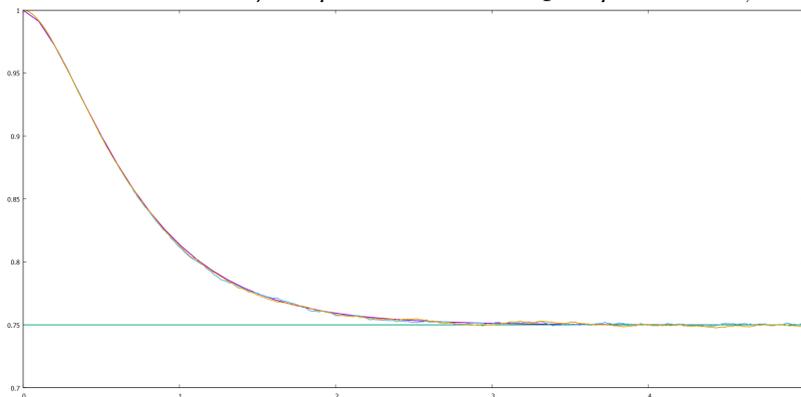


Рис. 6.  $N = 10^5$ ; осцилляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_\Gamma$  в пределах  $\pm 0,002$

### 6.3. Случай трёх действительных корней уравнения (14)

#### 6.3.1. Вариант 1.

Результаты моделирования поведения коэффициента готовности в случае параметров  $\lambda_{11} = 0,1$ ;  $\lambda_{12} = 0,2$ ;  $\lambda_{21} = 0,4$ ;  $\lambda_{22} = 0,1$ ;  $\mu_{11} = 10$ ;  $\mu_{12} = 20$ ;  $\mu_{21} = 50$ ;  $\mu_{22} = 20$  представлены на рис. 8, 9. Решение уравнения (5) соответствует формулам (15), (16). При этом  $Q = 148,236$ ;  $S = 1711710,592$ ;  $R = -1243,245$ ;  $\widetilde{K}_\Gamma = 0,999936$ .

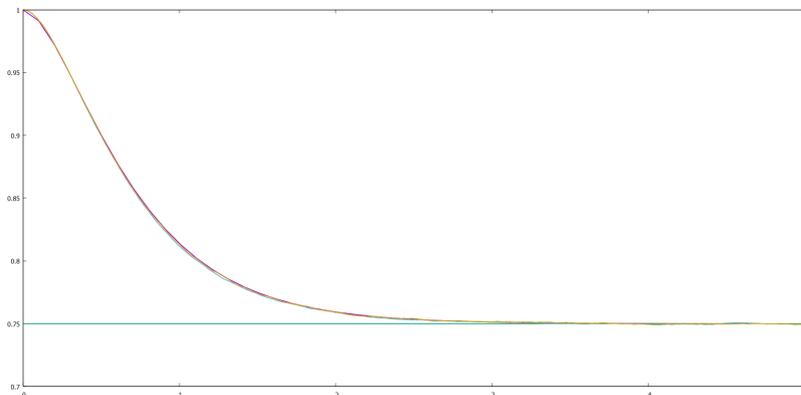


Рис. 7.  $N = 10^6$ ; осциляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_\Gamma$  в пределах  $\pm 0,0005$

Этот случай наиболее близок к реальной ситуации, когда интенсивности отказов существенно меньше интенсивностей восстановления (иначе говоря, восстанавливаемые элементы безотказно работают очень долго, а ремонтируются очень быстро).

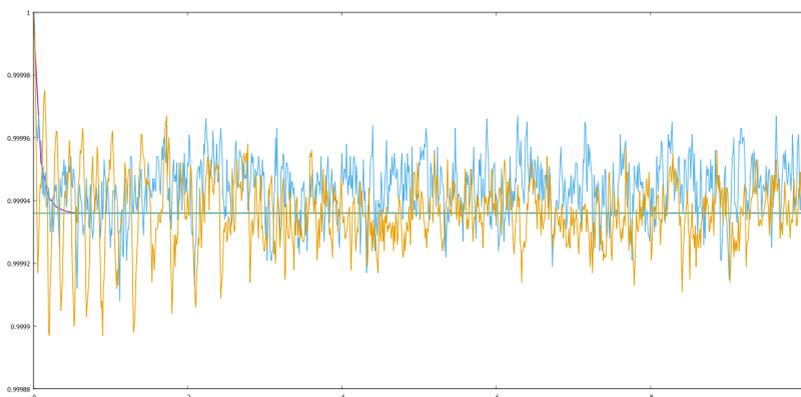


Рис. 8.  $N = 10^6$ ; осциляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_\Gamma$  в пределах  $\pm 0,0003$

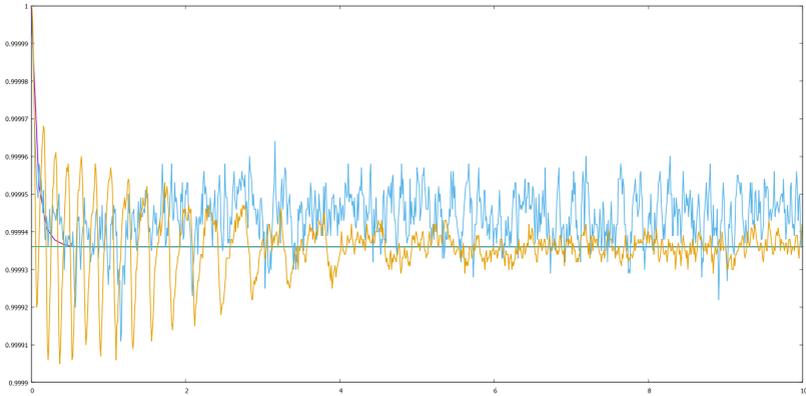


Рис. 9.  $N = 10^7$ ; осцилляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_\Gamma$  в пределах  $\pm 0,0003$

### 6.3.2. Вариант 2.

Результаты моделирования поведения коэффициента готовности в случае параметров  $\lambda_{11} = 2$ ;  $\lambda_{12} = 1$ ;  $\lambda_{21} = 2$ ;  $\lambda_{22} = 2$ ;  $\mu_{11} = 3$ ;  $\mu_{12} = 6$ ;  $\mu_{21} = 3$ ;  $\mu_{22} = 6$  представлены на рис. 10, 11, 12. Решение уравнения (5) соответствует формулам (15), (16). При этом  $Q = 8,777$ ;  $S = 175,888$ ;  $R = 22,370$ ;  $\widetilde{K}_\Gamma = 0,935644$ .

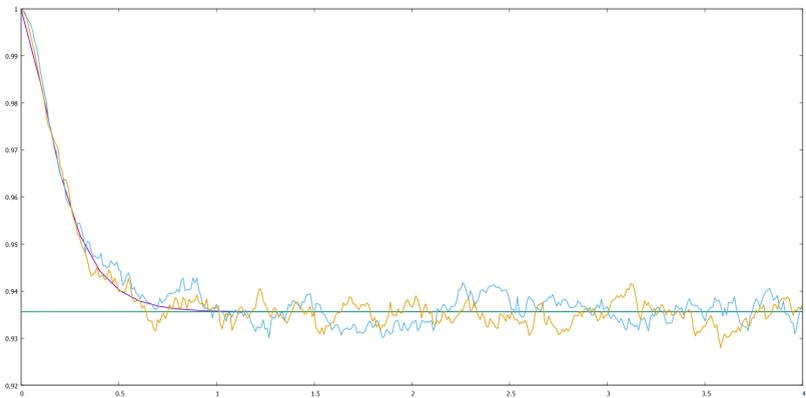


Рис. 10.  $N = 10^4$ ; осцилляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_\Gamma$  в пределах  $\pm 0,01$

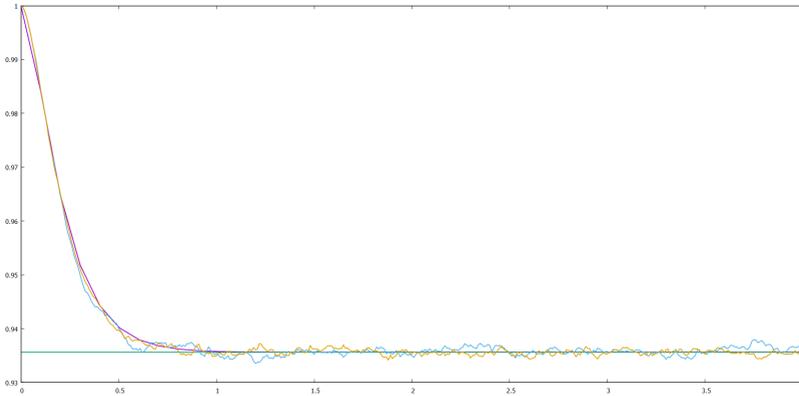


Рис. 11.  $N = 10^5$ ; осцилляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_\Gamma$  в пределах  $\pm 0,001$

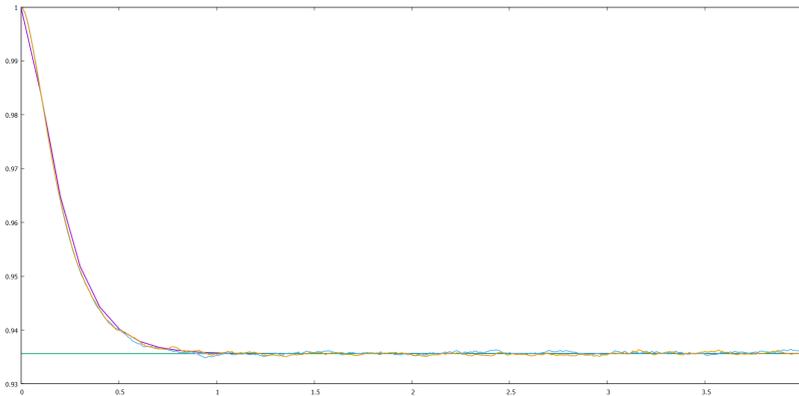


Рис. 12.  $N = 10^6$ ; осцилляция численных решений после достижения стационарного значения  $\widetilde{K}_\Gamma$  в пределах  $\pm 0,0005$

## 7. Выводы

Анализ представленных результатов численных экспериментов приводит к следующему выводу. Несмотря на то, что моделирование случайных величин с помощью интенсивностей требует существенно большего числа операций, результаты моделирования процесса  $X_t$  с его помощью практически не отличаются от результатов моделирования «классическим» методом обратной функции. Точность моделирования зависит от соотношения чис-

ла реализаций моделированного процесса  $X_t$  и  $\min\{\lambda_{kl}, \mu_{kl}\}$ .

В дальнейшем планируется исследовать качество моделирования обоими способами на модели системы массового обслуживания и/или модели надёжности, поведение которой не может быть описано цепью Маркова в непрерывном времени.

### **Благодарность**

Авторы выражают глубокую признательность В.В. Козлову за ценные консультации и полезные рекомендации в ходе работы над статьёй.

### **Литература**

1. БРОНШТЕЙН И.Н., СЕМЕНДЯЕВ К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: учебное пособие*. – СПб.: Лань, 2022. – 608 с.
2. ГНЕДЕНКО Б.В., БЕЛЯЕВ Ю.К., СОЛОВЬЁВ А.Д. *Математические методы в теории надёжности: Основные характеристики надёжности и их статистический анализ*. – М.: URSS, 2017. – 584 с.
3. ГНЕДЕНКО Б.В., КОВАЛЕНКО И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания*. – М.: URSS, 2021. – 400 с.
4. ЗВЕРКИНА Г.А. *Об экспоненциальной скорости сходимости распределения одной нерегенерирующей системы надёжности* // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2020. – Т. 23, Вып. 1. – С. 145–160.
5. ЗВЕРКИНА Г.А., КОШЕЛЕВ А.А. *Об имитационном моделировании случайных величин с помощью интенсивности* // *Управление большими системами: сборник трудов*. – 2021. – Вып. 94. – С. 33–49.
6. ЗВЕРКИНА Г.А., КОШЕЛЕВ А.А. *О поиске оптимального шага при имитационном моделировании случайной величины с помощью интенсивности* // *Управление большими системами: сборник трудов*. – 2022. – Вып. 100. – С. 261–274.

7. ЗВЕРКИНА Г.А., КОШЕЛЕВ А.А. *Численное моделирование случайных величин с использованием их интенсивностей* // Труды 19-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2023, Воронеж). – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2023. – С. 509–516.
8. КЛИМОВ Г.П. *Теория вероятностей и математическая статистика*. – М.: Изд-во Московского университета. – 2011. – 368 с.
9. ЛАГУТИН М.Б. *Наглядная математическая статистика: учебное пособие*. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. – 472 с.
10. COX D.R. *Renewal Theory*. – Methuen & Co., 1967.
11. DEVROYE L. *Non-Uniform Random Variate Generation*. – Springer Science+Business Media, LLC, 1986.
12. HORMANN W., LEYDOLD J., DERFLINGER G. *Automatic Nonuniform Random Variate Generation*. – Springer, 2004.
13. KALIMULINA E., ZVERKINA G. *On generalized intensity function and its application to the backward renewal time estimation for renewal processes* // Proc. of the 5th Int. Conf. on Stochastic Methods (ICSM-5, 2020), 2020, Moscow, Russia, RUDN, Moscow. – P. 306–310.
14. SHELDON M.R. *Introduction to Probability Models*. – Academic Press; June 30, 2023. United Kingdom, Elsevier Inc., 2024. – 870 p.
15. SMITH W.L. *Renewal theory and its ramifications* // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. – 1958. – Vol. 20:2. – P. 243–302.
16. VERETENNIKOV A.YU. *On convergence rate for Erlang-Sevastyanov type models with infinitely many servers. In memory and to the 90th anniversary of A.D. Solov'yev (06.09.1927–06.04.2001)* // Theory Stoch. Process. – 2017. – Vol. 22(38):1. – P. 89–103.
17. VERETENNIKOV A. *On recurrence and availability factor for single-server system with general arrivals* // Theory and

- Applications (RT&A). – 2016. – Vol. 11, No. 3(42). – P. 49–58.
18. VERETENNIKOV A. *On polynomial recurrence for reliability system with a warm reserve* // Markov Processes and Related Fields. – 2019. – Vol. 25. – P. 745–761.
  19. VERETENNIKOV A. *On the rate of convergence for infinite server Erlang-Sevastyanov's problem* // Queueing Systems. – 2014. – Vol. 76(2). – P. 181–203.
  20. VERETENNIKOV A. *On the rate of convergence to the stationary distribution in the single-server queuing system* // Autom. Remote Control. – 2013. – Vol. 74(10). – P. 1620–1629.
  21. VERETENNIKOV A.YU., ZVERKINA G.A. *Simple Proof of Dynkin's Formula for Single-Server Systems and Polynomial Convergence Rates* // Markov Processes Relat. Fields. – 2014. – Vol. 20. – P. 479–504.
  22. VERETENNIKOV A.YU., ZVERKINA G.A. *On Polynomial Bounds of Convergence for the Availability Factor* // Distributed Computer and Communication Networks (Communications in Computer and Information Science). – 2016. – Vol. 601. – P. 358–369.
  23. ZVERKINA G.A. *A System with Warm Standby* // Computer Networks. CN 2019. Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol. 1039. – P. 387–399.

## **ON THE MODELING THE BEHAVIOUR OF ONE MARKOV PROCESS USING THE METHOD OF MODELING RANDOM VARIABLES USING INTENSITIES**

**Galina Zverkina**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (zverkina@gmail.com).

**Alexandr Koshelev**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Lomonosov Moscow State University, Moscow, (koshelev030698@yandex.ru).

*Abstract: In the past, the authors proposed a method for modeling of random variable using intensity which is one of the characteristics of the distribution function. The results of testing this method to simulate the behaviour of a stochastic model, specifically a model of a pair of recoverable dependent elements, are presented. The model under study's behavior can be studied analytically by selecting the characteristics of periods of failure-free operation and recovery periods. Simulation modeling using both the "classical" method and the method of modeling random variables by intensity yielded results. The availability factor behaviour of the model under study was compared to an analytical solution based on these results. The analytical solution was compared to numerical experiments to arrive at the following conclusion: the classical modeling method does not outperform the accuracy of modeling the behaviour of a random process using the method of modeling random variables using intensities.*

Keywords: random variable intensity, numerical simulation of Markov process, discussion of simulation optimization, modeling of random variable using intensity.

УДК 519.2, 519.6

ББК 22.171, 22.176, 22.19

DOI: 10.25728/ubs.2024.111.13

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.С. Манделем.*

*Поступила в редакцию 30.04.2024.*

*Дата опубликования 30.09.2024.*