МЕТОДЫ ЛОКАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГОУРОВНЕВОГО АГРЕГИРОВАНИЯ ОЦЕНОК ОБЪЕКТОВ, ИЗМЕРЕННЫХ В РАЗНОТИПНЫХ ШКАЛАХ

Корнеенко В. П.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)
Рамеев О. А.[2]
(*МИРЭА – Российский технологический университет, Москва*)

В задачах многокритериального оценивания и выбора объектов с многоуровневой структурой исходные данные, характеризующие объекты, как правило, измерены в разнотипных шкалах. В связи с этим применение аддитивной свёртки для концевых критериев иерархического дерева, отражающего многоуровневую структуру объектов, корректно только для оценок объектов, представленных или преобразованных к единой однородной шкале. В статье введено понятие «вес» в количественной шкале отношений критерия $(k-1)$*-го уровня иерархического дерева, определяемого через сумму весов подкритериев* k*-го уровня. В этом случае применение процедуры вычисления глобальных нормированных весов, которые принято называть коэффициентами, на каждом уровне иерархии через мультипликативную свёртку локальных коэффициентов, лежащих на пути от корневой вершины, корректно. Предлагаемый метод локального агрегирования оценок объектов с многоуровневой структурой обладает важным свойством, а именно: адекватностью упорядочений объектов в любой вершине иерархической структуры критериев относительно вычисления агрегированных оценок в количественной, порядковой (ранговой) шкале. Показано, при каких условиях интегральный метод агрегированных оценок по глобальным коэффициентам концевых критериев совпадает с локальным. Достоинствами локального метода являются наглядность, возможность понимания и контроля промежуточных результатов аналитиками, бóльшая объективность вычисленных оценок в корневой вершине иерархического дерева. Суть методов и их сравнение показана на примере многокритериального оценивания информационных материалов.*

Ключевые слова: иерархическое дерево, локальные и глобальные веса критериев, локальное агрегирование данных, преобразование шкалы.

---

[1] *Виктор Павлович Корнеенко, к.т.н., доцент* (vkorn@ipu.ru).
[2] *Олег Ахатович Рамеев, д.т.н., профессор* (ierp2002@mail.ru).

1. Введение

Многие прикладные задачи, связанные с построением рейтингов компаний (предприятий, банков, организаций), многокритериальной оценки эффективности деятельности коллективов в организационных системах, многокритериального синтеза сложных технических систем, относятся к классу задач многокритериального оценивания и выбора сложных прикладных объектов с многоуровневой структурой.

В качестве многоуровневых структур рассматриваются древовидные или сетевые, которые обычно отражают иерархическую структуру оцениваемых объектов (альтернатив, вариантов решений, проектов, компаний, сложных экономических, технических, военных систем).

Для объектов с многоуровневой структурой характерно представление системы критериев в виде иерархического дерева с учётом их важности [11, 15, 18, 22]. При этом возникает проблема количественной оценки важности локальных критериев, входящих в вершину более высокого уровня.

Для вычисления локальных весов (коэффициентов) важности критериев иерархического дерева обычно используются экспертные методы. На данный момент методам формирования весовых коэффициентов посвящено огромное число работ [2, 4, 6, 7, 12–14]. Одним из наиболее эффективных методов формирования локальных весов критериев, базирующихся на матрице парных сравнений [10], является метод косвенного измерения предпочтений в количественной шкале отношений [7]. Вычисление весов сводится к лексикографическому упорядочению по важности критериев, входящих в вершины более высокого уровня, что позволяет затем сократить число экспертных сравнений предпочтительности смежных пар в шкале отношений. Формирование локальных коэффициентов важности критериев математически обоснованы и базируется на матрице, обладающей особыми свойствами. Глобальные коэффициенты концевых критериев находятся умножением локальных коэффициентов, лежащих на пути от корневой вершины дерева к исходной концевой.

Первая методика решения многокритериальных задач с многоуровневой структурой под названием ПАТТЕРН (PATTERN)[1] появилась в 1963 г. Она была разработана фирмой «Хониуэлл» в США для оценки эффективности вариантов прогнозирования и планирования при разработке сложных научных и научно-технических программ [11].

Один из этапов методики предполагает построение дерева целей, которое служит для оценки относительной важности критериев. В методе ПАТТЕРН был применён прямой метод экспертного оценивания весов критериев в количественной шкале.

Оценки количественной важности локальных критериев, входящих в вершины более высокого уровня, в долях единицы эксперты проставляют на бланке. Процедура определения коэффициентов проходит в несколько туров, пока не будет согласована со всеми экспертами. Затем осуществляется их пересчёт в глобальные веса для каждой концевой (висячей) вершины дерева перемножением «весов» всех вершин, лежащих на пути, ведущем от данной вершины к общей вершине. После этого для каждого объекта находится агрегированная оценка, равная сумме произведений глобальных весов на веса оценок критериев из отрезка [0, 1], соответствующих объекту в концевых вершинах дерева.

Метод агрегирования по аддитивной свертке критериев с глобальными (интегральными) весами нашел также применение в многокритериальной теории полезности [18] и в методе анализа иерархий Т. Саати [22]. В [1] рассматривается функции агрегирования для уменьшения количества критериев в задаче оптимизации. Для этого используются линейная функция агрегирования на основе взаимозамещения переменных и функция осреднения.

В [2] предлагаются методы агрегирования частных показателей в обобщенный показатель, а именно: вычисление средних, аддитивная свёртка, свертка на основе средней степенной функции и др. Однако применение аддитивной свёртки в данных методах корректно только в том случае, когда исходные оценки

---

[1] *Аббревиатура PATTERN – Planning Assistance Through Technical Evaluation from Relevans Number* (*помощь планированию посредством относительных показателей технической оценки*).

объектов преобразованы в оценки результирующей однородной шкалы [9].

В этом случае критерии в однородных шкалах имеют одинаковый размах и совпадение максимальных (минимальных) значений [5].

В дальнейшем под интегральным методом агрегирования будем понимать формирование обобщённых оценок объектов с многоуровневой структурой в виде аддитивной свертки оценок объектов по концевых критериям с глобальными (интегральными) весами, преобразованными в однородные шкалы.

Настоящая статья является расширенной версией тезисов доклада на 14-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2021, Москва) [8].

2. Интегральный метод агрегирования оценок объектов, измеренных в разнотипных шкалах

Решение задачи агрегирования данных в многоуровневых структурах основано на использовании методов многокритериальной оценки объектов (альтернатив, вариантов, проектов, решений). Очевидными требованиями, предъявляемыми к таким методам, являются следующие:

а) отсутствие сужения множества объектов;

б) возможность получения при агрегировании того же типа шкал, что и исходные.

Для иерархических процедур агрегирования группа методов с сужением множества объектов (альтернатив) не подходит, так как при выделении в разных вершинах дерева разных множеств лучших объектов их пересечение может оказаться пустым и мы не получим ни одного объекта, наиболее предпочтительного в целом – по совокупности критериев. Второе требование вытекает из условия применения не разных, а одного и того же метода агрегирования на различных уровнях иерархической структуры критериев.

Решение задачи многокритериального оценивания и выбора аддитивным методом агрегирования данных в иерархических структурах сводится к следующим частным задачам:

– построение иерархической структуры критериев;

– формирование локальных и глобальных коэффициентов важности критериев;

– выбор шкал и измерение объектов;

– преобразование исходных оценок объектов в количественных шкалах в единую порядковую;

– агрегирование данных в иерархической структуре.

Рассмотрим эти задачи более подробно.

2.1. ПОСТРОЕНИЕ ИЕРАРХИЧЕСКОГО ДЕРЕВА УПОРЯДОЧЕННЫХ КРИТЕРИЕВ ПО УБЫВАНИЮ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНОСТИ

Построение иерархического дерева характерно как для интегрального, так и для локального метода агрегирования. Пусть задано множество объектов $A = \left\{a_q : q = \overline{1,\ n}\right\}$. Оценки объектов $a_q \in A$ по критериям $f_j, j = \overline{1, m}$, имеет вид $x_j^{(q)} = f_j\left(a_q\right)$.

В общем случае будем рассматривать случай, когда шкалы критериев не однородны, т.е. имеют различный размах [5], и разнотипны [20].

Для корпорационных систем управления понятие цели является многоуровневым: задаётся деревом целей, достижение которых обеспечивается иерархической организацией подсистем в систему. При этом предполагается, что достижение целей подсистем более низких уровней иерархии обеспечивает достижение глобальных целей всей системы. В результате обобщённая оценка качества (эффективности) системы состоит из оценок качества её подсистем, т.е. и сам процесс оценивания, и результат будут задаваться многоуровневыми структурами [11, 18, 22].

Одной из проблем для объектов с иерархической структурой показателей в виде дерева является выбор способа перечисления вершин. Для деревьев в основном применяются два способа перечисления – «по ветвям», когда индекс вершины указывает путь к этой вершине, и «по уровням», когда по очереди рассматриваются все уровни сверху вниз, а вершины одного уровня нумеруются подряд слева направо.

Способом перечисления «по ветвям» дерево задаётся в виде множества упорядоченных вершин [15]:

(1) $ID = \{\mathfrak{F}, \mathcal{D}\}$,

где $\mathfrak{F} = \left\{F_0, F_{j_1}, \dots, F_{j_1 \dots j_k} \,\middle|\, j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; k = \overline{0, n}\right\}$ – множество вершин (критериев), в которых индекс $j_1, \dots, j_k$ вершины $F_{j_1 \dots j_k}$ указывает путь к этой вершине от корневой вершины F_0 (k = 0);

$\mathcal{D} = \left\{\left(F_{j_1 \dots j_{k-1}}, F_{j_1 \dots j_k}\right) \middle|\, j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; k = \overline{0, n}\right\}$ – множество дуг, в которых множество вершин $\{F_{j_1 \dots j_k}\}$, упорядоченных по убыванию важности, инцидентно вершине $F_{j_1 \dots j_{k-1}}$;

F_0 – глобальный (обобщённый) корневой критерий верхнего (нулевого) уровня иерархии;

F_{j_1} – групповые критерии 1-го уровня иерархии, являющиеся концевыми вершинами множества дуг $\{(F_0, F_{j_1}) \mid j_1 = \overline{1, n_0}\}$, n_0 – число дуг, инцидентных вершине F_0;

$F_{j_1 \dots j_k}$ – групповые критерии k-го уровня, являющиеся концевыми вершинами дуг $\left\{\left(F_{j_1 \dots j_{k-1}}, F_{j_1 \dots j_k}\right) \middle| j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}\right\}$;

$n_{j_1 \dots j_{k-1}}$ – число дуг, инцидентных вершине $F_{j_1 \dots j_{k-1}}$.

Концевые вершины $n_{\mathfrak{F}}$-го нижнего уровня условно обозначены строчными буквами $f_{j_1 \dots j_n}$.

Для наглядности изложения материала статьи будим использовать следующие обозначения:

$$F_{j_{k-1}} \equiv F_{j_1 \dots j_{k-1}\xi}, j_k = \overline{1, n_{j_{k-1}}} \equiv \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}},$$
$$n_{j_{k-1}} \equiv n_{j_1 \dots j_{k-1}}, f_{j_n} \equiv f_{j_1 \dots j_n}.$$

2.2. ФОРМИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ГЛОБАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

Понятию количественной важности критериев [12–14] соответствует измерение в количественных типах шкал: отношений, разности и абсолютной шкале [21].

Определение 1. В количественной шкале отношений критерий f_j будет более важным, чем критерий f_i, если вес $w(f_j)$ критерия f_j будет превосходить вес $w(f_i)$ критерия f_i в $w_{ji} = \frac{w_j}{w_i} > 1$ раз, и менее важным, если $w_{ji} = \frac{w_j}{w_i} < 1$, а при $w_{ji} = \frac{w_j}{w_i} = 1$ критерии будут являться равноважными.

Пусть $w_{j_k} = w(F_{j_k})$, $j_k = \overline{1, n_{j_{k-1}}}$, – веса важности F_{j_k} подкритериев k-го уровня, входящих в вершину $F_{j_{k-1}}$ критерия

$(k-1)$-го уровня. Веса подкритериев k-го уровня, входящих в вершину $(k-1)$-го, т.е. более высокого уровня, принято называть локальными весами [18].

Тогда за вес $F_{j_{k-1}}$ критерия на $(k-1)$-м уровне примем сумму весов важности подкритериев k-го уровня:

(2) $w(F_{j_{k-1}}) = \sum_{j_k=1}^{n_{j_{k-1}}} w(F_{j_{k-1}j_k}) \; \forall \, j_k = \overline{1, n_{j_{k-1}}}; \ldots; \, j_1 = \overline{1, n_0}$,

где $n_{j_{k-1}}$ – число F_{j_k} подкритериев k-го уровня, входящих в вершину $F_{j_{k-1}}$ критерия $(k-1)$-го уровня.

Вес $F_{j_{n-1}}$ группового критерия на $(n-1)$-м уровне есть сумма весов важности $f_{j_n} \equiv f_{j_1 \ldots j_n}$ концевых критериев n-го (нижнего) уровня:

(3) $w(F_{j_{n-1}}) = \sum_{j_n=1}^{n_{j_{n-1}}} w(f_{j_n}) \; \forall \, j_n = \overline{1, n_{j_{n-1}}}; \ldots; j_1 = \overline{1, n_0}$,

где $n_{j_{n-1}}$– число концевых критериев n-го, входящих в вершину $F_{j_{n-1}}$ группового критерия $(n-1)$-го уровня.

Вес критерия $F_{j_{k-1}}$ на $(k-1)$-м уровне, вычисляемый по формуле (2), можно определить через сумму весов важности концевых критериев n-го уровня, для которых вершина $F_{j_{k-1}}$ будет корневой:

(4) $w(F_{j_{k-1}}) = \sum_{j_k=1}^{n_{j_{k-1}}} \sum_{j_{k+1}=1}^{n_{j_k}} \ldots \sum_{j_{n-1}=1}^{n_{j_{n-2}}} \sum_{j_n=1}^{n_{j_{n-1}}} w(f_{j_n})$,

а вес F_0 корневого критерия иерархического дерева на высшем уровне упорядоченных критериев будет равен сумме всех концевых критериев нижнего уровня:

(5) $w(F_0) = \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} \ldots \sum_{j_{n-1}=1}^{n_{j_{n-2}}} \sum_{j_n=1}^{n_{j_{n-1}}} w(f_{j_n})$.

Определение 2. Нормированные веса важности критериев $F_{j_1 \ldots j_k}$ на k-м уровне иерархии, где $k = 1, 2, \ldots, n$, относительно суммы весов критериев, входящих в вершину $F_{j_1 \ldots j_{k-1}}$ критерия $(k-1)$-го уровня, принято называть весовыми локальными коэффициентами критериев $F_{j_1 \ldots j_k}$ относительно вершины $F_{j_1 \ldots j_{k-1}}$:

(6) $wl(F_{j_1 \ldots j_k}) = \dfrac{w(F_{j_1 \ldots j_k})}{\sum_{j_k=1}^{n_{j_1 \ldots j_{k-1}}} w(F_{j_1 \ldots j_k})}$,

а нормированные относительно суммы всех критериев $F_{j_1 \ldots j_k}$ k-го уровня иерархии называть глобальными (интегральными) коэффициентами критериев $F_{j_1 \ldots j_k}$ на k-м уровне иерархии:

$$(7)\quad wg\left(F_{j_1 \ldots j_k}\right) = \frac{w\left(F_{j_1 \ldots j_k}\right)}{\sum_{j_1=1}^{n_0} \ldots \sum_{j_k=1}^{n_{j_1 \ldots j_{k-1}}} w\left(F_{j_1 \ldots j_k}\right)}.$$

Возникает вопрос: как связаны веса критериев на каждом уровне?

Теорема 1 (о сумме весов критериев на k-м уровне иерархии). *Пусть сумма весов критериев на k-м уровне иерархического дерева представима в виде*

$$(8)\quad w_\Sigma(k) = \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} \ldots \sum_{j_k=1}^{n_{j_{k-1}}} w\left(F_{j_1 \ldots j_k}\right) \; \forall \; k = \overline{0,n}.$$

Тогда суммы весов важности критериев на каждом уровне иерархии будут совпадать между собой:

$$(9)\quad w_\Sigma(0) = \; \ldots = \; w_\Sigma(k) = \cdots = \; w_\Sigma(n) \; \forall \; k = 0,1,\ldots,n.$$

Доказательство. Действительно для любого $k = \overline{0,n}$, подставив (4) в виде $w\left(F_{j_k}\right) = \sum_{j_{k+1}=1}^{n_{j_k}} \ldots \sum_{j_n=1}^{n_{j_{n-1}}} w\left(f_{j_1 \ldots j_n}\right)$ в формулу (8), получим:

$$w_\Sigma(k) = \sum_{j_1=1}^{n_0} \ldots \sum_{j_k=1}^{n_{j_{k-1}}} \left(\sum_{j_{k+1}=1}^{n_{j_k}} \ldots \sum_{j_n=1}^{n_{j_{n-1}}} w\left(f_{j_1 \ldots j_n}\right) \right)$$

для любого $k = 0, 1, \ldots, n$. Откуда следует (9). Теорема доказана.

На рис. 1 представлено четырёхуровневое иерархическое дерево упорядоченных критериев с весами важности, которое показывает вклад критериев, начиная с концевых нижнего уровня иерархии, вплоть до корневой вершины F_0 с весом $w(F_0) = 100$.

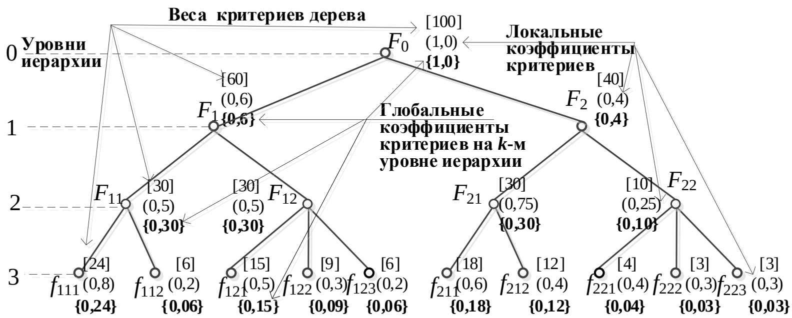

Рис. 1. Четырёхуровневое иерархическое дерево упорядоченных критериев по убыванию важности

При решении прикладных задач в качестве весов важности критериев принимаются веса из отрезка [0, 1], которые в сумме дают единицу и формируются различными экспертными методами [2]. В соответствии с методом косвенных предпочтений [7] вначале эксперты ранжируют критерии, входящие в вершины более высокого уровня иерархического дерева, по убыванию важности.

Каждому эксперту на k-м уровне иерархии предъявляется множество подкритериев $\{F_{j_{k-1}1},\ldots, F_{j_{k-1}j_k}, \ldots, F_{j_{k-1}n_{j_{k-1}}}\}$, упорядоченных по убыванию важности и входящих в вершину $F_{j_{k-1}}$:

(10) $F_{j_{k-1}1} \succ F_{j_{k-1}2} \succcurlyeq \ldots \succ F_{j_{k-1}j_k} \succcurlyeq \ldots \succ F_{j_{k-1}n_{j_{k-1}}},\ j_k = \overline{1, n_{j_{k-1}}}$,

где $\succcurlyeq$ – обозначение нестрогого предпочтения, которое означает для пары критериев строгого предпочтения (обозначение $\succ$) или отношение равнозначности (обозначение $\approx$).

Результаты сравнения не известных заранее весов $w(F_\xi)$, $w(F_{\xi+1})$ смежных пар подкритериев $\{F_\xi, F_{\xi+1}\}$:

(11) $w^*_{\xi,\xi+1} \approx \frac{w(F_\xi)}{w(F_{\xi+1})},\ \xi = j_k = \overline{1, n_{j_{k-1}}}$,

на k-м уровне иерархии, входящих в вершину $F_{j_{k-1}}$, представляются в виде $(n_{j_{k-1}} - 1)$ наддиагональных элементов

(12) $\left(w^*_{12}, w^*_{23}, \ldots, w^*_{\xi,\xi+1}, \ldots, w^*_{n_{j_{k-1}}-1, n_{j_{k-1}}}\right)$,

квадратной матрицы $W_{F_{j_{k-1}}}\left[w_{\xi,\xi+1}\right]$ попарного сравнения смежных подкритериев $\{F_\xi, F_{\xi+1}\}$

(13) $$W_{F_{j_{k-1}}} = \begin{pmatrix} 1 & w^*_{1,2} & 0 & \ldots & 0 \\ 1/w^*_{1,2} & 1 & w^*_{2,3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1/w^*_{n_{j_{k-1}}-1,\, n_{j_k}} & w^*_{n_{j_{k-1}}-1,\, n_{j_k}} \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом количественная оценка (11) означает, что эксперт считает критерий F_ξ важнее критерия $F_{\xi+1}$ ($F_\xi \succ F_{\xi+1}$) в $w^*_{\xi,\xi+1}$ раз, если $w^*_{\xi,\xi+1} > 1$, а при $w^*_{\xi,\xi+1} = 1$ критерии равноважны ($F_\xi \approx F_{\xi+1}$). Исходя из свойства обратной симметрии, равенство $w_{\xi+1,\xi} = \frac{1}{w^*_{\xi,\xi+1}} < 1$ означает, что количественно критерий $F_{\xi+1}$ в $w_{\xi+1,\xi}$ раз менее важен критерия F_ξ.

При таком подходе достаточно всего лишь $(n_{j_{k-1}}-1)$-го экспертного сравнения вместо $\frac{\left(n_{j_{k-1}}\right)^2-n_{j_{k-1}}}{2}$ при попарном сравнении как, например, в методе анализа иерархий Т. Саати [22].

В [7] показано, что матрица (13) является мультипликативной и обладает рядом свойств, а именно: нормированные элементы столбцов $w_\xi^\downarrow$, $\xi=\overline{1,n_{j_{k-1}}}$, матрицы $W_{F_{j_{k-1}}}$ (13), вычисленные по наддиагональным элементам (12) по формуле

$$(14)\ w_{\eta\xi}=\begin{cases}\prod_{t=\eta}^{\xi-1}w_{t,t+1}^*, \eta<v, \forall\,\eta=\overline{1,\xi-1},\\ \quad 1, \qquad\qquad \forall\,\eta=\xi,\\ \left(\prod_{t=\xi}^{\eta-1}w_{t,t+1}^*\right)^{-1}, \eta>\xi, \forall\,\eta=\overline{\xi+1,n_{j_{k-1}}}\end{cases}$$

совпадают между собой и равны нормированным весам $wl(F_{j_k})$ критериев F_{j_k}, т.е.

$$\widetilde{w}_\xi^\downarrow=\begin{pmatrix}\widetilde{w}_{1\xi}\\ \cdots\\ \widetilde{w}_{n_{j_{k-1}}\xi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}wl_1\\ \cdots\\ wl_{n_{j_{k-1}}}\end{pmatrix}\forall\,\xi=\overline{1,n_{j_{k-1}}},$$

где $\widetilde{w}_{\eta\xi}=\frac{w_{\eta\xi}}{\sum_{\eta=1}^{n}w_{\eta\xi}}$ – нормированный элемент ξ-го столбца $w_\xi^\downarrow$; $wl_\eta=\widetilde{w}_{\eta\xi}$ – локально нормированный вес F_η критерия.

За весовые локальные коэффициенты для простоты вычисления лучше принять нормированные элементы последнего столбца матрицы (13), вычисленные по наддиагональным элементам (12):

$$(15)\ w_{\eta,n_{j_{k-1}}}=\begin{cases}\prod_{t=\eta}^{n_{j_{k-1}}-1}w_{t,t+1}^*, \eta<n_{j_{k-1}};\\ \quad 1, \qquad \eta=n_{j_{k-1}}.\end{cases}$$

При этом для весовых $wl_{j_1\dots j_k}=wl(F_{j_1\dots j_k})$ локальных коэффициентов, входящих в вершину $F_{j_1\dots j_{k-1}}$ более высокого уровня, выполняется условие нормировки:

$$(16)\ \sum_{j_n=1}^{n_{j_1\dots j_{k-1}}}wl_{j_1\dots j_k}=1\ \forall\ j_k=\overline{1,n_{j_1\dots j_{k-1}}}; k=\overline{1,n_{\mathfrak{F}}},$$

а для весового локального коэффициента корневой вершины F_0 выполняется условие $wl(F_0)=1$.

По локальным коэффициентам критериев формируются глобальные (интегральные) «веса» $wg_{j_1 j_2 \dots j_k} = wg(F_{j_1 j_2 \dots j_k})$ групповых вершин $F_{j_1 j_2 \dots j_k}, j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}$, на k-м уровне иерархии, которые вычисляются в виде произведения локальных коэффициентов вершин, лежащих на пути от корневой вершины F_0 к произвольной групповой вершине $F_{j_1 \dots j_k}$:

(17) $wg_{j_1 \dots j_k} = wl(F_0) \cdot wl(F_{j_1}) \cdot \dots \cdot wl\left(F_{j_1 \dots j_k}\right)$.

Глобальный (интегральный) «вес» $wg_{j_1 j_2 \dots j_n} = wg(f_{j_1 j_2 \dots j_n})$ концевой вершины $f_{j_1 \dots j_n}$ на n-м уровне иерархии вычисляется в виде произведения локальных коэффициент вершин, лежащих на пути от корневой вершины F_0 к произвольной концевой вершине $f_{j_1 \dots j_n}$:

(18) $wg_{j_1 j_2 \dots j_n} = wl_0 \cdot wl_{j_1} \cdot \dots \cdot wl_{j_1 j_2 \dots j_n} = \prod_{k=0}^{n} wl_{j_1 j_2 \dots j_k}$,

где $j_n = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{n-1}}}; \dots j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}; \dots, j_1 = \overline{1, n_0}$.

По определению локальный коэффициент корневой вершины совпадает с глобальным $wl(F_0) = wg(F_0) = 1$ (рис. 1).

Возникает вопрос: будут ли равны глобальные весовые коэффициенты, полученные по мультипликативной свёртке по формуле (17) и вычисленные по формуле (7) как отношение веса критерия к сумме весов по всем критериям k-го уровня иерархии?

Ответ даёт следующая теорема, которую, не умаляя общности, докажем для глобальных весов концевых критериев.

Теорема 2 (об аддитивном свойстве мультипликативной свёртки весов критериев). *Пусть для концевого критерия* $f_{j_1 \dots j_n}$ *иерархического дерева глобальные коэффициенты получены:*

а) нормированием по сумме коэффициентов важности концевых критериев n*-го уровня*:

(19) $wg_{j_1 \dots j_n}^{(\Sigma)} = \dfrac{w(f_{j_1 \dots j_n})}{\sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} \dots \sum_{j_n=1}^{n_{j_1 \dots j_{n-1}}} w(f_{j_1 \dots j_n})} = \dfrac{w(f_{j_1 \dots j_n})}{w(F_0)}$;

б) вычислением по мультипликативной свёртке:

(20) $wg_{j_1 \dots j_n}^{(\Pi)} = wl(F_0) \times wl(F_{j_1}) \times \dots \times wl\left(f_{j_1 \dots j_n}\right)$.

Тогда

1. *Формулы* (19) *и* (20) *равносильны, т.е. их правые части совпадают:*

(21) $wl(F_0) \times wl\left(F_{j_1}\right) \times \ldots \times wl\left(f_{j_{1\ldots}j_n}\right) = \frac{w\left(f_{j_1\ldots j_n}\right)}{w(F_0)}$.

2. *Глобальный коэффициент* $\mathrm{wg}\left(F_{j_k}\right)$ *группы критериев* F_{j_k} k*-го уровня иерархического дерева равен сумме глобальных коэффициентов* $\mathrm{wg}\left(F_{j_{k+1}}\right)$ *критериев, входящих в эту группу*:

(22) $w\mathrm{g}\left(F_{j_k}\right) = \sum_{j_{k+1}=1}^{n_{j_k}} w\mathrm{g}\left(F_{j_{k+1}}\right) = \sum_{j_{k+1}=1}^{n_{j_k}} \ldots \sum_{j_n=1}^{n_{j_{n-1}}} w\mathrm{g}\left(f_{j_1\ldots j_n}\right)$.

3. *Суммы глобальных коэффициентов критериев на* k*-м уровне равны единице:*

(23) $\sum_{j_1=1}^{n_0} \ldots \sum_{j_k=1}^{n_{j_1\ldots j_{k-1}}} w\mathrm{g}\left(F_{j_1\ldots j_k}\right) = 1 \ \forall\, k = \overline{1,n}$.

Доказательство базируется на формулах (2)–(7), (8), (9) и (16)–(18).

Из данной теоремы следует важный вывод, что процедура вычисления глобальных коэффициентов через мультипликативную свёртку локальных коэффициентов важности критериев корректна.

2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОЦЕНОК ОБЪЕКТОВ В ОЦЕНКИ ПОРЯДКОВОЙ БАЛЛЬНОЙ ИЛИ РАНГОВОЙ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ШКАЛЫ

Пусть часть оценок $x_i^{(q)} = f_i\left(a_q\right)$ по критериям $f_i, i = \overline{1,m}$, представлены в виде экспертных оценок (в ранговой, балльной, количественной шкале). Тогда в качестве результирующей шкалы оправдано применение порядковой шкалы с ранговыми градациями [9].

Рассмотрим подробно преобразование оценок объектов в количественной шкале в оценки порядковой с балльными градациями результирующей шкалы:

(24) $Sh = \langle r_{min}, r_{max};\ b; \{<, =\}\rangle$,

где $r_{min} = 1$ ($r_{max} = b$) – минимальный (максимальный) балл порядковой шкалы; b – число градаций шкалы; $\{<,=\}$ – отношения, заданные на множестве градаций.

Переход от исходных количественных шкал к результирующей балльной шкале математически может быть осуществлён способом линейного (равномерного) разбиения с шагом, вычисляемым по формуле

(25) $h_i(b) = \frac{f_i^* - f_{i*}}{b}\ \forall\ i = \overline{1, m}$,
где m – число интервалов разбиения области $X_i = \left[f_{i*},\ f_i^*\right]$ значений $f_i,\ i = \overline{1, m}$, критериев.

При этом область $X_i = \left[f_{i*},\ f_i^*\right]$ значений f_i критерия разбивается на b отрезков – классов $X_{i,r} = [x_{r-1}, x_r]$, $r = \overline{1, b}$:
(26) $\mathcal{R}: x_0 < x_1 < \ldots < x_{r-1} < x_r < \ldots < x_b$,
где $x_0 = f_{i*}$; $x_b = f_i^*$.

Номера классов (отрезков) разбиения будем отождествлять с градациями порядковой результирующей b-балльной шкалы:
(27) $R = \{1, 2, \ldots, r, \ldots, b\}$.

При равномерном разбиении области $X_i = \left[f_{i*},\ f_i^*\right]$ шкальных интервальных значений в исходной шкале и с шагом (25) границы классов определяются по формуле
(28) $x_r = x_0 + h_i r,\ \ r = \overline{1, b}$,
где $x_0 = f_{i*}$, $x_b = f_i^*$.

Переход от непрерывной шкалы к результирующей порядковой шкале с равномерным разбиением исходной шкалы представлен на рис. 2.

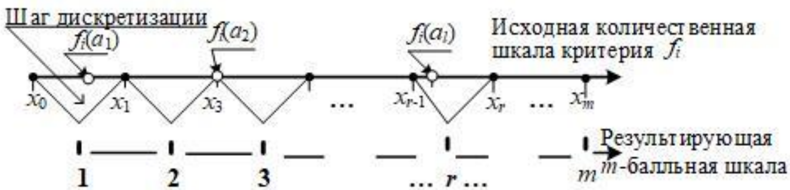

Рис. 2. Равномерное разбиение исходной шкалы

В результате область значений оценок объектов можно представить в виде объединения сегментов (классов):
(29) $X_i = \bigcup_{r=1}^{b} X_{i,r}$, $r = \overline{1, b}$,
где $X_{i,r} = [x_{r-1},\ x_r]$ – сегмент (класс) разбиения; $i = \overline{1, b}$.

Правило перехода π_i оценок $x_i^{(q)}$ объектов в исходной количественной шкале по критерию f_i к точечным оценкам $r_i^{(l)}$ в результирующей балльной шкале с шагом дискретизации (4) представим в виде множественно-точечного отображения:

(30) $\pi_i: [f_{i*} + (r-1)h_i, f_{i*} + rh_i] \to r,$

где $X_{i,r} = [x_{r-1}, x_r] = [f_{i*} + (r-1)h_i, f_{i*} + rh_i]$; $r \in R = \{1, 2, \dots, b\}$ – градации результирующей шкалы; b – число шкальных градаций в порядковой (балльной) шкале.

При этом каждой оценке $x_i^{(q)}$, $q = \overline{1, n}$, попадающей в класс $X_{i,r}$ разбиения, ставится в соответствие оценка $r_i^{(q)}$ результирующей шкалы по правилу

(31) $x_i^{(q)} \overset{\pi_i}{\to} r_i^{(q)}$, если $x_i^{(q)} \subset X_{i,r} = (x_{r-1}, x_r)$.

В случае попадания интервальной оценки объекта на смежные классы ей присваивается связанный ранг, равный среднему арифметическому значению смежных рангов [19]:

(32) $x_i^{(q)} \overset{\pi_i}{\to} \overline{r}_i^{(q)} = \frac{r+(r+1)}{2} = r + \frac{1}{2}$, если $x_i^{(q)} \in X_{i,r} \cup X_{i,r+1}$.

Так, на рис. 2 объекту a_2 будет присвоен связанный ранг

(33) $r_i^{(2)} = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$.

2.4. АГРЕГИРОВАНИЕ ДАННЫХ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПО ГЛОБАЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ КРИТЕРИЕВ

Математическую постановку задачи многокритериального оценивания и выбора объектов по концевым критериям иерархического дерева, отражающего многоуровневую структуру объектов, представим в виде упорядочения

$$a_{q_1} \succcurlyeq a_{q_1} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{q_n}$$

объектов $a_q \in A$ по агрегированным (обобщённым) оценкам в виде аддитивной свёртки:

(34) $r_\Sigma^{(q)}(a_q; ID) = \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} \dots \sum_{j_n=1}^{n_{j_1 j_2 \dots j_n}} wg_{j_1 \dots j_n} \cdot r_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$,

представим в виде:

(35) $F_0\left(F_{j_1}\left(F_{j_1 j_2} \dots \left(F_{j_1 \dots j_{n-1}}\left(f_{j_1 \dots j_n}(A)\right)\right)\right)\right) \to \max\limits_{a_{q_1} \succcurlyeq a_{q_1} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{q_n}}(\min)$,

где max (min) – направление упорядочения объектов.

В зависимости от предпочтений ранжирование объектов может быть выполнено по возрастанию или убыванию обобщённых оценок по концевым вершинам:

$$(36)\ r_{\Sigma}^{(q)}: a_{q_1} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{q_n} \Leftrightarrow \begin{cases} r_{\Sigma}^{(q_1)} \geq \dots \geq r_{\Sigma}^{(q_n)}, \\ r_{\Sigma}^{(q_1)} \leq \dots \leq r_{\Sigma}^{(q_n)}. \end{cases}$$

2.5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫЕ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ АГРЕГИРОВАНИЯ

На данном этапе исследуется устойчивость результатов многокритериального оценивания, полученных различными методами как с учётом весов критериев, так и без учёта (критерии равноважны). Если результаты дали одинаковые результаты, то решения, полученные различными методами, устойчиво.

В противном случае выполняется метаагрегирование, в результате которого фиксируется обобщённое решение. При этом необходимо ориентироваться на результат близкий к решению, полученному локальным методом.

3. Локальный метод агрегирования оценок объектов по ветвям иерархического дерева критериев

При локальном способе агрегирования результаты формирования оценок объектов по критериям агрегируют постепенно – по кустам (вершинам) дерева критериев с учётом весовых локальных коэффициентов критериев, входящих в один куст.

Следует отметить, что хотя локальные методы сложнее в реализации, они более глубоко учитывают имеющуюся информацию и позволяют получить оценки объектов по всем промежуточным критериям дерева в явном виде.

В соответствии с классификацией локальный метод агрегирования оценок объектов подразделяется на методы агрегирования оценок с весами и без весов важности критериев в результирующих количественных или порядковых шкалах, включая ранговые.

Формально алгоритм локального метода с весами и без весов важности критериев сводится к следующим шагам.

Шаг 1. *Инициализация*. Преобразовать исходные оценки $x^{(l)}_{j_1 j_2 \dots j_n}$ объектов $a_l \in A$ по концевым критериям $f_{j_1 j_2 \dots j_n}$ иерархическое дерева критериев ID (1) в соответствии с (31), (32) в множество оценок в порядковой b-балльной шкале:

(37) $\tilde{R}_{j_1 j_2 \dots j_n} = \left\{ r^{(q)}_{j_1 j_2 \dots j_n} \middle| a_q \in A \right\}$.

Шаг 2. *Агрегирование оценок объектов в порядковой шкале в кустах иерархического дерева*. На $(k-1)$-м уровне иерархического дерева, где $k = n,\ n-1, \dots, 1, 0$, в групповой $F_{j_1 \dots j_{k-1}}$ вершине по формуле локального агрегирования находим сумму оценок $r^{(q)}_{j_1 \dots j_k}$, $j_k = \overline{1, n_{j_1 \dots j_{k-1}}}$:

(38) $y^{(q)}_{j_1 j_2 \dots j_{k-1}} = \sum_{j_k=1}^{n_{j_1 \dots j_{k-1}}} wl(F_{j_1 \dots j_k}) \cdot r^{(q)}_{j_1 \dots j_k}$.

Шаг 3. *Преобразование в вершине $F_{j_{k-1}} \equiv F_{j_1 j_2 \dots j_{k-1}}$ агрегированных оценок объектов в оценки результирующей b-балльной шкалы*. Преобразование задаётся отображением

(39) $y^{(q)}_{j_1 \dots j_k} \xrightarrow{\pi_{j_{k-1}}} r^{(q)}_{j_1 \dots j_k}\ \forall\, r = \overline{1, b}$,

где $\pi_{j_{k-1}}$: $\left[y_0 + (r-1) h_{j_{k-1}}, y_0 + rh \right] \to r,\ Y_r = [y_{r-1}, y_r]$;

(40) $y_0 = \min\limits_{a_q \in A} y^{(q)}_{j_1 j_2 \dots j_{k-1}}$; $y_b = \max\limits_{a_q \in A} y^{(q)}_{j_1 j_2 \dots j_{k-1}}$; $h_{j_{k-1}} = \frac{y_b - y_0}{b}$.

Шаг 4. *Сравнение объектов в результирующей шкале в корневой вершине F_0 иерархического дерева относительно объектов, принятых за эталон*. В зависимости от предпочтений ранжирование объектов может быть выполнено по возрастанию или убыванию обобщённых оценок в корневой вершине F_0.

Особенностью локального метода агрегирования является получение обобщённых оценок в корневой вершине F_0 дерева (1) в отличие от интегрального, в котором агрегирования происходит по концевым критерием.

В общем случае результаты агрегирования оценок объектов интегральным и локальным методами различны. Однако результаты агрегирования совпадут только в одном случае, который представим в виде следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть оценки объектов представлены в единой результирующей шкале по концевым критериям.*

Тогда результаты агрегирования (36) *оценок интегральным и локальным методами совпадут только в случае, если в локальном алгоритме исключить процедуру преобразования агрегированных оценок объектов в результирующую порядковую шкалу* (24).

Доказательство. Доказательство проведём для четырех уровневого иерархического дерева (см. рис. 1).

В качестве исходных данных рассмотрим:

$Wl_1 = \{wl_{j_1} = wl(F_{j_1}) | \, j_1 = \overline{1, n_0}\}$ – множество весовых локальных коэффициентов групповых критериев первого уровня;

$Wl_2 = \{wl_{j_1 j_2} = wl(F_{j_1 j_2}) | \, j_2 = \overline{1, n_{J_1}}; \; j_1 = \overline{1, n_0}\}$ – множество весовых локальных коэффициентов групповых критериев второго уровня;

$Wl_3 = \{wl_{j_1 j_2 j_3} = wl(f_{j_1 j_2 j_3}) | j_3 = \overline{1, n_{J_2}}; j_2 = \overline{1, n_{J_1}}; \; j_1 = \overline{1, n_0}\}$ – множество весовых локальных коэффициентов концевых критериев третьего уровня;

$W\mathrm{g}_3 = \{w\mathrm{g}_{j_1 j_2 j_3} = w\mathrm{g}(f_{j_1 j_2 j_3}) | j_3 = \overline{1, n_{J_2}}; j_2 = \overline{1, n_{J_1}}; \; j_1 = \overline{1, n_0}\}$ – множество весовых глобальных коэффициентов концевых критериев третьего уровня, которые вычисляются по формуле

(41) $w\mathrm{g}(f_{j_1 j_2 j_3}) = wl(F_{j_1}) \cdot wl(F_{j_1 j_2}) \cdot \; wl(f_{j_1 j_2 j_3})$.

Для корректного применения аддитивной свёртки оценки объектов по концевым критериям представлены в однородной порядковой шкале в виде множества $\tilde{R} = \left\{r^{(q)}_{j_1 j_2 j_3} \middle| a_q \in A\right\}$.

Результат агрегирования интегральным методом можно представить в виде

(42) $r^{(q)}_{\Sigma} = \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_2}} \sum_{j_3=1}^{n_{j_2}} w\mathrm{g}(f_{j_1 j_2 j_3}) \cdot r^{(q)}_{j_1 j_2 j_3} \, , a_q \in A.$

Исключив шаг 3 в локальном методе агрегирования, получим обобщённые оценки в вершинах дерева:

$$F_{j_1 j_2}: \sum_{j_3=1}^{n_{j_2}} wl(f_{j_1 j_2 j_3}) r^{(q)}_{j_1 j_2 j_3} \;\; \forall \, j_2 = \overline{1, n_{J_1}};$$

$$F_{j_1}: \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} wl(F_{j_1 j_2}) \sum_{j_3=1}^{n_{j_2}} wl(f_{j_1 j_2 j_3}) \cdot r^{(q)}_{j_1 j_2 j_3} \; \forall \, j_1 = \overline{1, n_{J_0}};$$

$$F_0: r^{(q)}_{\Sigma} = \sum_{j_1=1}^{n_0} wl(F_{j_1}) \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} wl(F_{j_1 j_2}) \sum_{j_3=1}^{n_{j_2}} wl(f_{j_1 j_2 j_3}) r^{(q)}_{j_1 j_2 j_3} \, .$$

Исходя из переместительного свойства сложения, в вершине F_0 получим следующий результат:

$$\sum_{j_1=1}^{n_0} wl(F_{j_1}) \sum_{j_2=1}^{n_{j_1}} wl(F_{j_1 j_2}) \sum_{j_3=1}^{n_{j_2}} wl(f_{j_1 j_2 j_3}) r^{(q)}_{j_1 j_2 j_3} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_2}} \sum_{j_3=1}^{n_{j_2}} wl(F_{j_1}) wl(F_{j_1 j_2}) wl(f_{j_1 j_2 j_3}) \cdot r_{j_1 j_2 j_3}^{(q)} =$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n_0} \sum_{j_2=1}^{n_{j_2}} \sum_{j_3=1}^{n_{j_2}} wg(f_{j_1 j_2 j_3}) \cdot r_{j_1 j_2 j_3}^{(q)},$$

где $wl(F_{j_1}) wl(F_{j_1 j_2}) wl(f_{j_1 j_2 j_3}) = wg(f_{j_1 j_2 j_3})$.

Теорема доказана.

4. Задача оценки информационных материалов

Задача оценки информационных материалов (объектов) стоит не только перед разведывательными подразделениям различных стран [20], но и является одной из важнейших задач коммерческих компаний при ведении конкурентной разведки [16].

Рассмотрим пример решения задачи многокритериального оценивания семи информационных материалов, которые представим в виде множества $A = \{a_q | q = 1 \div 7\}$, на модельных данных по пяти критериям: f_1 – актуальность информационных материалов; f_2 – достоверность информационных материалов; f_3 – структурность информационных материалов; f_4 – полнота (содержательность) информационных материалов; f_5 – наглядность информационных материалов.

Исходные оценки $r_j^{(q)} = f_j(a_q), j = \overline{1,7}$, информационных материалов в 10-балльной шкале измерения представим в таблице 1.

Таблица 1. Оценки объектов в 10-балльной шкале измерения

A	$r_1^{(q)}$	$r_2^{(q)}$	$r_3^{(q)}$	$r_4^{(q)}$	$r_5^{(q)}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
a_1	6	5	9	8	6
a_2	8	6	7	8	8
a_3	10	4	6	10	10
a_4	8	8	8	6	6
a_5	4	7	10	9	8
a_6	8	10	8	9	8
a_7	3	8	6	6	8

4.1. ИЕРАРХИЧЕСКОЕ ДЕРЕВО КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ

Исходя из формы и ценности информационных материалов структурируем критерии в виде трёхуровневого иерархического дерева способом перечисления «по ветвям» (рис. 3).

Для представленного на рисунке дерева приняты следующие обозначения: F_0 – обобщённый критерий ценности материалов; F_1 – группа критериев полезности материалов, характеризующих f_{11} – актуальность материалов, f_{12} – достоверность материалов; F_2 – группа показателей построения формы материалов, характеризующих f_{21} – структурность материалов, f_{22} – полноту (уровень) раскрытия темы материалов, f_{23} – наглядность материалов.

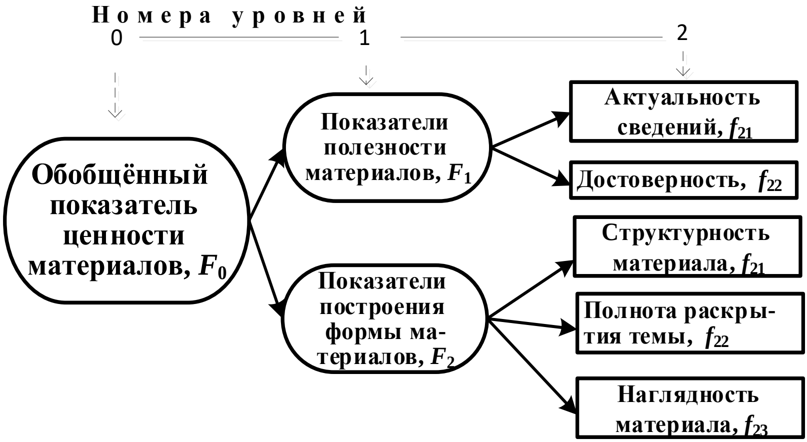

Рис. 3. Иерархическое дерево критериев ценности материалов

4.2. ЭКСПЕРТНАЯ ОЦЕНКА ВЕСОВ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

Пусть экспертными методами сформированы следующие весовые локальные коэффициенты критериев, а именно:

а) весовые локальные коэффициенты групповых критериев:

$$F_0: wl(F_1) = 0{,}7; wl(F_2) = 0{,}3;$$

б) весовые локальные коэффициенты концевых критериев:

$$F_1: wl(f_{11}) = 0{,}6; wl(f_{12}) = 0{,}4;$$

$$F_2: wl(f_{21}) = 0{,}5; wl(f_{22}) = 0{,}3. wl(f_{23}) = 0{,}2.$$

Глобальные коэффициенты концевых критериев находим произведением локальных коэффициентов вершин, лежащих на пути от корневой вершины F_0 к произвольной концевой вершине: $w\text{g}(f_{11}) = 0{,}42$; $w\text{g}(f_{12}) = 0{,}28$; $w\text{g}(f_{13}) = 0{,}15$;

$w\text{g}(f_{21}) = 0{,}09$; $wg(f_{22}) = 0{,}06$.

Легко убедиться, что сумма глобальных коэффициентов равна единице.

4.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Агрегирование данных интегральный методом выполним без и с глобальными коэффициентами критериев по концевым вершинам дерева по формуле: $y_\Sigma^{(q)} = \sum_{j=1}^{5} w\text{g}(f_j) \times r_j^{(q)}$, где соответствие между нумерацией концевых критериев дерева на рис. 3 имеет вид $f_1 \equiv f_{11}, f_2 \equiv f_{12}, f_3 \equiv f_{13}, f_4 \equiv f_{21}, f_5 \equiv f_{22}$.

Результаты агрегирования интегральным механизмом по концевым критериям представлены в столбце 7 таблицы 2, которые затем преобразованы в оценки 10-балльной шкалы (см. ст. 8).

Таблица 2. Оценки объектов с учётом глобальных весов

A	$r_1^{(q)}$	$r_2^{(q)}$	$r_3^{(q)}$	$r_4^{(q)}$	$r_5^{(q)}$	$y_\Sigma^{(q)}$	$r_\Sigma^{(q)}$
1	2	3	4	5	6	7	8
a_1	2,52	1,40	1,35	0,72	0,36	6,35	3
a_2	3,36	1,68	1,05	0,72	0,48	7,29	6
a_3	4,20	1,12	0,90	0,90	0,60	7,72	8
a_4	3,36	2,24	1,20	0,54	0,36	7,70	8
a_5	1,68	1,96	1,50	0,81	0,48	6,43	4
a_6	3,36	2,80	1,20	0,81	0,48	8,65	10
a_7	1,26	2,24	0,90	0,54	0,48	5,42	1

С учётом оценок объектов в 10-балльной шкале имеем упорядочение: $a_6 \succ \{a_3 \approx a_4\} \succ a_2 \succ a_5 \succ a_1 \succ a_7$.

4.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛОКАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Агрегирование данных локальным методом выполним с локальными коэффициентами критериев в соответствии с шагами алгоритма.

В таблице 3 представлены результаты агрегирования данных локальным методом с учётом локальных весов критериев.

Таблица 3. Результаты агрегирования локальным методом

A	F_1		F_2		F_0	
	$y_\Sigma^{(q)}$	$r_1^{(Q)}$	$y_\Sigma^{(l)}$	$r_2^{(q)}$	$y_\Sigma^{(l)}$	$r_0^{(q)}$
1	2	3	4	5	6	7
a_1	5,60	2	8,1	6	3,20	3
a_2	7,20	6	7,5	5	5,70	6
a_3	7,60	7	8,0	6	6,70	8
a_4	8,00	8	7,0	3	6,50	7
a_5	5,20	1	9,3	10	3,70	4
a_6	8,80	10	8,3	7	9,10	10
a_7	5,00	1	6,4	1	1,00	1

С точки зрения анализа устойчивости решений построения результирующего ранжирования можно сделать следующие выводы:

1. В обоих методах агрегирования объект a_6 оказался строго предпочтительнее всех остальных объектов.
2. Объекты a_3 и a_4 при интегральном методе агрегирования оказались эквивалентными, а при локальном объект a_3 строго предпочтительнее a_4.
3. При обоих методах агрегирования объекты $a_6, a_3,\ a_4$ оказались строго предпочтительнее объектов $a_2,\ a_5,\ a_1,\ a_7$

Сравнение объектов по предпочтительности в 10-балльной шкале наглядно представлено на рис. 4.

В результате получим следующее ранжирование объектов:

$$a_6 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \succ a_1 \succ a_7.$$

Из данного примера видны преимущества локального механизма агрегирования, так как:

– он более гибко учитывает имеющуюся информацию с учётом оценок по отдельным подструктурам критериев в общей структуре (позволил упорядочить объекты a_3 и a_4);

– обладает большей различающей способностью и, кроме того, он позволяет получить оценки во всех промежуточных вершинах и проанализировать, из каких составляющих складывается окончательный результат.

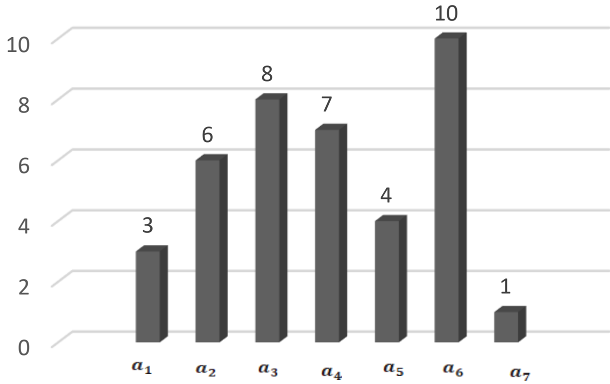

Рис. 4. Сравнение объектов в результирующей шкале

5. Заключение

Сложность решения задач многокритериального оценивания и выбора связана с необходимостью применения экспертных методов для оценки весов важности критериев иерархического дерева, отражающего многоуровневую структуру объектов.

В статье предложена удобная нумерация вершин по ветвям иерархического дерева и доказано, что процедура вычисления глобальных коэффициентов через мультипликативную свёртку локальных коэффициентов важности критериев согласуется с определением локальных весовых коэффициентов, определяемых как отношение количественного веса критерия к суме весов подкритериев, входящих в вершину более высокого уровня.

Метод локального агрегирования оценок объектов обладает важными свойствами, а именно: адекватностью упорядочений объектов в любой вершине дерева относительно вычисления агрегированных оценок, наглядностью, возможностью понимания и контроля промежуточных результатов аналитиками, бо́льшей объективностью вычисленных оценок в корневой вершине дерева. В частности, локальный метод устойчив к наличию ошибок в измерениях исходных оценок объектов, не приводящих к изменению их порядка в процедурах агрегирования.

Результаты агрегирования оценок интегральным и локальным методами совпадут полностью только в случае, если в локальном алгоритме исключить процедуру преобразования агрегированных оценок объектов в результирующую порядковую шкалу.

Представленные научные результаты, а именно: о сумме весов критериев на k-м уровне иерархии, об аддитивном свойстве мультипликативной свёртки весов критериев, о совпадении результатов агрегирования, математически обоснованы.

Литература

1. АРИСТОВА Е.М. *Упрощение задачи линейной многокритериальной оптимизации с помощью метода агрегирования целевых функций* // Вестник ВГУ, серия: системный анализ и информационные технологии. – 2012. – №2. – С. 11–17.
2. АНОХИН А.М. ГЛОТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. и др. *Методы определения коэффициентов важности критериев* // Автоматика и телемеханика. – 1997. – №8. – С. 3–35.
3. БОРИСОВА В.В., ДЕМКИНА О.В., ШАЛАМОВА Н.Г. *Методические аспекты построения интегрального показателя оценки готовности экономики России к цифровизации* // Экономика: вчера, сегодня, завтра. – 2019. – Том 9, №10А. – С. 137–148.
4. БОРМОТОВ А.Н. *Обоснование метода формирования весовых коэффициентов критерия практической оптимальности по результатам математического моделирования композитов* // Технические науки. – 2016. – №8. – С. 14–18.
5. ВАСИН А.А., КРАСНОЩЕКОВ П.С., МОРОЗОВ В.В. *Исследование операций*. – М.: Академия, 2008. – С. 170.
6. ЗОТЬЕВ Д.Б. *К проблеме определения весовых коэффициентов на основании экспертных оценок* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2011. – №1. – Т. 77. – С. 75–78.

7. КОРНЕЕНКО В.П. *Метод косвенных предпочтений формирования весов критериев в задачах с многоуровневой структурой* // Онтология проектирования. – 2023. – Т.13, №4(50). – С. 580–596.
8. КОРНЕЕНКО В.П. *Метод локального агрегирования данных объектов с многоуровневой структурой в порядковых шкалах* // Труды 14-й Международной конференции "Управление развитием крупномасштабных систем" (MLSD-2021). – М.: ИПУ РАН, 2021. – С. 485–493. – URL: https://mlsd2021.ipu.ru/proceedings/485-493.pdf.
9. КОРНЕЕНКО В.П. *Многокритериальное ранжирование и выбор в ранговых градациях объектов, измеренных в разнотипных шкалах* // Прикладная математика и вопросы управления. – 2023. – №4. – С. 55 59.
10. КРИВУЛИН Н.К. и др. *О решении многокритериальных задач принятия решений на основе парных сравнений* // Компьютерные инструменты в образовании. – 2020. – №2. – С. 27–58.
11. ЛОПУХИН М.М. «*ПАТТЕРН*» *– метод планирования и прогнозирования научных работ*. – М.: Советское радио, 1971. – 160 с.
12. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Количественная важность критериев и аддитивные функции ценности* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – №1. – С. 133–142.
13. ПОЛИЩУК Л.И. *Об обобщенных критериях с коэффициентами важности в задачах векторной оптимизации* // Автоматика и телемеханика. – 1982. – №2. – С. 55–60.
14. ПОСТНИКОВ В.М., СПИРИДОНОВ С.Б. *Методы выбора весовых коэффициентов локальных критериев* // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. – 2015. – №06. – С. 267–287.
15. РАМЕЕВ О.А. *Оценка качества и агрегирование в многоуровневых системах организационного управления*. – М.: ИКСИ, 1998. – 228 с.
16. ЮЩУК Е.Л., ПЕТРЯШОВ Д.В., КУЗИН А.В. и др. *Конкурентная разведка*. – Екатеринбург: Урал. гос. экон. ун-т., 2015. – 210 с.

17. BELTON V., STEWART T.J. *Multiple criteria decision analysis. An integrated approach*. – Boston : Kluwer, 2003. – 374 p.
18. KEENEY R.L., RAIFFA H. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-Offs*. – New York: Wiley, 1976. – 569 p.
19. KENDALL M.G. *Rank correlation methods*. – New York: Oxford University, 1990. – 260 p.
20. PLATT W. *Strategic Intelligence Production. Basic Principles*. – New York: Frederic A. Praeger, 1957. – 302 p.
21. PFANZSAGL J. *Theory of measurement*. – Berlin, Heidelberg: Spriger-Verlag, 1971. – 235 p.
22. SAATY T.L. *The Analytic Hierarchy Process*. – New York: McGraw-Hill, 1980. – 257 p.

METHODS OF LOCAL AND INTEGRAL MULTILEVEL AGGREGATION ESTIMATES OF OBJECTS MEASURED IN DIFFERENT TYPES OF SCALES

Viktor Korneenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Senior Researcher, Ph.D (vkorn@ipu.ru).
Oleg Rameev, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Doctor of Science (Eng.), professor (ierp2002@mail.ru).

Abstract: In the tasks of multi-criteria assessment and selection of objects with a multilevel structure, the initial data characterizing the objects are usually measured in different scales. In this regard, the use of additive convolution for the end criteria of a hierarchical tree reflecting the multilevel structure of objects is correct only for estimates of objects represented or transformed to a single homogeneous scale. The article introduces the concept of weight in the quantitative scale of the relations of the criterion (k-1)-th level of the hierarchical tree, determined by the sum of the weights of the subcriteria of the k-th level. In this case, the application of the procedure for calculating global normalized weights, which are commonly called coefficients, at each level of the hierarchy through a multiplicative convolution of local coefficients lying on the path from the root vertex is correct. The proposed method of local aggregation of estimates of objects with a multilevel structure has an important property, namely: the adequacy of the ordering of objects at any vertex of the hierarchical structure of criteria for calculating aggregated estimates in a quantitative, ordinal (rank) scale. It is shown under what conditions the integral method of aggregated estimates based on global coefficients of the end criteria coincides with the local one. The advantages of the local method are visibility, the ability for analysts to understand and control intermediate results, and greater objectivity of calculated estimates at the root *vertex of the hierarchical tree. The essence of the methods and their comparison is shown by the example of a multi-criteria evaluation of information materials.*

Keywords: hierarchical tree, local and global weights of criteria, local data aggregation, scale transformation.

УДК 519.8
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2024.110.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.

Поступила в редакцию 25.02.2024.
Опубликована 31.07.2024.