

## **ПРИМЕНЕНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СМО С ВХОДЯЩИМ МАР-ПОТОКОМ, ИНТЕНСИВНОСТЬ КОТОРОГО ЗАВИСИТ ОТ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ**

**Полин Е. П.<sup>1</sup>, Моисеева С. П.<sup>2</sup>, Моисеев А. Н.<sup>3</sup>**

*(Национальный исследовательский Томский  
государственный университет, Томск)*

*Рассматривается математическая модель бесконечнолинейной системы массового обслуживания с входящим МАР-поток с интенсивностью, зависящей от числа занятых приборов. Параметры входящего потока, а именно его условные интенсивности, меняются каждый раз, когда изменяется состояние системы, то есть появляется новая заявка либо одна из заявок завершает обслуживание. Дисциплина обслуживания определяется тем, что заявка занимает любой из свободных приборов в системе, в котором выполняется ее обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону. Для данной модели получение стационарного распределения вероятностей числа заявок в системе аналитическим путем не представляется возможным, поэтому в данной работе предлагается эвристический подход, а именно – использование отрицательного биномиального распределения как аппроксимации для искомого распределения. Предлагается два подхода такой аппроксимации, для которых выполнен численный анализ точности на основе сравнения с результатами имитационного моделирования. Первый подход основан на вычислении параметров отрицательного биномиального распределения с помощью точных значений математического ожидания и дисперсии числа заявок в рассматриваемой системе, а второй – на том факте, что интенсивность поступающих заявок определяется управляющей потоком цепью Маркова. Было получено, что первый способ аппроксимации дает более точные результаты, однако при большой загрузке системы обе аппроксимации имеют большую погрешность.*

**Ключевые слова:** гетерогенная система массового обслуживания, переменная интенсивность, отрицательное биномиальное распределение.

---

<sup>1</sup> Евгений Павлович Полин, аспирант (polin\_evgeny@mail.ru).

<sup>2</sup> Светлана Петровна Моисеева, д.ф.-м.н., профессор (smoiseeva@mail.ru).

<sup>3</sup> Александр Николаевич Моисеев, д.ф.-м.н., доцент (moiseev.tsu@gmail.com).

## **1. Введение**

Развитие техники, телефонии, сетей связи привело к необходимости использования более адекватных математических моделей процессов передачи и обработки данных, в которых интенсивность потока и параметры обслуживания могут изменяться случайным образом.

В литературе по теории массового обслуживания рассматриваются модели, в которых параметры, описывающие интенсивность прибытия и/или пропускную способность обслуживания, обладают одной из следующих характеристик: параметры однородны во времени; параметры не являются постоянными, а меняются во времени, однако их временная зависимость является исходной величиной модели; параметры меняются в зависимости от состояния воздействующих факторов [11].

Следует отметить, что указанные системы массового обслуживания (СМО) относятся к классу систем, функционирующих в случайной среде. Как правило, в качестве случайного процесса, описывающего среду, рассматривается число занятых приборов в системе. Примеры технических задач, приводящих к анализу таких СМО, можно найти в [1, 4-6, 14].

Поскольку в реальных жизненных ситуациях системы обслуживания имеют случайное время между моментами поступления заявок и случайное время их обслуживания, а среды обычно недетерминированы, СМО в случайных средах сегодня являются областью активных исследований в прикладной теории вероятностей. Довольно часто такие системы применяются для исследования систем с запасами Inventory Queue [12-16].

Возникающие сегодня сложные технологические и логистические системы возродили интерес к таким моделям. Особенный интерес к этим системам представляют, например, услуги различного качества, которые предоставляются отдельным клиентам, или набор данных (сообщения в сетях) при ограниченных ресурсах и при внешних ограничениях [3, 10].

Примером модели, где параметры входящего потока зависят от числа находящихся на обслуживании заявок, может служить ситуация с просмотром контента (например, Youtube), в которой клиенты, в настоящее время просматривающие видео,

могут поделиться ссылками со своими знакомыми, вследствие чего возникает зависимость интенсивности входящего потока от общего числа клиентов. Необходимость понимания поведения таких систем обосновывает актуальность проведения настоящего исследования.

В настоящей работе рассматривается математическая модель бесконечнолинейной системы массового обслуживания с входящим МАР-потокком с интенсивностью, зависящей от числа занятых приборов. Эта модель является обобщением модели СМО, рассмотренной в работе [8], где проводилось исследование системы с входящим пуассоновским потоком с переменной интенсивностью вида  $\lambda(i(t)) = a + b \cdot i(t)$ . Здесь  $i(t)$  – число занятых приборов в системе в момент времени  $t$ . В этой же работе было получено, что производящая функция рассматриваемого случайного процесса имеет вид производящей функции случайной величины, имеющей отрицательное биномиальное распределение (ОБР) [2] с параметрами  $r = a/b$  и  $p = 1 - b/\mu$ , где  $\mu$  – параметр экспоненциального времени обслуживания заявок на приборах. Целью данной работы является нахождение стационарного распределения вероятностей числа заявок в системе с входящим МАР-потокком с интенсивностью, зависящей от числа занятых приборов. Однако для данной модели получение результатов аналитическим путем не представляется возможным, поэтому в данной работе предлагается эвристический подход, а именно, использование отрицательного биномиального распределения как аппроксимации для искомого стационарного распределения вероятностей числа заявок в системе по аналогии с результатом [8]. В дальнейшем мы будем называть это распределение *ОБР-аппроксимацией*.

Поскольку для модели с входящим МАР-потокком параметры, аналогичные  $a$  и  $b$ , являются матрицами, то основной задачей становится разработка подхода или подходов к вычислению параметров ОБР-аппроксимации. В настоящей работе предлагается два таких подхода: один основан на вычислении параметров ОБР с помощью точных значений математического ожидания и дисперсии числа заявок в рассматриваемой системе, полученных по формулам, представленным в работе [9], а другой – на том факте, что интенсивность поступающих заявок определя-

ется управляющей потоком цепью Маркова  $k(t)$ . Кроме того, выполнен численный анализ точности построенных таким образом ОБР-аппроксимаций на основе сравнения с результатами имитационного моделирования.

## 2. Математическая модель

### 2.1 ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассматривается система массового обслуживания (рис. 1), на вход которой поступает МАР-поток заявок. Управляющая цепь входящего потока  $k(t) = 1, 2, \dots, K$  задана матрицей  $\mathbf{Q} = [q_{k_1 k_2}]$  инфинитезимальных характеристик. Матрица условных интенсивностей имеет вид  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A} + \mathbf{B}i$ , где  $\mathbf{A}$  – диагональная матрица с элементами  $a_k$  по главной диагонали,  $\mathbf{B}$  – диагональная матрица с элементами  $b_k$  по главной диагонали,  $i$  – число занятых приборов (число заявок) в системе. Обозначим вероятности появления заявок в системе в момент смены состояния МАР-потока с  $k_1$  на  $k_2$  как  $d_{k_1 k_2}$ ,  $k_1 \neq k_2$ . Элементы  $d_{k_1 k_2}$  образуют матрицу  $\mathbf{D} = [d_{k_1 k_2}]$ ,  $k_1, k_2 = 1, 2, \dots, K$  (диагональные элементы  $d_{kk} = 0$ ). Таким образом, параметры входящего МАР-потока, а именно его условные интенсивности, меняются каждый раз, когда изменяется состояние системы (появляется новая заявка либо одна из заявок завершает обслуживание).

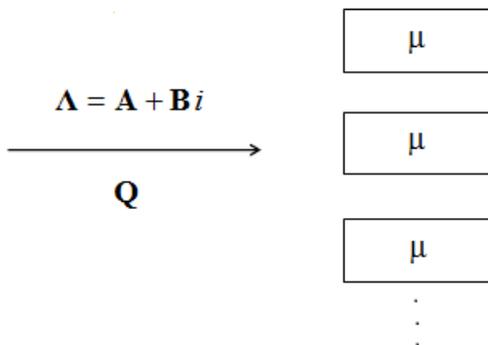


Рис. 1. СМО с интенсивностью входящего МАР-потока, зависящей от числа занятых приборов в системе

Дисциплина обслуживания определяется тем, что поступившая заявка занимает любой из свободных приборов в системе, на котором выполняется ее обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ . Процесс  $i(t)$  характеризует число занятых приборов в системе в момент времени  $t$ . Ставится задача нахождения распределения числа заявок в системе в стационарном режиме функционирования. Для существования стационарного режима необходимо, чтобы выполнялось условие  $b_k < \mu$  для всех  $k = 1, 2, \dots, K$ .

## 2.2 ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Отрицательное биномиальное распределение (ОБР) – это распределение дискретной случайной величины  $\xi$ , равной количеству неудач, которые произошли в последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха  $p$  до наступления  $r$ -го успеха. В оригинале закон распределения выглядит следующим образом:

$$P\{\xi = k\} = \frac{(k+r-1)!}{k!(r-1)!} p^r (1-p)^k,$$

для случаев действительных положительных значений параметра  $r$  его можно записать с использованием гамма-функции Эйлера в виде

$$(1) \quad P\{\xi = k\} = \frac{\Gamma(r+k)}{k!\Gamma(r)} p^r (1-p)^k.$$

Производящая функция вероятностей случайной величины с отрицательным биномиальным распределением равна

$$G(z) = \left( \frac{p}{1-(1-p)z} \right)^r, \quad |z| < \frac{1}{1-p},$$

математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $\xi$  вычисляются по формулам

$$(2) \quad M\{\xi\} = \frac{r(1-p)}{p}, \quad D\{\xi\} = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Параметр  $r$  в «классическом» ОБР может принимать только целые значения, однако для построения аппроксимации более

удобно использовать «расширенный» вариант ОБР с непрерывными значениями этого параметра (распределение Полюа). В случае действительных положительных значений параметра  $r$  закон распределения случайной величины  $\xi$  определяется формулой (1). Характеристическая функция имеет следующий вид:

$$(3) \quad h(u) = \left( \frac{p}{1 - (1-p)e^{ju}} \right)^r,$$

где  $j$  – мнимая единица. Если параметры ОБР известны, распределение вероятностей числа занятых приборов в системе может быть найдено с помощью обратного преобразования Фурье

$$P_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-juk} h(u) du, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

либо по формуле (1).

### 2.3 ОБР-АППРОКСИМАЦИЯ

Для использования ОБР в качестве аппроксимации необходимо определить его параметры  $r$  и  $p$  так, чтобы полученное распределение было максимально близко к настоящему распределению числа заявок в системе. Для получения таких результатов можно использовать формулы для математического ожидания и дисперсии (2), откуда получаем следующие выражения для вычисления параметров ОБР-аппроксимации:

$$(4) \quad p = \frac{M}{D}, \quad r = \frac{M \cdot p}{1 - p}.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению математического ожидания и дисперсии для искомого распределения. Для случая стационарного распределения числа заявок в СМО с входящим МАР-поток, интенсивность которого зависит от состояния системы, мы предлагаем два подхода к решению данной задачи, которые представлены в следующем разделе.

### 3. ОБР-аппроксимация стационарного распределения числа заявок в СМО с входящим МАР-поток, интенсивность которого зависит от состояния системы

#### 3.1 АППРОКСИМАЦИЯ НА ОСНОВЕ ТОЧНЫХ МОМЕНТОВ

В качестве первого метода аппроксимации предлагается вычисление параметров ОБР по формулам (4), где значения математического ожидания  $M$  и дисперсии  $D$  получены в результате исследования рассматриваемой системы методом моментов [9] и вычисляются следующим образом:

$$M = m_1 = Mi(t) = \mathbf{m}_1 \mathbf{e} = \mathbf{r}(\mathbf{A} + \mathbf{C})(\mu \mathbf{I} - \mathbf{B} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{e},$$

$$(5) \quad m_2 = Mi^2(t) = \mathbf{m}_2 \mathbf{e} =$$

$$= \mathbf{r}(\mathbf{A} + \mathbf{C})\{(\mathbf{B} + \mathbf{Q} - \mu \mathbf{I})^{-1}(2(\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \mathbf{B} + \mu \mathbf{I}) - \mathbf{I}\}(2\mathbf{B} + \mathbf{Q} - 2\mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{e},$$

$$D = m_2 - (m_1)^2,$$

где  $\mathbf{C}$  – матрица с элементами  $d_{vk}q_{vk}$  и нулевыми элементами по главной диагонали;  $\mathbf{r}$  – вектор стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова  $k(t)$ ;  $\mathbf{I}$  – единичная матрица;  $\mathbf{e}$  – единичный вектор-столбец.

#### 3.2 ЭВРИСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Второй подход основан на том факте, что интенсивность поступающих заявок определяется управляющей потоком цепью Маркова  $k(t)$ . Если матрица  $\mathbf{B}$  является нулевой, то на вход поступает МАР-поток, интенсивность которого определяется как  $a = \mathbf{r}(\mathbf{A} + \mathbf{C})\mathbf{e}$  [7], что соответствует параметру  $a$  в системе, рассматриваемой в работе [8]. Так как матрица  $\mathbf{B}$  также определяет интенсивность поступления дополнительных заявок, то определим параметр  $b$  аналогичным образом:  $b = \mathbf{r}\mathbf{B}\mathbf{e}$ . Параметры ОБР в данном случае вычисляем согласно результатам, полученным в [8]:

$$(6) \quad r = \frac{a}{b}, \quad p = 1 - \frac{b}{\mu}.$$

#### 4. Численный анализ

В настоящем разделе проведено исследование области применимости предложенных аппроксимаций при различных значениях параметров модели.

##### 4.1 ВЫРОЖДЕННЫЙ СЛУЧАЙ. ПОГРЕШНОСТЬ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Очевидно, что если взять в матрице **A** одинаковые диагональные элементы, то же самое проделать с матрицей **B**, а элементы матрицы **D** положить равными нулю, то входящий поток получится пуассоновским с переменной интенсивностью, как в работе [8]. В этом случае мы ожидаем, что результаты, полученные с помощью обоих видов аппроксимации, должны совпадать между собой и с результатом [8]. Проведенные численные эксперименты полностью это подтверждают.

Кроме того, используя такой вид модели можно оценить погрешность результатов имитационного моделирования соответствующих систем при разных объемах выборки. Для оценки погрешности мы используем расстояние Колмогорова, которое для дискретных распределений имеет вид

$$(7) \quad \Delta = \max_{n \geq 0} \left| \sum_{i=0}^n [P_1(i) - P_2(i)] \right|.$$

Здесь  $P_1(i)$  и  $P_2(i)$  – сравниваемые распределения вероятностей. В нашем случае одно из них будет результатом имитационного моделирования, другое – распределение, полученное аналитически. Результат оценки погрешности при разных объемах выборки (событий изменения состояния в имитационной модели) представлен в таблице 1.

Таблица 1. Погрешность (7) результатов имитационного моделирования при различных объемах выборки

Объем выборки	50 тыс.	100 тыс.	500 тыс.	1 млн	2 млн	5 млн
Расстояние Колмогорова	0,004	0,0038	0,0019	0,0011	0,0010	0,0009

При оценке качества аппроксимаций будем считать, что результат  $\Delta \leq 0,05$  является приемлемой погрешностью. В дальнейшем будем брать объем выборки 2 миллиона событий.

#### 4.2 ВЛИЯНИЕ МАТРИЦ **D** И **Q**

Далее установим, как параметры входящего потока влияют на точность аппроксимаций, построенных разными способами. Таких параметров несколько. Во-первых, это элементы матрицы **D**. Во-вторых, это диагональные элементы матриц **A** и **B**, а точнее – различие между элементами в каждой матрице: чем больше разница между условными интенсивностями МАР-потока, тем больше его дисперсия (точнее – дисперсия длин интервалов между событиями). Рассмотрим влияние этих трех факторов (матриц **D**, **A**, **B**) подробнее.

Влияние матрицы **D**. На самом деле влияние элементов матрицы **D** на близость аппроксимаций следует рассматривать в совокупности с матрицей **Q**, поскольку появление заявок в моменты изменения состояния вложенной цепи зависит не только от вероятностей этого появления (матрица **D**), но и от частоты смены состояний (матрица **Q**). Фактически мы имеем зависимость от поэлементного произведения этих матриц.

Итак, для начала возьмем матрицу **A**, у которой на главной диагонали стоят одинаковые элементы, равные 1, и матрицу **B** с диагональными элементами, равными 0,1.

В последующих экспериментах будем использовать матрицу **D** следующего вида:

$$(8) \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а вариацию параметров будем производить посредством изменения элементов матрицы **Q**. Для этого будем задавать матрицу **Q** в виде

$$(9) \quad \mathbf{Q} = N \cdot \mathbf{Q}_0,$$

где  $\mathbf{Q}_0$  – некоторая выбранная (одинаковая для всех экспериментов) матрица с соответствующими свойствами

генератора цепи Маркова, а параметр  $N > 0$  будем варьировать, чтобы выяснить свойства аппроксимаций.

Если выбрать матрицу  $\mathbf{Q}_0$  такой, что все ее строки будут одинаковы, то обе аппроксимации (5) и (6) дают одинаковый результат, при этом их погрешность составляет величину близкую к 0,007, что является очень хорошим результатом.

Возьмем матрицу  $\mathbf{Q}_0$  с достаточно сильно различающимися строками, например

$$(10) \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0,2 & 0,8 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 8 & -10 \end{pmatrix},$$

при этом сохраним те же значения для элементов матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$ , что и ранее. Результаты сравнения аппроксимаций с эмпирическим распределением, полученным в результате имитационного моделирования, представлены в таблице 2.

Таблица 2. Расстояния Колмогорова  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  для аппроксимаций первого и второго вида для разных значений параметра  $N$  при равных элементах на диагоналях матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$

$N$	1	10	20	50	100	200
$\Delta_1$	0,0095	0,0076	0,0037	0,0045	0,0038	0,0049
$\Delta_2$	0,0415	0,0475	0,0501	0,0441	0,0504	0,0607

Здесь через  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  обозначены расстояния Колмогорова (7) для аппроксимаций первого (по точным моментам) и второго (эвристическая) вида по отношению к эмпирическому распределению. Из таблицы видно, что изменение параметра  $N$  слабо влияет на величину точности аппроксимаций, при этом ОБР-аппроксимация, основанная на точных моментах, имеет значительно (на порядок) меньшую погрешность по сравнению с эвристической аппроксимацией. На рис. 2, можно увидеть графики соответствующих законов распределения при  $N = 20$  (обозначения: sim – эмпирическое распределение, approx – ОБР-аппроксимация, основанная на точных моментах, heurist – эвристическая ОБР-аппроксимация. Из рисунка понятно, что эвристическая ОБР-аппроксимация даёт существенно неточный

результат по дисперсии при достаточно точной оценке математического ожидания (это подтверждается числовыми данными).

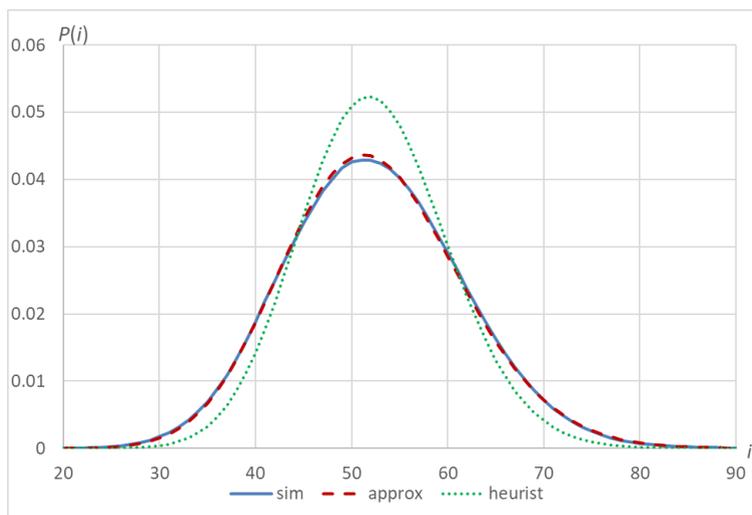


Рис. 2. Графики законов распределения для  $N = 20$

#### 4.3 ВЛИЯНИЕ МАТРИЦ $\mathbf{A}$ И $\mathbf{B}$

Для проведения анализа влияния матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  на точность предложенных аппроксимаций возьмем матрицу  $\mathbf{D}$ , как в (8), и матрицу  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$  из (10). Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  будем брать в виде

$$(11) \quad \mathbf{A} = N_A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = N_B \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix},$$

где  $N_A, N_B > 0$  – параметры, которые мы будем варьировать. При таких значениях матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  при увеличении параметров  $N_A$  и/или  $N_B$  будут увеличиваться средняя интенсивность входящего потока и дисперсия числа поступающих заявок в единицу времени, а вместе с ними – среднее и дисперсия результирующего стационарного распределения числа заявок в системе.

Влияние матрицы  $\mathbf{A}$ . Для первой серии экспериментов возьмем  $N_B = 1$  и будем менять только  $N_A$ . В таблице 3

приведены результаты (расстояния Колмогорова) для этой серии экспериментов.

*Таблица 3. Расстояния Колмогорова  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  для аппроксимаций первого и второго вида при разных значениях параметра  $N_A$*

$N_A$	0,5	1	2	5	10	20	50	100
$\Delta_1$	0,007	0,0064	0,0020	0,0132	0,0222	0,0327	0,0435	0,0525
$\Delta_2$	0,074	0,0936	0,1143	0,1664	0,2302	0,2903	0,3695	0,4115

Из таблицы видно, что ОБР-аппроксимация, основанная на точных моментах, дает достаточно небольшую погрешность в широком спектре значений параметра  $N_A$ , в то время как эвристическая ОБР-аппроксимация всегда дает неудовлетворительный результат для рассматриваемых случаев (при разных элементах на главных диагоналях матриц **A** и **B**). Графики соответствующих законов распределения можно увидеть на рис. 3. Из графиков видно, что эвристическая ОБР-аппроксимация имеет совсем другой характер, нежели истинное распределение вероятностей. При этом ОБР-аппроксимация, основанная на точных моментах, дает неплохие результаты, однако с ростом значения параметра  $N_A$  становится заметно, что левые части графиков существенно отличаются.

Влияние матрицы **B**. Зафиксируем теперь  $N_A = 1$  и будем менять только  $N_B$  в допустимых пределах. В таблице 4 приведены расстояния Колмогорова для этой серии экспериментов.

*Таблица 4. Расстояния Колмогорова  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  для аппроксимаций первого и второго вида при разных значениях параметра  $N_B$*

$N_B$	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\Delta_1$	0,0113	0,0064	0,0035	0,0181	0,0422	0,1051
$\Delta_2$	0,0938	0,0936	0,0940	0,1083	0,1294	0,1668

Как видим, ОБР-аппроксимация, основанная на точных моментах, дает хорошие результаты при росте параметра  $N_B$  вплоть до значения  $N_B = 2,5$ . После этого характер истинного распределения меняется (см. рис. 3), в результате чего ОБР-аппроксимация становится неприменимой. Эвристическая ОБР-

аппроксимация имеет большую погрешность при всех значениях параметра  $N_B$ .

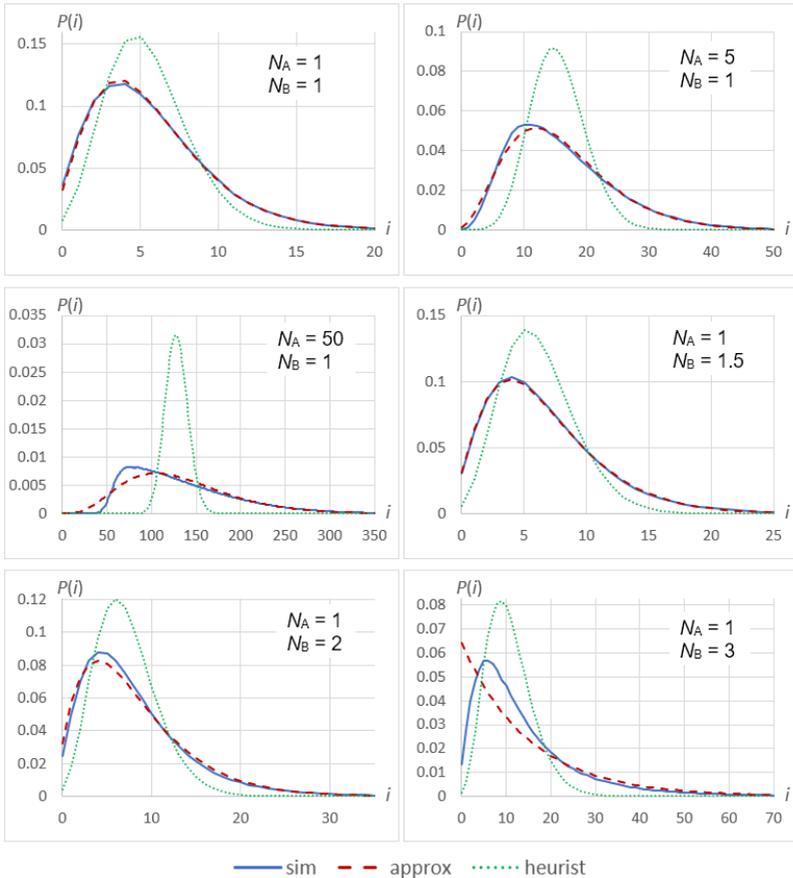


Рис. 3. Графики законов распределения для разных значений  $N_A$  и  $N_B$

## 5. Заключение

Таким образом, в данной статье было представлено два подхода аппроксимации искомого распределения вероятностей числа заявок в системе с входящим МАР-поток с интенсивно-

стью, зависящей от числа занятых приборов. Аппроксимация проводилась с помощью отрицательного биномиального распределения. Был проведен численный анализ точности аппроксимации при различных значениях параметров исследуемой системы. Следует отметить, что при большой нагрузке системы обе аппроксимации имеют большую погрешность, поэтому возникает необходимость в применении метода асимптотического анализа для исследования рассматриваемой СМО.

### Литература

1. БАШАРИН Г.П., КОКОТУШКИН В.А., НАУМОВ В.А. *Метод эквивалентных замен в теории телетрафика*. – М.: Электросвязь. – 1980. – Т. 2. – С. 82–122.
2. ВАДЗИНСКИЙ Р.Н. *Справочник по вероятностным распределениям*. – СПб.: Наука. – 2001. – 295 с.
3. ГОРБУНОВА А.В., ЛЕБЕДЕВ А.В. *Эффекты стохастической нетранзитивности в системах массового обслуживания // Управление большими системами*. – 2020. – Вып. 85. – С. 23–50. – DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2020.85.2>.
4. ДУДИН А.Н. *Модель процесса передачи данных в интегральных цифровых сетях связи с адаптивной коммутацией // Вычислительные сети коммутации пакетов*. – Рига: ИЗВТ. – 1987. – Т. I. – С. 121–124.
5. ДУДИН А.Н. *Об обслуживающей системе с переменным режимом работы // Автоматика и вычислительная техника*. – 1985. – №2. – С. 27–29.
6. ЖОЖИКАШВИЛИ В.А., ВИШНЕВСКИЙ В.М. *Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ*. – М.: Радио и связь. – 1988. – 192 с.
7. КАРЛЫХАНОВА Т.А., МОИСЕЕВА С.П., НАЗАРОВ А.А. *Исследование системы MAP/M/∞ методом моментов // Вестник Томского государственного университета*. – 2006. – № 293. – С. 99–104.
8. ПОЛИН Е.П., МОИСЕЕВА С.П., МОИСЕЕВ А.Н. *Исследование бесконечнолинейной СМО с интенсивностью входящего потока, зависящей от состояния системы // Материалы XXIII Международной научной конференции*

- «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-2020), Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2020), 14–18 сентября 2020 г., Москва. – М.: ИПУ РАН, 2020. – С. 638–644.
9. ПОЛИН Е.П., МОИСЕЕВА С.П. *Исследование математической модели бесконечнолинейной СМО с входящим МАР-потокм переменной интенсивности* // Проблемы оптимизации сложных систем: сборник докладов Двенадцатой международной азиатской школы-семинара. Новосибирск, Академгородок, 12–16 декабря 2016 г. Новосибирск. – 2016. – С. 380-384. – URL: <http://conf.nsc.ru/opcs2016/ru/proceedings>.
  10. ТУКУБАЕВ З.Б. *Моделирование и исследование алгоритмов динамического управления потоками и очередями сообщений в компьютерных сетях* // Управление большими системами. – 2009. – Вып. 26. – 2009. – С. 38–46.
  11. BOUCHENTOUF A.A., GUENDOUZI A. *Cost optimization analysis for an  $M^X/M/C$  vacation queueing system with waiting servers and impatient customers* // SeMA Journal: Bulletin of the Spanish Society of Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 76. – P. 309–341. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s40324-018-0180-2>.
  12. БАЕК J.W., MOON S.K. *A production-inventory system with a Markovian service queue and lost sales* // J. Korean Stat. Soc. 45. – 2016. – P. 14–24. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jkss.2015.05.002>
  13. DEEPAK T.G., KRISHNAMOORTHY A., NARAYANAN V.C. *Inventory with service time and transfer of customers and inventory* // Ann. Oper. Res. – 2008. – Vol. 160. – P. 191–213. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-007-0304-z>.
  14. FRALIX B., ADAN I. *An infinite-server queue influenced by a semi-Markovian environment* // Queueing Systems. – 2009. – Vol. 61. – P. 65–84.
  15. MATHEW N., JOSHUA V.C., KRISHNAMOORTHY A. *A production inventory model with server breakdown and customer impatience* // Ann Oper Res. – 2023. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-023-05659-x>.

16. MELIKOV A., KRISHNAMOORTHY A., SHAHMALIYEV M. *Perishable Queuing Inventory Systems with Delayed Feedback* // In: Information Technologies and Mathematical Modelling. Queuing Theory and Applications / Eds.: Dudin A., Nazarov A., Moiseev A. – ITMM WRQ Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 912. – Springer, Cham. – DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-97595-5\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-97595-5_5).

**APPLICATION OF NEGATIVE BINOMIAL DISTRIBUTION TO APPROXIMATE THE STATIONARY DISTRIBUTION OF THE NUMBER OF ARRIVALS IN A QS WITH AN INCOMING MAP, THE INTENSITY OF WHICH DEPENDS ON THE STATE OF THE SYSTEM**

**Evgeny Polin**, National Research Tomsk State University, Tomsk, graduate student (polin\_evgeny@mail.ru).

**Svetlana Moiseeva**, National Research Tomsk State University, Tomsk, Doctor of Science, professor (smoiseeva@mail.ru).

**Alexander Moiseev**, National Research Tomsk State University, Tomsk, Doctor of Science, professor (moiseev.tsu@gmail.com).

*Abstract: This paper considers a mathematical model of an infinite-linear queuing system with an incoming MAP with an intensity depending on the number of busy servers. The parameters of the incoming process, namely its conditional intensities, change every time the state of the system changes, that is, a new request appears or one of the requests completes servicing. The service discipline is determined by the fact that the request occupies any of the free devices in the system on which its service is performed for a random time distributed according to an exponential distribution. For this model, obtaining a stationary probability distribution of the number of applications in the system by analytical means is not possible, so this paper proposes a heuristic approach, namely, the use of a negative binomial distribution as an approximation for the desired distribution. Two approaches to such approximation are proposed, for which a numerical analysis of the accuracy is performed based on comparison with the results of simulation modeling. The first approach is based on calculating the parameters of the negative binomial distribution using the exact values of the expected value and dispersion of the number of applications in the system under consideration, and the second is based on the fact that the intensity of incoming applications is determined by the Markov chain controlling the incoming process. It was found that the first approximation method gives more accurate results, however, when the system is heavily loaded, both approximations have a large error.*

Keywords: heterogeneous queuing system, variable intensity, negative binomial distribution.

УДК 519.2

ББК 22.171

DOI: 10.25728/ubs.2024.108.3

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.*

*Поступила в редакцию 06.12.2023.*

*Опубликована 31.03.2024.*