АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ $M^{[N]}/GI/1$ С УЧЕТОМ ОСТАТОЧНОГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Назаров А. А.[1]
(*Томский государственный университет, Томск*)
Рожкова С. В.[2], **Титаренко Е. Ю.**[3]
(*Томский государственный университет, Томск
Томский политехнический университет, Томск*)

Рассматривается задача исследования одноканальной системы массового обслуживания с повторными вызовами, мгновенными и отложенными обратными связями. Такие системы моделируют ситуации повторной передачи данных в компьютерных сетях в случае занятости сервера или повреждения данных. Входящий поток является неординарным пуассоновским. Время обслуживания заявок – неотрицательная случайная величина с произвольной функцией распределения вероятностей и конечными моментами первого и второго порядка. Когда сервер занят, поступающие заявки отправляются на орбиту, где осуществляют случайную задержку и повторно принимают попытку обслужиться. Исследуется число заявок на орбите. При составлении уравнений Колмогорова для системы используется дополнительная переменная – остаточное время обслуживания, – которая позволяет получить многомерный марковский случайный процесс. Полученная система уравнений решается методом асимптотического анализа в условиях большой задержки заявок на орбите. В работе найдено стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите. Проведено сравнение полученного асимптотического распределения с распределением, найденным для случая экспоненциально распределенного времени обслуживания. Рассмотрен численный пример для системы, в которой длительность обслуживания имеет гамма-распределение с различными параметрами.

Ключевые слова: RQ-система, обратные связи, рекуррентное обслуживание, остаточное время.

1. Введение

Системы с повторными вызовами, или RQ-системы, широко используются для моделирования многих задач, возникающих в компьютерных сетях и в повседневной жизни. Такие системы

[1] *Анатолий Андреевич Назаров, д.т.н., профессор* (*nazarov.tsu@gmail.com*).
[2] *Светлана Владимировна Рожкова, д.ф.-м.н., профессор* (*rozhkova@tpu.ru*).
[3] *Екатерина Юрьевна Титаренко, старший преподаватель* (*teu@tpu.ru*).

предполагают повторные попытки получить обслуживание для заявок, поступивших в систему, когда обслуживающий прибор занят [3, 9], при этом заявки в течение некоторого случайного времени ожидают повторного обслуживания на орбите. Если в случае потери или повреждении блока данных при передаче в компьютерных сетях происходит повторная передача, то могут применяться модели с обратными связями [12, 19, 20], в которых заявки, уже получившие обслуживание, повторно поступают на обслуживание. В таких моделях рассматриваются мгновенные [13, 14, 17] и отсроченные обратные связи [1, 11]. В моделях, учитывающих и повторные вызовы, и обратную связь, орбита формируется не только вновь поступившими, но и обслуженными заявками.

В системах сотовой связи иногда возникают ситуации, когда многие пользователи практически одновременно совершают звонки. Для трафика в интернете также характерно групповое поступление сообщений, когда пользователь открывает несколько интернет-сессий. В этих случаях образуется неординарный поток заявок, при котором заявки поступают в систему пачками случайного объема [8, 10]. Групповое поступление заявок существенно усложняет исследование системы [2, 5], при этом могут рассматриваться как фиксированные, так и произвольные размеры пакетов, а моменты поступления пакетов определяются различными законами распределения. Что касается длительности обслуживания заявок, то во многих исследованиях рассматриваются модели с экспоненциальным распределением, которые являются очень грубым приближением. Более точными являются модели с произвольным обслуживанием M/G/1. Такие модели исследуются либо с помощью встроенной цепи Маркова, либо с помощью метода дополнительных переменных [16].

В [15] рассмотрена RQ-система $M^{[n]}/M/1$ с обратными связями, исследован случайный процесс числа заявок на орбите, найдено распределение вероятностей. Задача решена методом асимптотического анализа при условии растущего среднего времени ожидания на орбите. Данная работа является обобщением на случай произвольного закона распределения длительности обслуживания. В таком случае при исследовании систем вводятся дополнительные переменные, истекшее или остаточное время обслуживания [6, 18]. В исследовании [7] истекшее время позволило получить аналитическое решение системы уравнений Колмогорова.

В данной работе исследуется RQ-система $M^{[n]}/GI/1$ с обратной связью и вводится остаточное время обслуживания в качестве дополнительной переменной. Поскольку полученная в этом случае система уравнений Колмогорова не может быть решена аналитически, то для ее решения применен метод асимптотического анализа.

2. Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему $M^{[n]}/GI/1$ с обратной связью и рекуррентным обслуживанием (см. рис. 1).

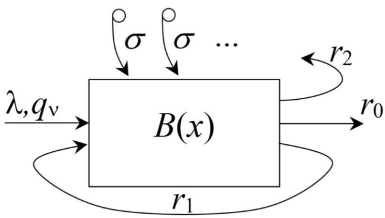


Рис. 1. RQ-система $M^{[n]}/GI/1$ с обратной связью

Входящий поток является неординарным пуассоновским. Полагаем, что моменты прихода заявок образуют пуассоновский поток с параметром λ. Заявки приходят группами. Размер группы является дискретной случайной величиной с заданным рядом распределения вероятностей q_ν появления ν заявок в группе, $\nu \geqslant 1,\ q_0 = 0,\ \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu = 1$. Если прибор свободен, одна заявка из группы поступает на обслуживание, а остальные – на орбиту, иначе все заявки поступают на орбиту.

Через $B(x)$ обозначим функцию распределения времени обслуживания. По окончании обслуживания с вероятностью r_0 заявка покидает систему, с вероятностью r_1 мгновенно поступает на повторное обслуживание, с вероятностью r_2 переходит на орбиту, $r_0 + r_1 + r_2 = 1$.

Длительность пребывания на орбите распределена по экспоненциальному закону с параметром σ. По истечении времени ожидания заявки повторяют попытку занять прибор. Если прибор занят, то заявки остаются на орбите.

Обозначим $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t; $n(t)$ – состояние прибора: $n(t) = 0$, если прибор свободен, $n(t) = 1$, если занят. Задача: найти стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите.

Добавим переменную $z(t)$ – остаточное время обслуживания [4], т.е. длину интервала времени от момента t до момента окончания обслуживания заявки. Если прибор свободен, то процесс $z(t)$ не определяется. Тогда случайный процесс с переменным числом компонент $\{i(t), n(t), -/z(t)\}$ является марковским. Он состоит из двух компонент, если прибор свободен, и из трех компонент, если прибор занят.

Рассмотрим вероятности

$$P_0(i,t) = P\{i(t) = i, n(t) = 0\},$$
$$P_1(i,z,t) = P\{i(t) = i, n(t) = 1, z(t) < z\}, i = 0, 1, 2 \ldots$$

С использованием формулы полной вероятности запишем допредельные равенства для распределения вероятностей. Получим следующую систему:

$$P_0(i, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)\,(1 - i\sigma \Delta t)\, P_0(i,t) + r_0 P_1(i, \Delta t, t) + \\ + r_2 P_1(i-1, \Delta t, t) + o(\Delta t);$$
$$P_1(i, z - \Delta t, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)\,[P_1(i,z,t) - P_1(i, \Delta t, t)] + \\ + (i+1)\sigma \Delta t B(z) P_0(i+1, t) + B(z) r_1 P_1(i, \Delta t, t) + \\ + \sum_{\nu=1}^{i+1} \lambda q_\nu \Delta t B(z) P_0(i - \nu + 1, t) + \sum_{\nu=1}^{i} \lambda q_\nu \Delta t P_1(i - \nu, z, t) + o(\Delta t).$$

Переходим к пределу при $\Delta t \to 0$, получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -\left(\lambda + i\sigma\right) P_0(i,t) + r_0 \frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z} + r_2 \frac{\partial P_1(i-1,0,t)}{\partial z};$$

$$\frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial t} - \frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial z} = -\lambda P_1(i,z,t) - \frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z} +$$
$$+ r_1 \frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z} B(z) + (i+1)\sigma B(z) P_0(i+1,t) +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{i+1} \lambda q_\nu B(z) P_0(i-\nu+1,t) + \sum_{\nu=1}^{i} \lambda q_\nu P_1(i-\nu,z,t).$$

Здесь обозначено $\dfrac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z} = \left.\dfrac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}$.

Для стационарного распределения вероятностей $P_0(i) \equiv \equiv P_0(i,t)$, $P_1(i,z) \equiv P_1(i,z,t)$ перепишем систему в виде

$$(1) \quad -\left(\lambda + i\sigma\right) P_0(i) + r_0 \frac{\partial P_1(i,0)}{\partial z} + r_2 \frac{\partial P_1(i-1,0)}{\partial z} = 0;$$
$$\frac{\partial P_1(i,z)}{\partial z} - \lambda P_1(i,z) - \frac{\partial P_1(i,0)}{\partial z} + r_1 \frac{\partial P_1(i,0)}{\partial z} B(z) +$$
$$+ (i+1)\sigma B(z) P_0(i+1) +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{i+1} \lambda q_\nu B(z) P_0(i-\nu+1) + \sum_{\nu=1}^{i} \lambda q_\nu P_1(i-\nu,z) = 0.$$

Сложим уравнения системы (1). Обозначим вероятности $P_1(i) = \lim\limits_{z\to\infty} P_1(i,z)$ и при $z \to \infty$ получим

$$(2) \quad -\left(\lambda + i\sigma\right) P_0(i) + (i+1)\sigma P_0(i+1) - \lambda P_1(i) - r_2 \frac{\partial P_1(i,0)}{\partial z} +$$
$$+ r_2 \frac{\partial P_1(i-1,0)}{\partial z} + \sum_{\nu=1}^{i+1} \lambda q_\nu P_0(i-\nu+1) + \sum_{\nu=1}^{i} \lambda q_\nu P_1(i-\nu) = 0.$$

Введем частичные характеристические функции $H_n(u) = = \sum\limits_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_n(i)$, $n = 0, 1$, $\tilde{H}_1(u,z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_1(i,z)$ и характеристическую функцию объема группы $h(u) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} e^{ju\nu} q_\nu$, где

$j = \sqrt{-1}$. Преобразуем систему (1) к виду

$$(3) \quad -\lambda H_0(u) + \left(r_0 + r_2 e^{ju}\right) \frac{\partial \tilde{H}_1(u,0)}{\partial z} + j\sigma \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} = 0;$$

$$\lambda B(z) e^{-ju} h(u) H_0(u) + \lambda \left(h(u) - 1\right) \tilde{H}_1(u,z) +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{H}_1(u,z)}{\partial z} + \left(r_1 B(z) - 1\right) \frac{\partial \tilde{H}_1(u,0)}{\partial z} - j\sigma B(z) \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} e^{-ju} = 0.$$

Тогда характеристическая функция числа заявок на орбите определяется как $H(u) = H_0(u) + H_1(u)$, где $H_1(u) = \underset{z\to\infty}{lim} \tilde{H}_1(u,z)$.

Аналогично уравнение (2) преобразуем к виду

$$(4) \quad \lambda \left(e^{-ju} h(u) - 1\right) H_0(u) + \lambda \left(h(u) - 1\right) H_1(u) +$$

$$+ j\sigma \left(1 - e^{-ju}\right) H'_0(u) + r_2 \left(e^{ju} - 1\right) \frac{\partial \tilde{H}_1(u,0)}{\partial z} = 0.$$

3. Асимптотический анализ системы при условии растущего среднего времени ожидания на орбите

Для решения уравнений (3), (4) применим метод асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите, т.е. при $\sigma \to 0$.

Теорема 1 (Асимптотика первого порядка). *Пусть* $i(t)$ – *число заявок на орбите в системе* $M^{[n]}/GI/1$ *с обратной связью, рекуррентным обслуживанием, тогда выполняется равенство* $\lim\limits_{\sigma\to 0} \mathrm{M}\left\{e^{jwi(t)\sigma}\right\} = e^{jw\kappa_1}$, *где*

$$(5) \qquad \kappa_1 = \lambda \bar{\nu} \frac{r_0 + r_2}{r_0 - \lambda \bar{\nu} b} - \lambda,$$

$\bar{\nu} = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu q_\nu$ – *средний размер группы,* $b = \int\limits_0^{\infty} (1 - B(x)) dx$ – *среднее время обслуживания.*

Доказательство. Обозначим $\sigma = \varepsilon$. В системе (3) и уравнении (4) сделаем следующие замены $u = \varepsilon w$, $H_n(u) = F_n(w, \varepsilon)$,

$n = 0, 1$, $\tilde{H}_1(u, z) = \tilde{F}_1(w, \varepsilon, z)$, тогда система (3) имеет вид

$$(6)\quad -\lambda F_0(w,\varepsilon) + \left(r_0 + r_2 e^{j\varepsilon w}\right)\frac{\partial \tilde{F}_1(w,\varepsilon,0)}{\partial z} + j\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w} = 0;$$

$$\lambda B(z)e^{-j\varepsilon w}h(w,\varepsilon)F_0(w,\varepsilon) + \lambda\left(h(w,\varepsilon) - 1\right)\tilde{F}_1(w,\varepsilon,z) + \\ + \frac{\partial \tilde{F}_1(w,\varepsilon,z)}{\partial z} + \left(r_1 B(z) - 1\right)\frac{\partial \tilde{F}_1(w,\varepsilon,0)}{\partial z} - \\ - jB(z)e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w} = 0;$$

а уравнение (4) имеет вид

$$(7)\quad \lambda\left(e^{-j\varepsilon w}h(w,\varepsilon) - 1\right)F_0(w,\varepsilon) + \lambda\left(h(w,\varepsilon) - 1\right)F_1(w,\varepsilon) + \\ + r_2\left(e^{j\varepsilon w} - 1\right)\frac{\partial \tilde{F}_1(w,\varepsilon,0)}{\partial z} + j\left(1 - e^{-j\varepsilon w}\right)\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w} = 0.$$

Пусть $\varepsilon \to 0$. Обозначим $F_n(w) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_n(w,\varepsilon)$, $n = 0, 1$, $\tilde{F}_1(w,z) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{F}_1(w,\varepsilon,z)$ и учитывая, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} h(w,\varepsilon) = 1$, $h'(0) = j\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu q_\nu = j\bar{\nu}$, преобразуем систему (6) в систему

$$(8)\quad -\lambda F_0(w) + \left(r_0 + r_2\right)\frac{\partial \tilde{F}_1(w,0)}{\partial z} + j\frac{\partial F_0(w)}{\partial w} = 0;$$

$$\lambda B(z)F_0(w) + \frac{\partial \tilde{F}_1(w,z)}{\partial z} + \left(r_1 B(z) - 1\right)\frac{\partial \tilde{F}_1(w,0)}{\partial z} - \\ - jB(z)\frac{\partial F_0(w)}{\partial w} = 0.$$

Аналогично преобразуем уравнение (7), затем разделим на ε и при $\varepsilon \to 0$ получим

$$(9)\quad \lambda\left(\bar{\nu} - 1\right)F_0(w) + \lambda\bar{\nu}F_1(w) + r_2\frac{\partial \tilde{F}_1(w,0)}{\partial z} + j\frac{\partial F_0(w)}{\partial w} = 0.$$

Решение системы (8), (9) найдем в виде

$$(10)\qquad F_n(w) = R_n\Phi(w) + O(\varepsilon), n = 0, 1,$$

$$\tilde{F}_1(w,z) = R_1(z)\Phi(w) + O(\varepsilon),$$

тогда

$$(11)\qquad -\lambda R_0 + (r_0+r_2)\,{R'}_1(0) + jR_0\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = 0;$$

$$\lambda B(z)R_0 + {R'}_1(z) + (r_1B(z)-1)\,{R'}_1(0) - jB(z)R_0\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = 0;$$

$$\lambda\,(\bar\nu-1)\,R_0 + \lambda\bar\nu R_1 + r_2{R'}_1(0) + jR_0\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = 0.$$

Из системы (11) видно, что $\Phi'(w)/\Phi(w)$ не зависит от w, поэтому запишем $\Phi'(w)/\Phi(w) = j\kappa_1$, т.е. $\Phi(w) = exp\{jw\kappa_1\}$. Далее найдем κ_1. Для этого подставим выражение для $\Phi(w)$ в систему уравнений (11), получим

$$(12)\qquad -(\lambda+\kappa_1)R_0 + (r_0+r_2)R_1'(0) = 0;$$

$$(13)\qquad (\lambda+\kappa_1)B(z)R_0 + R_1'(z) + (r_1B(z)-1)R_1'(0) = 0;$$

$$(14)\qquad (\lambda\bar\nu-\lambda-\kappa_1)R_0 + \lambda\bar\nu R_1 + r_2R_1'(0) = 0.$$

Заметим, что уравнения (12) и (13) совпадают при $z\to\infty$. Из уравнения (12) выразим

$$(15)\qquad R_1'(0) = R_0(\lambda+\kappa_1)/(r_0+r_2)\,.$$

Из уравнения (13) выразим $R_1'(z)$ и с учетом (15) получим

$$R_1(z) = \frac{\lambda+\kappa_1}{r_0+r_2}R_0\int\limits_0^z (1-B(x))\,dx.$$

В пределе при $z\to\infty$ найдем

$$(16)\qquad R_1 = R_0b(\lambda+\kappa_1)/(r_0+r_2),$$

где $b=\int_0^\infty(1-B(x))dx$ – среднее время обслуживания заявок. Учитывая, что $R_0+R_1=1$, получим стационарные вероятности того, что прибор находится в состоянии 0 или 1:

$$R_0 = \frac{r_0+r_2}{r_0+r_2+(\lambda+\kappa_1)b};\quad R_1 = \frac{(\lambda+\kappa_1)b}{r_0+r_2+(\lambda+\kappa_1)b}.$$

Из уравнения (14), с учетом выражений (15) и (16), получим выражние для κ_1 (5).

Согласно (10) получаем асимптотические функции

$$F_0(w) = \frac{r_0+r_2}{r_0+r_2+(\lambda+\kappa_1)b}\exp\{j\kappa_1w\},$$

$$F_1(w) = \frac{(\lambda+\kappa_1)b}{r_0+r_2+(\lambda+\kappa_1)b}\exp\{j\kappa_1 w\},$$

тогда аппроксимация первого порядка характеристической функции числа заявок на орбите имеет вид $H(u) \approx F_0(w) + F_1(w) = = \exp\{j\kappa_1 u/\sigma\}$ и определяет асимптотическое среднее числа заявок на орбите.

Теорема 2 (Асимптотика второго порядка)**.** *Пусть* $i(t)$ – *число заявок на орбите в системе* $M^{[n]}/GI/1$ *с обратной связью, рекуррентным обслуживанием, тогда имеет место равенство* $\lim\limits_{\sigma\to 0} \mathrm{M}\left\{\exp\left\{jw\sqrt{\sigma}\left(i(t)-\kappa_1/\sigma\right)\right\}\right\} = \exp\left\{\kappa_2(jw)^2/2\right\}$, *где*

$$\kappa_2 = \Big(\lambda\nu_2 r_0(r_0+r_2) + \lambda\bar{\nu}r_0(r_2-r_0) + 2(\lambda\bar{\nu})^2 r_0 b + \\ +(\lambda\bar{\nu})^3(r_0+r_2)\left(b_2-2b^2\right)\Big) \Big/ \Big(2(r_0-\lambda\bar{\nu}b)^2\Big), \tag{17}$$

$$\nu_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^2 q_\nu, b_2 = \int\limits_0^{\infty} x^2 dB(x).$$

Доказательство. В системе (3), (4) выполним замену $H_n(u) = H_n^{(2)}(u)e^{ju\kappa_1/\sigma}$, $n = 0, 1$, $\tilde{H}_1(u,z) = \tilde{H}_1^{(2)}(u,z)e^{ju\kappa_1/\sigma}$. Здесь $H_n^{(2)}(u)$ – частичные характеристические функции случайной величины $i(t) - \kappa_1/\sigma$. Тогда получим систему уравнений для $H_n^{(2)}(u)$ в виде

$$-\lambda H_0^{(2)}(u) + \left(r_0 + r_2 e^{ju}\right)\frac{\partial \tilde{H}_1^{(2)}(u,0)}{\partial z} + j\sigma\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} - \kappa_1 H_0^{(2)}(u) = \\ = 0;$$

$$\lambda B(z)e^{-ju}h(u)H_0^{(2)}(u) + \lambda\left(h(u)-1\right)\tilde{H}_1^{(2)}(u,z) + \frac{\partial \tilde{H}_1^{(2)}(u,z)}{\partial z} + \\ + \left(r_1 B(z) - 1\right)\frac{\partial \tilde{H}_1^{(2)}(u,0)}{\partial z} - je^{-ju}B(z)\sigma\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + \\ + \kappa_1 e^{-ju}B(z)H_0^{(2)}(u) = 0;$$

$$\lambda\left[e^{-ju}h(u)-1\right]H_0^{(2)}(u)+\lambda\left(h(u)-1\right)H_1^{(2)}(u)+$$
$$+r_2\left(e^{ju}-1\right)\frac{\partial\tilde{H}_1^{(2)}(u,0)}{\partial z}+j\sigma\left(1-e^{-ju}\right)\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u}-$$
$$-\kappa_1\left(1-e^{-ju}\right)H_0^{(2)}(u)=0.$$

Обозначим $\sigma=\varepsilon^2$ и введем замену $u=\varepsilon w$, $H_n^{(2)}(u)=$ $=F_n^{(2)}(w,\varepsilon)$, $n=0,1$, $\tilde{H}_1^{(2)}(u,z)=\tilde{F}_1^{(2)}(w,z,\varepsilon)$.

Получим систему

(18)
$$-\left(\lambda+\kappa_1\right)F_0^{(2)}(w,\varepsilon)+$$
$$+\left(r_0+r_2e^{j\varepsilon w}\right)\frac{\tilde{\partial}F_1^{(2)}(w,0,\varepsilon)}{\partial z}+j\varepsilon\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}=0;$$
$$B(z)e^{-j\varepsilon w}\left(\lambda h(w,\varepsilon)+\kappa_1\right)F_0^{(2)}(w,\varepsilon)+$$
$$+\lambda\left(h(w,\varepsilon)-1\right)\tilde{F}_1^{(2)}(w,z,\varepsilon)+\frac{\partial\tilde{F}_1^{(2)}(w,z,\varepsilon)}{\partial z}+$$
$$+\left(r_1B(z)-1\right)\frac{\partial\tilde{F}_1^{(2)}(w,0,\varepsilon)}{\partial z}-j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}B(z)\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}=0.$$
$$(\lambda e^{-j\varepsilon w}h(w,\varepsilon)-\lambda-\kappa_1+\kappa_1e^{-j\varepsilon w})F_0^{(2)}(w,\varepsilon)+$$
$$+\lambda(h(w,\varepsilon)-1)F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+$$
$$+r_2\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)\frac{\partial\tilde{F}_1^{(2)}(w,0,\varepsilon)}{\partial z}+j\varepsilon\left(1-e^{-j\varepsilon w}\right)\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}=0.$$

Решение системы запишем в виде

(19)
$$F_n^{(2)}(w,\varepsilon)=\Phi_2(w)(R_n+j\varepsilon wf_n)+O(\varepsilon^2),n=0,1$$
$$\tilde{F}_1^{(2)}(w,z,\varepsilon)=\Phi_2(w)(R_1(z)+j\varepsilon wf_1(z))+O(\varepsilon^2)$$

Подставим разложения (19) в систему (18)

(20)
$$-\left(\lambda+\kappa_1\right)\left(R_0+j\varepsilon wf_0\right)+$$
$$+\left(r_0+r_2e^{j\varepsilon w}\right)\left(R_1{}'(0)+j\varepsilon wf_1{}'(0)\right)+j\varepsilon R_0\frac{\Phi'{}_2(w)}{\Phi_2(w)}=O(\varepsilon^2);$$

$$B(z)e^{-j\varepsilon w}\left(\lambda h(w,\varepsilon)+\kappa_1\right)\left(R_0+j\varepsilon w f_0\right) + \lambda\left(h(w,\varepsilon)-1\right)\times$$
$$\times\left(R_1(z)+j\varepsilon w f_1(z)\right)+{R_1}'(z)+j\varepsilon w {f_1}'(z)+\left(r_1B(z)-1\right)\times$$
$$\times\left({R_1}'(0)+j\varepsilon w {f_1}'(0)\right)-j\varepsilon B(z)e^{-j\varepsilon w}\frac{\Phi'_2(w)}{\Phi_2(w)}R_0=O(\varepsilon^2);$$
$$\left((\lambda h(w,\varepsilon)+\kappa_1)e^{-j\varepsilon w}-\lambda-\kappa_1\right)\left(R_0+j\varepsilon w f_0\right)+\lambda(h(w,\varepsilon)-1)\times$$
$$\times\left(R_1+j\varepsilon w f_1\right)+r_2\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)\left({R_1}'(0)+j\varepsilon w {f_1}'(0)\right)+$$
$$+j\varepsilon\left(1-e^{-j\varepsilon w}\right)\frac{\Phi'_2(w)}{\Phi_2(w)}\left(R_0+j\varepsilon w f_0\right)=O(\varepsilon^2).$$

В первых двух уравнениях системы (20) используем разложения $e^{\pm jw\varepsilon}=1\pm jw\varepsilon+O(\varepsilon^2)$ и $h(w,\varepsilon)=1+j\varepsilon w\bar{\nu}+O(\varepsilon^2)$, а в третьем уравнении – разложения $e^{\pm jw\varepsilon}=1\pm jw\varepsilon+(jw\varepsilon)^2/2+O(\varepsilon^3)$ и $h(w,\varepsilon)=1+j\varepsilon w\bar{\nu}+(j\varepsilon w)^2\nu_2/2+O(\varepsilon^3)$, где $\nu_2=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu^2q_\nu$, тогда с учетом (12)–(14) систему (20) можно переписать

(21) $$-\left(\lambda+\kappa_1\right)f_0+r_2{R_1}'(0)+\left(r_0+r_2\right){f_1}'(0)+\frac{\Phi'_2(w)}{w\Phi_2(w)}R_0=0;$$

(22) $$\left(\lambda\bar{\nu}-\lambda-\kappa_1\right)B(z)R_0+\left(\lambda+\kappa_1\right)B(z)f_0+\lambda\bar{\nu}R_1(z)+$$
$$+{f_1}'(z)+\left(r_1B(z)-1\right){f_1}'(0)-\frac{\Phi'_2(w)}{w\Phi_2(w)}B(z)R_0=0;$$

(23) $$\left(\frac{\lambda\nu_2}{2}-\lambda\bar{\nu}+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\kappa_1\right)R_0+\left(\lambda\bar{\nu}-\lambda-\kappa_1\right)f_0+\lambda\bar{\nu}f_1+$$
$$+r_2{f_1}'(0)+\frac{\lambda\nu_2}{2}R_1+\frac{1}{2}r_2{R_1}'(0)+\frac{\Phi'_2(w)}{w\Phi_2(w)}R_0=0.$$

Из системы (21)–(23) видно, что при $z\to\infty$ уравнения (21) и (22) совпадают, а $\Phi'_2(w)/[w\Phi_2(w)]$ не зависит от w. Можно обозначить $\Phi'_2(w)/[w\Phi_2(w)]=-\kappa_2$ и записать $\Phi_2(w)=$ $=exp\{\kappa_2(jw)^2/2\}$. Из уравнения (21)

(24) $$f'_1(0)=\frac{\left(\lambda+\kappa_1\right)f_0-r_2R'_1(0)+\kappa_2R_0}{r_0+r_2},$$

тогда из уравнения (22) с учетом (14) получим

$$f_1(z) = \frac{(\lambda+\kappa_1)\,f_0 - r_2 {R_1}'(0) + \kappa_2 R_0}{r_0+r_2} \int\limits_0^z (1-B(x))\,dx +$$
$$+ \lambda\bar{\nu} \int\limits_0^z (R_1 B(x) - R_1(x))\,dx.$$

В пределе при $z \to \infty$

$$f_1 = \frac{(\lambda+\kappa_1)\,f_0 - r_2 {R_1}'(0) + \kappa_2 R_0}{r_0+r_2} b + \lambda\bar{\nu}\left(-R_1 b + R_0 \frac{\lambda+\kappa_1}{r_0+r_2}\frac{b_2}{2}\right), \tag{25}$$

где b_2 – второй начальный момент длительности обслуживания поступающих заявок. Перепишем (25) с учетом (15):

$$f_1 = \frac{\lambda+\kappa_1}{r_0+r_2} b f_0 + \frac{\lambda\bar{\nu}}{2}\frac{\lambda+\kappa_1}{r_0+r_2} b_2 R_0 + \left(-r_2\frac{\lambda+\kappa_1}{(r_0+r_2)^2} + \frac{\kappa_2}{r_0+r_2} - \lambda\bar{\nu} b \frac{\lambda+\kappa_1}{r_0+r_2}\right) b R_0. \tag{26}$$

В уравнение (23) подставим (24), (26), (15), (16), и так как слагаемые, содержащие f_0, взаимно уничтожаются, получим κ_2 в явном виде (17).

4. Численные результаты

Теоремы 1 и 2 показывают, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите является характеристической функцией гауссовской случайной величины, тогда для распределения $P(i)$ построим аппроксимацию

$$P_{apr}(i) = \frac{L(i+0{,}5) - L(i-0{,}5)}{1 - L(-0{,}5)}, \tag{27}$$

где $L(x)$ – функция нормального распределения с параметрами κ_1/σ и $\sqrt{\kappa_2/\sigma}$.

В случае, когда $B(x)$ – функция экспоненциального распределения, первый и второй начальные моменты имеют вид

$b = 1/\mu, b_2 = 2/\mu^2$, а выражения для параметров распределения, полученные в теоремах 1 и 2, имеют вид

$$\kappa_1 = \lambda\bar{\nu}\mu\frac{r_0 + r_2}{\mu r_0 - \lambda\bar{\nu}} - \lambda,$$

$$\kappa_2 = \frac{\lambda\mu r_0}{2(\mu r_0 - \lambda\bar{\nu})^2}\left(2\lambda\bar{\nu}^2 + \mu\nu_2(r_0 + r_2) + \mu\bar{\nu}(r_2 - r_0)\right)$$

и совпадают с выражениями для κ_1 и κ_2, полученными в [15] для системы $M^{[n]}/M/1$. Для такой системы можно найти область применимости асимптотических результатов, сравнив распределение, полученное допредельным аналитическим методом, с асимптотическим распределением (27). Численные эксперименты показывают, что расстояние Колмогорова уменьшается при уменьшении σ и становится меньше 0,05 при $\sigma < 0{,}5$ для средней загрузки системы $\rho = \lambda\nu/\mu r_0$, при $\sigma < 0{,}1$ для высокой загрузки системы $\rho > 0{,}8$.

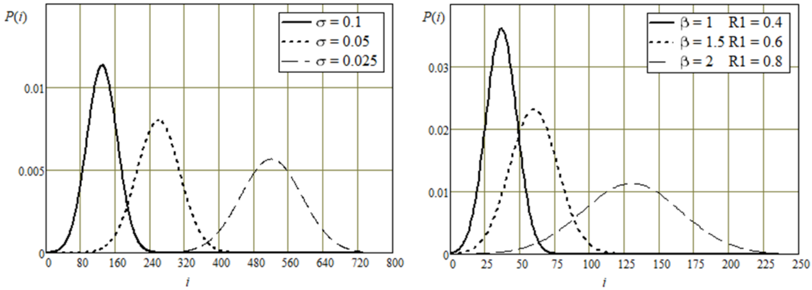
Рассмотрим систему с параметрами $\lambda = 1, r_0 = 0{,}5, r_1 = 0{,}3,$ $r_2 = 0{,}2$. Число заявок в пачке имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0{,}5$. Длительность обслуживания имеет гамма-распределение с параметрами α и β.

На рис. 2а представлено распределение вероятностей числа заявок на орбите, полученное по формуле (27) при параметрах $\alpha = 10$, $\beta = 2$ и различных значениях параметра σ, который определяет длительность задержки заявок на орбите. В этой системе вероятность того, что прибор занят, $R_1 = 0{,}8$.

На рис. 2б представлено распределение вероятностей при параметрах $\alpha = 10$, $\sigma = 0{,}1$ и различных значениях параметра β, который влияет на длительность обслуживания. В этой системе вероятность того, что прибор занят R_1 изменяется в зависимости от параметра β.

5. Заключение

В работе исследована RQ-система с неординарным пуассоновским входящим потоком, рекуррентным обслуживанием и об-



а) б)

Рис. 2. Асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите

ратной связью. Система уравнений Колмогорова решена с помощью метода асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите при введении дополнительной переменной – остаточного времени обслуживания. Показано, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите является характеристической функцией гауссовской случайной величины, а также найдены параметры гауссовского распределения. В частном случае экспоненциально распределенного времени обслуживания полученное распределение совпадает с распределением, полученным [15]. В этом случае применение асимптотического анализа целесообразно при $\sigma < 0{,}1$.

Литература

1. АЛИЕВА С.Г. *Численное исследование моделей систем массового обслуживания с отсроченными обратными связями* // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – №51.
2. ИВАНОВ А.С., ЛЯХОВ А.И., ХОРОВ Е.М. *Математическая модель передачи неординарного потока с помощью периодических резервирований и блочного квитирования в канале с коррелированными помехами* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №11. – С. 48–63.

3. КОЖАНОВ Ю.Ф. *Теория телетрафика* : учебное пособие. – Санкт-Петербург: СПбГУТ им. М.А. Бонч-Бруевича, 2020. – 203 с.
4. МОИСЕЕВА Е.А. *Исследование RQ-системы M|GI|1 в допредельной ситуации* // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем. Материалы II Всероссийской молодежной научной конф. Сер. "Труды ТГУ. Серия физико-математическая". – 2013. – С. 116–121.
5. МОНСИК В.Б., СКРЫННИКОВ А.А., ФЕДОТОВ А.Ю. *Система массового обслуживания с групповым обслуживанием неординарного потока требований* // Научный вестник МГТУ ГА. – 2010. – №157.
6. НАЗАРОВ А.А., КВАЧ А.С. *Сравнение методов остаточного и истекшего времени обслуживания для исследования замкнутой RQ-системы M/GI/1/N с конфликтами заявок и ненадежным прибором* // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017): Материалы XVI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова, Казань, 29 сентября – 3 октября 2017 года. Часть 1. – Казань: Изд-во науч.-техн. лит-ры, 2017. – С. 142–149.
7. НАЗАРОВ А.А., РОЖКОВА С.В., ТИТАРЕНКО Е.Ю. *Исследование системы с обратной связью, рекуррентным обслуживанием и неординарным пуассоновским входящим потоком* // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020): материалы XIX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова, 2–5 декабря 2020 г. – Томск: Изд-во НТЛ, 2021. – С. 223–227.
8. РЫЖИКОВ Ю.И. *Расчет систем обслуживания с групповым поступлением заявок* // Информационно-управляющие системы. – 2007. – №2.
9. ARTALEJO J.R., GOMEZ-CORRAL A. *Retrial queueing systems. A Computational Approach*. – Springer, 2008. – 309 p.

10. ARTALEJO J.R., ATENCIA I. *On the single server retrial queue with batch arrivals* // Sankhya. – 2004. – Vol. 66. – P. 140–158.
11. KALYANARAMAN R. *A Feedback Retrial Queueing System with Two Types of Batch Arrivals* // Int. Journal of Stochastic Analysis. – 2012. – Vol. 2012. – DOI: https://doi.org/10.1155/2012/673642.
12. KALYANARAMAN R. *A Retrial Queuing System with Two Types of Batch Arrivals and with Feedback to Orbit* // Int. Journal of Science and Research (IJSR). – 2022. – Vol. 11, Iss. 5. – P. 1710–1717.
13. MELIKOV A., ALIYEVA S., NAIR SS., KUMAR BK. *Retrial Queuing-Inventory Systems with Delayed Feedback and Instantaneous Damaging of Items* // Axioms. – 2022. – Vol. 11(5). – P. 241. – DOI: https://doi.org/10.3390/axioms11050241.
14. MELIKOV A., ALIYEVA S., SZTRIK J. *Retrial Queues with Unreliable Servers and Delayed Feedback* // Mathematics. 2021. – Vol. 9(19). – P. 2415. – DOI: https://doi.org/10.3390/math9192415.
15. NAZAROV A.A., ROZHKOVA S.V., TITARENKO E.Y. *Asymptotic analysis of RQ-system with feedback and batch Poisson arrival under the condition of increasing average waiting time in orbit* // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. DCCN 2020. Communications in Computer and Information Science. – Vol 1337. – Springer, Cham. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-66242-4_26.
16. PHUNG-DUC T. *Retrial Queueing Models: A Survey on Theory and Applications* // arXiv:1906.09560. – 2017. – DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1906.09560.

17. SARAVANAN V., VENUGOPAL P., GODHANDARAMAN P. *Performance Analysis of a Retrial Queueing System with Optional Service, Unreliable Server, Balking and Feedback* // Int. Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences. – 2023. – Vol. 8. – P. 769–786. – DOI: 10.33889/IJMEMS.2023.8.4.044.
18. KEERTHIGA S., KANDAIYAN I. *Two phase of service in M/G/1 queueing system with retrial customers* // The Journal of Analysis. – 2023. – DOI: 10.1007/s41478-023-00635-x.
19. TAKACS L. *A single-server queue with feedback* // Bell System Technical Journal. – 1963. – Vol. 42. – P. 505–519.
20. TAKACS L. *A queuing model with feedback* // Operations Research. – 1977. – Vol. 11. – P. 345–354.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE $M^{[N]}/GI/1$ SYSTEM WITH THE REMAINING SERVICE TIME

Anatoly Nazarov, Tomsk State University, Tomsk, Doctor of Science, professor (nazarov.tsu@gmail.com).
Svetlana Rozhkova, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Doctor of Science, professor (rozhkova@tpu.ru).
Ekaterina Titarenko, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, lecturer (teu@tpu.ru).

Abstract: A single server queuing system with Poisson batch incoming stream, repeated calls, instant and delayed feedbacks is considered. It is assumed that service time is distributed according to an arbitrary law, and the service durations are independent of each other. When the server is busy, incoming customers are sent into orbit. The problem is to investigate a random process of the number of customers in orbit. When compiling the Kolmogorov equations for the system, an additional variable is used - the remaining service time. The resulting system of equations is solved by the method of asymptotic analysis under the condition of a large delay of customers in orbit. As a result, a stationary probability distribution for the number of customers in orbit was found. The resulting asymptotic distribution is compared with the distribution found in previous papers for the case of an exponentially distributed service time. A numerical example is considered for a system in which the service duration has a gamma distribution with different parameters.

Keywords: retrial queue system, feedback, arbitrary distributed service time, remaining time.

УДК 519.872
ББК 22.17
DOI: 10.25728/ubs.2024.108.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.С. Манделем.

Поступила в редакцию 24.10.2023.
Дата опубликования 31.03.2024.