

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2023

Том 23

Выпуск 1



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2023 Том 23

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Balashov M. V. The Lezanski – Polyak – Lojasiewicz inequality and the convergence of the gradient projection algorithm
[Балашов М. В. Неравенство Лежанского – Поляка – Лоясевича и сходимости метода проекции градиента] 4

Лошкарева Е. А., Гладышев Ю. А., Малышев Е. Н.
Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши – Римана 11

Новиков В. В. Исправление функций и интерполяция типа Лагранжа – Якоби 24

Севастьянов Л. А., Ловецкий К. П., Кулябов Д. С. Новый подход к формированию систем линейных алгебраических уравнений для решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом коллокаций 36

Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В. О приложении качественной теории дифференциальных уравнений к одной задаче тепломассопереноса 48

Шабалин П. Л., Фаизов Р. Р. Задача Римана на луче для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией 58

Механика

Гуреева Н. А., Киселева Р. З., Клочков Ю. В., Николаев А. П., Рябуха В. В. О физических уравнениях деформируемого тела на шаге нагружения с реализацией на основе смешанного МКЭ 70

Садырин Е. В. Влияние полимерного инфильтранта на плотность очагов кариеса эмали в стадии белого пятна 83

Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Новый алгоритм квазиоптимальной переориентации космического аппарата 95

Информатика

Обухов А. Д. Метод автоматического поиска структуры и параметров нейронных сетей для решения задач обработки информации 113

Сорокин А. А., Мальцева Н. С., Кутузов Д. В., Осовский А. В.
Обработка информации для системы поддержки принятия решений при противопожарном мониторинге лесных массивов 126

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ No ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1). Журнал входит в международные базы данных Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная.

Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Агафонов Андрей Петрович

Верстка
Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Корректор
Агафонов Андрей Петрович

Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89
E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 21.02.23.
Подписано в свет 01.03.23.
Формат 60 × 84 1/8.
Усл. печ. л. 16,05 (17,25).
Тираж 100 экз. Заказ 5-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2023



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Balashov M. V. The Lezanski – Polyak – Lojasiewicz inequality and the convergence of the gradient projection algorithm 4

Loshkareva E. A., Gladyshev Yu. A., Malyshev E. N. Application of the generalized degree method for constructing solutions of the quaternion variant of the Cauchy – Riemann system 11

Novikov V. V. Function correction and Lagrange – Jacobi type interpolation 24

Sevastyanov L. A., Lovetsky K. P., Kulyabov D. S. A new approach to the formation of systems of linear algebraic equations for solving ordinary differential equations by the collocation method 36

Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V. On the application of the qualitative theory of differential equations to a problem of heat and mass transfer 48

Shabalin P. L., Faizov R. R. The Riemann problem on a ray for generalized analytic functions with a singular line 58

Mechanics

Gureeva N. A., Kiseleva R. Z., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P., Ryabukha V. V. On the physical equations of a deformable body at the loading step with implementation based on a mixed FEM 70

Sadyrin E. V. Influence of a polymeric infiltrant on the density of enamel white spot lesions 83

Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. The new algorithm of quasi-optimal reorientation of a spacecraft 95

Computer Sciences

Obukhov A. D. Method of automatic search for the structure and parameters of neural networks for solving information processing problems 113

Sorokin A. A., Maltseva N. S., Kutuzov D. V., Osovsky A. V. Information processing for the decision support system for fire monitoring of forest areas 126



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, профессор, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный,

Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чунань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

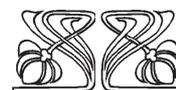
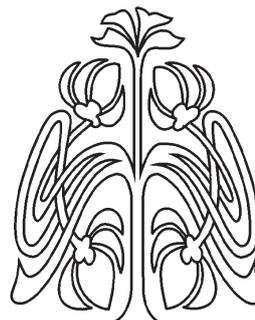
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vyacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





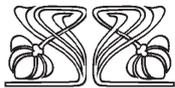
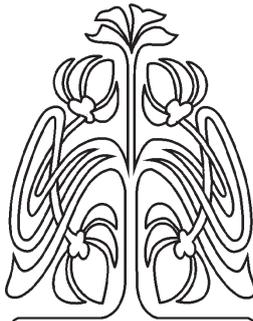
МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 4–10
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 4–10

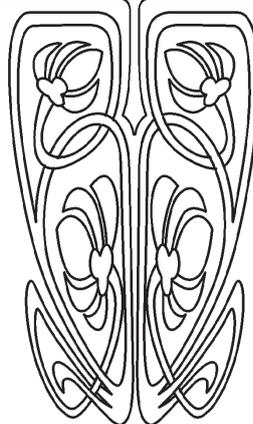
mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-4-10>

EDN: ZSKZLA



Научный
отдел



Article

The Lezanski – Polyak – Lojasiewicz inequality and the convergence of the gradient projection algorithm

M. V. Balashov

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, 65 Profsoyuznaya St., Moscow 117977, Russia

Maxim V. Balashov, balashov73@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5414-2149>, AuthorID: 12909

Abstract. We consider the Lezanski – Polyak – Lojasiewicz inequality for a real-analytic function on a real-analytic compact manifold without boundary in finite-dimensional Euclidean space. This inequality emerged in 1963 independently in works of three authors: Lezanski and Lojasiewicz from Poland and Polyak from the USSR. The inequality is appeared to be a very useful tool in the convergence analysis of the gradient methods, firstly in unconstrained optimization and during the past few decades in problems of constrained optimization. Basically, it is applied for a smooth in a certain sense function on a smooth in a certain sense manifold. We propose the derivation of the inequality from the error bound condition of the power type on a compact real-analytic manifold. As an application, we prove the convergence of the gradient projection algorithm of a real analytic function on a real analytic compact manifold without boundary. Unlike known results, our proof gives explicit dependence of the error via parameters of the problem: the power in the error bound condition and the constant of proximal smoothness first of all. Here we significantly use a technical fact that a smooth compact manifold without boundary is a proximally smooth set.

Keywords: Lezanski – Polyak – Lojasiewicz inequality, error bound condition, proximal smoothness, gradient projection algorithm, real-analytic function

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00042).



For citation: Balashov M. V. The Lezanski – Polyak – Lojasiewicz inequality and the convergence of the gradient projection algorithm. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 4–10. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-4-10>, EDN: ZSKZLA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья
УДК 519.853.4

Неравенство Лежанского – Поляка – Лоясевича и сходимость метода проекции градиента

М. В. Балашов

Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова, Россия, 117977, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65

Балашов Максим Викторович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, balashov73@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5414-2149>, AuthorID: 12909

Аннотация. Рассматривается неравенство Лежанского – Поляка – Лоясевича для вещественно-аналитической функции на вещественно-аналитическом компактном многообразии без края в конечномерном евклидовом пространстве. Это неравенство возникло независимо в 1963 г. в работах трех авторов: Лежанского и Лоясевича из Польши и Поляка из СССР. Неравенство оказалось очень полезным инструментом для исследования сходимости градиентных методов, первоначально в безусловной оптимизации, а в течение последних нескольких десятилетий и в задачах условной оптимизации. Оно применяется, главным образом, для гладких в определенном смысле функций на гладких в определенном смысле многообразиях. Мы предлагаем вывод неравенства из условия ограничения ошибки степенного типа на компактном вещественно-аналитическом многообразии. В качестве приложения мы доказываем сходимость метода проекции градиента вещественно-аналитической функции на вещественно-аналитическом многообразии без края. В отличие от известных результатов, наше доказательство дает явную зависимость погрешности через параметры задачи: в первую очередь, через показатель в условии ограничения ошибки и константу проксимальной гладкости. При этом мы существенно используем технический факт, что гладкое компактное многообразие без края есть проксимально гладкое множество.

Ключевые слова: неравенство Лежанского – Поляка – Лоясевича, условие ограничения ошибки, проксимальная гладкость, метод проекции градиента, вещественно-аналитическая функция

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00042).

Для цитирования: Balashov M. V. The Lezanski – Polyak – Lojasiewicz inequality and the convergence of the gradient projection algorithm [Балашов М. В. Неравенство Лежанского – Поляка – Лоясевича и сходимость метода проекции градиента] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 4–10. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-4-10>, EDN: ZSKZLA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Introduction

Let \mathbb{R}^n be n -dimensional Euclidean space with the inner product (\cdot, \cdot) and the norm $\|\cdot\|^2 = (\cdot, \cdot)$. Define for $r > 0$ and $a \in \mathbb{R}^n$ the ball $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$.

Recall that $S \subset \mathbb{R}^n$ is C^k , m -dimensional *manifold without boundary*, $1 \leq m \leq n - 1$, if there exists an atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, $\varphi_i \in C^k$, $U_i \subset \mathbb{R}^n$, with $S = \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i is an open subset of S and $U_i = \varphi_i^{-1}(V_i)$ for an open subset $V_i \subset \mathbb{R}^m$ for all i .

The smoothness of the manifold S means that for any point $x \in S$ there exist a tangent subspace T_x to S at the point $x \in S$ and a tangent plane $x + T_x$. It should be noted that T_x has dimension m for any $x \in S$. See [1] for details. We denote by $P_A x$ the metric projection of a point $x \in \mathbb{R}^n$ onto a closed set $A \subset \mathbb{R}^n$.

A function is called *real-analytic* if it is locally can be represented as a convergent power series. The sum, product, and composition of real-analytic functions are also real-analytic. Components of the Frechet gradient of a real-analytic function are real-analytic too. A manifold is called real-analytic if functions φ_i are real-analytic.

Denote for $A \subset \mathbb{R}^n$ and $x \in \mathbb{R}^n$ the distance $\varrho_A(x) = \varrho(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. In his famous work [2], Lojasiewicz proved that for a real-analytic function $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$, U is an open set, and for any compact set $\mathcal{K} \subset U$ there exist $\alpha > 0$ and $C > 0$ with

$$\varrho(x, \{y \in U \mid f(y) = 0\}) \leq C|f(x)|^\alpha \quad \forall x \in \mathcal{K}. \quad (1)$$

Note that the power $\alpha \in (0, 1]$ depends on \mathcal{K} . The value of α is usually hard to estimate a priori.

Consider a problem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ with a differentiable function. Suppose that $\Omega = \text{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \neq \emptyset$. Let $f_* = f(\Omega)$. The *Lezanski – Polyak – Lojasiewicz (further LPL)* inequality for this problem means that there exist $\nu > 0$ and $\beta \in (0, 2]$ with

$$\|f'(x)\|^\beta \geq \nu(f(x) - f_*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

This inequality and some more general variants were considered independently in 1963 by Lezanski, Polyak and Lojasiewicz, see [3] for details. Note that under the above assumptions the LPL inequality may or may not be true.

In the case $\beta = 2$ the LPL condition provides the linear rate of convergence for the gradient descent method for a Lipschitz differentiable function [4].

Consider the case of constrained optimization

$$\min_{x \in S} f(x) \quad (2)$$

with a real-analytic function f and a real-analytic compact manifold without boundary S .

The standard *gradient projection algorithm (further GPA)* for problem (2) is the next iteration process

$$x_0 \in S, \quad x_{k+1} = P_S(x_k - tP_{T_{x_k}} f'(x_k)), \quad t > 0. \quad (3)$$

It is known [5, Proposition 2.2] that the LPL inequality for problem (2) has the next local form $\forall x \in S$

$$\exists U \ni x (U - \text{open subset of } S) \exists \beta \in (0, 2], \nu > 0 \forall y \in U \nu|f(y) - f(x)| \leq \|P_{T_y} f'(y)\|^\beta.$$



On the basis of the last property, the convergence of the gradient projection method for (2) was proved [5, 6]. The main disadvantage of mentioned works is that in estimates of the error there are fundamentally unknown constants. Thus these results are "not constructive".

We plan to deduce the LPL condition for (2) from the error bound condition for the problem (2). As an application, we give a new proof of the convergence of the GPA on the base of obtained results.

1. Auxiliary facts

For a set A define by ∂A and $\text{int } A$ the boundary and the interior of the set A , respectively.

A closed set $A \subset \mathbb{R}^n$ is called *proximally smooth* with constant $R > 0$ [7] if the distance function $\varrho_A(x)$ is continuously differentiable on the set $U_A(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \varrho_A(x) < R\}$. Equivalently, the set $A \subset \mathbb{R}^n$ is proximally smooth with constant $R > 0$ if and only if for any $x \in \partial A$ and $p \in N(A, x) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_0 > 0 : \forall t \in (0, t_0) \varrho_A(x+ tq) = t\|q\|\}$, $\|p\| = 1$, we have $A \cap \text{int } B_R(x + Rp) = \emptyset$ and $P_A x$ is a singleton for all $x \in U_A(R)$.

For example, the Euclidean sphere $\partial B_1(0)$ is proximally smooth with constant 1 and, more generally, the Stiefel manifold $S_{n,k} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times k} \mid X^T X = I_k\}$ is also proximally smooth with constant 1 [8, text after Proposition 2] (here n, k are natural with $n \geq k$, I_k is the identity $k \times k$ matrix).

In work [9], the next result was proved.

Proposition 1. *Denote by $\Omega \subset S$ the set of stationary points in problem (2) with a real-analytic function and a real analytic set, i.e. for any $x \in \Omega$ we have $-f'(x) \in N(S, x)$. Then there exist $\alpha \in (0, 1]$ and $\mu > 0$ such that for any $x \in S$ the next inequality holds*

$$\varrho(x, \Omega) \leq \mu \|P_{T_x} f'(x)\|^\alpha. \quad (4)$$

The inequality in Proposition 1 is referred to as the error bound condition. In fact, this is some sort of generalization of the Hoffman lemma in a nonlinear case.

The next proposition gives the rate of decreasing of the function from (2) per step of the gradient projection algorithm.

Proposition 2. [8, Theorem 2, Corollary 2, Formula (24)] *Let S be a C^1 manifold without boundary and a proximally smooth set with constant $\frac{\pi}{2}R$. Suppose that $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a Lipschitz function with constant L and f' is Lipschitz with constant L_1 in the R -neighborhood $\{x \in \mathbb{R}^n : \varrho_S(x) < R\}$ of S . Let $t_0 = 1 / (L_1 + \frac{2L}{R})$, $t \in (0, t_0]$, $x_0 \in S$ and $x_1 = P_S(x_0 - tP_{T_{x_0}} f'(x_0))$. Then we have*

$$f(x_0) - f(x_1) \geq q(t) \|P_{T_{x_0}} f'(x_0)\|^2, \quad \text{where } q(t) = t - t^2 \left(\frac{L_1}{2} + \frac{L}{R} \right). \quad (5)$$

Note that $t_0 < R/L$ and hence $P_S(x_0 - tP_{T_{x_0}} f'(x_0))$ is a singleton due to proximal smoothness of the set S .

The next proposition states that any compact smooth manifold without boundary in \mathbb{R}^n is proximally smooth with some constant $R > 0$.

Proposition 3. [10, Lemma 1.19.3] *Let S be a compact smooth manifold without boundary in \mathbb{R}^n . Then there exists $R > 0$ such that S is proximally smooth with constant R .*



Unfortunately, it is impossible to estimate R in Proposition 3 in the general case. For some manifolds, we know the precise value of R , for example for most matrix manifolds [11]. Sometimes you can still estimate R , see [12].

We also want to recall that for a Lipschitz differentiable with Lipschitz constant L_1 function f the next quadratic approximations hold [10, Theorem 2.1.2]

$$f(x_0) + (f'(x_0), x - x_0) - \frac{L_1}{2} \|x - x_0\|^2 \leq f(x) \leq f(x_0) + (f'(x_0), x - x_0) + \frac{L_1}{2} \|x - x_0\|^2, \quad \forall x, x_0.$$

2. The LPL inequality and convergence of the GPA

Theorem 1. *Assume that conditions of Proposition 1 are fulfilled, $x_0 \in S$, $S_0 = \{x \in S : f(x) \leq f(x_0)\}$ and $\Omega_0 = \text{Arg min}_{x \in S} f(x)$, $f_* = f(\Omega_0)$. Suppose that for all $x \in S_0$ we have $\varrho(x, \Omega_0) \leq \varrho(x, \Omega \setminus \Omega_0)$. Then for any $x \in S_0$ we have*

$$\|P_{T_x} f'(x)\|^{2\alpha} \geq \nu(f(x) - f_*). \quad (6)$$

In (6) $\alpha \in (0, 1]$ is the number from the error bound condition and $\nu^{-1} = \mu^2 \left(\frac{3}{2}L_1 + \frac{L_0}{R}\right)$. Here $\mu > 0$ is from the error bound condition, L_1 is a Lipschitz constant of f' on $U_S(R)$, $L_0 = \max_{x \in \Omega_0} \|f'(x)\|$ and R is constant of proximal smoothness for the set S .

Proof by Proposition 1 Formula (4) holds. By Proposition 3 the set S is proximately smooth with some constant $R > 0$.

Fix $x \in S_0$ and $x_* \in P_{\Omega_0} x = P_{\Omega_0} x$.

If $f'(x_*) = 0$, then $(f'(x_*), x - x_*) = 0$. Further assume that $f'(x_*) \neq 0$.

Consider case 1, when $x \in S_0 \cap U_{\Omega_0}(R)$. From the supporting principle for proximately smooth sets and necessary condition of extremum $\pm f'(x_*) \in N(S, x_*)$ we have $\text{int } B_R \left(x_* \pm R \frac{f'(x_*)}{\|f'(x_*)\|}\right) \cap S = \emptyset$. Define $H = \{x \in \mathbb{R}^n : (f'(x_*), x - x_*) = 0\}$ and $z = P_H x$. Then from the inclusion $x \in U_{\Omega_0}(R)$ we obtain that $\|z - x_*\| \leq \|x - x_*\| = \varrho_{\Omega_0}(x) < R$ and

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\leq R - \sqrt{R^2 - \|z - x_*\|^2} \leq \frac{\|z - x_*\|^2}{R} \leq \frac{\|x - x_*\|^2}{R}, \\ (f'(x_*), x - x_*) &= \|f'(x_*)\| \cdot \|x - z\| \leq \frac{L_0}{R} \|x - x_*\|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Consider case 2, when $x \in S_0 \setminus U_{\Omega_0}(R)$. Then $\|x - x_*\| = \varrho_{\Omega_0}(x) \geq R$ and hence

$$(f'(x_*), x - x_*) \leq \|f'(x_*)\| \cdot \|x - x_*\| \leq \frac{L_0}{R} \|x - x_*\|^2.$$

Thus for any $x \in S_0$ we have condition (7).

From the quadratic approximation of the Lipschitz differentiable function f we get

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_*) &\leq (f'(x), x - x_*) + \frac{L_1}{2} \|x - x_*\|^2, \\ (f'(x), x - x_*) &= (f'(x) - f'(x_*), x - x_*) + (f'(x_*), x - x_*) \leq \\ &\leq L_1 \|x - x_*\|^2 + \frac{L_0}{R} \|x - x_*\|^2 = C \|x - x_*\|^2, \quad C = L_1 + \frac{L_0}{R}. \end{aligned}$$

Finally we have, taking in mind $\|x - x_*\| = \varrho_{\Omega}(x)$,

$$f(x) - f(x_*) \leq \left(C + \frac{L_1}{2}\right) \|x - x_*\|^2 \leq \mu^2 D \|P_{T_x} f'(x)\|^{2\alpha}, \quad D = C + \frac{L_1}{2}. \quad \square$$

On the base of the LPL inequality we prove the convergence of the GPA.



Theorem 2. Assume that conditions of Proposition 2 and Theorem 1 are fulfilled. Then the iterations (3) give the sequence $\{x_k\}$ with $f(x_k) \rightarrow f(\Omega)$. The rate of convergence is given by Formula (8).

Proof. Fix $k \geq 1$. From Formula (5) we have

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq q(t) \|P_{T_{x_k}} f'(x_k)\|^2$$

and $f(x_k) \leq f(x_0)$, i.e. $x_k \in S_0$. By Theorem 1 there exist numbers $\nu > 0$ and $\beta \in (0, 2]$ with

$$\|P_{T_x} f'(x)\|^\beta \geq \nu(f(x) - f_*) \quad \forall x \in S_0.$$

Combining the two last formulae we get

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq q(t) \nu^{\frac{2}{\beta}} (f(x_k) - f_*)^{\frac{2}{\beta}}.$$

Put $\varphi_k = f(x_k) - f_*$. Then

$$\varphi_k - \varphi_{k+1} \geq q(t) \nu^{\frac{2}{\beta}} \varphi_k^{\frac{2}{\beta}}, \quad \varphi_{k+1} \leq \varphi_k - q(t) \nu^{\frac{2}{\beta}} \varphi_k^{\frac{2}{\beta}}. \quad (8)$$

□

Formula (8) ensures the convergence. For example, for $\beta = 2$, we have the linear rate of convergence. Moreover, if $\beta = 2$ then $1 - \nu q(t) \geq 0$. If $a = \frac{2}{\beta} - 1 > 0$ then by [13, Chapter 2, Lemma 6]

$$\varphi_k \leq \frac{\varphi_0}{\left(1 + aq(t) \nu^{\frac{2}{\beta}} \varphi_0^a k\right)^{1/a}}.$$

Notice that Theorems 1 and 2 become constructive if we have information about the error bound condition (4) and the constant of proximal smoothness for S . For example, if f and S are an arbitrary C^2 function and a compact manifold, respectively, and Ω is a finite set then, under some assumption of nondegeneracy, Formula (4) holds with $\alpha = 1$ [14, Theorem 1].

If the value R is unknown then there can be a problem with choosing the step size t . In this case, the GPA with Armijo's step size can be considered [11].

References

1. Lee J. M. Manifolds and differential geometry. *Graduate Studies in Mathematics*. Rhode Island, AMS Providence, 2009. Vol. 107. 671 p. <https://doi.org/10.1090/gsm/107>
2. Lojasiewicz S. Sur le problème de la division. *Studia Mathematica*, 1959, vol. 18, pp. 87–136. <https://doi.org/10.4064/sm-18-1-87-136>
3. Balashov M. V., Polyak B. T., Tremba A. A. Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2020, vol. 41, iss. 7, pp. 822–849. <https://doi.org/10.1080/01630563.2019.1704780>
4. Karimi H., Nutini J., Schmidt M. Linear convergence of gradient and proximal-gradient methods under the Polyak–Lojasiewicz condition. In: Frasconi P., Landwehr N., Manco G., Vreeken J. (eds.) *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. ECML PKDD 2016*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9851. Cham, Springer, 2016, pp. 795–811. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46128-1_50



5. Schneider R., Uschmajew A. Convergence results for projected line-search methods on varieties of low-rank matrices via Lojasiewicz inequality. *SIAM Journal on Optimization*, 2015, vol. 25, iss. 1, pp. 622–646. <https://doi.org/10.1137/140957822>
6. Merlet B., Nguyen T. N. Convergence to equilibrium for discretizations of gradient-like flows on Riemannian manifolds. *Differential Integral Equations*, 2013, vol. 26, iss. 5/6, pp. 571–602. <https://doi.org/10.57262/die/1363266079>
7. Vial J.-Ph. Strong and weak convexity of sets and functions. *Mathematics of Operations Research*, 1983, vol. 8, iss. 2, pp. 231–259. <https://doi.org/10.1287/moor.8.2.231>
8. Balashov M. V. The gradient projection algorithm for smooth sets and functions in nonconvex case. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2021, vol. 29, pp. 341–360. <https://doi.org/10.1007/s11228-020-00550-4>
9. Balashov M. V. Stability of minimization problems and the error bound condition. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2022, vol. 30, pp. 1061–1076. <https://doi.org/10.1007/s11228-022-00634-3>
10. Ivanov G. E. *Slabo vypuklye mnozhestva i funktsii: teoriya i prilozhenie* [Weakly Convex Sets and Functions: Theory and Application]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 351 p. (in Russian).
11. Balashov M. V., Kamalov R. A. The gradient projection method with Armijo's step size on manifolds. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2021, vol. 61, iss. 1, pp. 1776–1786. <https://doi.org/10.1134/S0965542521110038>
12. Adly S., Nacry F., Thibault L. Preservation of prox-regularity of sets with applications to constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 2016, vol. 26, iss. 1, pp. 448–473. <https://doi.org/10.1137/15M1032739>
13. Polyak B. T. *Introduction to Optimization*. New York, Optimization Software, 1987. 464 p.
14. Balashov M. V., Tremba A. A. Error bound conditions and convergence of optimization methods on smooth and proximally smooth manifolds. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 2020, vol. 71, iss. 3, pp. 711–735. <https://doi.org/10.1080/02331934.2020.1812066>

Поступила в редакцию / Received 20.08.2022

Принята к публикации / Accepted 27.10.2022

Опубликована / Published 01.03.2023



Научная статья

УДК 511.84

Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши – Римана

Е. А. Лошкарева^{1✉}, Ю. А. Гладышев¹, Е. Н. Малышев²

¹Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского, Россия, 248023, г. Калуга, ул. Степана Разина, д. 26

²Калужский филиал Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана, Россия, 248000, г. Калуга, ул. Баженова, д. 2

Лошкарева Елена Анатольевна, кандидат технических наук, доцент кафедры физики и математики, losh-elena@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6981-2758>, AuthorID: 370561

Гладышев Юрий Александрович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры физики и математики, gladyshev.yua@yandex.ru, AuthorID: 119923

Малышев Евгений Николаевич, кандидат технических наук, заведующий кафедрой машиностроительных технологий, malen@bmstu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6493-2817>, AuthorID: 376024

Аннотация. В настоящей статье указан один из способов решения обобщенной системы Коши – Римана для кватернионных функций в восьмимерном пространстве. В предыдущих работах были изучены некоторые классы решений этой системы и заявлено, что существует возможность использования метода обобщенных степеней для построения решений этой системы дифференциальных уравнений. Показано, что решение поставленной задачи может быть сведено к нахождению двух произвольных кватернионных гармонических функций в восьмимерном пространстве. Все 8 компонент этих функций φ, ψ должны быть гармоническими функциями, т. е. быть дважды непрерывно дифференцируемы по всем восьми действительным переменным x_i, y_i , где $i = \overline{1, 4}$. В настоящей статье рассмотрен параметрический метод обобщенных степеней, который применим к отдельным уравнениям второго и более высоких порядков.

Ключевые слова: обобщенные степени Берса, кватернионы, система Коши – Римана

Для цитирования: Лошкарева Е. А., Гладышев Ю. А., Малышев Е. Н. Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши – Римана // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 11–23. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-11-23>, EDN: ZMDMGI

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Application of the generalized degree method for constructing solutions of the quaternion variant of the Cauchy – Riemann system

E. A. Loshkareva^{1✉}, Yu. A. Gladyshev¹, E. N. Malyshev²

¹Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovski, 26 Stepan Razin St., Kaluga 248023, Russia

²Bauman Moscow State Technical University (Kaluga Branch), 2 Bazhenova St., Kaluga 248000, Russia

Elena A. Loshkareva, losh-elena@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6981-2758>, AuthorID: 370561

Yuri A. Gladyshev, gladyshev.yua@yandex.ru, AuthorID: 119923

Evgeniy N. Malyshev, malen@bmstu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6493-2817>, AuthorID: 376024

Abstract. This article indicates one of the ways to solve the generalized Cauchy – Riemann system for quaternionic functions in an eight-dimensional space. In previous works, some classes of solutions of this system were studied and it was stated that it is possible to use the method of generalized degrees to construct solutions of this system of differential equations. It is shown that the solution of the problem can be reduced to finding two arbitrary quaternionic harmonic functions in an eight-dimensional space. All 8 components of these functions φ, ψ must be harmonic functions, that is, be twice continuously differentiable over all 8 real variables x_i, y_i , where $i = \overline{1, 4}$ solutions of the Laplace equation. In this article, the parametric method of generalized degrees is considered, which is applicable to individual equations of the second and higher orders.

Keywords: generalized Bers degrees, quaternion, Cauchy – Riemann system

For citation: Loshkareva E. A., Gladyshev Yu. A., Malyshev E. N. Application of the generalized degree method for constructing solutions of the quaternion variant of the Cauchy – Riemann system. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 11–23 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-11-23>, EDN: ZMDMGI

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Обобщенная система Коши – Римана была введена в работе [1] как естественное развитие систем, определенных в работах Мойсила [2] и Фуэттера [3]. При их определении использовалась алгебра кватернионных функций [4], поэтому естественно при введении обобщенной системы сохранить кватернионные методы. Но возможны и другие, например, матричная форма.

Система Коши – Римана допускает физическую интерпретацию, как система уравнений Максвелла для электромагнитного поля при наличии скалярных полей, а также как система Дирака для частиц с нулевой массой.

Данная статья посвящена методу обобщенных степеней как способу решения обобщенной системы Коши – Римана для кватернионных функций в восьмимерном пространстве, которая имеет вид

$$\left. \begin{aligned} D_1\varphi - \psi D_2 &= 0, \\ \varphi \bar{D}_2 + \bar{D}_1\psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Здесь φ, ψ — функции переменных x_i, y_i ($i = \overline{1, 4}$), принимающие значения в теле кватернионов с системой единиц e_i ($i = \overline{0, 3}$), а D_1, D_2 — кватернионные операторы

$$D_1 = \sum_0^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \quad D_2 = \sum_0^3 e_i \frac{\partial}{\partial y_{i+1}}, \quad i = \overline{0, 3}.$$

Система (1) допускает введение новых функций α, β от x_i, y_i вида

$$\varphi = \bar{D}_1 \alpha + \beta D_2, \quad \psi = -\alpha \bar{D}_2 + D_1 \beta. \quad (2)$$

Предполагая, что α, β таковы, что φ, ψ имеют непрерывные первые производные, убеждаемся, что функции α, β гармонические кватернионы

$$(D_1 \bar{D}_1 + D_2 \bar{D}_2) \alpha = 0, \quad (D_1 \bar{D}_1 + D_2 \bar{D}_2) \beta = 0,$$

т. е. все компоненты α, β являются решениями восьмимерного уравнения Лапласа.

В работе [1] были приведены некоторые классы решений и показано, что введение двух кватернионных потенциалов, аналогов электромагнитных потенциалов, сводит решение системы к построению многомерного уравнения Лапласа. В данной работе для решения этой проблемы будет использован развитый ранее метод обобщенных степеней Берса.

Метод ОС, впервые введенный Берсом [5–7], может быть представлен в двух видах, а именно в матричном и параметрическом. Матричный вариант эффективен при построении решения систем дифференциальных уравнений [8]. В работе [9] представлено понятие ОС на комплексной плоскости, описаны основные свойства. В литературе также описано применение матричного метода ОС для построения решений системы Мойсила – Теодореску, для решения задач теплопроводности и теплообмена [10–14]. Матричные модели теплопередачи, построенные на уравнении баланса массы и энергии, используются для решения обратной задачи теплопередачи [15, 16]. В работе [17] описан параметрический метод ОС. Данный вариант более удобен, когда нужно построить последовательность решений одного уравнения, например второго порядка производных. Поэтому далее использован параметрический вариант.

Приведем основные положения метода параметрических ОС (далее — ПОС). Для понимания основных методов достаточно рассмотреть случай одного независимого переменного x .

Пусть оператор D может быть введен как произведение линейных операторов D_i , $i = \overline{1, k}$:

$$D = D_k D_{k-1} \cdots D_1,$$

зависящих от x . Самый простой пример при $k = 2$ связан с операторами

$$D_1 = D_2 = \frac{d}{dx}, \quad D = D_2 D_1 = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx}. \quad (3)$$

В общем случае перестановочность операторов D_1, D_2 не требуется.

Обязательным является выполнение требований наличия у всех операторов непустых ядер, элементы которых обозначим C_i :

$$D_i C_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Например, для (3) это константы.



Второе требование состоит в существовании правых обратных I_i для всех операторов:

$$D_i I_i = 1, \quad i = 1, 2.$$

Для примера (3) это интеграл с переменным верхним x и заданным нижним пределом x_0

$$I_i = \int_{x_0}^x d\eta \dots$$

Поэтому можно ввести проекционные операторы

$$P_i = 1 - I_i D_i$$

со свойствами

$$P_i^2 = P_i, \quad P_i C_i = C_i, \quad D_i P_i = 0, \quad P_i D_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Для простейшего примера (3) это просто подстановка нижнего предела интегрирования x_0 :

$$P_i = \dots |_{x=x_0}.$$

Приведем выражение для оператора I правого обратного для D

$$I = \int_{x_0}^x d\eta_1 \int_{x_0}^{\eta_1} d\eta_2 \dots, \quad DI = 1$$

и вид обобщенной константы (ОК) для $DC = 0$.

В общем случае для k операторов константа строится по формуле

$$C = C_1 + I_1 C_2 + \dots + I_1 \dots I_{k-1} C_k. \quad (4)$$

Поэтому для случая (3) найдем

$$C = C_1 + C_2 (x - x_0).$$

Произвольные действительные константы C_1, C_2 далее будем называть параметрами. Для проектора имеем общую формулу для произведения k операторов

$$P = P_1 + I_1 P_2 D_1 + \dots$$

Соответственно, для (3) имеем

$$P = \dots |_{x_0} + (x - x_0) \left(\frac{d}{dx} \dots \right)_{x=x_0}.$$

Определим ОС, приняв символ $X^{(p)}(x, x_0)C$ как

$$X^{(p)}(x, x_0)C = p! I^p C.$$

Поэтому легко видеть, что выполнено правило

$$DX^{(p)}C = pX^{(p-1)}C, \quad X^{(0)}C = C.$$

Это и подтверждает использованный термин ОС.



Следует помнить, что запись $X^{(p)}C$ — это единый символ, а не произведение некоторой функции. Если надо указать параметры C_1, C_2 , то пишем

$$X^{(p)}C = X^{(p)}(C_1 + C_2x).$$

Таким образом, символ $X^{(p)}$ следует скорее понимать как оператор, определенный на множестве линейных функций, а не как некоторую функцию.

Для примера (3) без каких-либо затруднений найдем

$$X^{(p)}(x, 0) = p! \left(C_1 \frac{x^{2p}}{(2p)!} + C_2 \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \right).$$

Операция сложения ОС определена как сложение параметров C_1, C_2 . Поэтому можно говорить о многочленах и рядах от ОС.

$$V_n = \sum_{i=0}^n X^{(i)}(x, x_0)C_i, \quad V = \sum_{i=0}^{\infty} X^{(i)}(x, x_0)C_i.$$

Например, для случая нахождения коэффициентов C_i можно использовать аналог формулы Тейлора

$$C_i = \frac{1}{i!} P_i D^i V_n.$$

Формулу Тейлора для примера (3) запишем

$$C_i = \frac{1}{i!} \left[\left(\frac{d^{2i}}{dx^{2i}} \dots \right) \Big|_{x=0} + I_1 \left(\frac{d^{2i+1}}{dx^{2i+1}} \dots \right) \Big|_{x=0} \right]. \quad (5)$$

Например, проводя разложение по формуле (5), найдем

$$x^n a = \begin{cases} X^{(p)} \frac{(2p)!}{p!} a, & n = 2p, \\ X^{(0)} \frac{(2p+1)!}{p!} a, & n = 2p + 1. \end{cases}$$

Можно говорить о функциях, представленных рядом

$$V = \sum_0^{\infty} X^{(n)}(x, x_0)C_n,$$

Если введена метрика, имеем

$$V = e^{\alpha X(x,0)} C = \sum \frac{\alpha^i}{i!} X^{(i)}(x, 0)C = \operatorname{ch} \sqrt{|\alpha|x} + \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \operatorname{sh} \sqrt{|\alpha|x}, \quad \alpha > 0,$$

$$V = e^{-\alpha X(x,0)} C = \sum \frac{(-1)^i \alpha^i}{i!} X^{(i)}(x, 0)C = \cos \sqrt{|\alpha|x} + \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \sin \sqrt{|\alpha|x}, \quad \alpha > 0.$$

1. О построении гармонических функций многих действительных переменных методом параметрических обобщенных степеней

Хорошая черта метода ПОС состоит в том, что его обобщение на любое число независимых переменных является почти очевидным. Доказано, что общая константа



может быть найдена как произведение ОК для ОК отдельных операторов. Договоримся обозначать переменные, к которым относятся операторы, в скобках после символа оператора

$$D(i) = D_k(i)D_{k-1}(i) \dots D_1(i),$$

аналогично для правых обратных, но в обратном порядке

$$I(i) = I_1(i)I_2(i) \dots I_k(i).$$

Здесь k — индекс оператора, входящего в данный $D(i)$. Примем далее, что все операторы, относящиеся к разным переменным, коммутируют:

$$D_{k_1}(j_1)D_{k_2}(j_2) = D_{k_2}(j_2)D_{k_1}(j_1).$$

Это распространяется и на правые обратные. Обобщенные константы снабдим символами по такому же правилу. Поэтому для операторов $I(i)$ для случая (3) должны принять

$$D(i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad I(i) = \int_{x_{i0}}^{x_i} d\eta_i \int_{x_{i0}}^{\xi_i} d\xi_i \dots \quad (6)$$

Найдем при $x_{i0} = 0$

$$C = \prod_{i=1}^d (c_{1i} + c_{2i}x_i). \quad (7)$$

Имеем $2d$ параметров, которые далее назовем первичными. Выражение (7) можно представить в развернутой форме, проведя умножение. Параметры с одним индексом C_i , $i = 1, 2^d$, которые далее будут определять решение, назовем основными параметрами. Их число равно 2^d .

Используя операторы (6), найдем выражение для ОС с первичными параметрами как

$$X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} \dots X_d^{(p_d)} C = p_1! p_2! \dots p_d! \prod_{i=1}^d \left(c_{1i} \frac{x_i^{2p_i}}{(2p_i)!} + c_{2i} \frac{x_i^{2p_i+1}}{(2p_i+1)!} \right).$$

Приведем основное свойство ОС относительно операторов $D(i)$:

$$D(i) X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} \dots X_i^{(p_i)} \dots X_d^{(p_d)} C = p! X_1^{(1)} \dots X_i^{(i-1)} \dots X_d C.$$

Здесь i любое из $\overline{1, d}$.

Напомним, что оператор $D(i)$ — вторая производная, согласно примеру (3), по переменной x_i , $i \in \overline{1, d}$.

Для использования функций, которые были названы ОС, важно следующее соотношение:

$$\begin{aligned} (D(1) + D(2) + \dots + D(d))(h_1 X_1^{(0)} + h_2 X_2^{(0)} + \dots + h_d X_d^{(0)})^n C = \\ = n(h_1 + h_2 + \dots + h_d)(h_1 X_1^{(0)} + \dots + h_d X_d^{(0)})^{n-1} C, \end{aligned} \quad (8)$$

где h_i — произвольные действительные числа. В этой формуле степень суммы ОС дана в символической форме. Это суммы однородных многочленов общего порядка n вида

$$\sum c_{p_1 \dots p_d} X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} \dots X_d^{(p_d)}$$

при $p_1 + \dots + p_d = dn$.



В эти одночлены не входит операция умножения степеней, соответствующих одной и той же независимой переменной x_i . Докажем это соотношением методом математической индукции по размерности пространства. Для доказательства разделим сумму операторов и степеней на две части согласно выражению

$$A = [(D(1) + \dots + D(d-1)) + D(d)][(h_1X_1 + \dots + h_{d-1}X_{d-1}) + h_dX_d]^n C. \quad (9)$$

Раскроем степень по правилам бинома, рассматривая его как сумму двух слагаемых

$$A = [(D(1) + \dots + D(d-1)) + D(d)] \left[\sum_{i=0}^n c_n^i (h_1X_1 + \dots + h_{d-1}X_{d-1})^{n-i} (h_dX_d)^i C \right].$$

Используя сделанное предположение о справедливости формулы (8) при $d-1$ и применяя оператор к сумме, найдем

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} c_n^i (n-i) (h_1 + \dots + h_{d-1})^{n-i-1} C + (X_1 + \dots + X_{d-1})^{n-i-1} (h_dX_d)^i C + \\ + \sum_{i=0}^n C_n^i i (h_1X_1 + \dots + h_{d-1}X_{d-1})^{n-i} h_d^i X_d^{(i-1)} C.$$

Сдвинем суммирование во второй сумме и, объединив суммирование, запишем

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} [C_n^i (n-i) (h_1 + \dots + h_{d-1}) + c_n^{i+1} (i+1) h_d] (h_1X_1 + \dots + h_{d-1}X_{d-1})^{n-1-i} h_d^i X_d^{(i)} C.$$

Учтя равенство

$$C_n^i (n-1) = C_n^{i+1} (i+1) = n C_{n-1}^i,$$

найдем согласно биномиальной формуле

$$A = n(h_1 + \dots + h_d)(h_1X_1 + \dots + h_dX_d)^{n-1}.$$

Назовем условие $\sum h_i = 0$ условием гармоничности. Поэтому выражение

$$V_n = (h_1X_1 + \dots + h_dX_d)^n C$$

при условии (9) дает базисную функцию уравнения Лапласа в пространстве d измерений. Например, положим $d = 3$, $n = 2$, $h_1 = h_2 = 1$, $h_3 = -2$

$$V_2 = (X_1 + X_2 - 2X_3)^2 C = X_1^{(2)} + X_2^{(2)} - 4X_3^{(2)} + 2X_1^{(1)}X_2^{(2)} - 4X_1^{(2)}X_3^{(2)} - 4X_2^{(1)}X_3^{(1)}.$$

Согласно (7) имеем 8 функций $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$, дающих решение трехмерного уравнения Лапласа.

Метод построения решения уравнения Лапласа в виде функции от линейной комбинации независимых переменных хорошо известен [18]. В нашем случае, в отличие от известного, взята линейная комбинация ОС. Поэтому основное условие (1) имеет линейный характер, в то время как в первом случае для коэффициентов требуется выполнение квадратичного условия, которое имеет решение только в поле комплексных чисел.



2. Построение решений уравнения Лапласа в пространстве многих комплексных переменных

Метод построения гармонических функций, приведенный в предыдущем пункте, не исчерпывает всех возможностей решения поставленной задачи. Далее приведем способ, который использует комплексные переменные

$$z_k = x_k + iy_k, \quad \bar{z}_k = x_k - iy_k, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (10)$$

что упрощает решение и открывает новые возможности.

Этот способ предполагает, что размерность пространства в декартовых координатах четная $d = 2s$. Для удобства общее число координат разделено на два набора, обозначенных как x_k и y_k при $k = \overline{1, 4}$, что и учтено в (10).

Напомним, что размерность пространства, связанного с основной системой, $d = 8$ ($s = 4$). Использование комплексного s -мерного пространства делает результаты более простыми и позволяет строить решения, которые построить ранее приведенным вариантом ОС было бы трудно.

Запишем соответствующие (10) операторы

$$D_k = 2 \frac{\partial}{\partial z_k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \quad \bar{D}_k = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right),$$

а также их правые обратные

$$I_k = \frac{1}{2} \int_{z_{k0}}^{z_k} d\xi \dots, \quad \bar{I}_k = \frac{1}{2} \int_{\bar{z}_{k0}}^{\bar{z}_k} d\eta \dots \quad (11)$$

Ограничим их действие чисто алгебраическими операциями над переменными z_k, \bar{z}_k .

Введенные операторы обладают всеми свойствами, необходимыми для применений метода ОС. Ниже всюду использован параметрический вариант метода ОС. Поэтому функции, используемые во всех выражениях и конструкциях, являются комплексно-значными однокомпонентными функциями восьми комплексных переменных $z_k, \bar{z}_k, k = \overline{1, 4}$.

В переменных z_k, \bar{z}_k уравнения Лапласа для функций α_i, β_i из (2) запишем

$$\sum_{k=1}^4 4 \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^4 4 \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = 0, \quad i = \overline{1, 4} \quad (12)$$

или, приняв обозначение $D_k = 4 \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}$, как

$$\sum_{k=1}^4 D_k \alpha_i = 0, \quad \sum_{k=1}^4 D_k \beta_i = 0, \quad (13)$$

где через α_i, β_i обозначены компоненты кватернионов α, β .

Для обобщенной константы C найдем согласно (4)

$$C = \prod_{k=1}^4 (f_{1k}(z_k) + f_{2k}(\bar{z}_k)). \quad (14)$$



Здесь f_{1k}, f_{2k} — аналитические функции соответствующих комплексных переменных. Из (14) следует, что обобщенная константа представлена как произведение заданных функций одного комплексного переменного.

Найдем ОК, используя общий метод, а именно (4). Положим в (13)

$$D_1 = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, \quad D_2 = 2 \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Тогда найдем

$$c_k = f_1(z_k) + \frac{1}{2} \int_{z_{k0}} d\bar{z}_k \left(2 \frac{\partial f_2(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right).$$

Это совпадает с точностью до константы с указаниями в (14).

После перемножения комплексных c_{1k}, c_{2k} при $k = 4$ имеем 16 комплексных параметров. Это совпадает с полученным числом 32 ранее при действительных константах. Если учесть, что при этом каждая комплексная скобка для данных независимых переменных z_i, \bar{z}_i содержит четыре действительных параметра, то после умножения имеем 4^4 параметров. Это совпадает с 2^8 числом параметров, приведенных ранее при использовании действительных независимых переменных. Это не означает совпадения функциональной части ОС.

В дальнейшем в качестве f_{1k}, f_{2k} возьмем важный случай степенных функций

$$f_{1k} = c_{1k} z_k^{l_k}, \quad f_{2k} = c_{2k} \bar{z}_k^{m_k} \quad (15)$$

при действительных заданных числах l_k, m_k .

Компонентные величины c_{1k}, c_{2k} дают в дальнейшем при подстановке в (14) 16 произведений. Назовем эти произвольные постоянные параметрами. Далее будем использовать интегральные операторы I_k , определив их на основе (11) как

$$I_k = \frac{1}{4} \int_{z_{k0}}^{z_k} d\eta \int_{\bar{z}_{k0}}^{\bar{z}_k} d\xi, \quad k = \overline{1, 4}. \quad (16)$$

Напомним, что z_k, \bar{z}_k рассматриваются как независимые переменные.

Обобщенная степень $X^{(p)}C$ определена выражением

$$X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} X_3^{(p_3)} X_4^{(p_4)} C = p_1! p_2! p_3! p_4! I_1^{p_1} I_2^{p_2} I_3^{p_3} I_4^{p_4} C = \prod_{k=1}^4 p_k! I_k^{p_k} C. \quad (17)$$

Левая сторона формулы имеет символический характер и указывает на конструкцию и свойства правой части, которая может быть вычислена как комплексная функция 8 комплексных переменных $z_k, \bar{z}_k, k = \overline{1, 4}$.

По конструкции левая часть дана как обычное произведение функций, зависящих от различных независимых переменных (разделение переменных).

Действительно, используя (17) и независимость комплексных переменных, проводя операции интегрирования (16) по комплексным переменным при C , определенном в (15), найдем

$$X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} X_3^{(p_3)} X_4^{(p_4)} C = 2^{2p} \prod_{k=1}^4 p_k! \left(\frac{l_k! z_k^{p_k+l_k} \bar{z}_k^{p_k}}{(p_k+l_k)! p_k!} c_{k1} + \frac{m_k! z_k^{p_k} \bar{z}_k^{p_k+m_k}}{(p_k+m_k)! p_k!} c_{k2} \right) \quad (18)$$

при $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$.



Например, в частном случае $p_1 = p_3 = p_4 = 0, p_2 = 1$

$$X_2^{(1)}C = \frac{1}{4} (c_{11}z_1^{l_1} + c_{21}\bar{z}_1^{m_1}) \left(c_{12} \frac{\bar{z}_2 z_2^{l_2+1}}{l_2+1} + c_{22} \frac{\bar{z}_2^{m_2+1} z_2^2}{l_2+1} \right) \times \\ \times (c_{13}z_3^{l_3} + c_{23}\bar{z}_3^{m_3}) (c_{14}z_4^{l_4} + c_{24}\bar{z}_4^{m_4}).$$

По построению (18) имеет следующие правила «дифференцирования», т. е. действия операторов D_i :

$$D_i \prod_{k=1}^4 X_k^{(p_k)} C = p_i \prod_{k=1}^4 X_k^{(p_k - \delta_{ki})} C, \tag{19}$$

где δ_{ki} — символ Кронекера.

Таким образом, имеем последовательность комплексных функций, основным свойством которых является связь между ними, установленная правилом «дифференцирования» (19). Именно оно определяет полезность конструкций ОС.

Составим линейную комбинацию степеней $X^{(p)}C$, подставив ее в символической форме как степень суммы $\sum h_k X_k^{(1)}C$:

$$V_n = \left(\sum_{k=1}^4 h_k X_k^{(1)} \right)^n C, \tag{20}$$

где h_k — произвольные действительные числа. Она имеет смысл, ибо умножение ОС на действительное число законно и не меняет свойства ОС. Эта формула имеет символическое значение. Выражение (20) должно быть раскрыто по правилам бинома и представлено мономерами вида $X_1^{(p_1)} \dots X_n^{(p_n)} C$, которые не должны содержать произведения степеней с одинаковым нижним индексом.

Формула (9), введенная в п. 1, справедлива, в этом случае найдем

$$D_i \left(\sum_{j=1}^4 h_j X_j^{(p)} \right)^n = n h_i \left(\sum_{j=1}^4 h_j X_j^{(p-1)} \right)^{n-1}. \tag{21}$$

Из вида (21) следует, что выражение V_n , введенное в (20), удовлетворяет (12), если потребовать

$$\sum_{j=1}^4 h_j = 0. \tag{22}$$

Аналогично п. 1 назовем условие (22) условием гармоничности, ибо выражение (20) в этом случае удовлетворяет уравнению Лапласа (13) и дает последовательность его решений.

Полученные результаты позволяют получить решение уравнения метагармонического типа. Есть возможность построить решение методом ОС в несколько другом виде.

Построение функций на основе полученного базиса и являющихся формальными аналогами элементарных функций предполагается провести в следующем сообщении.

Метод параметрических ОС без каких-либо трудностей может быть распространен на уравнения параболического типа, ибо в этом случае ОК — это просто постоянная, а соответствующий интегральный оператор — однократное интегрирование.



Заключение

В работе показано, что решение обобщенной системы Коши – Римана может быть получено на основе двух кватернионных функций с компонентами, которые являются гармоническими функциями восьми действительных переменных. Приведен метод построения гармонических функций в многомерном пространстве любого числа действительных переменных. Дано развитие метода обобщенных степеней в комплексном четырехмерном пространстве с целью построения гармонических функций. Указано на возможность дальнейшего развития метода.

Список литературы

1. *Гладышев Ю. А.* О некоторых классах решений обобщенной системы Коши – Римана // Проблемы математического анализа. 2021. Т. 109. С. 59–64.
2. *Moisil G.* Sur les quaternions monogenes // Bulletin of Mathematical Sciences. 1931. Vol. 55. P. 168–174.
3. *Fueter R.* On the theory of regular functions of a quaternion variable // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1936. Vol. 43. P. 69–74. <https://doi.org/10.1007/BF01707588>
4. *Мисюра Н. Е.* Кватернионные модели в кинематике и динамике твердого тела : учебное пособие. Екатеринбург : Изд-во Уральского ун-та, 1961. 260 с.
5. *Берс Л.* Математические основы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1961. 206 с.
6. *Bers L., Gelbart A.* On a class of differential equations in mechanics of continua // Quarterly of Applied Mathematics. 1943. Vol. 1. P. 168–188. <https://doi.org/10.1090/qam/8556>
7. *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1944. Vol. 56, iss. 1. P. 67–93. <https://doi.org/10.2307/1990278>
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика : в 2 т. Т. 2. Теория поля. Москва : Наука, 1973. 504 с.
9. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса // Вестник Калужского университета. 2020. № 2 (47). С. 77–80. EDN: [ZLPPKC](https://doi.org/10.2307/1990278)
10. *Калманович В. В., Степович М. А., Серегина Е. В.* О численном решении задач теплопереноса с использованием матричного метода и метода обобщенных степеней Берса // Теоретические основы и конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики : тезисы докладов XXII Всероссийской конференции, посвященной памяти К. И. Бабенко. Москва : Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2018. С. 51–52. EDN: [YLOPJJ](https://doi.org/10.2307/1990278)
11. *Калманович В. В., Степович М. А.* О возможности совместного применения матричного метода и аппарата Берса к моделированию процессов теплопереноса, обусловленного электромагнитным излучением в многослойной планарной среде // XXV Международная научно-техническая конференция и школа по фотоэлектронике и приборам ночного видения : труды конференции. Москва : НПП Орион, 2018. С. 491–494.
12. *Куликов А. Н., Горбунов А. К., Силаева Н. А., Коржавый А. П.* Моделирование поведения гидродинамической дисперсии с помощью решения краевых задач // Научные технологии. 2021. Т. 22, № 6. С. 46–53. <https://doi.org/10.18127/j19998465-202106-05>
13. *Калманович В. В., Степович М. А.* О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов теплопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем. 2018. № 3. С. 194–201. <https://doi.org/10.31114/2078-7707-2018-3-194-201>
14. *Widder D. V.* Some analogies from classical analysis in the theory of heat conduction //



- Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1966. Vol. 21, iss. 2. P. 108–113. <https://doi.org/10.1007/BF00266570>
15. Жуков В. П., Барочкин А. Е., Боброва М. С., Беляков А. Н., Шувалов С. И. Матричный метод решения обратной задачи теплопередачи в теплообменных аппаратах // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2021. № 2. С. 62–69. <https://doi.org/10.17588/2072-2672.2021.2.062-069>
 16. Барочкин А. Е. Матричный метод решения обратной задачи теплопередачи в контактных аппаратах с учетом фазового перехода в теплоносителях // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2021. № 5. С. 68–75. <https://doi.org/10.17588/2072-2672.2021.5.068-075>
 17. Гладышев Ю. А., Лошкарёва Е. А. Об использовании метода параметрических обобщенных степеней для построения решений одного класса дифференциальных уравнений // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2022 : материалы международной конференции / под ред. В. А. Костина. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. С. 67–71. URL: <https://vzms.kmm-vsu.ru/files/vzms2022.pdf> (дата обращения: 25.03.2022).
 18. Бринкман Г. Применение спинорных инвариантов в атомной физике. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1959. 96 с.

References

1. Gladyshev Yu. A. On some classes of solutions to the generalized Cauchy – Riemann system problem. *Problemy matematicheskogo analiza* [Problems of Mathematical Analysis], 2021, vol. 109, pp. 59–64 (in Russian).
2. Moisil G. Sur les quaternions monogenes. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 1931, vol. 55, pp. 168–174 (in German).
3. Fueter R. On the theory of regular functions of a quaternion variable. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1936, vol. 43, pp. 69–74 (in German). <https://doi.org/10.1007/BF01707588>
4. Misyura N. E. *Kvaternionnyye modeli v kinematike i dinamike tverdogo tela* [Quaternion Models in Kinematics and Dynamics of a Solid]. Ekaterinburg, Ural University Publishing House, 1961. 260 p. (in Russian).
5. Bers L. *Matematicheskie osnovy dozvukovoy i tranzvukovoy gazovoy dinamiki* [Mathematical Foundations of Subsonic and Transonic Gas Dynamics]. Moscow, Publishing House of Foreign Literature, 1961. 206 p. (in Russian).
6. Bers L., Gelbart A. On a class of differential equations in mechanics of continua. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1943, vol. 1, pp. 168–188. <https://doi.org/10.1090/qam/8556>
7. Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1944, vol. 56, iss. 1, pp. 67–93. <https://doi.org/10.2307/1990278>
8. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. 2. Teoriya polya* [Theoretical Physics. Vol. 2. Field Theory]. Moscow, Nauka, 1973. 504 p. (in Russian).
9. Gladyshev Yu. A., Loshkareva E. A. On methods of constructing complex generalized degrees of Bers. *Vestnik of Kaluga University*, 2020, iss. 2 (47), pp. 77–80 (in Russian). EDN: ZLPPKC
10. Kalmanovich V. V., Stepovich M. A., Seregina E. V. On the numerical solution of heat and mass transfer problems using the matrix method and the method of generalized degrees of Bers. *Teoreticheskie osnovy i konstruirovaniya chislennykh algoritmov resheniya zadach matematicheskoi fiziki* [Theoretical foundations and design of numerical algorithms for solving problems of mathematical physics. Abstracts of the XII All-Russian Conference dedicated to the memory of K. I. Babenko]. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics Publ., 2018, pp. 51–52 (in Russian). EDN: YLOPJJ



11. Kalmanovich V. V., Stepovich M. A. On the possibility of joint application of the matrix method and the Bers apparatus to modeling the processes of heat and mass transfer caused by electromagnetic radiation in a multilayer planar medium. *XXV Mezhdunarodnaia nauchno-tekhnicheskaiia konferentsiia i shkola po fotoelektronike i priboram nochnogo videniia* [XXV International Scientific and Technical Conference and School on Photoelectronics and Night Vision Devices. Proceedings of the Conference]. Moscow, NPP Orion, 2018, pp. 491–494 (in Russian).
12. Kulikov A. N., Gorbunov A. K., Silaeva N. A., Korzhavy A. P. Modeling the behavior of hydrodynamic dispersion by solving boundary value problems. *Journal Science Intensive Technologies*, 2021, vol. 22, iss. 6, pp. 46–53 (in Russian). <https://doi.org/10.18127/j19998465-202106-05>
13. Kalmanovich V. V., Stepovich M. A. On the joint application of the matrix method and the apparatus of generalized Bers degrees for mathematical modeling of heat and mass transfer processes in semiconductor materials of electronic technology. *Problems of Development of Promising Micro- and Nanoelectronic Systems*, 2018, iss. 3, pp. 194–201 (in Russian). <https://doi.org/10.31114/2078-7707-2018-3-194-201>
14. Widder D. V. Some analogies from classical analysis in the theory of heat conduction. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1966, vol. 21, iss. 2, pp. 108–113 (in German). <https://doi.org/10.1007/BF00266570>
15. Zhukov V. P., Barochkin A. E., Bobrova M. S., Belyakov A. N., Shuvalov S. I. Matrix method for solving the inverse problem of heat transfer in heat exchangers. *Bulletin of the Ivanovo State Power Engineering University*, 2021, iss. 2, pp. 62–69 (in Russian). <https://doi.org/10.17588/2072-2672.2021.2.062-069>
16. Barochkin A. E. Matrix method for solving the inverse problem of heat transfer in contact devices taking into account the phase transition in heat carriers. *Bulletin of the Ivanovo State Power Engineering University*, 2021, iss. 5, pp. 68–75 (in Russian). <https://doi.org/10.17588/2072-2672.2021.5.068-075>
17. Gladyshev Yu. A., Loshkareva E. A. On the use of the method of parametric generalized degrees for constructing solutions of one class of differential equations. In: *Materialy Voronezhskoi zimnei matematicheskoi shkoly S. G. Crane* [Materials of the International Conference “Voronezh Winter Mathematical School of S. G. Crane”], Voronezh, Publishing House of Voronezh State University, 2022, pp. 67–71 (in Russian). URL: <https://vzms.kmm-vsu.ru/files/vzms2022.pdf> (accessed 25 March 2022).
18. Brinkman G. *Primenenie spinornykh invariantov v atomnoi fizike* [Application of Spinor Invariants in Atomic Physics]. Moscow, Publishing House of Foreign literature, 1959. 96 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 29.03.2022

Принята к публикации / Accepted 18.08.2022

Опубликована / Published 01.03.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 24–35
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 24–35
mmi.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-24-35>, EDN: CQXPUN

Научная статья
УДК 517.51

Исправление функций и интерполяция типа Лагранжа – Якоби

В. В. Новиков

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Новиков Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, vvnovikov@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6147-1311>, AuthorID: [149594](https://orcid.org/149594)

Аннотация. Известно, что интерполяционный процесс Лагранжа с узлами в нулях многочленов Чебышева может расходиться всюду (с произвольными узлами — почти всюду), подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время известно, что любую измеримую (конечную почти всюду) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (так называемое усиленное C -свойство). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу по той или иной матрице узлов? В настоящей работе показано, что существует матрица узлов интерполирования \mathfrak{M}_γ , как угодно близкая к матрице узлов Якоби $\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)}$, $\alpha, \beta > -1$, такая, что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C[-1, 1]$ на множестве как угодно малой меры интерполяционный процесс с узлами \mathfrak{M}_γ будет сходиться к исправленной функции равномерно на $[a, b] \in (-1, 1)$.

Ключевые слова: интерполяция Лагранжа, ортогональные многочлены Якоби, исправление функций

Для цитирования: Новиков В. В. Исправление функций и интерполяция типа Лагранжа – Якоби // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 24–35. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-24-35>, EDN: CQXPUN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Function correction and Lagrange – Jacobi type interpolation

V. V. Novikov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Vladimid A. Novikov, vvnovikov@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6147-1311>, AuthorID: [149594](https://orcid.org/149594)

Abstract. It is well-known that the Lagrange interpolation based on the Chebyshev nodes may be divergent everywhere (for arbitrary nodes, almost everywhere), like the Fourier series of a



summable function. On the other hand, any measurable almost everywhere finite function can be “adjusted” in a set of an arbitrarily small measure such that its Fourier series will be uniformly convergent. The question arises whether the class of continuous functions has a similar property with respect to any interpolation process. In the present paper, we prove that there exists the matrix of nodes \mathfrak{M}_γ arbitrarily close to the Jacobi matrix $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha, \beta > -1$ with the following property: any function $f \in C[-1, 1]$ can be adjusted in a set of an arbitrarily small measure such that interpolation process of adjusted continuous function g based on the nodes \mathfrak{M}_γ will be uniformly convergent to g on $[a, b] \subset (-1, 1)$.

Keywords: Lagrange interpolation, Jacobi orthogonal polynomials, adjustment of functions

For citation: Novikov V. V. Function correction and Lagrange – Jacobi type interpolation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 24–35 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-24-35>, EDN: CQXPUH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^\infty$ — последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, и

$$-1 < x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < x_{n-1,n}^{(\alpha,\beta)} < \dots < x_{1,n}^{(\alpha,\beta)} < 1, \quad n \geq 1,$$

— нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Для функции f , заданной на $[-1, 1]$, обозначим через $L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах n -ой строки матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)} = \{x_{i,n}^{(\alpha,\beta)} : i = 1, \dots, n; n = 1, 2, \dots$. Если $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ — произвольная последовательность положительных чисел и матрица $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\}_{i,n=1}^\infty$ такова, что

$$|x_{k,n}^{(\alpha,\beta)} - y_{k,n}| < \gamma_n, \quad i = 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то условимся писать $\mathfrak{M} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. В дальнейшем, в целях сокращения записей, всюду будем использовать обозначение $x_{i,n}$ вместо $x_{i,n}^{(\alpha,\beta)}$, подразумевая, что α и β — произвольные фиксированные числа, большие -1 .

Хорошо известно [1, 2], что интерполяционный процесс $\{L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)\}_{n=1}^\infty$ для $f \in C[-1, 1]$ при $\alpha = \beta = -1/2$ может расходиться всюду (для произвольных узлов — почти всюду [3]), подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время известно ([4], см. также [5]), что любую измеримую (конечную п. в.) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (усиленное C -свойство по терминологии Н. К. Бари). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу по той или иной матрице узлов?

В настоящей статье доказывается, что для произвольных $\alpha, \beta > -1$ существует матрица узлов \mathfrak{M}_γ , как угодно близкая к $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$, со следующим свойством: любую функцию $f \in C[-1, 1]$ можно исправить (с сохранением непрерывности) на множестве сколь угодно малой меры так, что интерполяционный процесс $\{L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, x)\}_{n=1}^\infty$ исправленной функции g будет сходиться к ней равномерно на любом заранее заданном отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$. Отметим, что для самой матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$ (и тем более для произвольных узлов) вопрос о возможности исправления непрерывной функции в указанном выше смысле остается открытым.



1. Обозначения и леммы

Пусть отрезок числа a, b , и $\varepsilon > 0$ таковы, что

$$-1 < a - \varepsilon < a < b < b + \varepsilon < 1, \tag{1}$$

$$\mathfrak{M} : -1 =: y_{n+1,n} < y_{n,n} < y_{n-1,n} < \dots < y_{1,n} < y_{0,n} := 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

— произвольная матрица узлов интерполирования на $[-1, 1]$ и $f \in C[-1; 1]$. Положим

$$\Delta_{i,n} = (y_{i+1,n}, y_{i,n}), \quad \bar{\Delta}_{i,n} = [y_{i+1,n}, y_{i,n}], \quad |\Delta_{i,n}| = y_{i,n} - y_{i+1,n}, \quad \Delta f_i = f(y_{i,n}) - f(y_{i+1,n}),$$

и пусть ε' — любое фиксированное число такое, что $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Обозначим $I = [a - \varepsilon', b + \varepsilon']$, $d_1(\mathfrak{M}, n) = \min_{i: \Delta_{i,n} \subset I} |\Delta_{i,n}|$, $d_2(\mathfrak{M}, n) = \max_{i: \Delta_{i,n} \subset I} |\Delta_{i,n}|$,

$$T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}, f) = \sum_{i: |y_{p,n} - y_{i,n}| < \varepsilon} \frac{|\Delta f_i|}{|p - i| + 1}, \quad T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}, f) = \max_{p: y_{p,n} \in [a,b]} T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}, f).$$

Для произвольного конечного множества $A = \{a_1; a_2; \dots; a_m\} \subset \mathbb{R}$ будем обозначать через $d(A) := \min_{i,j} \{|a_i - a_j| : a_i \neq a_j\}$ наименьшее положительное расстояние между его точками. Кроме того, как обычно, через C обозначаются абсолютные, вообще говоря различные, постоянные.

Лемма 1 ([6]). *Существуют постоянные b_1 и b_2 , зависящие только от $\alpha, \beta > -1$, такие, что*

$$\frac{b_1}{n} \leq \theta_{k+1,n} - \theta_{k,n} \leq \frac{b_2}{n}, \tag{2}$$

где $\theta_{k,n} = \arccos x_{k,n}$, $k = 0, \dots, n$, $\theta_{0,n} := 0$, $\theta_{n+1,n} := \pi$, $n = 3, 4, \dots$

Лемма 2 ([7]). *Пусть верно (1) и*

$$l_{k,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_{i,n}}{x_{k,n} - x_{i,n}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

— фундаментальный многочлен интерполяции Лагранжа с узлами Якоби. Тогда равномерно по $x \in [a, b]$ и по тем индексам i , для которых $x_{i,n} \in [a, b]$, справедливо следующее представление:

$$l_{i,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) = O\left(\frac{1}{|i - p| + 1}\right), \tag{3}$$

где t определяется из условия

$$x_{p+1,n} < x \leq x_{p,n}, \quad p = 0, \dots, n, \quad x_{0,n} := 1, \quad x_{n+1,n} := -1.$$

Лемма 3 ([8, лемма 1]). *Равномерно по $x \in [a, b]$ выполняется равенство*

$$\sum_{i=1}^n |l_{i,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) + l_{i+1,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x)| = O(1), \tag{4}$$

где $l_{n+1,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) \equiv 0$.



Лемма 4 ([9]). *Равномерно по $x \in [a, b]$ выполняется равенство*

$$\sum_{|x-x_{i,n}|<\varepsilon} |l_{i,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x)| = O(\log x). \quad (5)$$

Лемма 5 ([8, теорема 1]). *Пусть верно (1) и $f \in C[-1, 1]$. Тогда равномерно для всех $x \in [a, b]$ выполняется равенство*

$$\begin{aligned} & f(x) - L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|x-x_{i,n}|<\varepsilon} [f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})] l_{i,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) + O \left\{ \omega \left(f, \frac{\log n}{n} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\omega(f, \cdot)$ – модуль непрерывности функции f на $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$.

Лемма 6. *Пусть заданы произвольные числа $\{h_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$. Тогда существует последовательность $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ такая, что для любой матрицы узлов интерполирования $\mathfrak{M} = \{y_{i,k}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ справедливо неравенство*

$$|l_{i,n}(\mathfrak{M}, x) - l_{i,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x)| < h_n, \quad x \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Доказательство. Так как функция

$$\phi_i(x, \vec{t}) := l_{i,n}(\mathfrak{M}, x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - t_{j,n}}{t_{i,n} - t_{j,n}}, \quad \vec{t} = (t_{1,n}, \dots, t_{n,n}),$$

непрерывна по \vec{t} в точке $\vec{x}_0 = (x_{1,n}, \dots, x_{n,n})$, в проверке нуждается лишь тот факт, что (7) будет выполняться равномерно относительно параметра $x \in [-1, 1]$, если только γ_n достаточно мало. Применяя к приращению функции ϕ_i в точке \vec{x}_0 формулу Тейлора, находим

$$\phi_i(x, \vec{y}) - \phi_i(x, \vec{x}_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t_{k,n}} \phi_i(x, \vec{c}) \cdot (y_{k,n} - x_{k,n}), \quad (8)$$

где $\vec{c} = \vec{x}_0 + \theta \cdot (\vec{y} - \vec{x}_0)$, $\theta \in (0, 1)$, а соответствующие производные имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t_{k,n}} \phi_i(x, \vec{t}) = \begin{cases} \frac{x - t_{i,n}}{(t_{k,n} - t_{i,n})^2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{x - t_{j,n}}{t_{i,n} - t_{j,n}}, & k \neq i; \\ - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{t_{i,n} - t_{j,n}} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \frac{x - t_{m,n}}{t_{i,n} - t_{m,n}}, & k = i. \end{cases} \quad (9)$$

Поскольку $|x - t_{i,n}| \leq 2$, $x \in [-1, 1]$, $i = 1, \dots, n$, и, кроме того, при достаточно малом γ_n (скажем, при $\gamma_n < \tilde{\gamma}_n := 4^{-1} \min\{x_{i,n} - x_{i+1,n} : 1 \leq i \leq n - 1\}$) справедливы неравенства

$$\frac{\gamma_n}{2} < |t_{i,n} - t_{j,n}| < 2, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j,$$

из (9) следует существование постоянной $C = C(n)$ такой, что при указанных γ_n будут выполняться неравенства

$$\left| \frac{\partial}{\partial t_{k,n}} \phi_i(x, \vec{c}) \right| \leq C(n), \quad x \in [-1, 1], \quad k = 1, \dots, n, \quad (10)$$

Соотношения (10) в сочетании с (8) дают утверждение леммы. \square



Лемма 7. Пусть верно (1). Тогда существует последовательность $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$ со следующим свойством: для любой $f \in C[-1; 1]$ и любой матрицы узлов интерполирования $\mathfrak{M} = \{y_{i,k}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}, f) = 0 \tag{11}$$

влечет за собой равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n(\mathfrak{M}, f, \cdot)\|_{C[a,b]} = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть выполнено (1). Прежде всего, убедимся, что можно так выбрать γ , что соотношение (6) будет выполнено для любых $f \in C[-1, 1]$ и $\mathfrak{M} = \{y_{i,k}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Действительно, при выводе равенства (6) в [8] явный вид узлов ($\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$) учитывается только в той части доказательства, которая использует соотношения (4) и (5). В силу леммы 6 для достаточно малых $\{\gamma_n\}$ эти соотношения будут иметь место не только для матрицы узлов $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$, но и для любой $\mathfrak{M} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Поэтому выбрав надлежащим образом $\{\gamma_n\}$ и дословно повторив «не зависящую от узлов» часть доказательства теоремы 1 из [8], мы получим, что для любой $f \in C[-1, 1]$ равномерно для всех $x \in [a, b]$ выполняется равенство

$$f(x) - L_n(\mathfrak{M}, f, x) = \frac{1}{2} \sum_{|x - y_{i,n}| < \varepsilon} [f(y_{i+1,n}) - f(y_{i,n})] l_{i,n}(\mathfrak{M}, x) + O \left\{ \omega \left(f, \frac{\log n}{n} \right) \right\}, \tag{13}$$

если только $\mathfrak{M} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$.

Далее, снова применяя лемму 6 (и уменьшив при необходимости γ_n), мы сможем добиться того, что для любой матрицы $\mathfrak{M} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ будет верно (3), т. е. того, что равномерно по $x \in [a, b]$ и по тем индексам i , для которых $y_{i,n} \in [a, b]$, будет верно представление

$$l_{i,n}(\mathfrak{M}, x) = O \left(\frac{1}{|i - p| + 1} \right), \tag{14}$$

где p определяется из условия

$$y_{p+1,n} < x \leq y_{p,n}, \quad p = 0, \dots, n. \tag{15}$$

Наконец, нетрудно проверить, если γ_n достаточно мало, то в силу (2) можно считать, что узлы $\{y_{i,n}\} \subset [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ удовлетворяют условию

$$\frac{b'_1}{n} \leq y_{i,n} - y_{i+1,n} \leq \frac{b'_2}{n}, \tag{16}$$

где b'_1, b'_2 зависят от α, β, a, b и ε .

Перейдем непосредственно к доказательству импликации (11) \Rightarrow (12). Предположим, что $x \in [a, b]$ и p задано соотношением (15). Тогда на основании (13) и (14) получим

$$|f(x) - L_n(\mathfrak{M}, f, x)| \leq C \sum_{|x - y_{i,n}| < \varepsilon} \frac{|f(y_{i+1,n}) - f(y_{i,n})|}{|i - p| + 1} + o(1) \tag{17}$$

равномерно по $x \in [a, b]$.



Кроме того, (16) показывает, что, заменяя в (17) суммирование по $i : |x - y_{i,n}| < \varepsilon$ на суммирование по $i : |y_{i,n} - y_{p,n}| < \varepsilon$, мы теряем или приобретаем группу, состоящую из ν слагаемых, причем ν не превосходит некоторого $\nu_0 = \nu_0(\alpha, \beta, a, b, \varepsilon)$. Ошибка, возникающая при такой замене, не превосходит величины $\nu_0 \cdot \omega(f, \frac{C}{n}) = o(1)$, поэтому равномерно по $x \in [a, b]$ имеем

$$|f(x) - L_n(\mathfrak{M}, f, x)| \leq CT_{n,\varepsilon}(f) + o(1).$$

□

Лемма 8. Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ удовлетворяет утверждению леммы 7 и $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Пусть далее $r > 0$ — произвольное достаточно малое число и конечный набор точек $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ таков, что $a - \varepsilon' =: \lambda_{m+1} < \lambda_m < \dots < \lambda_1 < \lambda_0 := b + \varepsilon'$, $d(\Lambda) > r$. Тогда найдется номер $n_0 = n_0(r)$, зависящий только от r , такой, что при $n > n_0$ равномерно по $p \in J_n(a, b) := \{p : y_{p,n} \in [a, b]\}$ будут верны неравенства

$$Q_{p,n}(\Lambda, r) := \sum_i \frac{1}{|i - p| + 1} \leq 3, \quad (18)$$

где суммирование идет по тем i , для которых $\Delta_{i,n} \subset I$ и $\Delta_{i,n} \cap (\Lambda \setminus \{\lambda_0; \lambda_{m+1}\}) \neq \emptyset$.

Доказательство. Фиксируем $r > 0$ и пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ удовлетворяет условиям леммы. Будем считать n настолько большим, что $d_2(\mathfrak{M}, n) < 4^{-1}d(\Lambda)$. Тогда $Q_{p,n}(\Lambda, r)$ можно представить в виде не более чем двух сумм $Q_{p,n}(\Lambda, r) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, каждая из которых имеет вид $\Sigma_\nu = \sum_{s=1}^{q(\nu)} 1/i_s^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$, где $q(\nu) \leq m$ и положительные целые $i_s^{(\nu)}$, $s = 1, \dots, q(\nu)$, таковы, что

$$i_{s+1}^{(\nu)} - i_s^{(\nu)} \geq Cnr, \quad s = 1, \dots, q(\nu) - 1. \quad (19)$$

Очевидно, что $i_1^{(\nu)} \geq 1$, а из (19) получаем $\sum_{s=2}^{q(\nu)} 1/i_s^{(\nu)} \leq 1/2$, если только n больше некоторого $n_0^{(\nu)}(r)$. Таким образом, (18) верно для всех $n > n_0(r) = \max\{n_0^{(1)}; n_0^{(2)}\}$. □

Лемма 9. Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ удовлетворяет утверждению леммы 7 и $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Пусть далее $h_1 < h_2$ — произвольные постоянные числа, $h := h_2 - h_1$, и $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{m+1}$ — множество точек из леммы 8 (теперь все эти точки фиксированы). Для положительного числа $\sigma < d(\Lambda)/2$ определим функцию $\psi(x)$ на множестве $\bigcup_{k=1}^m [\lambda_k - \sigma, \lambda_k + \sigma]$ следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} h_1, & x = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, m; \\ h_2, & x = \lambda_k \mp \sigma, \quad k = 1, \dots, m; \\ \text{линейная,} & x \in [\lambda_k - \sigma, \lambda_k] \cup [\lambda_k, \lambda_k + \sigma], \end{cases}$$

и пусть

$$J := \{i : \Delta_{i,n} \subset [\lambda_k - \sigma, \lambda_k + \sigma], \quad k = 1, \dots, m\}.$$

Тогда σ можно выбрать так, что

$$G_{n,p}(\Lambda, \sigma) := \sum_{i \in J} \frac{|\Delta\psi_i|}{|p - i| + 1} \leq 3h, \quad p = 0, \dots, n, \quad (20)$$

если только n удовлетворяет условию $d_2(\mathfrak{M}, n) \leq \sigma$.



Доказательство. Обозначим $\varepsilon := d(\Lambda)$, выберем число σ так, что $\sigma < \varepsilon/2$, и будем считать, что $d_2(\mathfrak{M}, n) \leq \sigma$. Положим

$$J^{(1)} := \{i \in J : \Delta_{i,n} \subset [y_{p,n} - \varepsilon, y_{p,n} + \varepsilon]\}$$

и

$$k_{p,n}(\varepsilon) := \min\{|p - i| + 1 : i \in J \setminus J^{(1)}\}.$$

Не теряя общности, будем считать, что $J^{(1)}$ не пусто. Так как в это множество входят лишь индексы узлов, лежащих в некотором интервале длины 2σ (или в части такого интервала), получаем, что

$$M := \text{card}(J^{(1)}) \leq \frac{2\sigma n}{b'_1}, \tag{21}$$

где b'_1 — константа из (16). Кроме того, очевидно

$$|\Delta\psi_i| \leq \frac{hb'_1}{\sigma n}. \tag{22}$$

Теперь с учетом (21) и (22) находим

$$\begin{aligned} G_{n,p}(\Lambda, \sigma) &\leq \left(\sum_{i \in J^{(1)}} + \sum_{i \in J \setminus J^{(1)}} \right) \frac{|\Delta\psi_i|}{|p - i| + 1} \leq \frac{hb'_1}{\sigma n} \sum_{i \in J^{(1)}} \frac{1}{|p - i| + 1} + \\ &+ \frac{1}{k_{p,n}(\varepsilon)} \sum_{i \in J \setminus J^{(1)}} |\Delta\psi_i| < \frac{hb'_1}{\sigma n} \sum_{i=1}^M \frac{1}{i} + \frac{2hm}{k_{p,n}(\varepsilon)} < \\ &< \frac{hb'_1}{\sigma n} \log(M + 1) + \frac{2hm}{k_{p,n}(\varepsilon)} < \frac{2hb'_1}{\sigma n} \log M + \frac{2hm}{k_{p,n}(\varepsilon)} < \\ &< \frac{2hb'_1}{\sigma n} \log\left(\frac{2\sigma n}{b'_1}\right) + \frac{2hm}{k_{p,n}(\varepsilon)} < 2h + \frac{2hm}{k_{p,n}(\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Поскольку выражение $k_{p,n}(\varepsilon) \rightarrow \infty$ равномерно по $p = 0, \dots, n$ при $n \rightarrow \infty$ при фиксированном ε , получим, что

$$\frac{2m}{k_{p,n}(\varepsilon)} < 1, \quad \forall p = 0, \dots, n, \tag{24}$$

если только $d_2(\mathfrak{M}_\gamma, n) < \sigma$ и σ достаточно мало. Теперь (20) следует из (23) и (24). \square

Лемма 10. Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ удовлетворяет утверждению леммы 7 и $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\} \in M^{(\alpha, \beta)}(\gamma)$. Тогда если $f \in C[-1, 1]$ имеет ограниченную вариацию на $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$, то для f верно равенство (11).

Доказательство. Доказательство леммы 1 полностью аналогично доказательству [5, гл. IV, § 5] того факта, что непрерывная функция ограниченной вариации удовлетворяет условиям признака Салема. \square



2. Основной результат

Теорема. Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ — произвольная последовательность. Тогда существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma \in M^{(\alpha, \beta)}(\gamma)$ такая, что для любых $f \in C[-1, 1]$, $-1 < a < b < 1$, и $0 < \delta < b - a$ найдутся функция $g \in C[-1, 1]$ и множество $E \subset [a, b]$, $\text{mes}E > b - a - \delta$, для которых $f = g$ на E и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\|_{C[a, b]} = 0.$$

Доказательство. Пусть $f \in C[-1, 1]$ — произвольная непрерывная функция, числа $a, b, \varepsilon, \varepsilon'$ выбраны и зафиксированы, как указано выше, и δ — сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \delta < b - a$. Пусть далее $\gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность, для которой выполнены все сделанные выше предположения, и $\mathfrak{M} = \{y_{i, n}\} \in M^{(\alpha, \beta)}(\gamma)$. Потребуем, чтобы все точки $\{y_{i, n}\}$ были попарно различными и не совпадали с узлами сетки $t_{k, j} := -1 + k2^{1-j}$, $k = 1, \dots, 2^j$, $j \in \mathbb{N}$.

Положим $I_{k, j} := [-1 + (k - 1)2^{1-j}, -1 + k2^{1-j}]$ и определим на $[-1, 1]$ функции

$$\tilde{f}_j(x) := \min_{t \in I_{k, j}} f(t), \quad x \in I_{k, j}, \quad k = 1, \dots, 2^j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{\tilde{f}_j(x)\}_{j=1}^\infty$ не убывает по j и равномерно сходится к f на $[-1, 1]$, поскольку $\|f - \tilde{f}_j\|_{C[-1, 1]} \leq \omega(f, 2^{1-j})$. Пусть $f_j(x) := \tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_{j-1}(x)$, $\tilde{f}_0(x) \equiv 0$. Тогда ряд $\sum_{j=1}^\infty f_j(x)$ равномерно и абсолютно сходится к f на $[-1, 1]$, так как $f_j(x) \geq 0$ при любом $x \in [-1, 1]$, $j \geq 2$ и $\sum_{j=1}^n f_j(x) = \tilde{f}_n(x)$. Докажем, что для каждого $j = 1, 2, \dots$ существует функция $g_j \in C(I)$ такая, что

$$\text{mes}\{t \in [-1, 1] : f_j(t) \neq g_j(t)\} < 2^{-j}\delta, \quad (25)$$

$$\max_n T_{n, \varepsilon}(\mathfrak{M}, g_j) \leq C \|f_j\|_{C(I)} \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty, \quad (26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n, \varepsilon}(\mathfrak{M}, g_j) = 0. \quad (27)$$

Кроме того, при $j \geq 2$ функция g_j дополнительно удовлетворяет условиям

$$0 \leq g_j(x) \leq f_j(x), \quad x \in I, \quad (28)$$

для любого наперед заданного числа $N_j \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$T_{n, \varepsilon}(\mathfrak{M}, g_j) = 0, \quad n = 1, \dots, N_j. \quad (29)$$

После того как функции $\{g_j(x)\}_{j=1}^\infty$ будут построены, мы покажем, что $g(x) = \sum_{j=1}^\infty g_j(x)$ — искомая.

Займемся построением последовательности $\{g_j(x)\}_{j=1}^\infty$. Пусть задано произвольное $0 < \delta < b - a$. Функцию g_1 определим следующим образом: фиксируем $\sigma_1 \in (0, \delta/2)$ и полагаем $g_1(x) = f_1(x)$, если $x \in [-1, 1] \setminus (-\sigma_1, \sigma_1)$, $g_1(x)$ линейная на $[-\sigma_1, \sigma_1]$.

Предположим теперь, что $j \geq 2$, и построим функцию g_j . Обозначим через L множество точек разрыва функции f_j , лежащих в I . Выберем номер $M_j > N_j$ так, чтобы при $n > M_j$ для всех индексов i суммы $T_{n, p, \varepsilon}(\mathfrak{M}, f)$, $p \in I_n(a, b)$, выполнялось



условие $\Delta_{i,n} \in I$, и пусть $D_0 := L \cup \{y_{i,s} \in I : 1 \leq s \leq M_j\}$. В силу леммы 2 найдется номер $\mu(0)$, для которого

$$Q_{n,p}(D_0) \leq 3 \quad \forall n \geq \mu(0), \quad p \in J_n(a, b).$$

Пусть $\{\sigma_l\}_{l=0}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ — последовательность такая, что $\sigma \downarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, причем $\sigma_l/\sigma_{l-1} < 2^{-l}$, $l = 1, 2, \dots$; окончательно мы подберем ее позже.

Для каждого $t \in D_0$ построим замкнутую окрестность $[t - \sigma_0, t + \sigma_0]$, при этом σ_0 выберем настолько малым, что:

- 1) $\sigma_0 < 4^{-1}d(\tilde{D}_0)$, где $\tilde{D}_0 := D_0 \cup \{y_{i,s} \in I : M_j + 1 \leq s \leq \mu(0)\}$;
- 2) общая длина окрестностей всех точек t из D_0 меньше, чем $2^{-j-1}\delta$;
- 3) $\max\{n : d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_0\} > \mu(0)$.

Для $x \in [-1, 1]$ положим

$$g_{0,j}(x) = \begin{cases} 0, & x \in D_0; \\ f_j(x), & x \in [-1, 1] \setminus \cup_{t \in D_0} (t - \sigma_0, t + \sigma_0); \\ \text{линейная на } [t - \sigma_0, t] \cup [t, t + \sigma_0], & t \in D_0. \end{cases}$$

Предположим, что уже определены множества D_0, \dots, D_{l-1} , выбраны числа $\sigma_0, \dots, \sigma_{l-1}$ и построены функции $g_{0,j}, \dots, g_{l-1,j}$, $l \geq 1$. Определим D_l , σ_l и построим $g_{l,j}$. Пусть $E_{u,v} := \cup_{s=u}^v \cup_{t \in D_s} [t - \sigma_s, t + \sigma_s]$ и $D_l := \{y_{i,s} : s = M_j + l, y_{i,s} \in I \setminus E_{0,l-1}\}$. Для конечного множества $D_l \cup P_{l-1}$, где $P_{l-1} := \cup_{s=0}^{l-1} \cup_{t \in D_s} \{t - \sigma_s; t; t + \sigma_s\}$, найдем, применяя лемму 2, число $\mu(l)$ такое, что:

- 1) $Q_{n,p}(D_l \cup P_{l-1}) < 3$, $\forall n \geq \mu(l)$, $p \in J_n(a, b)$;
- 2) $\mu(l) > \min\{n : d_2(\mathfrak{M}_\gamma, n) \leq \sigma_{l-1}\}$.

Теперь строим окрестности $[t - \sigma_l, t + \sigma_l]$, $t \in D_l$, выбирая σ_l так, что:

- 1) $\sigma_l < 4^{-1}d(\tilde{D}_l)$, где $\tilde{D}_l := D_l \cup \{y_{i,s} \in I \setminus E_{0,l-1} : M_j + l \leq s \leq \mu(l)\}$;
- 2) общая длина окрестностей всех точек t из D_l меньше, чем $2^{-j-l}\delta$;
- 3) $\max\{n : d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_l\} > \mu(l)$.

Обозначим $h_{k,j} := f_j(x)$, $x \in I_{k,j}$ и для $x \in [-1, 1]$ положим

$$g_{l,j}(x) = \begin{cases} h_{k,j} \sum_{s=1}^l 2^{-s}, & x \in D_l \cap I_{k,j}; \\ g_{l-1,j}(x), & x \in [-1, 1] \setminus \cup_{t \in D_l} (t - \sigma_l, t + \sigma_l); \\ \text{линейная на } [t - \sigma_l, t] \cup [t, t + \sigma_l], & t \in D_l. \end{cases}$$

Определим функцию $g_j(x) := \lim_{l \rightarrow \infty} g_{l,j}(x)$, $x \in [-1, 1]$, $j \in \mathbb{N}$, и проверим для нее выполнение условий (26) и (27) (справедливость (25), (28), (29), а также условия $g_j \in C(I)$ очевидна). Пусть $n > M_j$. Определим номер l из условий (формально полагаем $\sigma_{-1} := 2$)

$$d_2(\mathfrak{M}, n) \leq \sigma_{l-1}, \tag{30}$$

$$\exists i_0 : |\Delta_{i_0,n}| > \sigma_l, \quad \Delta_{i_0,n} \subset I. \tag{31}$$

Из определения f_j следует, что все узлы, участвующие в построении числителей суммы $T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j)$, содержатся в множестве $E_{0,n}$. При этом $\Delta^2 g_{j,i} = 0$, если $\Delta_{i,n}$ целиком лежит на промежутке линейности функции g_j , т. е. если при некоторых s и $t \in D_s$ имеет место включение $\Delta_{i,n} \subset (t - \sigma_s, t) \cup (t, t + \sigma_s)$. Далее, по построению окрестности $[y_{i,s} - \sigma_s, y_{i,s} + \sigma_s]$ узлов строк с номерами $s = M_j + l, \dots, \mu(l)$ попарно не



пересекаются. Тогда, предположив в дополнение к (8), что $n \leq \mu(l)$, получим, что из условия $\Delta_{i,n} \subset I \setminus E_{0,l-1}$ следует равенство $g_j(y_{2i-1,n}) = g_j(y_{2i,n}) = g_j(y_{2i+1,n})$, так что для указанных i снова имеем $\Delta^2 g_{j,i} = 0$. С учетом высказанных соображений можно записать

$$T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = \left| \left(\sum_{i \in J_1} + \sum_{i \in J_2} \right) \frac{\Delta^2 f_i}{p - 2i} \right| \equiv S_1 + S_2,$$

где

$$J_1 = \{i : \Delta_{i,n} \cap P_{l-2} \neq \emptyset\}, \quad (32)$$

$$J_2 = \{i : \Delta_{i,n} \cap (\cup_{t \in D_{l-1}} \{t - \sigma_{l-1}; t; t + \sigma_{l-1}\}) \neq \emptyset\}. \quad (33)$$

Разумеется, если n недостаточно велико, то множества J_1, J_2 могут оказаться пустыми. В этом случае соответствующие части суммы считаем равными нулю. Положим $c_j := \|g_j\|_{C(I)} = \|f_j\|_{C(I)}$. Тогда из определения g_j и учитывая, что $\sigma_l/\sigma_{l-1} < 2^{-l}$, $l = 1, 2, \dots$, получаем

$$|\Delta^2 g_{j,i}| \leq 2c_j \max \left\{ \frac{\sigma_{l-1}}{\sigma_{l-2}}; 2^{1-l} \right\} \leq \frac{Cc_j}{2^l}, \quad i \in J_1, \quad (34)$$

$$|\Delta^2 g_{j,i}| \leq 2c_j 2^{1-l} = \frac{Cc_j}{2^l}, \quad i \in J_2. \quad (35)$$

Так как $n > \mu(l-1)$, то с учетом определения $\mu(l-1)$ и (34) имеем

$$S_1 \leq \frac{Cc_j}{2^l} Q_{n,p}(P_{l-2}) \leq \frac{Cc_j}{2^l}. \quad (36)$$

Аналогично

$$S_2 \leq \frac{Cc_j}{2^l} (Q_{n,p}(D_{l-1}) + Q_{n,p}(D_{l-1}^-) + Q_{n,p}(D_{l-1}^+)) \leq \frac{Cc_j}{2^l}, \quad (37)$$

где $D_s^- := \cup_{t \in D_s} \{t - \sigma_s\}$, $D_s^+ := \cup_{t \in D_s} \{t + \sigma_s\}$, $s = 0, 1, \dots$. Таким образом, для n таких, что верно (30) и $n \leq \mu(l)$, получим

$$T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) \leq \frac{Cc_j}{2^l}, \quad p \in J_n(a, b). \quad (38)$$

Пусть теперь $n > \mu(l)$. Ясно, что $M_j + l + 1 < n$, кроме того, из (31) и определения $\mu(l+1)$ следует неравенство $n \leq \mu(l+1)$. Аналогично предыдущему получаем, что окрестности узлов строк с номерами от $M_j + l + 1$ до $\mu(l+1)$ попарно не пересекаются. Значит, теперь можно записать

$$T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = \left| \left(\sum_{i \in J_1} + \sum_{i \in J_2} + \sum_{i \in J_3} \right) \frac{\Delta^2 f_i}{p - 2i} \right| \equiv S_1 + S_2 + S_3,$$

где J_1 и J_2 определены посредством (32) и (33), а $J_3 := \{i : \Delta_{i,n} \cap (D_l \cup D_l^- \cup D_l^+) \neq \emptyset\}$. Для сумм S_1, S_2 и числителей суммы S_3 сохраняются прежние оценки, кроме того,

$$S_3 \leq \frac{Cc_j}{2^l} (Q_{n,p}(D_l) + Q_{n,p}(D_l^-) + Q_{n,p}(D_l^+)) \leq \frac{Cc_j}{2^l}.$$



Таким образом, для n , удовлетворяющих (31) и условию $n > \mu(l)$, мы снова получаем оценку (38). Итак, (38) верно при всех n . Поскольку $c_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, из (38) следует (26). Кроме того, поскольку $l = l(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, из (16) следует также и (27).

Положим

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x), \quad g(x) = g(x)/\varphi(x), \quad x \in (-1, 1), \quad g(\pm 1) := g(\pm 1 \mp 0).$$

Так как $g_j \in C(I)$ и в силу (28) ряд сходится равномерно на I , имеем $g \in C(I)$. Кроме того, $g(x) = f(x)$, $x \in \setminus I$ и $g(a - \varepsilon' + 0) = f(a - \varepsilon')$, $g(b + \varepsilon' - 0) = f(b + \varepsilon')$, так что $g \in C[-1, 1]$. Далее из (25) следует, что

$$\text{mes}\{x \in [-1, 1] : f(x) \neq g(x)\} = \text{mes}\{x \in [-1, 1] : f(x) \neq g(x)\} < \delta. \quad (39)$$

Подберем теперь последовательность $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы для функции g выполнялось условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, g) = 0. \quad (40)$$

Возьмем в качестве M_1 произвольное натуральное число и предположим, что M_1, \dots, M_{j-1} , $j \geq 2$, уже выбраны. За счет (27) можно подобрать M_j так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{s=1}^{j-1} R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, g_s) < \frac{1}{j}, \quad \forall n > M_j, \quad p \in J_n(a, b). \quad (41)$$

Завершив индукцию по j и выбрав $\{M_j\}$, мы окончательно построим функцию g . Пусть n — достаточно большой номер. Определим j из условия $M_j < n \leq M_{j+1}$. Имеем

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, g) \leq \sum_{s=1}^{j-1} R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, g_s) + R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) + R_{n,p} \left(\mathfrak{M}_\gamma, \sum_{s=j+1}^{\infty} g_s \right) \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \quad (42)$$

Из (41), (26) и (29) соответственно находим $\Sigma_1 < 1/j$, $\Sigma_2 < Cc_j$ и $\Sigma_3 = 0$. С учетом этих соотношений и того, что $j \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, из (42) получаем (40).

В силу леммы 1 из (40) следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\|_{C[a,b]} = 0,$$

которое совместно с (39) показывает, что функция g является искомой. □

Замечание. Основной результат настоящей статьи вместе с краткой схемой доказательства был анонсирован в [10].

Список литературы

1. Grünwald G. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen // Annals of Mathematics. 1936. Vol. 37, № 4. P. 908–918. <https://doi.org/10.2307/1968627>
2. Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynomes d'interpolation // Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae : Sectio scientiarum mathematicarum. 1937. Vol. 8. P. 131–135.



3. Erdős P., Vértesi P. On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes // *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*. 1980. Vol. 36, iss. 1–2. P. 71–89. <https://doi.org/10.1007/BF01897094>
4. Menchoff D. Sur les séries de Fourier des fonctions continues [О рядах Фурье от непрерывных функций] // *Математический сборник*. 1940. Т. 8 (50), № 3. С. 493–518. URL: <https://mi.mathnet.ru/sm6044> (дата обращения: 30.03.2022).
5. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Москва : Физматгиз, 1961. 936 с.
6. Натансон Г. И. Двусторонняя оценка функции Лебега интерполяционного процесса Лагранжа с узлами Якоби // *Известия вузов. Математика*. 1967. № 11. С. 67–74. URL: <https://mi.mathnet.ru/ivm3239> (дата обращения: 30.03.2022).
7. Привалов А. А. Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // *Известия вузов. Математика*. 1986. № 5. С. 49–59. URL: <https://mi.mathnet.ru/ivm7554> (дата обращения: 30.03.2022).
8. Неваи Г. П. Замечания об интерполировании // *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*. 1974. Vol. 25, iss. 1–2. P. 123–144. <https://doi.org/10.1007/BF01901754>
9. Сегё Г. Ортогональные многочлены. Москва : Физматлит, 1962. 500 с.
10. Новиков В. В. Исправление функций и интерполяция Лагранжа в узлах, близких к узлам Якоби // *Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунар. Сарат. зимн. шк. (Саратов, 28 января – 1 февраля 2020 г.)*. Саратов : Научная книга, 2020. С. 277–280. EDN: [BJDTHR](https://www.edn.ru/BJDTHR)

References

1. Grünwald G. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen. *Annals of Mathematics*, 1936, vol. 37, iss. 4, pp. 908–918 (in German). <https://doi.org/10.2307/1968627>
2. Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynomes d'interpolation. In: *Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae : Sectio scientiarum mathematicarum*, 1937, vol. 8, pp. 131–135 (in French).
3. Erdős P., Vértesi P. On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1980, vol. 36, iss. 1–2, pp. 71–89. <https://doi.org/10.1007/BF01897094>
4. Menchoff D. Sur les séries de Fourier des fonctions continues. *Recueil Mathématique (Nouvelle série)*, 1940, vol. 8 (50), iss. 3, pp. 493–518 (in French). Available at: <https://www.mathnet.ru/eng/sm6044> (accessed 30 March 2022).
5. Bary N. K. *A Treatise on Trigonometric Series*. Vol. 2. Oxford, New-York, Pergamon Press, 1964. 508 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatgiz, 1961. 936 p.).
6. Natanson G. I. Two-sided estimate for the Lebesgue function of the Lagrange interpolation process with Jacobi nodes. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1967, no. 11, pp. 67–74 (in Russian). Available at: <http://mi.mathnet.ru/eng/ivm3239> (accessed 30 March 2022).
7. Privalov A. A. A criterion for uniform convergence of Lagrange interpolation processes. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1986, vol. 30, iss. 5, pp. 65–77. Available at: <https://www.mathnet.ru/eng/ivm7554> (accessed 30 March 2022).
8. Nevai G. P. Notes on interpolation. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1974, vol. 25, iss. 1–2, pp. 123–144 (in Russian). <https://doi.org/10.1007/BF01901754>
9. Szegő G. *Orthogonal Polynomials*. Providence, Rhode Island, AMS, 1939. 440 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 1962. 500 p.).
10. Novikov V. V. Adjustment of functions and Lagrange interpolation based on the nodes close to the Jacobi nodes. In: *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*. Saratov, Nauchnaya kniga, 2020, pp. 277–280 (in Russian). EDN: [BJDTHR](https://www.edn.ru/BJDTHR)

Поступила в редакцию / Received 31.03.2022

Принята к публикации / Accepted 01.10.2022

Опубликована / Published 01.03.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 36–47

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 36–47

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-36-47>, EDN: BFDVVG

Научная статья

УДК 517.98

Новый подход к формированию систем линейных алгебраических уравнений для решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом коллокаций

Л. А. Севастьянов^{1,2}, К. П. Ловецкий¹, Д. С. Кулябов^{1,2}✉

¹Российский университет дружбы народов (РУДН), Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

²Объединенный институт ядерных исследований, Россия, Московская область, 141980, г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6

Севастьянов Леонид Антонович, доктор физико-математических наук, ¹профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, ²сотрудник лаборатории теоретической физики, sevastianov-la@pfur.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1856-4643>, AuthorID: 6741

Ловецкий Константин Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, lovetskiy-kp@rudn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3645-1060>, AuthorID: 584101

Кулябов Дмитрий Сергеевич, доктор физико-математических наук, ¹профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, ²сотрудник лаборатории информационных технологий, kulyabov-ds@rudn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0877-7063>, AuthorID: 360953

Аннотация. Реализован новый алгоритм численного решения одномерных задач Коши и уравнений Пуассона, основанный на методе коллокации и представлении решения в виде разложения по полиномам Чебышева. Предлагается вместо обычного подхода, заключающегося в слиянии всех известных условий — дифференциальных (само уравнение) и начальных/граничных — в одну систему приближенных линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), перейти к методике решения задачи в несколько отдельных этапов. Вначале выделяются спектральные коэффициенты, определяющие «общее» решение исходной задачи. По методу коллокации определяются интерполяционные коэффициенты производной решения, а тем самым и коэффициенты разложения самого решения (кроме начальных). На этом этапе выбор удачного базиса, обладающего дискретной ортогональностью, дает возможность применения весьма эффективных алгоритмов поиска искомого коэффициента. Трудоемкость приведения матрицы СЛАУ к диагональной форме становится эквивалентной сложности умножения чебышевской матрицы коэффициентов на вектор правой части системы. Затем коэффициенты разложения самого решения (кроме первых одного–двух) получаются с помощью умножения известной трехдиагональной матрицы интегрирования (обратной по отношению к матрице дифференцирования Чебышева) на вектор интерполяционных коэффициентов производной. На последнем этапе учет начальных/граничных условий выделяет «частное» искомое решение, однозначно доопределяя недостающие коэффициенты искомого разложения.

Ключевые слова: начально-краевые задачи, метод коллокации, многочлены Чебышева, множества Гаусса – Лобатто, численная устойчивость, дискретная ортогональность



Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

Для цитирования: Севастьянов Л. А., Ловецкий К. П., Кулябов Д. С. Новый подход к формированию систем линейных алгебраических уравнений для решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом коллокаций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 36–47. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-36-47>, EDN: BFDVVG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

A new approach to the formation of systems of linear algebraic equations for solving ordinary differential equations by the collocation method

L. A. Sevastianov^{1,2}, K. P. Lovetskiy¹, D. S. Kulyabov^{1,2}✉

¹Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia

²Joint Institute for Nuclear Research, 6 Joliot-Curie St., Dubna 141980, Moscow region, Russia

Leonid A. Sevastianov, sevastianov-la@pfur.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1856-4643>, AuthorID: 6741

Konstantin P. Lovetskiy, lovetskiy-kp@rudn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3645-1060>, AuthorID: 584101

Dmitry S. Kulyabov, kulyabov-ds@rudn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0877-7063>, AuthorID: 360953

Abstract. A new algorithm for the numerical solution of one-dimensional Cauchy problems and Poisson equations is implemented. The algorithm is based on the collocation method and representation of the solution as an expansion in Chebyshev polynomials. It is proposed instead of the usual approach, which consists in combining all known conditions — differential (the equation itself) and initial / boundary — into one system of approximate linear algebraic equations, to go to the method of solving the problem in several separate stages. First, spectral coefficients are identified that determine the “general” solution of the original problem. The collocation method determines the interpolation coefficients of the derivative of the solution, and thus the expansion coefficients of the solution itself (except for the initial ones). At this stage, the choice of a good basis with discrete orthogonality makes it possible to use very efficient algorithms for finding the desired coefficients. The complexity of reducing the matrix of a system of linear algebraic equations to a diagonal form becomes equivalent to the complexity of multiplying the Chebyshev matrix of coefficients by the vector of the right side of the system. Then the expansion coefficients of the solution itself (except for the first one or two) are obtained by multiplying the known tridiagonal integration matrix (inverse to the Chebyshev differentiation matrix) by the vector of interpolation coefficients of the derivative. At the last stage, considering the initial/boundary conditions select a “particular” desired solution, unambiguously redefining the missing coefficients of the desired expansion.

Keywords: initial boundary value problems, collocation method, Chebyshev polynomials, Gauss – Lobatto sets, numerical stability, discrete orthogonality



Acknowledgements: The work was supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program.

For citation: Sevastianov L. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S. A new approach to the formation of systems of linear algebraic equations for solving ordinary differential equations by the collocation method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 36–47 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-36-47>, EDN: BFDVVG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Спектральные методы — это класс методов, активно используемых для численного решения различных дифференциальных уравнений [1–4]. Основная идея спектральных методов состоит в том, чтобы представить искомое решение дифференциального уравнения в виде взвешенной суммы определенных «базисных функций» [5] (например, в виде разложения по степенным функциям — ряд Тейлора, или по синусам и косинусам — тригонометрический ряд Фурье), а затем вычислить коэффициенты разложения и тем самым получить приближенное решение.

Спектральные методы обеспечивают более высокую по сравнению с методами конечных элементов сходимость сходимости. При этом их «экспоненциальная сходимость» наиболее быстрая из возможных, когда решение является гладким.

Спектральные методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями обычно сводятся к решению СЛАУ, в которую включены как начальные условия, так и условия, обеспечивающие выполнение дифференциальных соотношений [6]. Однако априорное встраивание начальных (граничных) условий в систему линейных уравнений приводит к существенному увеличению заполненности матриц и, следовательно, усложнению алгоритма и метода решения [7] задачи.

Новизна же предлагаемого авторами данной статьи подхода заключается в том, чтобы сначала с помощью устойчивого и простого с вычислительной точки зрения метода выделить класс функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению, тем самым выделив общее решение дифференциального уравнения. Затем рассчитать старшие коэффициенты разложения будущего решения (по вычисленным интерполяционным коэффициентам производной), используя явное представление матрицы интегрирования. И лишь после этого выделить из множества общих решений те частные решения, которые удовлетворяют заданным начальным или граничным условиям.

В работе решение тривиального обыкновенного дифференциального уравнения предлагается разбить на три этапа. Первый этап — вычисление интерполяционных коэффициентов первой либо второй производной умножением матрицы чебышевских коэффициентов на вектор правой части системы. На втором этапе умножение трехдиагональной матрицы интегрирования на вектор, полученный в результате выполнения первого этапа, дает коэффициенты разложения «общего» решения задачи. На третьем этапе для определения недостающих коэффициентов, определяющих «частное» решение, привлекаются начальные либо граничные условия.

Каждая подзадача решается устойчиво и просто. Решение первой задачи сводится к умножению вектора правой части на транспонированную матрицу значений функций Чебышева на сетке Гаусса – Лобатто. На следующем шаге решаем СЛАУ с



диагональной положительно определенной матрицей и затем умножаем полученный вектор слева на трехдиагональную чебышевскую матрицу интегрирования [8]. Число начальных (доопределяемых на следующем этапе) коэффициентов соответствует порядку дифференциального уравнения. Они являются решениями элементарных линейных алгебраических уравнений первого (задача Коши) либо второго (уравнение Пуассона) порядка.

Точное решение *простейшего* обыкновенного дифференциального уравнения при заданном начальном (граничном) условии

$$\begin{aligned} y' &= f(x), \quad x \geq x_0, \quad x \in [-1, 1], & (1) \\ y(x_0) &= y_0, & (2) \end{aligned}$$

правая часть которого не зависит от y и непрерывна по x , имеет единственное решение.

1. Аппроксимация производной. Задача Коши

Вначале рассмотрим задачу определения (восстановления) функции по значениям ее производной на сетке и (одному) дополнительному условию. В такой формулировке задача распадается на три подзадачи:

- полиномиальную интерполяцию производной (вычисление коэффициентов разложения производной в конечный ряд по базисным функциям);
- вычисление коэффициентов решения (кроме первого), которые определяются дифференциальными условиями задачи – умножение обратной по отношению к матрице дифференцирования на вектор интерполяционных коэффициентов производной;
- доопределение коэффициентов решения на основе граничных (или других независимых) условий.

Не ограничивая общности, будем далее считать, что областью определения решения является интервал $[-1, 1]$.

Часто аппроксимация непрерывных функций ограничивается отбрасыванием членов ряда Чебышева, величина которых мала [9, 10]. В отличие от приближений, получаемых при использовании других степенных рядов, приближение по полиномам Чебышева (обладает свойством почти оптимальности) минимизирует количество слагаемых, необходимых для аппроксимации функции многочленами с заданной точностью. С этим связано также и то свойство, что приближение на основе ряда Чебышева оказывается довольно близко к наилучшему равномерному приближению (среди многочленов той же степени), но вычисляется проще. Кроме того, выбор интерполяционной сетки Гаусса – Лобатто позволяет избавиться от эффекта Гиббса.

Рассмотрим подробнее проблему отыскания коэффициентов полинома $p(x)$, аппроксимирующего решение уравнения (1) в заданном конечном числе точек на интервале $[-1, 1]$. Спектральный метод коллокации [11] решения задачи основывается на представлении искомой аппроксимирующей функции в виде разложения в конечный ряд

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad x \in [-1, 1] \quad (3)$$

по полиномам Чебышева первого рода $\{T_k(x)\}_0^\infty$, которые образуют базис в гильбертовом пространстве функций на отрезке $[-1, 1]$.



Устойчивое определение коэффициентов разложения решения по известным коэффициентам разложения производной

Продифференцируем равенство (3). Выражение для производной имеет вид

$$p'(x) = \sum_{k=0}^n c_k T'_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k T_k(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (4)$$

Используя рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют чебышевские полиномы первого рода и их производные [2, 8], и приравнявая коэффициенты при одинаковых полиномах в (4), приходим [3] к следующей зависимости коэффициентов c_k от b_k :

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1/2}{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1/2}{n-2} & 0 & -\frac{1/2}{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1/2}{n-1} & 0 & -\frac{1/2}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1/2}{n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_{n-3} \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь через \mathbf{D}^+ обозначена усеченная трехдиагональная матрица с нулевыми элементами на главной диагонали, являющаяся обратной по отношению к матрице дифференцирования Чебышева в спектральном пространстве [8]. Первая строка заполнена нулевыми элементами, поскольку компонента не может быть определена по коэффициентам производной, для ее однозначного определения требуется дополнительное условие, например начальное.

Таким образом, вектор коэффициентов $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ есть результат умножения простой трехдиагональной матрицы интегрирования \mathbf{D}^+ на вектор \mathbf{b} . Алгоритм вычисления коэффициентов разложения решения по полиномам Чебышева реализуется по следующим явным формулам:

$$\begin{cases} c_1 = b_0 - b_2/2, & k = 1, \\ c_k = (b_k - b_{k+1})/2k, & 1 < k < n - 1, \\ c_k = b_{k-1}/2k, & k = n - 1, n. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, зная коэффициенты разложения функции задачи (1) по полиномам Чебышева I-го рода, мы можем однозначно восстановить последние n коэффициентов разложения искомой функции по тем же базисным функциям.

Устойчивое определение коэффициентов разложения производной

Итак, первая часть задачи сводится к вычислению коэффициентов $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ разложения правой части (1) по полиномам Чебышева на интервале $[-1, 1]$

$$\sum_{k=0}^n b_k T_k(x) = f(x).$$



Метод коллокации заключается в подборе таких коэффициентов $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ разложения интерполяционного полинома $p'(x)$, что удовлетворяются (выполняются) следующие равенства при искомым коэффициентах b_k , $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\sum_{k=0}^n b_k T_k(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n, \quad (7)$$

в $(n + 1)$ точках коллокации $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Последнее утверждение эквивалентно тому, что коэффициенты должны быть решением системы линейных алгебраических уравнений (7) метода коллокаций. В матричной форме это можно записать так:

$$\mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{f}. \quad (8)$$

Выбор точек коллокации может и должен обеспечивать невырожденность системы уравнений (7), для этого достаточно, чтобы все точки сетки были различными, а в остальном их выбор произволен, т. е. решение системы (7) на произвольной сетке интервала $[-1, 1]$ определяет нужную аппроксимацию. Для произвольной сетки матрица \mathbf{T} является полностью заполненной, и численное решение такой системы достаточно трудоемко. Чтобы упростить вид матрицы и ускорить отыскание вектора \mathbf{b} , воспользуемся свойством дискретной ортогональности чебышевской матрицы \mathbf{T} на сетке Гаусса – Лобатто. В качестве точек коллокации рассмотрим множество $x_j = \cos(\pi j/n)$, $j = 0, \dots, n$. Для дальнейшего улучшения свойств системы линейных уравнений, решением которой будет вектор $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$, умножим первое и последнее уравнения из (7) на множитель $1/\sqrt{2}$. Получим эквивалентную «модифицированную» систему с новой матрицей $\tilde{\mathbf{T}}$ (вместо \mathbf{T}) и вектором $\tilde{\mathbf{f}}$ вместо \mathbf{f} . Новая система хороша тем, что она обладает свойством «дискретной ортогональности», и умножение ее слева на транспонированную $\tilde{\mathbf{T}}^T$ дает диагональную матрицу

$$\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} = \text{diag} \left(n, \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}, n \right).$$

Преобразуем систему (8), умножив ее слева на транспонированную матрицу $\tilde{\mathbf{T}}^T$, получим простое матричное уравнение с диагональной матрицей для определения искомым коэффициентов разложения $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$:

$$\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{f}}. \quad (9)$$

Обозначая через \tilde{f} произведение $\tilde{\mathbf{T}}^T$ на вектор $(n, \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}, n)$ в (9), выписываем искомые коэффициенты разложения производной решения – функции $f(x)$ – в явном виде

$$b_0 = \frac{\tilde{f}_0}{n}, \quad b_1 = 2 \frac{\tilde{f}_1}{n}, \quad b_2 = 2 \frac{\tilde{f}_2}{n}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{\tilde{f}_n}{n}. \quad (10)$$

В предлагаемом алгоритме дискретная ортогональность матриц $\tilde{\mathbf{T}}$ обеспечивает непосредственное вычисление интерполяционных коэффициентов без использования громоздких методов решения СЛАУ.



Вычисление недостающего коэффициента разложения по заданному дополнительному условию — начальному или граничному

Для однозначного определения недостающего коэффициента c_0 необходимо привлечение, по крайней мере, еще одного дополнительного условия. Это может быть как граничное условие на левом или на правом конце интервала рассмотрения функции, так и условие прохождения искомой функции через любую заданную точку внутри интервала задания функции.

Таким образом, рассматриваемый метод позволяет решать в зависимости от вида дополнительного условия как задачу Коши с начальными условиями, так и задачи с краевыми условиями общего вида, требующие, например, применения итерационного метода стрельбы [4] (Shooting method). Рассмотрим подробнее различные частные случаи задания дополнительного (граничного) условия, позволяющего выделить единственное решение задачи (1), (2).

В том случае, когда граничное условие задано на левом конце интервала интегрирования, нулевой коэффициент определяется из уравнения

$$c_0 + \sum_{k=1}^n c_k T_k(-1) = y_0 \quad (11)$$

(учитывая, $T_k(-1) = (-1)^k$ для $k \geq 0$) по формуле

$$c_0 = y_0 - \sum_{k=1}^n c_k T_k(-1) = y_0 - \sum_{k=1}^n c_k (-1)^k. \quad (12)$$

Если же дополнительное «граничное» условие задано в произвольной точке интервала интегрирования $y_b = y(x_b)$, $x_b \in [-1, 1]$, коэффициент c_0 определяется по формуле

$$c_0 = y_b - \sum_{k=1}^n c_k T_k(x_b). \quad (13)$$

На правом конце интервала интегрирования $y_r = y(1)$, $x_r = 1$, полиномы Чебышева любого порядка принимают значение, равное 1 ($T_k(1) = 1$). Поэтому коэффициент c_0 в этом случае определяется по формуле

$$c_0 = y_r - \sum_{k=1}^n c_k T_k(x_r) = y_r - \sum_{k=1}^n c_k. \quad (14)$$

В предлагаемом методе в любом из вариантов задания дополнительных условий недостающий коэффициент вычисляется непосредственно, без необходимости решения сложных систем уравнений или использования итерационных процессов.

2. Аппроксимация второй производной. Уравнение Пуассона

Продемонстрируем практичный и простой устойчивый метод решения одномерных дифференциальных уравнений второго порядка с различными граничными условиями на примере решения простейшего уравнения Пуассона, ограничившись уравнением с постоянными коэффициентами $k(x) \equiv 1$ и $q(x) \equiv 0$:

$$u''(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (15)$$

Рассмотрим решение задачи Пуассона с различными граничными условиями, такими как:



- условия Дирихле на обоих концах интервала

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta; \quad (16)$$

- условия Неймана – Дирихле

$$u'(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta; \quad (17)$$

- или условия Дирихле – Неймана

$$u(a) = \alpha, \quad u'(b) = \beta. \quad (18)$$

Метод решения задачи (15)–(18) для ОДУ второго порядка состоит из последовательного решения нескольких подзадач. Рассмотрим, как и в случае задачи Коши для ОДУ первого порядка, алгоритм поиска решения, состоящий из трех этапов:

- 1) вычисление коэффициентов полиномиальной интерполяции второй производной решения – вектора правой части (15) на сетке Гаусса – Лобатто;
- 2) вычисление тех коэффициентов решения (кроме двух первых), которые определяются из дифференциальных условий задачи (позволяющих решению удовлетворять дифференциальным условиям) — умножение обратной матрицы [8] на вектор интерполяционных коэффициентов;
- 3) доопределение коэффициентов решения на основе граничных (или иных независимых дополнительных) условий.

Как и в предыдущем разделе, будем представлять приближенное решение в виде конечного ряда (3) — разложения по базису из ортогональных полиномов Чебышева. И первый этап решения задачи Пуассона практически полностью совпадает с первым этапом решения задачи Коши. Изменяется лишь число вычисляемых на этом этапе коэффициентов разложения решения, обеспечивающих выполнение дифференциальной части (15) решения задачи Пуассона.

Продифференцируем дважды функцию (3). Выражение для второй производной имеет вид

$$p''(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k''(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k T_k(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (19)$$

Используя рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют чебышевские полиномы первого рода и их производные [2, 8], и приравнявая коэффициенты при одинаковых полиномах в (19), приходим [2] к следующей зависимости коэффициентов c_i , $i = 2, 3, \dots, n$ от b_k , $i = 0, \dots, n$:

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{D}^+ \mathbf{b} = \mathbf{c}, \quad (20)$$

где \mathbf{D}^+ — обобщенная обратная матрица по отношению к матрице дифференцирования Чебышева в спектральном пространстве (см. уравнение (5)). Иными словами, вектор коэффициентов c_0, c_1, \dots, c_n является результатом двукратного умножения простой трехдиагональной матрицы интегрирования \mathbf{D}^+ на вектор b_0, b_1, \dots, b_n . Алгоритм вычисления коэффициентов разложения решения по полиномам Чебышева реализуется по дважды примененным явным формулам (6) в случае вычисления второй производной.

Отличие от метода решения задачи Коши появляется на третьем этапе решения задачи Пуассона — определении двух первых коэффициентов разложения искомого



решения по полиномам Чебышева. Рассматриваемый метод позволяет решать в зависимости от вида дополнительных условий как задачи Коши с начальными условиями, так и задачи с краевыми условиями общего вида.

В случае граничных условий Дирихле (граничные условия первого рода): $p(a) = \alpha$, $p(b) = \beta$, определение остающихся пока еще неизвестными коэффициентов c_0, c_1 сводится к решению системы двух уравнений, которыми могут быть, например, уравнения, определяющие поведение решения в граничных точках: $x = \pm 1$

$$c_0 + c_1 T_{1,0}(-1) + \sum_{k=2}^n c_k T_{k,0}(-1) = \alpha, \quad c_0 + c_1 T_{1,n}(1) + \sum_{k=2}^n c_k T_{k,n}(1) = \beta. \quad (21)$$

Если дополнительно учесть тот факт, что полиномы Чебышева первого рода принимают на границе интервала значения $T_{k,j}(\pm 1) = \pm 1$, $j, k = 0, \dots$, то решение системы (21) можно записать в явном виде

$$c_0 = \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta - \sum_{k=2, k-\text{четное}}^n c_k \right), \quad c_1 = \frac{1}{2} \left(\beta - \alpha - \sum_{k=3, k-\text{нечетное}}^n c_k \right). \quad (22)$$

В случае смешанных условий Неймана – Дирихле (граничные условия второго и первого рода): $p'(a) = \alpha$, $p(b) = \beta$, коэффициенты c_0, c_1 определяются по формулам

$$c_1 = \alpha - \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} k^2 c_k, \quad c_0 = \beta - c_1 - \sum_{k=2}^n c_k, \quad (23)$$

а в случае Дирихле – Неймана –

$$c_1 = \beta - \sum_{k=2}^n k^2 c_k, \quad c_0 = \alpha - c_1 - \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} k^2 c_k. \quad (24)$$

Третий тип граничных условий встречается при моделировании процессов охлаждения и носит название условий Робена или Ньютона [12]. Их использование в качестве граничных условий приводит лишь к несколько более сложным соотношениям для определения недостающих коэффициентов по сравнению с условиями (21)–(24).

Решение 1-D уравнения Пуассона. Сравнение с точным решением

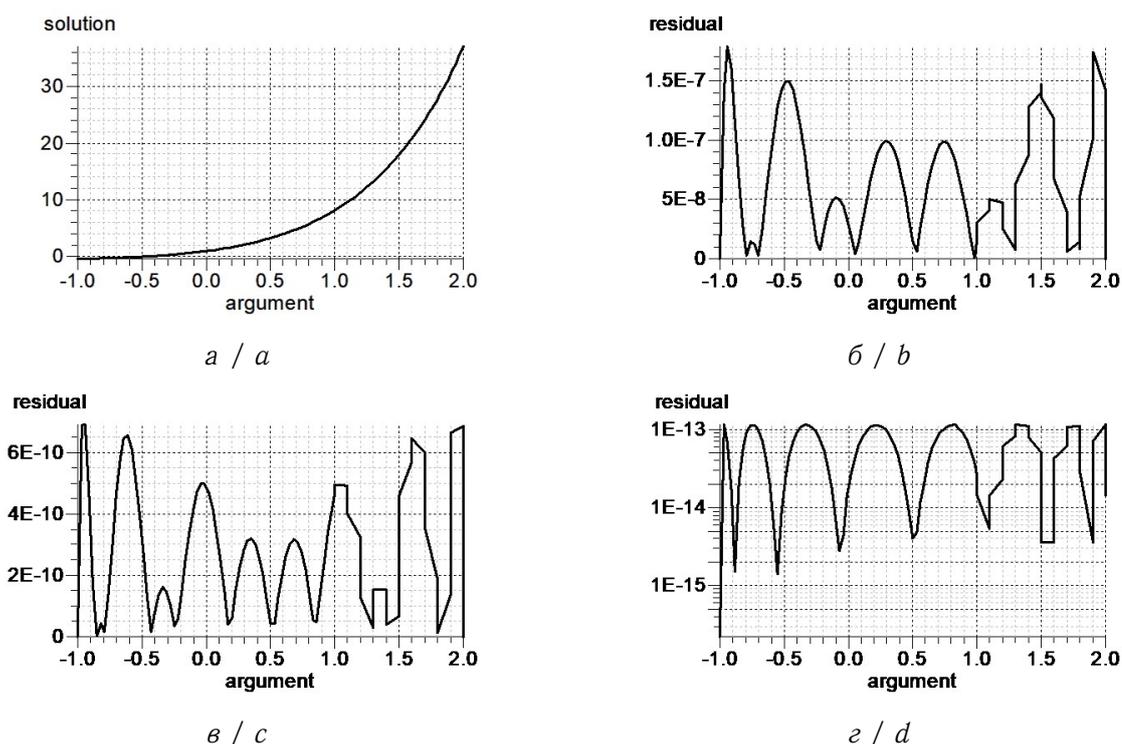
Разработанный выше метод решения уравнения Пуассона (15), (16) рассмотрим на конкретном примере. Считаем, что наше уравнение имеет вид

$$u''(x) = -(2x + 5)e^x, \quad -1 \leq x \leq 2, \quad (25)$$

а с помощью «случайно» известного точного решения $u_{exact} = (2x + 1)e^x$ граничные условия Дирихле определяются выражениями

$$u(-1) = -1/e, \quad u(2) = 5e^2. \quad (26)$$

Сравним отклонения решения, полученного с помощью изложенного выше алгоритма, от точного решения. На рисунке приводятся график решения задачи и вычисленные поточечные значения невязки в зависимости от числа точек аппроксимации n на всем интервале интегрирования.



Точность восстановления второй производной (решение уравнения Пуассона) в зависимости от количества n точек аппроксимации: а) $u_{exact} = (2x + 1)e^x$; б) residual — невязка при $n = 10$; в) residual — невязка при $n = 12$; г) Residual — невязка при $n = 15$

Figure. The accuracy of the recovery of the second derivative (solution of the Poisson equation) depending on the number of n approximation points: а) $u_{exact} = (2x + 1)e^x$; б) residual at $n = 10$; в) residual at $n = 12$; д) residual at $n = 15$

Закключение

Среди методов решения начальных и граничных задач для линейных ОДУ первого и второго порядка есть методы, основанные в основном на локальной аппроксимации решения, которые сразу используют начальное приближение (граничные условия) при решении дифференциальных уравнений. Это методы типа Эйлера, Рунге – Кутты и т. д. Другие методы, основанные на аппроксимации решения с помощью глобальных функций [1–3, 6, 10], основываются на построении таких систем уравнений, которые одновременно включают в себя как начальные (граничные) условия, так и условия, задающие поведение производных искомого решения.

В нашей работе в рамках спектрального метода коллокаций решение основной задачи представляется в виде последовательного решения нескольких подзадач. Вначале выделяется множество решений, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению. Однако оно не обязательно удовлетворяет начальным (граничным) условиям.

Учет начальных (граничных) условий осуществляется на последнем этапе решения исходной задачи и фактически сводится к решению линейного уравнения с одним неизвестным коэффициентом для ОДУ первого порядка или с двумя для уравнения второго порядка.

Решение первой задачи сводится к умножению матрицы значений функций Чебышева на сетке Гаусса – Лобатто на вектор значений функции, задающей правую часть



исходного дифференциального уравнения для определения интерполяционных коэффициентов разложения производной решения. Далее умножение двухдиагональной матрицы интегрирования [3] на вектор этих коэффициентов приводит к получению всех коэффициентов искомого решения, кроме первого (двух первых). На последнем этапе использование начального (граничного) условия дает возможность определить и первый коэффициент (два первых коэффициента) разложения решения.

Новый подход, основанный на разделении задачи решения ОДУ первого и второго порядков на отдельные подзадачи, является весьма перспективным. Авторы продолжают разработку подходов и алгоритмов применения многостадийного спектрального метода для решения начальных и краевых задач с дифференциальными уравнениями более высоких порядков.

Список литературы

1. *Boyd J. P.* Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition. Dover Books on Mathematics, 2013. 668 p.
2. *Mason J. C., Handscomb D. C.* Chebyshev Polynomials. Chapman and Hall/CRC Press, 2002. 360 p. <https://doi.org/10.1201/9781420036114>
3. *Fornberg B.* A Practical Guide to Pseudospectral Methods. New York : Cambridge University Press, 1996. 231 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511626357>
4. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. 3rd ed. New York : Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
5. *Shen J., Tang T., Wang L.-L.* Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2011. 472 p. (Springer Series in Computational Mathematics, vol. 41). <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7>
6. *Olver S., Townsend A.* A Fast and Well-Conditioned Spectral Method // SIAM Review. 2013. Vol. 55, iss. 3. P. 462–489. <https://doi.org/10.1137/120865458>
7. *Chandrasekaran S., Gu M.* Fast and Stable Algorithms for Banded Plus Semiseparable Systems of Linear Equations // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2003. Vol. 25, iss. 2. P. 373–384. <https://doi.org/10.1137/S0895479899353373>
8. *Amiraslani A., Corless R. M., Gunasingam M.* Differentiation matrices for univariate polynomials // Numerical Algorithms. 2020. Vol. 83, iss. 1. P. 1–31. <https://doi.org/10.1007/s11075-019-00668-z>
9. *Zhang X., Boyd J. P.* Asymptotic coefficients and errors for Chebyshev polynomial approximations with weak endpoint singularities: Effects of different bases // Science China Mathematics. 2023. Vol. 66, iss. 1. P. 191–220. <https://doi.org/10.1007/s11425-021-1974-x>
10. *Boyd J. P., Gally D. H.* Numerical experiments on the accuracy of the Chebyshev–Frobenius companion matrix method for finding the zeros of a truncated series of Chebyshev polynomials // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. Vol. 205, iss. 1. P. 281–295. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.05.006>
11. *Dutykh D.* A Brief Introduction to Pseudo-spectral Methods: Application to Diffusion Problems. 2019. 55 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/1606.05432> (дата обращения: 30.05.2022).
12. *Dawkins P.* Differential Equations. 2018. 524 p. URL: <https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/DE.aspx> (дата обращения: 30.05.2022).

References

1. *Boyd J. P.* Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition. Dover Books on Mathematics, 2013. 668 p.
2. *Mason J. C., Handscomb D. C.* Chebyshev Polynomials. Chapman and Hall/CRC Press, 2002. 360 p. <https://doi.org/10.1201/9781420036114>
3. *Fornberg B.* A Practical Guide to Pseudospectral Methods. New York, Cambridge University Press, 1996. 231 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511626357>
4. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* Numerical Recipes: The



- Art of Scientific Computing*. 3rd ed. New York, Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
5. Shen J., Tang T., Wang L.-L. *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer Series in Computational Mathematics, vol. 41. Berlin, Heidelberg, Springer, 2011. 472 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7>
 6. Olver S., Townsend A. A Fast and well-conditioned spectral method. *SIAM Review*, 2013, vol. 55, iss. 3, pp. 462–489. <https://doi.org/10.1137/120865458>
 7. Chandrasekaran S., Gu M. Fast and Stable Algorithms for Banded Plus Semiseparable Systems of Linear Equations. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2003, vol. 25, iss. 2, pp. 373–384. <https://doi.org/10.1137/S0895479899353373>
 8. Amiraslani A., Corless R. M., Gunasingam M. Differentiation matrices for univariate polynomials. *Numerical Algorithms*, 2020, vol. 83, iss. 1, pp. 1–31. <https://doi.org/10.1007/s11075-019-00668-z>
 9. Zhang X., Boyd J. P. Asymptotic coefficients and errors for Chebyshev polynomial approximations with weak endpoint singularities: Effects of different bases. *Science China Mathematics*, 2023, vol. 66, iss. 1, pp. 191–220. <https://doi.org/10.1007/s11425-021-1974-x>
 10. Boyd J. P., Gally D. H. Numerical experiments on the accuracy of the Chebyshev–Frobenius companion matrix method for finding the zeros of a truncated series of Chebyshev polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, vol. 205, iss. 1, pp. 281–295. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.05.006>
 11. Dutykh D. *A Brief Introduction to Pseudo-spectral Methods: Application to Diffusion Problems*, 2019. 55 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1606.05432> (accessed 30 May 2022).
 12. Dawkins P. *Differential Equations*, 2018. 524 p. Available at: <https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/DE.aspx> (accessed 30 May 2022).

Поступила в редакцию / Received 14.06.2022

Принята к публикации / Accepted 26.09.2022

Опубликована / Published 01.03.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 48–57
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 48–57
mmi.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-48-57>, EDN: GENWZC

Научная статья

УДК 517.927.21:517.911.5:51-73

О приложении качественной теории дифференциальных уравнений к одной задаче тепломассопереноса

Д. В. Туртин^{1,2}, М. А. Степович^{3✉}, В. В. Калманович³

¹Ивановский государственный университет, Россия, 153025, г. Иваново, ул. Ермака, д. 39

²Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Ивановский филиал, Россия, 153025, г. Иваново, ул. Дзержинского, д. 53

³Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского, Россия, 248023, г. Калуга, ул. Степана Разина, д. 26

Туртин Дмитрий Витальевич, кандидат физико-математических наук, ¹доцент кафедры фундаментальной математики; ²доцент кафедры менеджмента, технологий бизнеса и гуманитарных дисциплин, turtin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1789-0823>, AuthorID: 790840

Степович Михаил Адольфович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики и математики, m.stepovich@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6456-4644>, AuthorID: 149370

Калманович Вероника Валерьевна, старший преподаватель кафедры физики и математики, v572264@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0682-353X>, AuthorID: 771691

Аннотация. Изучены возможности приложения качественной теории дифференциальных уравнений к одной задаче тепломассопереноса в многослойных планарных полупроводниковых структурах. Исследование проведено на примере математической модели стационарного процесса диффузии неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных широким источником возбуждения. Использование широкого источника внешнего воздействия позволяет свести задачи моделирования к одномерным и описать эти математические модели обыкновенными дифференциальными уравнениями. Таковыми являются процессы в различных наносистемах при воздействии на них широких пучков заряженных частиц или электромагнитного излучения. В работе проведен обзор результатов исследований подобных моделей за последнее время. Основным объектом изучения явились вопросы корректности рассматриваемых математических моделей, особое внимание уделено математической оценке влияния внешних факторов на состояние изучаемого объекта. Ранее методы качественной теории дифференциальных уравнений (в нашем случае — оценка влияния внешнего воздействия на распределение неравновесных неосновных носителей заряда в результате их диффузии в полупроводнике) в сочетании с рассмотрением единственности решения дифференциальных уравнений тепломассопереноса и корректности используемых математических моделей изучались весьма редко, а для широких электронных пучков количественный анализ подобных задач ранее не проводился вовсе. В настоящей работе основное внимание уделяется влиянию правой части дифференциального уравнения, функции возбуждения неосновных носителей заряда, на решение дифференциального уравнения диффузии, которое описывает распределение неравновесных носителей заряда, диффундировавших в каждом слое такой



структуры. Доказаны единственность решения рассматриваемой задачи и непрерывная зависимость решения от правой части дифференциального уравнения. Получены оценки влияния внешних факторов на диффузию генерированных носителей в каждом слое многослойной планарной полупроводниковой структуры.

Ключевые слова: математическое моделирование, тепломассоперенос, дифференциальные уравнения, качественные оценки

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-03-00271).

Для цитирования: Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В. О приложении качественной теории дифференциальных уравнений к одной задаче тепломассопереноса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 48–57. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-48-57>, EDN: GENWZC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the application of the qualitative theory of differential equations to a problem of heat and mass transfer

D. V. Turtin^{1,2}, M. A. Stepovich^{3✉}, V. V. Kalmanovich³

¹Ivanovo State University, 39 Yermak St., Ivanovo 153025, Russia

²Plekhanov Russian University of Economics, Ivanovo branch, 53 Dzerzhinsky St., Ivanovo 153025, Russia

³Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovski, 26 Stepan Razin St., Kaluga 248023, Russia

Dmitry V. Turtin, turtin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1789-0823>, AuthorID: 790840

Mikhail A. Stepovich, m.stepovich@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6456-4644>, AuthorID: 149370

Veronika V. Kalmanovich, v572264@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0682-353X>, AuthorID: 771691

Abstract. The possibilities of applying the qualitative theory of differential equations to one problem of heat and mass transfer in multilayer planar semiconducting structures are studied. The consideration is carried out on the example of a mathematical model of a stationary process of diffusion of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide excitation source. The use of a wide source of external influence makes it possible to reduce modeling problems to one-dimensional ones and describe these mathematical models by ordinary differential equations. These are the processes in various nanosystems exposed to wide beams of charged particles or electromagnetic radiation. The paper reviews the results of recent studies of such models. The main object of study was the questions of the correctness of the considered mathematical models, special attention is paid to the mathematical assessment of the influence of external factors on the state of the object under study. Previously, the methods of the qualitative theory of differential equations, in our case, the assessment of the influence of external influence on the distribution of nonequilibrium minority charge carriers as a result of their diffusion in a semiconductor, in combination with the consideration of the uniqueness of the solution of differential equations of heat and mass transfer and the correctness of the mathematical models used, were considered very rarely, and for wide electron beams, a quantitative analysis of such problems has not previously been carried out at all. In the present work, the main attention is paid to the influence of the



right side of the differential equation, the excitation function of minority charge carriers, on the solution of the differential diffusion equation, which describes the distribution of nonequilibrium charge carriers that have diffused in each layer of such a structure. The uniqueness of the solution of the problem under consideration and the continuous dependence of the solution on the right side of the differential equation are proved. Estimates are obtained for the influence of external factors on the diffusion of generated carriers in each layer of a multilayer planar semiconductor structure.

Keywords: mathematical modeling, heat and mass transfer, differential equations, qualitative estimates

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-03-00271).

For citation: Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V. On the application of the qualitative theory of differential equations to a problem of heat and mass transfer. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 48–57 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-48-57>, EDN: GENWZC

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Задача поиска корректных краевых задач для уравнений смешанного типа в многослойных областях приводит к краевым задачам со смещением [1–4]. Среди подобных задач задачи тепломассопереноса являются одними из наиболее востребованных классов задач, имеющих различные практические приложения. При этом особое значение имеет математическая оценка влияния внешних факторов на состояние изучаемого объекта, поскольку далеко не всегда имеется возможность их экспериментального контроля. Таковыми являются процессы в различных наносистемах при воздействии на них пучков заряженных частиц или электромагнитного излучения. В настоящей работе качественная теория дифференциальных уравнений [5] использована для анализа математических моделей стационарной диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) [6, 7], генерированных широким внешним источником в многослойных полупроводниковых материалах. Использование такого внешнего воздействия, например широких электронных пучков, позволяет свести задачи моделирования к одномерным и описать эти математические модели обыкновенными дифференциальными уравнениями [8, 9]. Ранее методы качественной теории дифференциальных уравнений (в нашем случае — оценка влияния внешнего воздействия на распределение ННЗ в результате их диффузии в полупроводнике) в сочетании с рассмотрением единственности решения дифференциальных уравнений тепломассопереноса и корректности используемых математических моделей [10, 11] изучались весьма редко. Наиболее подробно такие задачи исследовались для остро сфокусированных пучков электронов: моделировалась нестационарная диффузия неравновесных ННЗ в методе времяпролетной катодолюминесценции полупроводников, проводилась оценка влияния изменений во внешнем воздействии на распределение ННЗ и доказательство корректности рассматриваемой модели [12, 13]. Однако для широких электронных пучков количественный анализ подобных задач ранее не проводился, пожалуй, за исключением рассмотрения некоторых аспектов диффузии ННЗ в однородной полупроводниковой мишени [14]. Что касается диффузии ННЗ в многослойных планарных структурах, то для таких объектов обсуждались лишь некоторые частные возможности такого анализа [15].



Изучение информативных возможностей качественной теории дифференциальных уравнений применительно к диффузии НЗ в многослойных планарных структурах конечной толщины и составляет предмет рассмотрения в настоящей работе.

1. Постановка задачи

Пусть оси X и Y декартовой прямоугольной системы координат находятся на плоской поверхности полупроводника, а ось Z направлена в объем полупроводниковой мишени. Для рассматриваемой многослойной структуры обозначим: $z_1 = 0$, $z_{n+1} = l$ — координаты внешних границ полупроводниковой структуры, z_2, z_3, \dots, z_n — координаты границ раздела слоев. Пусть номер слоя будет совпадать с номером его левой границы — таким образом, структура будет состоять из следующих слоев: первый слой $[z_1, z_2]$, второй слой $[z_2, z_3]$ и т. д., последний, n -й слой, $[z_n, z_{n+1}]$. У параметров, характеризующих каждый слой, номер слоя будем указывать в верхнем индексе в скобках. С учетом этого обозначим как $D^{(i)}$, $L^{(i)}$, $\tau^{(i)}$ электрофизические параметры: коэффициент диффузии, диффузионную длину и время жизни НЗ в i -м слое соответственно, при этом $L^{(i)} = [D^{(i)}\tau^{(i)}]^{1/2}$ и все параметры — положительные величины [6, 7]. На границах полупроводника (при $z = z_1 = 0$ и при $z = z_{n+1} = l$) приведенные скорости поверхностной рекомбинации $S^{(1)} = L^{(1)}\nu_s^{(1)}/D^{(1)}$, $S^{(n)} = L^{(n)}\nu_s^{(n)}/D^{(n)}$, где $\nu_s^{(1)}$ и $\nu_s^{(n)}$ — скорости поверхностной рекомбинации НЗ на поверхности первого слоя (при $z = z_1 = 0$) и на поверхности n -го слоя (при $z = z_{n+1} = l$) соответственно [8, 9].

Тогда в случае одномерной диффузии в конечный полупроводник вдоль оси Z , перпендикулярной поверхности планарной n -слойной полупроводниковой структуры (координата $z \in [0, l]$), распределение НЗ, генерированных в i -м слое и продиффундировавших в этом слое, $\Delta p^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, находится как решение следующего дифференциального уравнения (см. [15] и библиографию к этой статье):

$$\frac{d}{dz} \left(D^{(i)}(z) \frac{d\Delta p^{(i)}(z)}{dz} \right) - \frac{\Delta p^{(i)}(z)}{\tau^{(i)}(z)} = -\rho^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$D^{(1)} \frac{d\Delta p^{(1)}(z)}{dz} \Big|_{z=0} = \nu_s^{(1)} \Delta p^{(1)}(0), \quad D^{(n)} \frac{d\Delta p^{(n)}(z)}{dz} \Big|_{z=l} = -\nu_s^{(n)} \Delta p^{(n)}(l). \quad (2)$$

Правая часть дифференциального уравнения (1) — $\rho^{(i)}(z)$ — зависимость от координаты скорости генерации НЗ в i -м слое полупроводниковой мишени, $\rho^{(i)}(z) > 0 \forall z \in [0, l]$ и $i = \overline{1, n}$. Для широкого электронного пучка $\rho^{(i)}(z)$ может быть найдена из выражения для плотности энергии электронного пучка $\rho^{*(i)}(z)$, выделяемой в мишени в единицу времени до начала процесса диффузии, делением $\rho^{*(i)}(z)$ на энергию образования электронно-дырочной пары (см. [15] и библиографию к этой статье).

Решение дифференциального уравнения (1), функция $\Delta p^{(i)}(z)$, описывает в i -м слое распределение по глубине неравновесных НЗ, генерированных внешним энергетическим воздействием $\rho^{(i)}(z)$, после их диффузии в полупроводнике. С учетом непрерывности распределений НЗ по глубине всей структуры и зависимости коэффициентов уравнения от номера слоя распределение $\Delta p(z)$ будет являться непрерывной и кусочно-дифференцируемой функцией.

В настоящей работе методами математического моделирования продолжено исследование диффузионного процесса, обусловленного взаимодействием широкого



электронного пучка с планарной полупроводниковой структурой. Основное внимание уделяется влиянию правой части дифференциального уравнения, функции возбуждения ННЗ $\rho^{(i)}(z)$, на решение дифференциального уравнения диффузии $\Delta p^{(i)}(z)$, описывающего распределение продиффундировавших неравновесных ННЗ в i -м слое ($i = \overline{1, n}$) такой структуры.

2. О решении дифференциального уравнения одномерной диффузии

Рассмотрим диффузию ННЗ в многослойной мишени, в которой внутри каждого слоя коэффициент диффузии $D^{(i)}$ и время жизни ННЗ $\tau^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$ — величины постоянные. В этом случае дифференциальное уравнение диффузии ННЗ в i -м слое примет вид

$$D^{(i)}(z) \frac{d^2 \Delta p^{(i)}(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p^{(i)}(z)}{\tau^{(i)}(z)} = -\rho^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2 \Delta p^{(i)}(z)}{dz^2} - \frac{1}{\tau^{(i)}(z) D^{(i)}(z)} \Delta p^{(i)}(z) = -\frac{1}{D^{(i)}(z)} \rho^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}.$$

или

$$y_i''(z) - b_i^2 y_i(z) = f_i(z), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $y_i(z) \equiv \Delta p^{(i)}(z)$, а постоянные b_i^2 и f_i равны:

$$b_i^2 = \frac{1}{\tau^{(i)}(z) D^{(i)}(z)} > 0, \quad f_i(z) = -\frac{\rho^{(i)}(z)}{D^{(i)}(z)} < 0,$$

причем $b_i = \text{const} > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$.

Для первой производной граничные условия запишем в виде

$$\begin{cases} y_i'(z_i) = a_i y_i(z_i), & i = \overline{1, n}, \\ y_n'(z_{n+1}) = a_{n+1} y_n(z_{n+1}). \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что граничному условию на поверхности первого слоя при $z = z_1 = 0$ (см. первую формулу из (2)) отвечает первое соотношение из (4) при $i = 1$. А вторая формула из (4) отвечает второму граничному условию из (2) при $z = z_{n+1} = l$. Что касается соотношений, получаемых из первой формулы (4) при $i = \overline{2, n}$, то эти соотношения могут быть учтены исходя из физической природы многослойной структуры [6, 7] и здесь не рассматриваются.

В силу непрерывности $y(z)$ на границе слоев

$$y_i(z_{i+1}) = y_{i+1}(z_{i+1}), \quad i = \overline{1, n-1} \quad (5)$$

и из физических соображений добавим условие

$$y_1(0) = g_1, \quad (6)$$

где $g_1 = \text{const} \geq 0$.

В формулах (3) и (4) a_i и b_i — постоянные, $i = \overline{1, n}$. Для рассматриваемой задачи b_i определено выше, два значения постоянной a_i определяются из граничных условий (2), а $0 = z_1 < z_2 < \dots < z_n = l$ — точки разбиения отрезка $[0, l]$.



Теорема 1. Решениями уравнения (3) являются функции

$$y_i(z) = a_{1i} \exp(b_i z) + a_{2i} \exp(-b_i z) + \frac{1}{b_i} \int_{z_i}^z f_i(t) \operatorname{sh} [b_i (z - t)] dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где a_{1i} и a_{2i} ($i = \overline{1, n}$) — произвольные постоянные.

Доказательство. Для нахождения решений (3) используем метод вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$y_i(z) = C_{1i}(z) \exp(b_i z) + C_{2i}(z) \exp(-b_i z), \quad (8)$$

где $C_{1i}(z)$ и $C_{2i}(z)$ — искомые функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} C'_{1i}(z) \exp(b_i z) + C'_{2i}(z) \exp(-b_i z) = 0, \\ C'_{1i}(z) b_i \exp(b_i z) - C'_{2i}(z) b_i \exp(-b_i z) = f_i(z). \end{cases} \quad (9)$$

Из (9) получим $C'_{1i}(z) = f_i(z) \exp(-b_i z) / 2b_i$ и $C'_{2i}(z) = -f_i(z) \exp(b_i z) / 2b_i$, откуда

$$\begin{aligned} C_{1i}(z) &= \frac{1}{2b_i} \int_{z_i}^z f_i(t) \exp(-b_i t) dt + a_{1i}, \quad i = \overline{1, n}, \\ C_{2i}(z) &= -\frac{1}{2b_i} \int_{z_i}^z f_i(t) \exp(b_i t) dt + a_{2i}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Подставив найденные функции $C_{1i}(z)$ и $C_{2i}(z)$ в (8), получим формулу (7).

Теорема 1 доказана. □

3. О единственности решения

Подставив функцию (7) в граничные условия (4)–(6), получим систему рекурсивных уравнений для нахождения постоянных a_{1i} и a_{2i} , $i = \overline{1, n}$. Используя формулу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, при вычислении производной от функции $y_i(z)$, $i = \overline{1, n}$ получим

$$\begin{aligned} y'_i(z) &= a_{1i} b_i \exp(b_i z) - a_{2i} b_i \exp(-b_i z) + \frac{1}{b_i} f_i(z) \operatorname{sh}(0) + \frac{1}{b_i} \int_{z_i}^z f_i(t) b_i \operatorname{ch} [b_i (z - t)] dt = \\ &= a_{1i} b_i \exp(b_i z) - a_{2i} b_i \exp(-b_i z) + \int_{z_i}^z f_i(t) \operatorname{ch} [b_i (z - t)] dt, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Подставив $y_i(z)$ и $y'_i(z)$, $i = \overline{1, n}$, последовательно в (6), (4), (5), получим:

1) из (6)

$$a_{11} + a_{21} = g_1,$$

2) из (4)

$$a_{1i} b_i \exp(b_i z) - a_{2i} b_i \exp(-b_i z) = a_i [a_{1i} \exp(b_i z_i) + a_{2i} \exp(-b_i z_i)],$$



откуда

$$a_{1i}(b_i - a_i) \exp(b_i z) = a_{2i}(a_i + b_i) \exp(-b_i z),$$

3) из (5)

$$\begin{aligned} & a_{1i} \exp(b_i z) + a_{2i} \exp(-b_i z) = \\ & = a_{1,i+1} \exp(b_{i+1} z_i) + a_{2,i+1} \exp(-b_{i+1} z_i) + \frac{1}{b_i} \int_{z_{i+1}}^{z_i} f_{i+1}(t) \operatorname{sh}[b_{i+1}(z_i - t)] dt. \end{aligned}$$

Теорема 2. Решение задачи (3)–(6) единственно.

Доказательство. Пусть $u_i(z)$ и $v_i(z)$, $i = \overline{1, n}$ — два различных решения задачи (3)–(6). Рассмотрим функцию $w_i(z) = u_i(z) - v_i(z)$, которая удовлетворяет однородному уравнению

$$w_i''(z) - b_i^2 w = 0 \quad (10)$$

с граничными условиями

$$w_1(0) = 0, \quad (11)$$

$$w_i'(z_i) = a_i w_i(z_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

$$w_i(z_i) = w_{i+1}(z_i), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (13)$$

Решением уравнения (10) является функция

$$w_i(z) = C_{1i} \exp(b_i z) + C_{2i} \exp(-b_i z), \quad i = \overline{1, n}.$$

Из (12), (13) имеем

$$\begin{cases} C_{1i} b_i \exp(b_i z_i) - C_{2i} b_i \exp(-b_i z_i) = a_i [C_{1i} \exp(b_i z_i) + C_{2i} \exp(-b_i z_i)], & i = \overline{1, n}, \\ C_{1i} \exp(b_i z_i) + C_{2i} \exp(-b_i z_i) = C_{1,i+1} \exp(b_i z_i) + C_{2,i+1} \exp(-b_i z_i), & i = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (14)$$

Положив в (14) $i = 1$ и учтя, что $z_1 = 0$ и $b_1 = \text{const} \neq 0$, получим

$$\begin{cases} b_1(C_{11} - C_{21}) = a_1(C_{11} + C_{21}), \\ C_{11} + C_{21} = C_{12} + C_{22}. \end{cases}$$

Из (11) получим, что $C_{11} + C_{21} = 0$. Тогда, с учетом $a_1 = \text{const}$ и $b_1 = \text{const} \neq 0$, получим $C_{11} = C_{21} = 0$, откуда следует $w_1(z) = 0$. Повторив аналогичные рассуждения для $i = \overline{2, n}$, получим $w_i(z) = 0$ для всех $i = \overline{1, n}$. Отсюда следует, что $u_i(z) = v_i(z)$ для всех $i = \overline{1, n}$. Полученное противоречие доказывает единственность решения задачи (3)–(6).

Теорема 2 доказана. \square

4. О непрерывной зависимости решения от правой части дифференциального уравнения

Теорема 3. Пусть в i -м слое, $i = \overline{1, n}$, $y_i^{(1)}(z)$ — решение дифференциального уравнения

$$[y_i^{(1)}(z)]'' - b_i^2 y_i(z) = f_i^{(1)}(z)$$



с граничными условиями (4)–(6), $y_i^{(2)}(z)$ — решение в том же слое дифференциального уравнения

$$[y_i^{(2)}(z)]'' - b_i^2 y_i(z) = f_i^{(2)}(z)$$

с теми же граничными условиями (4)–(6) и для всех $z : z_i \leq z \leq z_{i+1}$, $i = \overline{1, n}$, выполняется

$$\left| f_i^{(2)}(z) - f_i^{(1)}(z) \right| \leq \delta. \quad (15)$$

Тогда $\forall z : z_i \leq z \leq z_{i+1}$ в i -м слое справедлива оценка

$$\left| y_i^{(2)}(z) - y_i^{(1)}(z) \right| \leq C_i \delta,$$

где $C_i = \{ \text{ch} [b_i (z_{i+1} - z_i)] - 1 \} / b_i^2$.

Доказательство. Из теоремы 1 для i -го слоя, $i = \overline{1, n}$, получим

$$y_i^{(2)}(z) = a_{1i} \exp(b_i z) + a_{2i} \exp(-b_i z) + \frac{1}{b_i} \int_{z_i}^z f_i^{(2)}(t) \text{sh} [b_i (z - t)] dt,$$

$$y_i^{(1)}(z) = a_{1i} \exp(b_i z) + a_{2i} \exp(-b_i z) + \frac{1}{b_i} \int_{z_i}^z f_i^{(1)}(t) \text{sh} [b_i (z - t)] dt.$$

Отсюда

$$y_i^{(2)}(z) - y_i^{(1)}(z) = \frac{1}{b_i} \int_{z_i}^z [f_i^{(2)}(t) - f_i^{(1)}(t)] \text{sh} [b_i (z - t)] dt.$$

С учетом оценки (15) получим

$$\left| y_i^{(2)}(z) - y_i^{(1)}(z) \right| = \frac{1}{|b_i|} \left| \int_{z_i}^z [f_i^{(2)}(t) - f_i^{(1)}(t)] \text{sh} [b_i (z - t)] dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|b_i|} \left| \int_{z_i}^z \delta \text{sh} [b_i (z - t)] dt \right| = \frac{\delta}{b_i^2} \{ -1 + \text{ch} [b_i (z - z_i)] \} \leq \delta \times \{ \text{ch} [b_i (z_{i+1} - z_i)] - 1 \} / b_i^2.$$

Теорема 3 доказана. □

Заключение

Рассмотрены проблемы математического моделирования и качественного анализа процессов взаимодействия источника внешнего воздействия с многослойными планарными полупроводниковыми структурами. Использование широкого источника внешнего воздействия позволило свести задачу моделирования к одномерной и описать математическую модель в каждом слое структуры обыкновенным дифференциальным уравнением. Использование методов качественной теории дифференциальных уравнений позволило оценить влияние правой части дифференциального уравнения, функции возбуждения неосновных носителей заряда в многослойной полупроводниковой структуре, на решение дифференциального уравнения диффузии, описывающего



распределение продиффундировавших неравновесных носителей заряда в каждом слое такой структуры. Доказаны единственность решения рассматриваемой задачи и непрерывная зависимость решения от правой части дифференциального уравнения. Получены оценки влияния внешних факторов на диффузию генерированных носителей в каждом слое многослойной планарной полупроводниковой структуры. Обобщая этот результат на произвольное, но конечное число слоев, получено, что малому изменению правой части дифференциального уравнения диффузии отвечает малое изменение его решения, что позволяет говорить о корректности рассматриваемой задачи для многослойной структуры.

Список литературы

1. *Нахушев А. М.* О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
2. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.
3. *Нахушев А. М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 92–101.
4. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. Москва : Наука, 2006. 287 с.
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1947. 448 с.
6. *Бонч-Бруевич В. Л., Калашиников С. Г.* Физика полупроводников: учебное пособие. Москва : Наука, 1990. 686 с.
7. *Смит Р.* Полупроводники. Москва : Мир, 1982. 560 с.
8. *Wittry D. B., Kyser D. F.* Measurements of diffusion lengths in direct-gap semiconductors by electron beam excitation // Journal of Applied Physics. 1967. Vol. 38, iss. 1. P. 375–382. <https://doi.org/10.1063/1.1708984>
9. *Rao-Sahib T. S., Wittry D. B.* Measurements of diffusion lengths in *p*-type gallium arsenide by electron beam excitation // Journal of Applied Physics. 1969. Vol. 40, iss. 9. P. 3745–3750. <https://doi.org/10.1063/1.1658265>
10. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1964. 272 с.
11. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1965. 332 с.
12. *Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V.* Mathematical model of qualitative properties of exciton diffusion generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, iss. 2. P. 259–262. <https://doi.org/10.1134/S199508021802021X>
13. *Turtin D. V., Seregina E. V., Stepovich M. A.* Qualitative analysis of a class of differential equations of heat and mass transfer in a condensed material // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2020. Vol. 259, iss. 1. P. 166–174. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-05008-4>
14. *Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В., Картанов А. А.* О корректности математических моделей диффузии и катодолюминесценции // Таврический вестник информатики и математики. 2021. № 1 (50). С. 81–100. <https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-81-100>, EDN: CJKSHG
15. *Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А.* Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Известия РАН. Серия физическая. 2020. Т. 84, № 7. С. 1020–1026. <https://doi.org/10.31857/S0367676520070133>



References

1. Nakhushev A. M. On some new boundary value problems for hyperbolic equations and mixed type equations. *Differential Equations*, 1969, vol. 5, iss. 1, pp. 44–59 (in Russian).
2. Nakhushev A. M. New boundary value problem for one degenerate hyperbolic equation. *Doklady Mathematics*, 1969, vol. 187, iss. 4, pp. 736–739 (in Russian).
3. Nakhushev A. M. On Nonlocal Boundary Value Problems with Displacement and Their Relationship with Loaded Equations. *Differential Equations*, 1985, vol. 21, iss. 1, pp. 92–101 (in Russian).
4. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006. 287 p. (in Russian).
5. Nemitskii V. V., Stepanov V. V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* [Qualitative Theory of Differential Equations]. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1947. 448 p. (in Russian).
6. Bonch-Bruevich V. L., Kalashnikov S. G. *Fizika poluprovodnikov* [The Physics of Semiconductors]. Moscow, Nauka, 1990. 686 p. (in Russian).
7. Smith R. A. *Semiconductors*. 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1978. 523 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1982. 560 p.).
8. Wittry D. B., Kyser D. F. Measurements of diffusion lengths in direct-gap semiconductors by electron beam excitation. *Journal of Applied Physics*, 1967, vol. 38, iss. 1, pp. 375–382. <https://doi.org/10.1063/1.1708984>
9. Rao-Sahib T. S., Wittry D. B. Measurements of diffusion lengths in *p*-type gallium arsenide by electron beam excitation. *Journal of Applied Physics*, 1969, vol. 40, iss. 9, pp. 3745–3750. <https://doi.org/10.1063/1.1658265>
10. Petrovskii I. G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1964. 272 p. (in Russian).
11. Pontryagin L. S. *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965. 332 p. (in Russian).
12. Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V. Mathematical model of qualitative properties of exciton diffusion generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, iss. 2, pp. 259–262. <https://doi.org/10.1134/S199508021802021X>
13. Turtin D. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. Qualitative Analysis of a Class of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in a Condensed Material. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2020, vol. 259, iss. 1, pp. 166–174. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-05008-4>
14. Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V., Kartanov A. A. On the correctness of mathematical models of diffusion and cathodoluminescence. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2021, iss. 1 (50), pp. 81–100 (in Russian). <https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-81-100>, EDN: CJKSHG
15. Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. Mathematical modeling of heat and mass transfer phenomena caused by interaction between electron beams and planar semiconductor multilayers. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2020, vol. 84, iss. 7, pp. 844–850. <https://doi.org/10.3103/S1062873820070138>

Поступила в редакцию / Received 26.02.2022

Принята к публикации / Accepted 11.07.2022

Опубликована / Published 01.03.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 58–69
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 58–69
mmi.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-58-69>, EDN: UYQLJS

Научная статья
УДК 517.54

Задача Римана на луче для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией

П. Л. Шабалин[✉], Р. Р. Фаизов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 420043, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Шабалин Павел Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, pavel.shabalin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2791-3964>, AuthorID: 14693

Фаизов Рафаэль Рустамович, аспирант кафедры высшей математики, rafael.faizov@yandex.com, <https://orcid.org/0000-0003-4744-164X>, AuthorID: 1130264

Аннотация. В данной работе изучается неоднородная краевая задача Римана с конечным индексом и краевым условием на луче для одного обобщенного уравнения Коши – Римана с сингулярным коэффициентом. Для решения этой задачи выведена формула общего решения обобщенного уравнения Коши – Римана при ограничениях, приводящих к бесконечному индексу логарифмического порядка у сопутствующей задачи для аналитических функций. Получена формула общего решения задачи Римана и проведено полное исследование существования и числа решений краевой задачи для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией.

Ключевые слова: задача Римана, обобщенные аналитические функции, бесконечный индекс, целые функции уточненного нулевого порядка

Для цитирования: Шабалин П. Л., Фаизов Р. Р. Задача Римана на луче для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 58–69. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-58-69>, EDN: UYQLJS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

The Riemann problem on a ray for generalized analytic functions with a singular line

P. L. Shabalin[✉], R. R. Faizov

Kazan State University of Architecture and Engineering, 1 Zelenaya St., Kazan 420043, Russia

Pavel L. Shabalin, pavel.shabalin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2791-3964>, AuthorID: 14693

Rafael R. Faizov, rafael.faizov@yandex.com, <https://orcid.org/0000-0003-4744-164X>, AuthorID: 1130264



Abstract. In this paper, we study an inhomogeneous Riemann boundary value problem with a finite index and a boundary condition on a ray for a generalized Cauchy – Riemann equation with a singular coefficient. For the solution of this problem, we derived a formula for the general solution of the generalized Cauchy – Riemann equation under constraints that led to an infinite index of logarithmic order of the accompanying problem for analytical functions. We have obtained a formula for the general solution of the Riemann problem and conducted a complete study of the existence and the number of solutions of a boundary value problem for generalized analytic functions with a singular line.

Keywords: Riemann problem, generalized analytical functions, infinite index, integer functions of refined zero order

For citation: Shabalin P. L., Faizov R. R. The Riemann problem on a ray for generalized analytic functions with a singular line. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 58–69 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-58-69>, EDN: UYQLJS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В плоскости \mathbb{C} комплексного переменного $z = x + iy = re^{i\theta}$ рассмотрим область D , границей которой служит луч $\Gamma = \{z : \operatorname{Re} z > 1, \operatorname{Im} z = 0\}$, и мнимую ось $L = \{z : \operatorname{Re} z = 0\}$. В области D рассмотрим частный случай обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной линией L

$$\partial_{\bar{z}}U - A(z)U = F(z), \quad A(z) = \frac{a(z)}{\bar{z} + z}. \quad (1)$$

Для решений $U(z)$ этой системы в области D исследуем задачу Римана с краевым условием на луче Γ

$$U^+(t) = G(t)U^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2)$$

с непрерывными по Гельдеру всюду на Γ , включая бесконечно удаленную точку, функциями $\ln G(t)$ и $g(t)$. В формуле (2) $U^+(t)$, $U^-(t)$ – предельные значения функции $U(z)$ при $z \rightarrow t$ слева и справа, т.е. при $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ соответственно. Решение краевой задачи проведем с использованием структурной формулы общего решения системы (1). Эту формулу выведем при достаточно общих ограничениях, приводящих к бесконечному индексу сопутствующей краевой задачи для аналитических функций.

Теория обобщенных аналитических функций с регулярными коэффициентами построена И. Н. Векуа (см. [1] и библиографию). Решению обобщенной системы Коши – Римана

$$\partial_{\bar{z}}U + A(z)U + B(z)\bar{U} = F(z),$$

коэффициенты которой обращаются в бесконечность степенного порядка на некоторой линии L (L – сингулярная линия), и изучению краевых задач для ее решений посвящены работы [2–11] и др. Метод построения решений такой системы основан на купировании сингулярной линии семейством областей с последующим предельным переходом в последовательности построенных решений. Интересное развитие этого подхода к решению обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной и сверхсингулярной линией в конечной односвязной области с гладкой границей разработано в статье А. Б. Расулова и А. П. Солдатова [11]. Полученное решение применено к



изучению задачи, объединяющей черты задач линейного сопряжения и Гильберта. Аналогичный подход был применен для решения задачи типа Гильберта в [12].

Следует отметить, что в приведенных выше работах рассматривались задачи, приводящиеся к краевым задачам теории аналитических функций с конечным индексом. А. Б. Расулов обратил внимание на то, что при решении краевой задачи с конечным индексом для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией она может трансформироваться в аналогичную задачу теории аналитических функций, но с бесконечным индексом. Эта ситуация описана в работе [13] для задачи Римана на полуокружности и задачи Римана и Римана – Гильберта на гладком замкнутом контуре [14]. Приведены формулы общего решения и обсуждается разрешимость краевых задач.

Начало исследования задачи Римана в случае бесконечного индекса для аналитических функций было положено Н. В. Говоровым. Его результаты по краевой задаче Римана с бесконечным индексом степенного порядка с краевым условием на гладком разрезе составили содержание монографии [15] и инициировали развитие тематики краевых задач с бесконечным индексом. Этой проблеме посвящен ряд работ других авторов. Широкое развитие данной тематики содержится в монографии [16]. Задача Римана с бесконечным индексом на криволинейном контуре рассмотрена в [17]. Задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на гладком разрезе была исследована П. Г. Юровым [18, 19].

1. Решение эллиптической системы

Следуя [11], мы будем предполагать, что для $A(z)$ существует такая аналитическая в D , ограниченная в \bar{D} функция $a_0(z)$, что

$$A_0(z) := \frac{a(z) - a_0(z)}{\bar{z} + z} \in L_{p,2}(D), \quad p > 2. \quad (3)$$

Граничные значения функции $a_0(z)$, т. е. функции $a_0^+(x)$, $a_0^-(x)$, будем считать непрерывными по Гельдеру всюду на Γ , включая бесконечно удаленную точку, в которой они принимают чисто мнимые значения. Кроме того, на функцию $a_0(z)$ дополнительно налагаем следующие ограничения:

$$|a_0(z) - a_0(-\bar{z})| \leq K(|z + \bar{z}|^\alpha), \quad x \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4)$$

$$a_0(z) = O(|z|^{-\gamma}), \quad z \rightarrow +\infty, \quad \gamma > 0, \quad y \neq 0, \quad (5)$$

$$a_0(z) = O(|z|), \quad z \rightarrow 0. \quad (6)$$

Отметим, что мы несколько ослабили ограничения из [11] на функции $a_0(z)$, отказавшись от непрерывности $a_0(z)$ на Γ и требования обращения в нуль функции $a_0(z)$ в точках пересечения контура Γ и сингулярной линии. Эти изменения при решении краевой задачи приведут к случаю бесконечного индекса при редукции к аналогичной задаче теории аналитических функций.

Выведем формулу общего решения уравнения (1) в области D методом из работы [11]. Пусть ε малое положительное число, $E_{1/\varepsilon}$ — круг радиуса $1/\varepsilon$ с центром в начале координат. Введем области $D_\varepsilon^\pm = E_{1/\varepsilon} \cap \{z : \pm \operatorname{Re} z > \varepsilon\} \cap D$. Граница области D_ε^- состоит из части полуокружности $\gamma_{1/\varepsilon}^-$ и вертикального отрезка L_ε^- . Граница области D_ε^+ состоит из части полуокружности $\gamma_{1/\varepsilon}^+$, вертикального отрезка L_ε^+ и разреза Γ_ε по лучу Γ . Теперь введем открытое множество $D_\varepsilon = D_\varepsilon^- \cup D_\varepsilon^+$.



Обозначим символом $T_\varepsilon A$ интегральный оператор Векуа по объединению областей D_ε . Нам нужно убедиться, что $(T_\varepsilon A)(z)$, $z \in K$, равномерно сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к пределу $\Omega(z)$ на любом компакте K , $K \in D_\varepsilon^- \cup D_\varepsilon^+$, причем $\partial_z \Omega(z) = A(z)$, $z \in K$. Следуя [11], представим $T_\varepsilon A$ в виде

$$(T_\varepsilon A)(z) = (T_\varepsilon A_0)(z) - I_\varepsilon(z), \quad I_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon} \frac{a_0(\zeta)}{\bar{\zeta} + \zeta} \cdot \frac{d_2 \zeta}{\zeta - z},$$

причем последний интеграл понимаем как

$$I_\varepsilon(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{D_{\varepsilon, \delta}} \frac{a_0(\zeta)}{\bar{\zeta} + \zeta} \cdot \frac{d_2 \zeta}{\zeta - z}, \quad D_{\varepsilon, \delta} = D_\varepsilon \cap \{|\zeta - z| \geq \delta\}.$$

Правую часть равенства преобразуем по формуле Грина

$$\frac{1}{\pi} \int_{D_{\varepsilon, \delta}} \frac{a_0(\zeta)}{\bar{\zeta} + \zeta} \cdot \frac{d_2 \zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial D_\varepsilon^-} + \int_{\partial D_\varepsilon^+} \right) \frac{a_0(t) \ln |t + \bar{t}|}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-t|=\delta} \frac{a_0(t) \ln |t + \bar{t}|}{t - z} dt.$$

После перехода к пределу по $\delta \rightarrow 0$ получим

$$I_\varepsilon(z) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial D_\varepsilon^-} + \int_{\partial D_\varepsilon^+} \right) \frac{a_0(t) \ln |t + \bar{t}|}{(t - z)} dt - a_0(z) \ln |z + \bar{z}|. \quad (7)$$

Поскольку начало координат не принадлежит областям D_ε^- , D_ε^+ , формулу (7) с учетом теоремы Коши перепишем так:

$$I_\varepsilon(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon^-} \left(\frac{\ln |t + \bar{t}|}{t - z} - \frac{\ln(-2t)}{t} \right) a_0(t) dt - \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon^+} \left(\frac{\ln |t + \bar{t}|}{t - z} - \frac{\ln(2t)}{t} \right) a_0(t) dt - a_0(z) \ln |z + \bar{z}|. \quad (8)$$

Пусть $z = x + iy$ — фиксированная точка из компакта K и $z \in D_\varepsilon^+$. Выберем ε настолько малым, чтобы выполнялись неравенства $|z| < 1/\varepsilon$, $\operatorname{Re} z > \varepsilon$. Рассмотрим входящие в правую часть формулы (8) криволинейные интегралы. Для интеграла по дуге окружности $\gamma_{1/\varepsilon}^+$ с использованием условия (5) выводим оценку

$$\left| \int_{\gamma_{1/\varepsilon}^+} \frac{a_0(t) \ln |t + \bar{t}|}{(t - z)} dt \right| = \left| \left(\int_{-\arccos \varepsilon^2}^0 + \int_0^{\arccos \varepsilon^2} \right) \ln \left(\frac{2 \cos \theta}{\varepsilon} \right) \frac{a(e^{i\theta}/\varepsilon)}{e^{i\theta}/\varepsilon - z} \cdot \frac{ie^{i\theta} d\theta}{\varepsilon} \right| \leq \\ \leq \frac{C\varepsilon^\gamma}{(1 - \varepsilon|z|)} \ln \frac{2}{|\varepsilon|}.$$

Аналогичные неравенства получаем и для остальных интегралов по дугам окружностей. Таким образом, имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\left(\int_{\gamma_{1/\varepsilon}^-} + \int_{\gamma_{1/\varepsilon}^+} \right) a_0(t) \left(\frac{\ln|t + \bar{t}|}{t - z} - \frac{\ln(\pm 2t)}{t} \right) dt = O\left(\varepsilon^\gamma \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (9)$$

Теперь рассмотрим криволинейный интеграл из (7) по $L_\varepsilon^-, L_\varepsilon^+$, который представим в виде

$$\left(\int_{L_\varepsilon^-} + \int_{L_\varepsilon^+} \right) \frac{a_0(t) \ln|t + \bar{t}|}{t - z} dt = i \ln(2\varepsilon) \int_{-\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \left[\frac{a_0(-\varepsilon + i\eta)}{-\varepsilon + i\eta - z} - \frac{a_0(\varepsilon + i\eta)}{\varepsilon + i\eta - z} \right] d\eta.$$

Отсюда с привлечением условия (4) и ограниченности функции $a_0(t)$ выводим

$$\left| \left(\int_{L_\varepsilon^-} + \int_{L_\varepsilon^+} \right) \frac{a_0(t) \ln|t + \bar{t}|}{(t - z)} dt \right| = O\left(\varepsilon^\alpha \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

Такое же соотношение получим при $\varepsilon \rightarrow 0$ и для суммы интегралов

$$\begin{aligned} & \left(\int_{L_\varepsilon^-} + \int_{L_\varepsilon^+} \right) a_0(t) \frac{\ln(\mp 2t)}{t} dt = \\ & = \int_{-\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \left[\frac{a_0(-\varepsilon + i\eta)}{-\varepsilon + i\eta} \ln(2\varepsilon - i2\eta) - \frac{a_0(\varepsilon + i\eta)}{\varepsilon + i\eta} \ln(2\varepsilon + i2\eta) \right] d\eta. \end{aligned}$$

Правую часть последней формулы перепишем так:

$$\begin{aligned} \left(\int_{L_\varepsilon^-} + \int_{L_\varepsilon^+} \right) a_0(t) \frac{\ln(\mp 2t)}{t} dt &= \int_{-\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \ln(2\varepsilon - i2\eta) \left[\frac{a_0(-\varepsilon + i\eta)}{-\varepsilon + i\eta} - \frac{a_0(\varepsilon + i\eta)}{\varepsilon + i\eta} \right] d\eta + \\ &+ \int_{-\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} a_0(\varepsilon + i\eta) \frac{\ln(2\varepsilon - i2\eta)/(2\varepsilon + i2\eta)}{\varepsilon + i\eta} d\eta. \end{aligned}$$

Модуль первого слагаемого оценивается с использованием условия (4) и ограниченности функции $a_0(z)$ величиной $O\left(\varepsilon^\alpha \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Оценим по модулю второе слагаемое

$$\left| \int_{-\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} a_0(\varepsilon + i\eta) \frac{\ln(2\varepsilon - i2\eta)/(2\varepsilon + i2\eta)}{\varepsilon + i\eta} d\eta \right| \leq$$



$$\leq 2 \left(\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \right) \frac{|a_0(\varepsilon + i\eta)| \operatorname{arctg}(\varepsilon/\eta)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}} d\eta.$$

С использованием условия (6) имеем

$$\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{|a_0(\varepsilon + i\eta)| \operatorname{arctg}(\varepsilon/\eta)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}} d\eta = O\left(\sqrt{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

С учетом неравенства $|a_0(z)| \leq C$ для некоторой постоянной C простой оценкой интеграла получим

$$\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \frac{|a_0(\varepsilon + i\eta)| \operatorname{arctg}(\varepsilon/\eta)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}} d\eta \leq C\sqrt{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}.$$

Таким образом, получена следующая асимптотическая формула:

$$\left(\int_{L_\varepsilon^-} + \int_{L_\varepsilon^+} \right) a_0(t) \frac{\ln(\mp 2t)}{t} dt = O\left(\varepsilon^\beta \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \beta = \min\{\alpha, 1/2\}. \quad (11)$$

Наконец, для интеграла по обоим берегам разреза $\Gamma_\varepsilon = \{t, 1 < t < 1/\varepsilon\}$ имеем

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^-} \frac{z a_0^-(t) \ln(2t)}{t(t-z)} dt + \int_{\Gamma_\varepsilon^+} \frac{z a_0^+(t) \ln(2t)}{t(t-z)} dt = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{z(a_0^+(t) - a_0^-(t)) \ln(2t)}{t(t-z)} dt. \quad (12)$$

Здесь $a_0^-(t)$, $a_0^+(t)$ — краевые значения аналитической функции $a_0(z)$ на левом и правом берегах разреза.

В равенстве (8), принимая во внимание оценки (9)–(11) и формулу (12), переходим к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированном $z \in K$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(z) = -\frac{z}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{(a_0^+(t) - a_0^-(t)) \ln(2t)}{t(t-z)} dt - a_0(z) \ln|z + \bar{z}|.$$

Вблизи бесконечно удаленной точки имеем [19]

$$\begin{aligned} -\frac{z}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{(a_0^-(t) - a_0^+(t)) \ln|2t|}{t(t-z)} dt &= -\frac{a_0^-(+\infty) - a_0^+(+\infty)}{4\pi i} \ln^2 z - \\ &- \frac{a_0^-(+\infty) - a_0^+(+\infty)}{2} \ln z + O(1), \quad |z| \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, доказано, что при условиях (4)–(6) функция $I_\varepsilon^+(z)$ равномерно сходится на компакте к пределу (11) и $\partial_{\bar{z}}\Omega(z) = A(z)$, $z \in K$.



Следовательно (см. [11]), если выполнены условия (3)–(6) и $(e^{-\Omega}F)(z) \in L_{p,2}(\overline{D})$, то общее решение уравнения (1) в области D в классе функций с ограниченным произведением $U(z)e^{-\Omega(z)}$ задается формулами вида

$$U(z) = e^{\Omega(z)}[(T(e^{-\Omega}F))(z) + \phi(z)], \quad (14)$$

где функция

$$\Omega(z) = (TA_0)(z) + \frac{z}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{(a_0^-(t) - a_0^+(t)) \ln 2t}{t(t-z)} dt + a_0(z) \ln |z + \bar{z}|, \quad (15)$$

интегральный оператор Векуа

$$(TA_0)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{A_0^+(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D,$$

действует [1] из $L_{p,2}(D)$, $p > 2$, в класс Гельдера $H(\overline{D})$, функция $\phi(z)$ аналитична в области D .

2. Решение задачи Римана

Для функции $U(z)$, удовлетворяющей уравнению (1) в D , рассмотрим задачу Римана с краевым условием

$$U^+(t) = G(t)U^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (16)$$

где $G(t)$ и $g(t)$ непрерывны по Гельдеру всюду на Γ , включая бесконечно удаленную точку. Привлекая формулы (14), перепишем краевое условие (16) в виде краевого условия задачи Римана для аналитической в области D функции $\phi(z)$

$$\begin{aligned} \phi^+(t) &= G_1(t)\phi^-(t) + g_1(t), \quad t \in \Gamma, \quad G_1(t) = \frac{e^{\Omega^-(t)}G(t)}{e^{\Omega^+(t)}}, \\ g_1(t) &= \frac{g(t)}{e^{\Omega^+(t)}} + \frac{G(t)e^{\Omega^-(t)}T(e^{-\Omega^-}F^-)(t)}{e^{\Omega^+(t)}} - T(e^{-\Omega^+}F^+)(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим односторонние пределы функции $a_0^\pm(x)$ в бесконечности символами $a_0^\pm(+\infty) = i\nu^\pm$. В соответствии с равенствами (15), (13) для функции $\Omega(z)$ вблизи бесконечно удаленной точки справедлива формула

$$\Omega(z) = \frac{\nu^- - \nu^+}{4\pi} \ln^2 z + i \frac{\nu^- - \nu^+}{2} \ln z + a_0(z) \ln |z + \bar{z}| + O(1), \quad |z| \rightarrow +\infty.$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \Omega^+(t) &= \frac{\nu^- - \nu^+}{4\pi} \ln^2 t + i \frac{\nu^- + \nu^+}{2} \ln t + O(1), \quad t \rightarrow +\infty, \\ \Omega^-(t) &= \frac{\nu^- - \nu^+}{4\pi} \ln^2 t + i \frac{3\nu^- - \nu^+}{2} \ln t + O(1), \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$



С учетом приведенной асимптотики из формулы (17) получим

$$\begin{aligned} \arg G_1(t) &= (\nu^- - \nu^+) \ln t + \varphi(t), \quad t \in (1, +\infty), \quad \varphi(t) \in H_{(1,+\infty)}, \\ \ln |G_1(t)| &= \psi(t), \quad \psi(t) \in H_{(1,+\infty)}, \\ g_1(t) &= \exp \left\{ \frac{\nu^+ - \nu^-}{4\pi} \ln^2 t - i \frac{\nu^- + \nu^+}{2} \ln t \right\} O(1). \end{aligned} \quad (18)$$

Вместе с задачей (17) рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$\phi^+(t) = G_1(t)\phi^-(t). \quad (19)$$

Нас интересует ситуация, когда функции $\ln |G_1(t)|$, $g_1(t)$ непрерывны по Гельдеру на $(1, +\infty)$, включая бесконечно удаленную точку, а индекс краевой задачи Римана (18) равен $+\infty$, поэтому будем считать выполненными условия

$$\begin{cases} \nu^- + \nu^+ \leq 0, \\ \nu^- - \nu^+ \geq 0. \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом, задачу (16) сводим к краевой задаче Римана (17) на разрезе для аналитических функций с бесконечным индексом и завихрением в бесконечно удаленной точке логарифмического порядка. Полное решение этой задачи проведено П. Г. Юровым в [18] (см. также [20]) и традиционно представлено в виде суммы частного решения неоднородной задачи (17) и общего решения соответствующей однородной задачи (19). Формулу последнего мы позаимствуем из более поздней работы [20] как более наглядную. Именно в [20] общее решение задачи (19) с краевым условием на разрезе по положительной действительной полуоси с началом в точке с координатой, равной единице для функции, аналитической и ограниченной в комплексной плоскости с разрезом, представлено формулой

$$\begin{aligned} \phi(z) &= e^{(\nu^+ - \nu^-)T_*(z)/4\pi} X(z)f(z), \quad X(z) = e^{\Gamma(z)}, \\ T_*(z) &:= \begin{cases} T(z), & \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \bar{T}(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln[G_1(\tau)e^{(\nu^- - \nu^+) \operatorname{Re} T(\tau)/2\pi}] \frac{d\tau}{\tau - z}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $T(z) := (\ln(z+i) - i\pi)^2$, под $(\ln(z) - i\pi)^2$ будем понимать непрерывную однозначную ветвь, аналитическую в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, кроме точек $z = 0$, $z = 1$. Наконец, $f(z)$ – произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию

$$|f(t)| < Ce^{(\nu^- - \nu^+) \operatorname{Re} T(t)/4\pi}, \quad t \in \Gamma. \quad (22)$$

Следовательно, множество решений однородной краевой задачи Римана (19) зависит от множества целых функций нулевого порядка, удовлетворяющих условию (22). Именно [18] если $\nu^- - \nu^+ < 0$, то однородная задача (19) неразрешима в классе ограниченных аналитических функций, при $\nu^- - \nu^+ = 0$ задача (19) имеет единственное решение вида (21), где $f(z) = \text{const}$. Если $\nu^- - \nu^+ > 0$, то однородная задача (19) имеет бесконечно много решений, заданных формулой (21), в которой $f(z)$ – произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию (22).



Формулу частного решения $\phi_0(z)$ неоднородной задачи (17) возьмем из работы П. Г. Юрова [18]

$$\phi_0(z) = \frac{f_0(z)X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_1(\tau)d\tau}{f_0(\tau)X^+(\tau)(\tau - z)}, \quad X_1(z) = \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G_1(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} \right\},$$

где

$$f_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_k} \right), \quad n_{f_0}(r) = \left[\frac{1}{2} + \frac{\nu^- - \nu^+}{2\pi} \ln r \right],$$

все нули функции $f_0(z)$ лежат на отрицательной полуоси, $n_{f_0}(r)$ — считающая функция нулей целой функции $f_0(z)$, а $[x]$ обозначает целую часть числа x .

Таким образом, общее решение неоднородной задачи (17) в случае $\nu^- - \nu^+ > 0$ можно представить формулой

$$\phi(z) = \frac{X_1(z)f_0(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_1(\tau)d\tau}{f_0(\tau)X^+(\tau)(\tau - z)} + X(z)e^{(\nu^+ - \nu^-)T_*(z)/4\pi} f(z), \quad (23)$$

в которой $f(z)$ — произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию (22).

Если $\nu^- - \nu^+ = 0$, то задача (17) имеет единственное решение, представленное формулой (23) с $f(z) = \text{const}$.

Если $\nu^- - \nu^+ < 0$, то задача (17) имеет [18] единственное решение

$$\phi(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_1(\tau)d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau - z)}$$

при выполнении следующей системы условий:

$$\int_{\Gamma} \frac{f_0(\tau)}{X_1^+(\tau)} \cdot \frac{g_1(\tau)d\tau}{\tau + r_k} = 0, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

На основании изложенного выше получается следующая

Теорема. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия (3)–(6) и $(e^{-\Omega}F)(z) \in L_{p,2}(\overline{D})$, $p > 2$, односторонние пределы на бесконечности функции $a_0^{\pm}(x)$ удовлетворяют системе неравенств (20). Тогда если $\nu^- - \nu^+ > 0$, то неоднородная задача Римана (16) имеет бесконечное множество решений в классе функций $U(z)$, удовлетворяющих уравнению (1) в области D с ограниченным произведением $U(z)e^{-\Omega(z)}$. Общее решение задачи (16) представляется формулой (14) с $\phi(z)$ в виде (21), в которой $f(z)$ — произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию (22). Если $\nu^- - \nu^+ = 0$, то неоднородная задача Римана имеет единственное решение, представимое формулой (14) с $\phi(z)$ в виде (21), в которой $f(z) = \text{const}$.

Список литературы

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. Москва : Наука, 1988. 507 с.
2. Михайлов Л. Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе : Таджик-НИИТИ, 1963. 183 с.



3. *Раджабов Н. Р.* Интегральные представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями : в 2 ч. Ч. 1. Душанбе : Таджикский гос. ун-т, 1980. 147 с.
4. *Раджабов Н. Р.* Интегральные представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями : в 2 ч. Ч. 2. Душанбе : Таджикский гос. ун-т, 1981. 170 с.
5. *Раджабов Н. Р.* Интегральные представления и граничные задачи для обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной линией // Доклады Академии наук СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 300–305. URL: <https://mi.mathnet.ru/dan45725> (дата обращения: 02.08.2022).
6. *Раджабов Н. Р., Расулов А. Б.* Интегральные представление и граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярным многообразием // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1279–1981. URL: <https://mi.mathnet.ru/de6927> (дата обращения: 02.08.2022).
7. *Усманов З. Д.* Обобщенные системы Коши – Римана с сингулярной точкой. Душанбе : ТаджикНИИТИ, 1993. 245 с.
8. *Begehr H., Dao-Qing Dai.* On continuous solutions of a generalized Cauchy – Riemann system with more than one singularity // Journal of Differential Equations. 2004. Vol. 196, iss. 1. P. 67–90. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.07.013>
9. *Meziani A.* Representation of solutions of a singular CR equation in the plane // Complex Variables and Elliptic Equations. 2008. Vol. 53, iss. 12. P. 1111–1130. URL: <https://doi.org/10.1080/17476930802509239> (дата обращения: 02.08.2022).
10. *Расулов А. Б.* Представления многообразия решений и исследование краевых задач для некоторых обобщенных систем Коши – Римана с одной и двумя сингулярными линиями // Известия АН Тадж. ССР. Серия физико-математических, химических и геологических наук. 1982. № 2 (84). С. 23–32.
11. *Расулов А. Б., Солдатов А. П.* Краевая задача для обобщенного уравнения Коши – Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 637–650. <https://doi.org/10.1134/S0374064116050083>
12. *Федоров Ю. С., Расулов А. Б.* Задачи типа Гильберта для уравнения Коши – Римана с сингулярными окружностью и точкой в младших коэффициентах // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 1. С. 140–144. <https://doi.org/10.31857/S0374064121010143>
13. *Расулов А. Б.* Задача Римана на полуокружности для обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной линией // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 9. С. 1290–1292. <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0015-7>
14. *Расулов А. Б.* Интегральные представления и задача линейного сопряжения для обобщенной системы Коши – Римана с сингулярным многообразием // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 270–275. <https://doi.org/10.1007/BF02754217>
15. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. Москва : Наука, 1986. 240 с.
16. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях. Москва : Физматлит, 2003. 416 с. EDN: UGLDLN
17. *Островский И. В.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом на криволинейном контуре // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1991. №. 56. С. 95–105.
18. *Юров П. Г.* Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $\alpha \geq 1$ // Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам. Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1970. С. 279–284.
19. *Юров П. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа // Известия высших учебных заведений. Математика. 1966. № 2. С. 158–163. URL: <https://mi.mathnet.ru/ivm2700> (дата обращения: 02.08.2022)



20. Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н. Решение однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на луче новым методом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 160–171. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171>

References

1. Vekua I. N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka, 1988. 507 p. (in Russian).
2. Mikhailov L. G. *Novye klassy osobykh integral'nykh uravneniy i ikh primeneniye k differentsial'nykh uravneniyam s singulyarnymi koeffitsiyentami* [New Classes of Singular Integral Equations and Their Application to Differential Equations with Singular Coefficients]. Dushanbe, TadjikNIINTI, 1963. 183 p. (in Russian).
3. Radzhabov N. R. *Integralnye predstavleniya i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsial'nykh uravneniy s singuliarnoy liniyey ili singuliarnymi poverkhnostyami* [Integral Representations and Boundary Value Problems for Some Differential Equations with Singular Line or Singular Surfaces]. Vol. 1. Dushambe, Tadjikskiy gosuniversitet Publ., 1980. 147 p. (in Russian).
4. Radzhabov N. R. *Integral'nye predstavleniya i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsial'nykh uravneniy s singuliarnoi liniyey ili s singuliarnymi poverkhnostyami* [Integral Representations and Boundary Value Problems for Some Differential Equations with Singular Line or Singular Surfaces]. Vol. 2. Dushambe, Tadjikskiy gosuniversitet Publ., 1981. 170 p. (in Russian).
5. Radzhabov N. R. Integral representations and boundary value problems for the generalized Cauchy – Riemann system with a singular line. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1982, vol. 267, iss. 2, pp. 300–305 (in Russian). Available at: <https://mi.mathnet.ru/dan45725> (accessed 2 August 2022).
6. Radzhabov N. R., Rasulov A. B. Integral representations and boundary value problems for a class of systems of differential equations of elliptic type with singular manifolds. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1989, vol. 25, iss. 7, pp. 1279–1981 (in Russian). Available at: <https://mi.mathnet.ru/de6927> (accessed 2 August 2022).
7. Usmanov Z. D. *Generalized Cauchy – Riemann Systems with a Singular Point*. New York, Routledge, 1997. 232 p. (Russ. ed.: Dushambe, TadjikNIINTI, 1993. 245 p.). <https://doi.org/10.1201/9780203753750>
8. Begehr H., Dao-Qing Dai. On continuous solutions of a generalized Cauchy – Riemann system with more than one singularity. *Journal of Differential Equations*, 2004, vol. 196, iss. 1, pp. 67–90. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.07.013>
9. Meziani A. Representation of solutions of a singular CR equation in the plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2008, vol. 53, iss. 12, pp. 1111–1130. Available at: <https://doi.org/10.1080/17476930802509239> (accessed 2 August 2022).
10. Rasulov A. B. Representation of the variety of solutions and investigation of the boundary value problems for some generalized Cauchy – Riemann systems with one and two singular lines. *Izvestiya AN Tadjh. SSR. Seriya fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh i geologicheskikh nauk*, 1982, iss. 4 (84), pp. 23–32 (in Russian).
11. Rasulov A. B., Soldatov A. P. Boundary value problem for a generalized Cauchy – Riemann equation with singular coefficients. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, iss. 5, pp. 616–629. <https://doi.org/10.1134/S0374064116050083>
12. Fedorov Iu. S., Rasulov A. B. Hilbert type problem for a Cauchy – Riemann equation with singularities on a circle and at a point in the lower-order coefficients. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, iss. 1, pp. 127–131. <https://doi.org/10.1134/S0012266121010122>



13. Rasulov A. B. The Riemann problem on a semicircle for a generalized Cauchy – Riemann system with a singular line. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, iss. 9, pp. 1364–1366. <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0015-7>
14. Rasulov A. B. Integral representations and the linear conjugation problem for a generalized cauchy-riemann system with a singular manifold. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, iss. 2, pp. 306–312. <https://doi.org/10.1007/BF02754217>
15. Govorov N. V. *Riemann's Boundary Problem with Infinite Index*. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 67. Berlin, Birkhauser Basel, 1994. 263 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8506-5> (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1986. 240 p.).
16. Monakhov V. N., Semenko E. V. *Kraevye zadachi i psevdodifferentsial'nye operatory na rimanovykh poverkhnostyakh* [Boundary Value Problems and Pseudodifferential Operators on Riemann Surfaces]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 416 p. (in Russian). EDN: UGLDLN
17. Ostrovskii I. V. Homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index on a curved contour. *Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications*, 1991, iss. 56, pp. 95–105 (in Russian).
18. Yurov P. G. Inhomogeneous Riemann boundary value problem with infinite index of logarithmic order $\alpha \geq 1$. In: *Materialy Vsesoyuznoy konferentsii po kraevym zadacham* [Materials of the All-Union Conference on Boundary Value Problems]. Kazan, Kazan State University Publ., 1970, pp. 279–284 (in Russian).
19. Yurov P. G. The homogeneous Riemann boundary value problem with an infinite index of logarithmic type. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1966, iss. 2, pp. 158–163 (in Russian). Available at: <https://mi.mathnet.ru/ivm2700> (accessed 2 August 2022).
20. Salimov R. B., Khasanova E. N. The solution of the homogeneous boundary value problem of Riemann with infinite index of logarithmic order on the beam by a new method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 160–171 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171>

Поступила в редакцию / Received 09.08.2022

Принята к публикации / Accepted 26.09.2022

Опубликована / Published 01.03.2023

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 70–82
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 70–82

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-70-82>

EDN: SWEWSQ

Научная статья
УДК 539.3

О физических уравнениях деформируемого тела на шаге нагружения с реализацией на основе смешанного МКЭ

Н. А. Гуреева¹, Р. З. Киселева^{2✉}, Ю. В. Клочков²,
А. П. Николаев², В. В. Рябуха²

¹Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, 125993, ГСП-3, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 49

²Волгоградский государственный аграрный университет, Россия, 400002, г. Волгоград, Университетский проспект, д. 26

Гуреева Наталья Анатольевна, доктор физико-математических наук, доцент, доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>, AuthorID: 306195

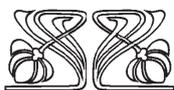
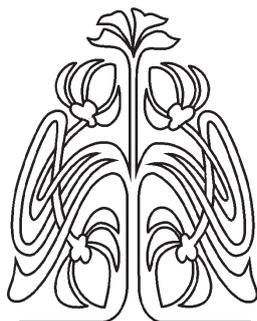
Киселева Румия Зайдуллаевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, rumia1970@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3047-5256>, AuthorID: 573150

Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>, AuthorID: 161677

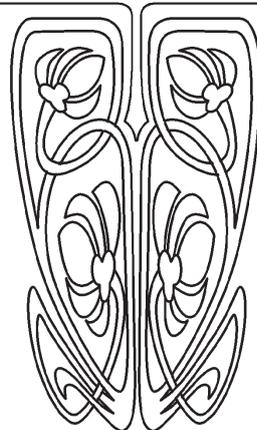
Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, AuthorID: 161676

Рябуха Виталий Васильевич, аспирант, vitalik30090@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7394-8885>, AuthorID: 1175851

Аннотация. Для получения матрицы деформирования призматического конечного элемента на шаге нагружения с учетом физической нелинейности использованы три варианта физических уравнений. В первом варианте реализованы определяющие уравнения теории пластического течения, согласно которой приращение деформаций разделяется на упругую



Научный
отдел





и пластическую части. Приращения упругих деформаций связаны с приращениями напряжений законом Гука. Связь приращений пластических деформаций с приращениями напряжений определяется на основе гипотезы о пропорциональности компонент тензора приращений пластических деформаций компонентам девиатора напряжений. Во втором варианте компоненты тензора приращений пластических деформаций получены на основе предложенной гипотезы о пропорциональности этих компонент компонентам девиатора приращений напряжений на шаге нагружения. В этом варианте так же, как и в первом варианте, принята гипотеза о несжимаемости материала при пластическом деформировании. В третьем варианте определяющие уравнения на шаге нагружения получены на основе предложенной гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций компонентам девиатора приращений напряжений без разделения приращений деформаций на упругую и пластическую части. Коэффициент пропорциональности оказался функцией хордового модуля диаграммы деформирования. Гипотеза о несжимаемости материала при пластическом деформировании не принималась, а реализована зависимость между первыми инвариантами тензоров деформаций и тензоров напряжений, получаемая из эксперимента. Для сравнения с первым и вторым вариантами определяющих уравнений эта зависимость между первыми инвариантами тензоров деформаций и напряжений определена по формуле упругого деформирования. В качестве конечного элемента принят призматический элемент с треугольными основаниями. В качестве узловых неизвестных приняты приращения перемещений и приращения напряжений. Аппроксимация искомых величин метода конечных элементов в смешанной формулировке через узловые значения осуществлялась с использованием линейных функций. Матрица напряженно-деформированного состояния представлена на основе смешанного функционала, полученного из физического выражения равенства возможных и действительных работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения с заменой действительной работы внутренних сил разностью полной и дополнительной работы внутренних сил. На примере расчета показано адекватное соответствие в результатах расчета на основе рассмотренных вариантов физических соотношений и отмечена предпочтительность предложенного третьего варианта определяющих уравнений теории пластичности.

Ключевые слова: определяющие уравнения пластичности, девиаторы приращений деформаций, девиаторы приращений напряжений, смешанный МКЭ

Для цитирования: Гуреева Н. А., Киселева Р. З., Клочков Ю. В., Николаев А. П., Рябуха В. В. О физических уравнениях деформируемого тела на шаге нагружения с реализацией на основе смешанного МКЭ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 70–82. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-70-82>, EDN: SWEWSQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the physical equations of a deformable body at the loading step with implementation based on a mixed FEM

N. A. Gureeva¹, R. Z. Kiseleva^{2✉}, Yu. V. Klochkov², A. P. Nikolaev²,
V. V. Ryabukha²

¹Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prospekt, GSP-3, Moscow 125993, Russia

²Volgograd State Agricultural University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd 400002, Russia

Natalia A. Gureeva, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>, AuthorID: 306195



Rumiya Z. Kiseleva, rumial1970@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3047-5256>, AuthorID: 573150

Yuri V. Klochkov, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>, AuthorID: 161677

Anatoly P. Nikolaev, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, AuthorID: 161676

Vitaly V. Ryabukha, vitalik30090@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7394-8885>, AuthorID: 1175851

Abstract. To obtain the deformation matrix of the prismatic finite element at the loading step, taking into account the physical nonlinearity, three variants of physical equations were used. In the first variant, the defining equations of the theory of plastic flow are implemented, according to which the increment of deformations is divided into elastic and plastic parts. The increment of elastic deformations is related to the increments of stresses by Hooke's law. The relationship of plastic strain increments with stress increments is determined based on the hypothesis of the proportionality of the components of the plastic strain increment tensor to the components of the stress deviator. In the second variant, the components of the plastic strain increment tensor are obtained on the basis of the proposed hypothesis about the proportionality of these components to the components of the stress increment deviator at the loading step. In this variant, as well as in the first variant, the hypothesis of incompressibility of the material during plastic deformation is accepted. In the third variant, the defining equations at the loading step were obtained on the basis of the proposed hypothesis about the proportionality of the components of the deformation increment deviator to the components of the stress increment deviator without dividing the deformation increments into elastic and plastic parts. The proportionality coefficient turned out to be a function of the chord modulus of the deformation diagram. The hypothesis of incompressibility of the material during plastic deformation was not accepted, but the dependence between the first invariants of strain tensors and stress tensors obtained from the experiment was realized. For comparison with the first and second variants of the defining equations, this dependence between the first invariants of strain and stress tensors is determined by the elastic deformation formula. A prismatic element with triangular bases is adopted as the finite element. Displacement increments and stress increments are taken as nodal unknowns. Approximation of the desired values of the finite element method, in a mixed formulation through nodal values, was carried out using linear functions. The stress-strain state matrix is presented on the basis of a mixed functional obtained from the physical expression of the equality of the possible and actual work of external and internal forces at the loading step with the replacement of the actual work of internal forces by the difference of the full and additional work of internal forces. The calculation example shows an adequate correspondence in the calculation results based on the considered variants of the physical relations and the preference of the third variant of the defining equations of the theory of plasticity is noted.

Keywords: defining plasticity equations, deformation increment deviators, stress increment deviators, mixed FEM

For citation: Gureeva N. A., Kiseleva R. Z., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P., Ryabukha V. V. On the physical equations of a deformable body at the loading step with implementation based on a mixed FEM. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 70–82 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-70-82>, EDN: SWEWSQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В реальных инженерных конструкциях всегда имеются зоны, в которых при нагружении возникает концентрация напряжений. Поэтому уже при нагрузках, далеких от предельных, в них возникают напряжения, превышающие предел текучести. Сле-



довательно, определение напряженного состояния с учетом пластических деформаций в ограниченных зонах является актуальной инженерной задачей.

При расчете инженерных конструкций за пределом упругости наиболее часто используется теория пластического течения и теория малых упругопластических деформаций [1–3]. Для реализации соотношений теории пластичности используется численный метод конечных элементов как в формулировке метода перемещений [4–6], так и в смешанной формулировке [7].

В настоящей работе на основе призматического конечного элемента в смешанной формулировке в первом варианте реализованы определяющие уравнения теории пластического течения и два варианта физических уравнений на шаге нагружения, полученные на основе предложенных гипотез.

Определяющие уравнения теории течения состоят из приращений упругих деформаций и деформаций пластических. Приращения упругих деформаций определяются законом Гука. Приращения пластических деформаций определяются на основе гипотезы о пропорциональности приращений пластических деформаций компонентам девиатора напряжений.

Во втором варианте для получения приращений пластических деформаций использовалась гипотеза о пропорциональности приращений пластических деформаций компонентам девиатора приращений напряжений. В третьем варианте без разделения деформаций на упругие и пластические части получены определяющие уравнения на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций компонентам девиатора приращений напряжений без ограничительного предположения о несжимаемости материала при пластическом деформировании.

1. Методы исследования

1.1. Деформированное состояние в точке тела на шаге нагружения

Приращения деформаций $\Delta\varepsilon_{xx}$, $\Delta\varepsilon_{yy}$, $\Delta\varepsilon_{zz}$, $\Delta\gamma_{xy}$, $\Delta\gamma_{xz}$, $\Delta\gamma_{yz}$ в зависимости от приращений перемещений Δu , Δv , Δw на шаге нагружения определяются в геометрически линейной постановке [8, 9]:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial\Delta u}{\partial x}, & \Delta\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial\Delta v}{\partial y}, & \Delta\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial\Delta w}{\partial z}, \\ \Delta\gamma_{xy} &= \frac{\partial\Delta u}{\partial y} + \frac{\partial\Delta v}{\partial x}, & \Delta\gamma_{xz} &= \frac{\partial\Delta u}{\partial z} + \frac{\partial\Delta w}{\partial x}, & \Delta\gamma_{yz} &= \frac{\partial\Delta v}{\partial z} + \frac{\partial\Delta w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения (1) записываются в матричном виде

$$\{\Delta\varepsilon\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \{\Delta\omega\}_{3 \times 1}, \quad (2)$$

где $\{\Delta\varepsilon\}_{1 \times 6}^T = \{\Delta\varepsilon_{xx}, \Delta\varepsilon_{yy}, \Delta\varepsilon_{zz}, \Delta\gamma_{xy}, \Delta\gamma_{xz}, \Delta\gamma_{yz}\}$ — матрица-строка приращения деформаций, $\{\Delta\omega\}_{1 \times 3}^T = \{\Delta u, \Delta v, \Delta w\}$ — строка приращений перемещений, $[L]_{6 \times 3}$ — матрица дифференциальных операторов.

1.2. Физические уравнения на шаге нагружения

1.2.1. Физические уравнения теории пластического течения

Согласно этой теории приращения деформаций представляются суммой приращений упругих и приращений пластических деформаций:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^e + \Delta\varepsilon_{ij}^p. \quad (3)$$

Приращения упругих деформаций определяются законом Гука [1]:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx}^e &= \frac{1}{E}(\Delta\sigma_{xx} - \nu\Delta\sigma_{yy} - \nu\Delta\sigma_{zz}), \\ \Delta\varepsilon_{yy}^e &= \frac{1}{E}(\Delta\sigma_{yy} - \nu\Delta\sigma_{xx} - \nu\Delta\sigma_{zz}), \\ \Delta\varepsilon_{zz}^e &= \frac{1}{E}(\Delta\sigma_{zz} - \nu\Delta\sigma_{xx} - \nu\Delta\sigma_{yy}), \\ 2\Delta\varepsilon_{xy}^e &= \frac{1+\nu}{E}\Delta\sigma_{xy}, \quad 2\Delta\varepsilon_{xz}^e = \frac{1+\nu}{E}\Delta\sigma_{xz}, \quad 2\Delta\varepsilon_{yz}^e = \frac{1+\nu}{E}\Delta\sigma_{yz}, \end{aligned} \quad (4)$$

где E — модуль упругости материала при растяжении, ν — коэффициент поперечной деформации.

Приращения пластических деформаций определяются в теории пластического течения на основе гипотезы о пропорциональности приращений пластических деформаций компонентам девиатора полных напряжений:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \frac{\Delta\varepsilon_i^p}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_c), \quad (5)$$

где $\Delta\varepsilon_i^p$ — приращение интенсивности пластических деформаций, σ_i — интенсивность напряжений, δ_{ij} — символ Кронекера, $\sigma_c = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ — среднее значение нормальных напряжений.

Приращение интенсивности пластических деформаций, входящее в (5), определяется разностью [1]:

$$\Delta\varepsilon_i^p = \Delta\varepsilon_i - \Delta\varepsilon_i^e = \frac{\Delta\sigma_i}{E_x} - \frac{\Delta\sigma_i}{E_n} = \Delta\sigma_i \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E_n} \right), \quad (6)$$

где $\Delta\varepsilon_i$ — приращение интенсивности деформаций, $\Delta\varepsilon_i^e$ — приращение интенсивности упругих деформаций, E_x — хордовый модуль диаграммы деформирования материала, E_k — касательный модуль диаграммы деформирования, E_n — модуль начального участка диаграммы деформирования, $\Delta\sigma_i$ — приращение интенсивности напряжений.

Входящая в (6) величина приращения интенсивности напряжений $\Delta\sigma_i$ определяется дифференцированием величины

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2)]^{1/2}$$

в таком общем виде:

$$\sigma_i = \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{xx}}\Delta\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{yy}}\Delta\sigma_{yy} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{zz}}\Delta\sigma_{zz} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{xy}}\Delta\sigma_{xy} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{xz}}\Delta\sigma_{xz} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{yz}}\Delta\sigma_{yz}. \quad (7)$$



соотношения между полными приращениями деформаций и приращениями напряжений на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций компонентам девиатора приращений напряжений:

$$\Delta\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\Delta\varepsilon_c = \frac{3}{2} \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta\sigma_i} (\Delta\sigma_{ij} - \delta_{ij}\Delta\sigma_c), \tag{13}$$

где $\Delta\varepsilon_i$ — приращение интенсивности деформаций, $\frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta\sigma_i} = \frac{1}{E_x}$, E_x — хордовый модуль диаграммы деформирования, $\Delta\varepsilon_c = \frac{1}{3}(\Delta\varepsilon_{xx} + \Delta\varepsilon_{yy} + \Delta\varepsilon_{zz})$.

Следует отметить, что в (13) используется зависимость $\Delta\varepsilon_c = k\Delta\sigma_c$, получаемая из эксперимента без использования гипотезы о несжимаемости материала.

Если предположить, как в (9) и (12), что материал несжимаем при пластических деформациях, т.е.

$$\Delta\varepsilon_c = \frac{1 - 2\nu}{E} \Delta\sigma_c, \tag{14}$$

то можно сформировать матричное выражение

$$\{\Delta\varepsilon\}_{6 \times 1} = \{C_3\}_{6 \times 6} \{\Delta\sigma\}_{6 \times 1}. \tag{15}$$

1.3. Матрица деформирования призматического конечного элемента

Основаниями призматического конечного элемента являются произвольные треугольники с узлами i, j, k для нижнего основания и с узлами m, n, p для основания верхнего. В качестве узловых неизвестных приняты приращения перемещений и приращения напряжений. Для выполнения численного интегрирования по объему конечного призматического элемента дискретизации он отображается на локальную призму с основаниями в виде равнобедренных треугольников, координаты которых изменялись в пределах $0 \leq \xi, \eta \leq 1$, а координата по высоте призмы изменялась в пределах $-1 \leq \zeta \leq 1$. Аппроксимация координат x, y, z , приращений перемещений $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, а также приращений напряжений $\Delta\sigma_{xx}, \Delta\sigma_{yy}, \Delta\sigma_{zz}, \Delta\sigma_{xy}, \Delta\sigma_{xz}, \Delta\sigma_{yz}$ через узловые значения соответствующих величин осуществлялась линейными функциями

$$\lambda = \left\{ (1-\xi-\eta) \frac{1-\zeta}{2} : \xi \frac{1-\zeta}{2} : \eta \frac{1-\zeta}{2} : (1-\xi-\eta) \frac{1+\zeta}{2} : \xi \frac{1+\zeta}{2} : \eta \frac{1+\zeta}{2} \right\} \{\lambda_y\} = \underset{1 \times 6}{\{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T} \underset{6 \times 1}{\{\lambda_y\}}, \tag{16}$$

где $\{\lambda_y\}_{1 \times 6}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^m \lambda^n \lambda^p\}$ — матрица узловых значений аппроксимируемой величины.

С учетом аппроксимирующих функций (16) матричные выражения (2) можно записать в виде

$$\{\Delta w\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 18} \{\Delta v_y\}_{18 \times 1}, \quad \{\Delta\varepsilon\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 33 \times 18} [A]_{3 \times 18} \{\Delta v_y\}_{18 \times 1} = [B]_{6 \times 18} \{\Delta v_y\}_{18 \times 1}, \tag{17}$$

где $\{\Delta v_y\}_{1 \times 18}^T = \{\Delta u^i \Delta u^j \Delta u^k \Delta u^m \Delta u^n \Delta u^p \Delta v^i \Delta v^j \Delta v^k \Delta v^m \Delta v^n \Delta v^p \Delta w^i \Delta w^j \Delta w^k \Delta w^m \Delta w^n \Delta w^p\}$.



Для приращений напряжений внутренней точки конечного элемента на основе (16) можно составить матричное соотношение

$$\{\Delta\sigma\}_{6 \times 1} = [S]_{6 \times 36} \{\Delta\sigma_y\}_{36 \times 1}, \quad (18)$$

где $\{\Delta\sigma_y\}_{1 \times 36}^T = \{\Delta\sigma_{xx}^i \Delta\sigma_{xx}^j \Delta\sigma_{xx}^k \Delta\sigma_{xx}^m \Delta\sigma_{xx}^n \Delta\sigma_{xx}^p \dots \Delta\sigma_{yz}^i \Delta\sigma_{yz}^j \Delta\sigma_{yz}^k \Delta\sigma_{yz}^m \Delta\sigma_{yz}^n \Delta\sigma_{yz}^p\}$.

Для формирования матрицы напряженно-деформированного состояния конечного элемента использовался на шаге нагружения смешанный функционал [10]

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_V \{\Delta\sigma\}_{1 \times 6}^T [L]_{6 \times 3} \{\Delta w\}_{3 \times 1} dV - \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\sigma\}_{1 \times 6}^T [C_l]_{6 \times 6} \{\Delta\sigma\}_{6 \times 1} dV - \\ & - \frac{1}{2} \int_S \{\Delta w\}_{1 \times 3}^T \{\Delta q\}_{3 \times 1} dS - \int_S \{\Delta w\}_{1 \times 3}^T \{q\}_{3 \times 1} dS - \int_V \{\sigma\}_{1 \times 6}^T \{\Delta\varepsilon\}_{6 \times 1} dV \quad (l = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\{\Delta q\}$ — нагрузка на шаге нагружения, $\{q\}$ — нагрузка, приложенная до рассматриваемого шага нагружения, S — площадь приложения нагрузки, V — объем элемента.

С учетом аппроксимирующих выражений (17) и (18) функционал (19) запишется выражением

$$\begin{aligned} \Pi = & \{\Delta\sigma\}_{1 \times 36}^T \int_V [S]_{36 \times 6}^T [B]_{6 \times 18} dV \{\Delta v_y\}_{18 \times 1} - \frac{1}{2} \{\Delta\sigma_y\}_{1 \times 36}^T \int_V [S]_{36 \times 6}^T [C_l]_{6 \times 6} [S]_{6 \times 36} dV \{\Delta\sigma_y\}_{36 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \{\Delta v_y\}_{1 \times 18}^T \int_S [A]_{18 \times 3}^T \{\Delta q\}_{3 \times 1} dS - \{\Delta v_y\}_{1 \times 18}^T \int_S [A]_{18 \times 3}^T \{q\}_{3 \times 1} dS - \{\Delta v_y\}_{1 \times 18}^T \int_V [B]_{18 \times 6}^T \{\sigma\}_{6 \times 1} dV. \end{aligned} \quad (20)$$

Варьирование функционала (20) по узловым неизвестным $\{\Delta\sigma_y\}_{1 \times 36}^T$ и $\{\Delta v_y\}_{1 \times 18}^T$ приводит к системам уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta\sigma_y\}_{1 \times 36}^T} &= [Q]_{36 \times 18} \{\Delta v_y\}_{18 \times 1} - [H]_{36 \times 36} \{\Delta\sigma_y\}_{36 \times 1} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta v_y\}_{1 \times 18}^T} &= [Q]_{18 \times 36}^T \{\Delta\sigma_y\}_{36 \times 1} - \{\Delta f_q\}_{18 \times 1} - \{R\}_{18 \times 1} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $[Q]_{36 \times 18} = \int_V [S]_{36 \times 6}^T [B]_{6 \times 18} dV$, $[H]_{36 \times 36} = \int_V [S]_{36 \times 6}^T [C_l]_{6 \times 6} [S]_{6 \times 36} dV$, $\{\Delta f_q\}_{18 \times 1} = \int_S [A]_{18 \times 3}^T \{\Delta q\}_{3 \times 1} dS$, $\{R\}_{18 \times 1} = \int_S [A]_{18 \times 3}^T \{q\}_{3 \times 1} dS - \int_V [B]_{18 \times 6}^T \{\sigma\}_{6 \times 1} dV$ — невязка Рафсона.

Систему (21) можно записать в традиционной конечно-элементной форме

$$[K]_{54 \times 54} \{Z_y\}_{54 \times 1} = \{F_y\}_{54 \times 1}, \quad (22)$$

где $[K]_{54 \times 54} = \begin{bmatrix} -[H]_{36 \times 36} & [Q]_{36 \times 18} \\ [Q]_{18 \times 36}^T & [0]_{18 \times 18} \end{bmatrix}$ — матрица напряженно-деформированного состояния ко-

нечного элемента на шаге нагружения, $\{Z_y\}_{1 \times 54}^T = \left\{ \{\Delta\sigma_y\}_{1 \times 36}^T \{\Delta v_y\}_{1 \times 18}^T \right\}$ — вектор узловых

неизвестных, $\{F_y\}_{1 \times 54} = \left\{ \{0\}_{1 \times 36}^T \vdots \{\Delta f_q\}_{1 \times 18}^T + \{R\}_{1 \times 18}^T \right\}$ — вектор узловых нагрузок.

2. Результаты

Пример

Рассматривалось напряженно-деформированное состояние консольной балки длиной l с квадратным поперечным сечением высотой h при загрузении сосредоточенной силой P на конце консоли. Были приняты следующие исходные данные: $l = 0.1$ м, $h = 0.01$ м, $P = 300$ Н, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

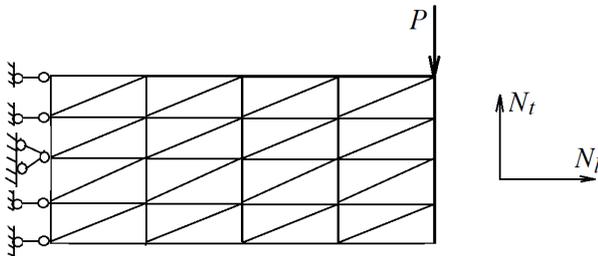


Рис. 1. Сетка дискретизации консольной балки на конечные элементы: N_l — число узлов вдоль оси балки, N_t — число узлов по высоте балки

Fig. 1. Discretization mesh of a cantilever beam into finite elements: N_l — number of nodes along the beam axis, N_t — number of nodes along the height of the beam

При расчете консольной балки на основе МКЭ принималась схема дискретизации балки на конечные элементы по рис. 1.

Численные значения нормальных напряжений в верхних σ_{xx}^B и нижних волокнах σ_{xx}^H заделки и сечения, отстоящего на расстоянии h от заделки, приведены в табл. 1 при различных сетках дискретизации консольной балки. Там же дано перемещение w точки приложения сосредоточенной силы. В строке 10 табл. 1 приведены значения параметров, полученных по формулам сопротивления материалов.

Таблица 1 / Table 1

Численные значения нормальных напряжений
Numerical values of normal stresses

№	N_l	N_t	Заделка		Сечение на расстоянии h от заделки		w , см
			σ_{xx}^H , МПа	σ_{xx}^B , МПа	σ_{xx}^H , МПа	σ_{xx}^B , МПа	
1	6	3	-84.59	11.49	-95.72	103.69	-0.0020
2	11	3	-146.28	185.89	-153.51	145.19	-0.0181
3	21	3	-166.57	198.76	-160.24	177.33	-0.0603
4	21	5	-173.21	188.98	-168.84	170.45	-0.0604
5	21	7	-176.51	186.89	-162.37	165.30	-0.0605
6	21	9	-176.15	183.16	-161.76	167.78	-0.0604
7	31	9	-178.22	185.79	-161.43	160.97	-0.0605
8	41	9	-178.62	186.98	-162.83	162.72	-0.0605
9	41	11	-180.43	185.99	-161.80	161.80	-0.0605
10	—	—	-180.0	180.0	-162.0	162.0	-0.06

На основании анализа табличных результатов можно сделать вывод, что при использовании разработанного конечного элемента в смешанной формулировке в вычислительном процессе наблюдаются сходимость в результатах и адекватное соответствие с результатами, полученными по формулам сопротивления материалов.

При расчете с учетом пластических деформаций диаграмма растяжения материала балки принималась по рис. 2, а со следующими исходными данными: предел текучести $\sigma_T = 200$ МПа, деформация, соответствующая пределу текучести, $\varepsilon_T = 0.001$, $\varepsilon_k = 0.01$, $\sigma_k = 300$ МПа.



Диаграмма деформирования (рис. 2, б) строилась на основе формул [1]

$$\sigma_i = \sigma, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3}(1 + \nu)\varepsilon.$$

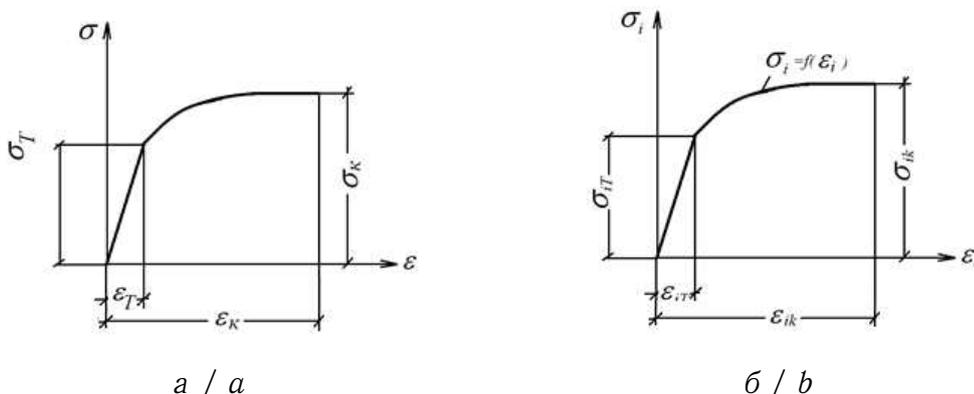


Рис. 2. Диаграммы растяжения (а) и деформирования (б) материала
 Fig. 2. Diagrams of stretching (a) and deformation (b) of the material

Численные значения параметров диаграммы деформирования материала получились следующими: $\sigma_{iT} = \sigma_T$, $\varepsilon_{iT} = 0.866667 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{ik} = 0.866667 \cdot 10^{-2}$, $\sigma_{ik} = \sigma_k = 300$ МПа.

Функция кривой диаграммы деформирования $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ принята в виде параболы $\sigma_i = a\varepsilon_i^2 + b\varepsilon_i + c$ (при $\varepsilon_i > \varepsilon_{iT}$).

Коэффициенты параболы определялись из условий:

при $\varepsilon_i = \varepsilon_{iT}$ величина $\sigma_i = \sigma_{iT}$;

при $\varepsilon_i = \varepsilon_{ik}$ величина $\sigma_i = \sigma_{ik}$;

при $\varepsilon_i = \varepsilon_{iT}$ величина $\frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_i} = 0.1E_n = 0.1 \frac{\partial \sigma_i T}{\partial \varepsilon_i T} = 2.3 \cdot 10^4$ МПа.

Значения коэффициентов получились следующие: $a = -13301746.149$ МПа, $b = 25825.591$ МПа, $c = 1790.009$ МПа.

Расчет выполнялся при сетке дискретизации $N_l = 41$ и $N_t = 11$. Напряжения по высоте поперечного сечения балки, отстоящего на расстоянии h от заделки, приведены в табл. 2. Результаты первой строки получены при использовании уравнений теории течения, результаты второй и третьей строк — по формулам (12) и (15) соответственно.

Таблица 2 / Table 2

Значения нормальных напряжений по вариантам физических уравнений
 Values of normal stresses according to variants of physical equations

N	Значения, полученные по варианту N, МПа									
1	-239.47	-233.37	-218.95	-208.23	-134.41	1.34	127.97	212.53	218.0	232.87
2	-238.57	-231.28	-218.76	-209.45	-143.99	8.88	132.63	211.96	217.16	232.67
3	-239.32	-232.62	-219.64	-208.81	-133.62	6.41	124.60	210.18	218.57	233.36

Значения табл. 2 получены при действии силы $P = 600$ Н, достигаемой за 20 шагов нагружения. Сходимость вычислительного процесса проверялась при числах шагов нагружения 20 и 40.

Как видно из данных табл. 2, результаты, полученные с использованием различных вариантов физических уравнений, оказались в адекватном соответствии.



По значениям, полученным по первому варианту физических уравнений (см. табл. 2), на рис. 3 представлена эпюра нормальных напряжений в сечении $x = h$ консольной балки.

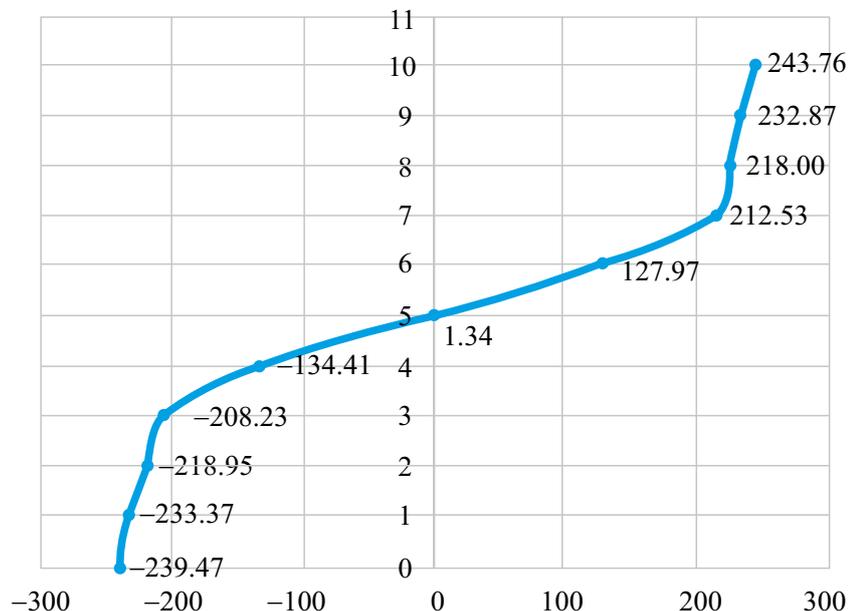


Рис. 3. Эпюра нормальных напряжений в сечении консольной балки с абсциссой $x = h$ при $P = 600$ Н

Fig. 3. Diagram of normal stresses in the section of a cantilever beam with abscissa $x = h$ at $P = 600$ N

Для эпюры нормальных напряжений (см. рис. 3) уравнения равновесия имеют вид

$$\sum x = -9153.4 + 9139.2 = -14.2 \text{ Н},$$

$$\sum M_c \equiv M_p - 2707.5 - 2700.2 = 5400 - 5407.7 = -7.7 \text{ Н}\cdot\text{см},$$

где $M_p = 600 \cdot 9 = 5400$ Н·см — момент в рассматриваемом сечении от заданной силы $P = 600$ Н.

Как видно, уравнения равновесия выполняются с достаточной точностью: по усилиям различие $\delta_1 = 0.15\%$, по моментам — $\delta_2 = 0.14\%$.

Заключение

Все три варианта физических уравнений на шаге нагружения предназначены для использования при расчетах конструктивных элементов в декартовой системе координат и приводят на приведенном примере к практически одинаковым результатам.

В первом варианте (теория пластического течения) и во втором варианте (физические уравнения) используется гипотеза о разделении приращений деформаций на упругую и пластическую части, причем первые инварианты приращений пластических деформаций принимаются равными нулю. Третий вариант физических уравнений оказывается наиболее предпочтительным для расчета конструктивных элементов (гидротехнических сооружений, фундаментов промышленных зданий, композиционных конструкций с различными физико-механическими свойствами материалов и др.) за



пределом упругости в декартовой системе координат, так как в нем не используется операция разделения приращений деформаций на упругую и пластическую части, что позволяет использовать в физических уравнениях третьего варианта зависимость между первыми инвариантами тензора приращений деформаций и тензора приращений напряжений $\varepsilon_c = \varphi(\sigma_c)$, полученную экспериментально, или на основе адекватной гипотезы.

Список литературы

1. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва : Машиностроение, 1975. 400 с. EDN: [VLPSRF](#)
2. *Голованов А. И., Султанов Л. У.* Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань : Казанский гос. ун-т, 2009. 464 с. EDN: [QJWGNN](#)
3. *Петров В. В.* Нелинейная инкрементальная строительная механика. Москва : Инфра-Инженерия, 2014. 480 с. EDN: [SFTTJV](#)
4. *Бате К. Ю.* Метод конечных элементов / пер. с англ. В. П. Шидловского ; под ред. Л. И. Турчака. Москва : Физматлит, 2010. 1022 с.
5. *Левин В. А.* Нелинейная вычислительная механика прочности : в 5 т. Т. 1. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. Москва : Физматлит, 2015. 456 с.
6. *Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва : Физматлит, 2006. 392 с. EDN: [QJPXPV](#)
7. *Гуреева Н. А., Арьков Д. П.* Реализация деформационной теории пластичности в расчетах плосконапряженных пластин на основе МКЭ в смешанной формулировке // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2011. № 2. С. 12–15. EDN: [NUPEON](#)
8. *Самуль В. И.* Основы теории упругости и пластичности : учебное пособие. Москва : Высшая школа, 1982. 264 с.
9. *Демидов С. П.* Теория упругости. Москва : Высшая школа, 1979. 432 с.
10. *Гуреева Н. А., Клочков Ю. В., Николаев А. П., Юшкин В. Н.* Напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при использовании различных формулировок трехмерных конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16, № 5. С. 361–379. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379>, EDN: [RRVXBB](#)

References

1. Malinin N. N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975. 400 p. (in Russian). EDN: [VLPSRF](#)
2. Golovanov A. I., Sultanov L. U. *Matematicheskie modeli vychislitel'noi nelineinoi mekhaniki deformiruemyykh sred* [Mathematical Models of Computational Nonlinear Mechanics of Deformable Media]. Kazan, Kazan State University Publ., 2009. 464 p. (in Russian). EDN: [QJWGNN](#)
3. Petrov V. V. *Nelineinaiya inkremental'naiya stroitel'naiya mekhanika* [Nonlinear Incremental Building Mechanics]. Moscow, Infra-Inzheneriya, 2014. 480 p. (in Russian). EDN: [SFTTJV](#)
4. Bathe K. J. *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice Hall, 1996. 1038 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 2010. 1022 p.).
5. Levin V. A. *Nelineinaya vychislitel'naya mekhanika prochnosti. T. 1. Modeli i metody. Obrazovanie i razvitie defektov* [Nonlinear Computational Mechanics of Strength. Vol. 1. Models and Methods. Formation and Development of Defects]. Moscow, Fizmatlit, 2015. 456 p. (in Russian).
6. Golovanov A. I., Tiuleneva O. N., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnyykh elementov v*



- statike i dinamike tonkostennykh konstruktsiy* [Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 392 p. (in Russian). EDN: [QJXPV](#)
7. Gureeva N. A., Arkov D. P. Flat problem of theory of jump in base method of final elements in mixed understanding in account physical nonlinearity. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Sciences*, 2011, iss. 2, pp. 12–15 (in Russian). EDN: [NUPEON](#)
 8. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity]. Moscow, Vysshaya shkola, 1982. 264 p. (in Russian).
 9. Demidov S. P. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Vysshaya shkola, 1979. 432 p. (in Russian).
 10. Gureeva N. A., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P., Yushkin V. N. Stress-strain state of shell of revolution analysis by using various formulations of three-dimensional finite elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2020, vol. 16, iss. 5, pp. 361–379. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379>, EDN: [RRVXBB](#)

Поступила в редакцию / Received 09.02.2022

Принята к публикации / Accepted 16.06.2022

Опубликована / Published 01.03.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 83–94
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 83–94
mmi.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-83-94>, EDN: [MMVQYW](https://www.edn.ru/doi/10.18500/1816-9791-2023-23-1-83-94)

Научная статья

УДК 517.98

Влияние полимерного инфильтранта на плотность очагов кариеса эмали в стадии белого пятна

Е. В. Садырин

Донской государственный технический университет, Россия, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1

Садырин Евгений Валерьевич, младший научный сотрудник лаборатории механики биосовместимых материалов, e.sadyrin@sci.donstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5395-3310>, AuthorID: [770513](https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorID=770513)

Аннотация. В современной стоматологической практике лечение ранних стадий кариеса возможно с использованием малоинвазивного вмешательства. В настоящей работе с использованием рентгеновской компьютерной микрофотографии (микро-КТ) проведено *ex vivo* неразрушающее исследование плотности очагов кариеса в стадии белого пятна до стоматологического вмешательства и после применения полимерного инфильтранта. Использование калибровочного фантома в ходе микрофотографирования образцов, а также техники сегментирования регионов интереса на очагах кариеса после реконструкции микрофотограмм зубов позволило исследовать количественное влияние инфильтранта на патологически измененную эмаль.

Ключевые слова: эмаль, кариес, механические свойства, плотность, полимерный инфильтрант, микрофотографирование

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-19-00444). Эксперименты выполнены в ресурсном центре коллективного пользования научно-образовательного центра «Материалы», Донской государственный технический университет. Автор благодарит профессора С. Ю. Максюкова и Д. В. Ёгину (Ростовский государственный медицинский университет, г. Ростов-на-Дону) за предоставление образцов и проведение на них протокола инфильтрации.

Для цитирования: Садырин Е. В. Влияние полимерного инфильтранта на плотность очагов кариеса эмали в стадии белого пятна // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 83–94. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-83-94>, EDN: [MMVQYW](https://www.edn.ru/doi/10.18500/1816-9791-2023-23-1-83-94)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Influence of a polymeric infiltrant on the density of enamel white spot lesions

E. V. Sadyrin

Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don 344000, Russia

Evgenii V. Sadyrin, e.sadyrin@sci.donstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5395-3310>, AuthorID: [770513](https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorID=770513)



Abstract. In modern dental practice, treatment of early stages of caries is possible using minimally invasive intervention. In this work, using X-ray computed microtomography (micro-CT), an *ex vivo* non-destructive study of the density of white spot lesions was carried out before and after the application of a polymer infiltrant. The use of a calibration phantom during microtomography of samples, as well as the technique of segmenting regions of interest on caries foci after reconstruction of microtomograms of teeth, made it possible to study the quantitative effect of the infiltrant on pathologically altered enamel.

Keywords: enamel, caries, mechanical properties, density, polymeric infiltrant, microtomography

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00444). The experiments were carried out in the resource center for collective use of the Research and Education Center “Materials”, Don State Technical University. The author thanks Professor S. Yu. Maksyukov and D. V. Yogina (Rostov State Medical University, Rostov-on-Don) for providing the samples and carrying out the infiltration protocol on them.

For citation: Sadyrin E. V. Influence of a polymeric infiltrant on the density of enamel white spot lesions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 83–94 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-83-94>, EDN: [MMVQYW](https://www.edn.ru/10.18500/1816-9791-2023-23-1-83-94)

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Первая клинически видимая стадия кариеса представляет собой область патологически измененной эмали под относительно неповрежденной поверхностью ткани (псевдоинтактная эмаль) [1]. Подповерхностная область характеризуется сниженными плотностью минерализации и механическими свойствами [2–4]. Подобное снижение свойств подповерхностной области объясняется частичным растворением основных структурных элементов эмали — кристаллов гидроксиапатита — кислотами, выработанными кариесогенными бактериями в полости рта в ходе процесса деминерализации [5] (*mutans streptococci* — ключевой микроорганизм в инициации кариеса, и *lactobacilli*, способствующие дальнейшему развитию кариеса [6, 7]).

В начале деминерализации в эмали возникают узкие воронкообразные дефекты с диаметром входа около 10 нм, глубиной 1000 нм. При прогрессировании деминерализации, приводящей к стиранию краев воронок, размер дефекта достигает длины средних волн видимого спектра (около 500 нм) и становится заметен визуально (стадия белого пятна, СБП) [8–10].

Наличие же псевдоинтактного слоя — следствие реминерализации части патологической эмали, представляющей собой процесс восстановления минеральных компонентов за счет слюны или реминерализующих растворов (содержащих ионы, предназначенные для замещения дефектов в кристалле гидроксиапатита [11]). Принцип действия методики инфильтрации заключается в удалении псевдоинтактного слоя эмали кислотой, высушивании подповерхностной области и пропитывании её высокотекучим полимерным материалом, после отверждения которого дефекты в деминерализованной эмали оказываются заполненными полимерной смолой, а очаг — «законсервированным», при этом эмалевые призмы остаются сохранными, а возможность удаления здоровой эмали под патологически измененной тканью исключается [12]. При этом исчезает необходимость использования анестезии. Однако эффективность этой процедуры исследована не в полной степени: в ряде клинических



случаев сообщается о её высокой эффективности [13–15], в то время как в других работах продемонстрирована низкая эффективность [16, 17].

В настоящей работе предложена модификация подхода к оценке эффективности стоматологического вмешательства [18, 19], с помощью которой проведено *ex vivo* исследование влияния полимерного инфильтранта на плотность минерализации области кариеса эмали в СБП с использованием рентгеновской компьютерной микротомографии (микро-КТ). Для количественной оценки изменения плотности эмали сканирование образца до и после стоматологического вмешательства проводилось с одинаковыми параметрами с калибровочным фантомом.

1. Материалы и методы

Три зуба человека (моляра) были удалены у пациентов по ортодонтическим показаниям в стоматологическом отделении клиники Ростовского государственного медицинского университета (РостГМУ, Ростов-на-Дону, Россия). Локальный независимый этический комитет РостГМУ одобрил исследование (выписка 14/21 от 23.09.2021), пациенты предоставили информированное согласие. Области кариеса в СБП на каждом из образцов были обнаружены стоматологами в соответствии с критериями Всемирной стоматологической федерации [20]. После извлечения каждый из образцов выдерживался в 1%-ном растворе NaClO (по массе) в течение 10 мин. Затем образцы были помещены в стерильные контейнеры со сбалансированным солевым раствором Хэнкса при 4⁰С с гранулами тимола (Унифарм, Славянск-на-Кубани, Россия), добавленными для предотвращения роста грибков и для дезинфекции. Отношение тимола к раствору Хэнкса составило 1:1000.

В качестве полимерного инфильтранта использован материал Icon (DMG Chemisch-Pharmazeutische, Берлин, Германия) в соответствии с протоколом, рекомендованным производителем: чистка зубов, нанесение концентрированной соляной кислоты на 2 мин, сушка поверхности эмали, нанесение инфильтранта на 3 мин, освещение полимеризационной лампой — 40 с, нанесение инфильтранта — 1 мин, полировка шлифовальным диском.

Сканирование проводилось на установке Xradia Versa 520 (Carl Zeiss Microscopy, Плэзэнтон, США) со следующими параметрами: напряжение рентгеновской трубки 110 кВ, мощность 9.5 В, размер вокселя 14.7 мкм, вращение образца на 360°, время экспозиции 1 с, фильтр на рентгеновской трубке HE6. В процессе сканирования получена 1601 проекция образца. Реконструкция набора проекций в набор виртуальных сечений проведена в программном обеспечении XRMReconstructor 12.0.8086.19558 со значениями смещения центра, определёнными в автоматическом режиме, использован фильтр размытия Гаусса (0.5) и сдвиг спектра пучка в более высокоэнергетическую область. Коррекции дрейфа осуществлялась с использованием опции дополнительных компенсирующих перемещений. Для количественного определения плотности была проведена калибровка зависимости значения серого от плотности изучаемого образца для конкретных условий проведения томографии [21]: над эмалью образцов был помещён калибровочный фантом с использованием стоматологического воска. Фантом представлял собой эталонный образец с известными значениями плотности его составляющих: полимер полиэтилентерефталат (1.35 г/см³), сплав на основе магния Ма2-1М (1.78 г/см³), сплав на основе алюминия САС1-400 (2.69 г/см³), природный минерал флюорит (3.09 г/см³).

Постпроцессинг реконструированных микротомограмм выполнен с использованием системы VGSTUDIO Max 3.5 (Volume Graphics GmbH, Хайдельберг, Германия).



Для реализации микро-КТ исследования использован следующий протокол: микро-КТ сканирование образца до стоматологического вмешательства; реконструкция набора проекций в трехмерную модель; построение линейной зависимости между значениями уровня серого цвета и плотностью минерализации; обработка области кариеса инфильтрантом; повторное микро-КТ сканирование; реконструкция набора проекций образца после обработки инфильтрантом в трехмерную модель; построение линейной зависимости между значениями уровня серого цвета и плотностью после обработки инфильтрантом; построение трехмерных карт плотности минерализации образца до и после обработки инфильтрантом; наложение полученных трехмерных карт друг на друга; сегментирование областей интереса кариеса эмали в СБП при помощи инструмента «Region growing», ограниченного эллиптическим цилиндром таким образом, чтобы покрывать основную деминерализованную область кариеса в СБП по ширине и длине, не затрагивая прилегающую и лежащую под ней здоровую эмаль (т.е. для двух областей интереса выполнялась булева операция «пересечение»); объемное выделение здоровой эмали с использованием эллиптического цилиндра аналогичного размера с последующим усреднением плотности по объему цилиндра.

Результаты и их обсуждение

Ввиду способности инфильтранта модифицировать эмаль без создания существенных скачков свойств (в отличие от пломбировочных материалов) полученные наборы DICOM-файлов и реконструированные микрофотограммы не содержали существенных артефактов сканирования в областях, пораженных кариесом в СБП. Экспериментальные измерения плотности минерализации здоровой эмали и эмали в СБП для образцов хорошо соотносятся с имеющимися в литературе результатами [3, 22–26]. Расположение областей, обработанных инфильтрантом на каждом из образцов, приведены на рис. 1 с использованием цветового кодирования, где фиолетовый цвет соответствует области после стоматологического вмешательства.

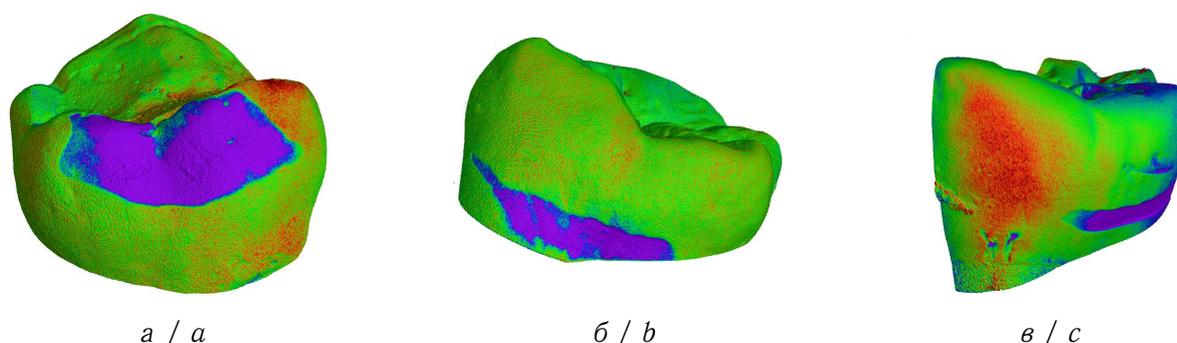


Рис. 1. Микрофотограммы областей, обработанных инфильтрантом (фиолетовый цвет) на образцах: а) 1; б) 2; в) 3 (цвет онлайн)

Fig. 1. Microtomograms of the areas treated with the infiltrant (purple color) on the samples: а) 1; б) 2; в) 3 (color online)

Микро-КТ исследование первого образца показало наличие существенного размера пломбы в эмали зуба, установленной пациенту в прошлом в окклюзионной области (рис. 2), в некотором отдалении от области кариеса в СБП. Для исследования плотности минерализации были выбраны объемы материала, ограниченные эллиптическими цилиндрами (их основания были ограничены квадратами со сторонами 0.58 мм, высотой 0.5 мм). Результаты измерений представлены в табл. 1.

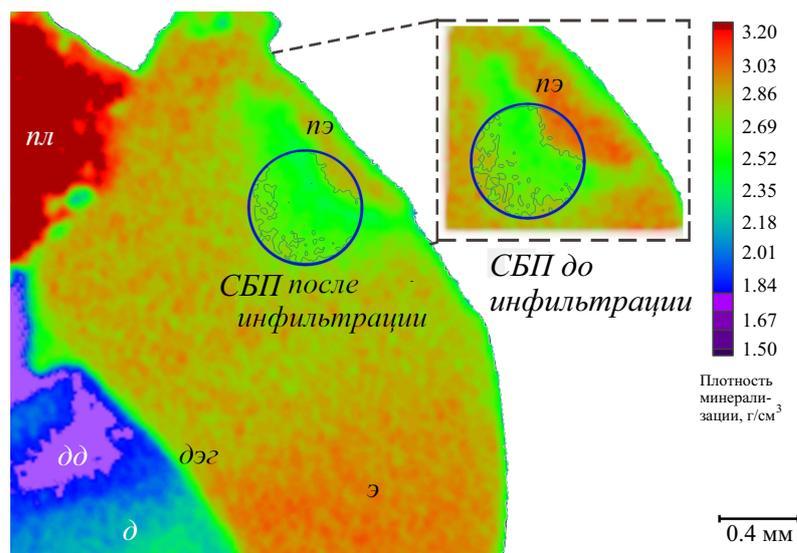


Рис. 2. Виртуальный срез на трехмерной карте плотности первого образца, обработанного инфильтрантом. На врезке справа – эмаль до применения стоматологического материала на той же области; э – эмаль, д – дентин, дд – деминерализованный дентин, пэ – псевдоинтактная эмаль, пл – пломба, дэг – дентиноэмалевая граница (цвет онлайн)

Fig. 2. Virtual slice on a three-dimensional density map of the first sample treated with an infiltrant. The inset on the right shows the enamel before the application of the dental preparation on the same area; э – enamel, д – dentine, дд – demineralized dentine, пэ – pseudo-intact enamel, пл – filling, дэг – dentine-enamel junction (color online)

Таблица 1 / Table 1

Значения плотности минерализации эмали до и после применения инфильтранта на участке кариеса в СБП: первый образец

Enamel mineral density values before and after the application of an infiltrant in the area of WSL caries: the first sample

Группа	Исследуемая область	Плотность, г/см ³	Стандартное отклонение, г/см ³
Эмаль до вмешательства	Кариес в СБП	2.62	0.11
	Здоровая эмаль	2.97	0.12
Эмаль после вмешательства	Эмаль инфильтрированная	2.56	0.11
	Здоровая эмаль	2.91	0.10

Было установлено, что средняя плотность минерализации патологически измененной эмали ниже, чем у здоровой эмали, на 11.78%. После обработки области кариеса инфильтрантом средняя плотность модифицированной эмали снизилась на 12.03% по сравнению со здоровой эмалью. Толщина псевдоинтактного слоя эмали, удаленного с использованием кислоты, составила 0.17 мм. Тем не менее, из рис. 2 видно, что даже такой кислотной обработки оказалось недостаточно для растворения всего псевдоинтактного слоя.

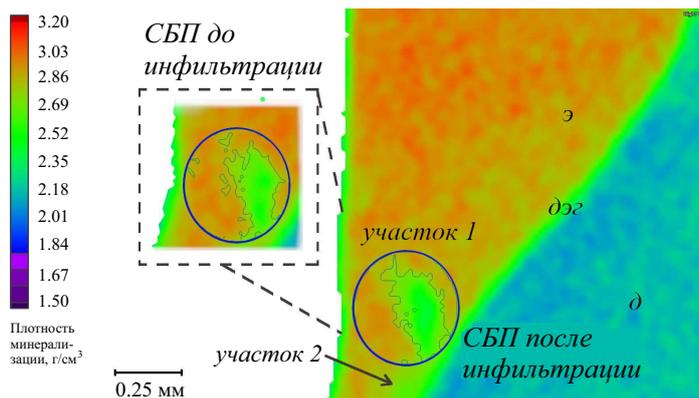


Рис. 3. Виртуальный срез двух участков деминерализации на трехмерной карте плотности второго образца, обработанного инфильтрантом. На врезке слева — эмаль до применения стоматологического материала на той же области; э — эмаль, д — дентин, дэз — дентиноэмалевая граница (цвет онлайн)

Fig. 3. Virtual slice of two demineralized sections on a three-dimensional density map of the second sample treated with an infiltrant. The inset on the left shows the enamel before the application of the dental preparation on the same area; э — enamel, д — dentine, дэз — dentine-enamel junction (color online)

обработки области кариеса инфильтрантом средняя плотность модифицированной эмали снизилась на 5.57, 8.71, 6.60% по сравнению со здоровой эмалью соответственно для первого, второго и третьего участков. Кислота удалила 0.08 ± 0.02 мм поверхностного псевдоинтактного слоя.

Микро-КТ исследование второго образца (рис. 3) показало три участка кариеса в пришеечной области, соединенные слабо деминерализованной эмалью.

Для исследования плотности минерализации соответственно первого, второго и третьего участков были выбраны объемы материала, ограниченные эллиптическими цилиндрами с основаниями, ограниченными прямоугольниками со сторонами: 0.29 и 0.39 мм, высотой 0.12 мм; 0.27 и 0.30 мм, высотой 0.5 мм; 0.25 и 0.31 мм, высотой 0.2 мм. Результаты измерений представлены в табл. 2. Было установлено, что средняя плотность минерализации патологически измененной эмали ниже, чем у здоровой эмали, на 3.13, 5.63, 6.23% соответственно для первого, второго и третьего участков. После обра-

Таблица 2 / Table 2

Значения плотности минерализации эмали до и после применения инфильтранта на участке кариеса в СБП: второй образец

Enamel mineral density values before and after the application of an infiltrant in the area of WSL caries: the second sample

Участок	Группа	Исследуемая область	Плотность, г/см ³	Стандартное отклонение, г/см ³
1	Эмаль до вмешательства	Кариес в СБП	2.79	0.15
		Здоровая эмаль	2.88	0.10
	Эмаль после вмешательства	Эмаль инфильтрированная	2.71	0.10
		Здоровая эмаль	2.87	0.09
2	Эмаль до вмешательства	Кариес в СБП	2.68	0.12
		Здоровая эмаль	2.84	0.15
	Эмаль после вмешательства	Эмаль инфильтрированная	2.62	0.11
		Здоровая эмаль	2.87	0.10



Окончание таблицы 2 / Continuation of Table 2

Участок	Группа	Исследуемая область	Плотность, г/см ³	Стандартное отклонение, г/см ³
3	Эмаль до вмешательства	Кариес в СБП	2.71	0.08
		Здоровая эмаль	2.89	0.10
	Эмаль после вмешательства	Эмаль инфильтрированная	2.69	0.08
		Здоровая эмаль	2.88	0.09

Микро-КТ исследование третьего образца (рис. 4) показало узкую вытянутую область кариеса в СБП, направленную под углом в пришеечную область эмали. Для исследования плотности минерализации на данном образце были выбраны объемы материала, ограниченные эллиптическими цилиндрами (их основания были ограничены прямоугольниками со сторонами 0.32 и 0.38 мм, высотой 0.16 мм). Результаты измерений представлены в табл. 3.

Расчеты показали, что средняя плотность минерализации патологической эмали ниже, чем у здоровой эмали, на 3.67%. После обработки области кариеса инфильтрантом средняя плотность модифицированной эмали снизилась на 4.20% по сравнению со здоровой эмалью. Кислота удалила 0.04 мм поверхностного псевдоинтактного слоя в окрестности области кариеса. Анализ результатов показывает, что кариес на исследованных образцах снизил плотность минерализации на 3.13–11.78%. При этом процедура инфильтрации не восстановила плотность ни в одном из случаев: было обнаружено снижение плотности на 4.20–12.03%.

Наименьшие значения плотности очага кариеса (как до применения инфильтранта, так и после) зафиксированы для первого образца, при этом плотность здоровой эмали на данном образце близка таковой на других образцах. Предположительно такое снижение связано с более развитой стадией кариеса (об этом также свидетельствует наибольший из трех образцов псевдоинтактный поверхностный слой, который не удалось вытравить полностью в ходе стоматологического вмешательства). Отметим, что в ряде случаев (образец 2, участок 1, рис. 3; образец 3, рис. 4) плотность модифицированной эмали оказалась близка к таковой для здоровой эмали. В случае образцов 1 и 3 зафиксировано снижение плотности здоровой эмали после проведения инфильтрации на 2.02

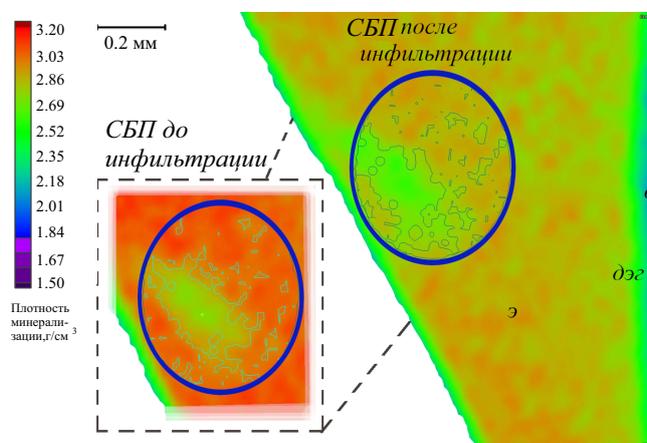


Рис. 4. Виртуальный срез на трехмерной карте плотности третьего образца, обработанного инфильтрантом. На врезке слева — эмаль до применения стоматологического материала на той же области; э — эмаль, д — дентин, дэг — дентиноэмалевая граница (цвет онлайн)

Fig. 4. Virtual slice on a three-dimensional density map of the third sample treated with an infiltrant. The inset on the left shows the enamel before the application of the dental preparation on the same area; э — enamel, д — dentine, дэг — dentine-enamel junction (color online)



Таблица 3 / Table 3

Значения плотности минерализации эмали до и после применения инфильтранта на участке кариеса в СБП: третий образец

Enamel mineral density values before and after the application of an infiltrant in the area of WSL caries: the third sample

Группа	Исследуемая область	Плотность, г/см ³	Стандартное отклонение, г/см ³
Эмаль до вмешательства	Кариес в СБП	2.89	0.08
	Здоровая эмаль	3.00	0.10
Эмаль после вмешательства	Эмаль инфильтрированная	2.74	0.09
	Здоровая эмаль	2.86	0.10

и 4.67% соответственно предположительно ввиду недостаточной локализации области кариеса в ходе кислотного травления как части протокола инфильтрации. Данное наблюдение позволяет сделать рекомендацию для как можно более тщательной локализации области лечения зуба пациента практикующим врачом-стоматологом при проведении процедуры инфильтрации. В дальнейшем планируется исследовать дентин в окрестности очагов кариеса, обработанных инфильтрантом ввиду того, что ранее была показана способность данных материалов пересекать дентиноэмалевую границу и локально повышать плотность дентина [17].

Заключение

В настоящей работе предложен модифицированный протокол для оценки влияния стоматологического лечения на плотность минерализации патологически изменённых тканей зуба с помощью микро-КТ, включающий в себя сегментирование тканей с использованием программных средств. Используя данный протокол, проведено сравнение *ex vivo* плотности минерализации патологически изменённых областей кариеса в СБП и инфильтрированных тканей зуба. Продемонстрирована высокая эффективность применения протокола. При изучении действия инфильтранта на ткани зуба получены следующие результаты:

- обнаружено, что процедура инфильтрации не восстановила плотность ни в одном из случаев, снижение плотности составило 4.20–12.03% по сравнению со здоровой эмалью;
- зафиксировано сильное отрицательное влияние кислоты на плотность минерализации тканей зуба, в том числе за пределами области очага кариеса;
- на одном из образцов не удалось избавиться от поверхностного псевдоинтактного слоя эмали в ходе применения протокола инфильтрации.

Список литературы

1. Roora K. B., Pathak S., Poornima P., Neena I. E. White spot lesions: A literature review // Journal of Pediatric Dentistry. 2015. Vol. 3, iss. 1. P. 1–7. <https://doi.org/10.4103/2321-6646.151839>
2. Садырин Е. В., Ёгина Д. В., Васильев А. С., Айзикович С. М. Оценка влияния кариеса в стадии белого пятна на механические свойства эмали и дентина зуба человека // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 346–359. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-346-359>, EDN: ZTLZZG



3. Sadyrin E., Swain M., Mitrin B., Rzhepakovsky I., Nikolaev A., Irkha V., Yogina D., Lyanguzov N., Maksyukov S., Aizikovich S. Characterization of enamel and dentine about a white spot lesion: Mechanical properties, mineral density, microstructure and molecular composition // *Nanomaterials*. 2020. Vol. 10, iss. 9. P. 1889. <https://doi.org/10.3390/nano10091889>
4. Huang T. T., Jones A. S., He L. H., Darendeliler M. A., Swain M. V. Characterisation of enamel white spot lesions using X-ray micro-tomography // *Journal of Dentistry*. 2007. Vol. 35, iss. 9. P. 737–743. <https://doi.org/10.1016/j.jdent.2007.06.001>
5. Marya A., Venugopal A., Karobari M. I., Rokaya D. White spot lesions: A serious but often ignored complication of orthodontic treatment // *The Open Dentistry Journal*. 2022. Vol. 16, iss. 1. P. 1–4. <https://doi.org/10.2174/18742106-v16-e2202230>
6. Chen L. R., Lai C. L., Chen J. P., Kao C. T. The effect of probiotics use on salivary cariogenic bacteria in orthodontic patients with various caries risk status // *Nutrients*. 2022. Vol. 14, iss. 15. P. 3196. <https://doi.org/10.3390/nu14153196>
7. Nyvad B., Crielaard W., Mira A., Takahashi N., Beighton D. Dental caries from a molecular microbiological perspective // *Caries Research*. 2013. Vol. 47, iss. 2. P. 89–102. <https://doi.org/10.1159/000345367>
8. Yu O. Y., Zhao I. S., Mei M. L., Lo E. C. M., Chu C. H. A review of the common models used in mechanistic studies on demineralization-remineralization for cariology research // *Dentistry Journal*. 2017. Vol. 5, iss. 20. P. 20. <https://doi.org/10.3390/dj5020020>
9. Guerra F., Mazur M., Nardi G. M., Corridore D., Pasqualotto D., Rinado F., Ottolenghi L. Dental hypomineralized enamel resin infiltration. Clinical indications and limits // *Senses and Sciences*. 2015. Vol. 2, iss. 4. P. 1–5. <https://doi.org/10.14616/sands-2015-4-135139>
10. Sadyrin E. V., Kislyakov E. A., Karotkiyan R. V., Yogina D. V., Drogan E. G., Swain M. V., Maksyukov S. Yu., Nikolaev A. L., Aizikovich S. M. Influence of citric acid concentration and etching time on enamel surface roughness of prepared human tooth: *In vitro* study // *Plasticity, Damage and Fracture in Advanced Materials* / eds.: H. Altenbach, M. Brünig, Z. Kowalewski. Cham : Springer, 2020. P. 135–150. (Advanced Structured Materials, vol. 121). https://doi.org/10.1007/978-3-030-34851-9_8
11. Hicks J., Garcia-Godoy F., Flaitz C. Biological factors in dental caries: Role of remineralization and fluoride in the dynamic process of demineralization and remineralization (part 3) // *Journal of Clinical Pediatric Dentistry*. 2004. Vol. 28, iss. 3. P. 203–214. <https://doi.org/10.17796/jcpd.28.3.w06104271746j34n>
12. Gomez J. Detection and diagnosis of the early caries lesion // *BMC Oral Health*. 2015. Vol. 15 (Suppl. 1). S3. <https://doi.org/10.1186/1472-6831-15-S1-S3>
13. Başaran G., Veli I., Başaran E. G. Non-cavitated approach for the treatment of white spot lesions: A case report // *International Dental Research*. 2011. Vol. 1, iss. 2. P. 65–69. <https://doi.org/10.5577/intdentres.2011.vol1.no2.5>
14. Yuan H., Li J., Chen L., Cheng L., Cannon R. D., Mei L. Esthetic comparison of white-spot lesion treatment modalities using spectrometry and fluorescence // *The Angle Orthodontist*. 2014. Vol. 84, iss. 2. P. 343–349. <https://doi.org/10.2319/032113-232.1>
15. Eckstein A., Helms H. J., Knösel M. Camouflage effects following resin infiltration of postorthodontic white-spot lesions *in vivo*: One-year follow-up // *The Angle Orthodontist*. 2015. Vol. 85, iss. 3. P. 374–380. <https://doi.org/10.2319/050914-334.1>
16. Kim S., Kim E. Y., Jeong T. S., Kim J. W. The evaluation of resin infiltration for masking labial enamel white spot lesions // *International Journal of Paediatric Dentistry*. 2011. Vol. 21, iss. 4. P. 241–248. <https://doi.org/10.1111/j.1365-263X.2011.01126.x>
17. Sadyrin E. V., Yogina D. V., Swain M. V., Maksyukov S. Yu., Vasiliev A. S. Efficacy of dental materials in terms of apparent mineral density restoration: Composite resin, glass ionomer cement and infiltrant // *Composites Part C: Open Access*. 2021. Vol. 6. P. 100192. <https://doi.org/10.1016/j.jcomc.2021.100192>



18. Садырин Е. В., Ёгина Д. В., Волков Р. С., Айзикович Р. М. Оценка плотности и микрогеометрических характеристик пломб из стеклоиономерного цемента и композитного материала: биомеханическое *ex vivo* исследование // Российский журнал биомеханики. 2022. Т. 26, № 2. С. 67–73. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2022.2.06>
19. Borges A. B., Caneppele T. M. F., Masterson D., Maia L. C. Is resin infiltration an effective esthetic treatment for enamel development defects and white spot lesions? A systematic review // Journal of Dentistry. 2017. Vol. 56. P. 11–19. <https://doi.org/10.1016/j.jdent.2016.10.010>
20. Fisher J., Glick M. A new model for caries classification and management: The FDI World Dental Federation caries matrix // Journal of the American Dental Association. 2012. Vol. 143, iss. 6. P. 546–551. <https://doi.org/10.14219/jada.archive.2012.0216>
21. Alyahya A., Alqareer A., Swain M. Microcomputed tomography calibration using polymers and minerals for enamel mineral content quantitation // Medical Principles and Practice. 2019. Vol. 28, iss. 3. P. 247–255. <https://doi.org/10.1159/000499186>
22. Hikita K., Van Meerbeek B., De Munck J., Ikeda T., Van Landuyt K., Maida T., Lambrechts P., Peumans M. Bonding effectiveness of adhesive luting agents to enamel and dentin // Dental Materials. 2007. Vol. 23, iss. 1. P. 71–80. <https://doi.org/10.1016/j.dental.2005.12.002>
23. Swain M. V., Xue J. State of the art of micro-CT applications in dental research // International Journal of Oral Science. 2009. Vol. 1, iss. 4. P. 177–188. <https://doi.org/10.4248/IJOS09031>
24. Sadyrin E. V. Correlating the mechanical properties of the mineral density of brown spot lesion in dentine using nanoindentation and X-ray micro-tomography // Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications / eds.: H. Altenbach, V. A. Eremeyev, A. S. Vasiliev. Cham : Springer, 2022. P. 389–398. (Advanced Structured Materials, vol. 155). https://doi.org/10.1007/978-3-030-81705-3_21
25. Huang T. T. Y., He L. H., Darendeliler M. A., Swain M. V. Correlation of mineral density and elastic modulus of natural enamel white spot lesions using X-ray microtomography and nanoindentation // Acta Biomaterialia. 2010. Vol. 6, iss. 12. P. 4553–4559. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2010.06.028>
26. Sadyrin E. V., Mitrin B. I., Yogina D. V., Swain M. V. Preliminary study of distribution of mechanical properties and mineral density by depth of liquid saturated carious dentine // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 102. Art. 012056. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1029/1/012056>

References

1. Roopa K. B., Pathak S., Poornima P., Neena, I. E. White spot lesions: A literature review. *Journal of Pediatric Dentistry*, 2015, vol. 3, iss. 1, pp. 1–7. <https://doi.org/10.4103/2321-6646.151839>
2. Sadyrin E. V., Yogina D. V., Vasiliev A. S., Aizikov S. M. Evaluation of the influence of white spot lesion on the mechanical properties of human tooth enamel and dentine. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 346–359 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-346-359>, EDN: ZTLZZG
3. Sadyrin E., Swain M., Mitrin B., Rzhepakovsky I., Nikolaev A., Irkha V., Yogina D., Lyanguzov N., Maksyukov S., Aizikov S. Characterization of enamel and dentine about a white spot lesion: Mechanical properties, mineral density, microstructure and molecular composition. *Nanomaterials*, 2020, vol. 10, iss. 9, pp. 1889. <https://doi.org/10.3390/nano10091889>
4. Huang T. T., Jones A. S., He L. H., Darendeliler M. A., Swain M. V. Characterisation



- of enamel white spot lesions using X-ray micro-tomography. *Journal of Dentistry*, 2007, vol. 35, iss. 9, pp. 737–743. <https://doi.org/10.1016/j.jdent.2007.06.001>
5. Marya A., Venugopal A., Karobari M. I., Rokaya D. White spot lesions: A serious but often ignored complication of orthodontic treatment. *The Open Dentistry Journal*, 2022, vol. 16, iss. 1, pp. 1–4. <https://doi.org/10.2174/18742106-v16-e2202230>
 6. Chen L. R., Lai C. L., Chen J. P., Kao C. T. The effect of probiotics use on salivary cariogenic bacteria in orthodontic patients with various caries risk status. *Nutrients*, 2022, vol. 14, iss. 15, pp. 3196. <https://doi.org/10.3390/nu14153196>
 7. Nyvad B., Crielaard W., Mira A., Takahashi N., Beighton D. Dental caries from a molecular microbiological perspective. *Caries Research*, 2013, vol. 47, iss. 2, pp. 89–102. <https://doi.org/10.1159/000345367>
 8. Yu O. Y., Zhao I. S., Mei M. L., Lo E. C. M., Chu C. H. A review of the common models used in mechanistic studies on demineralization-remineralization for cariology research. *Dentistry Journal*, 2017, vol. 5, iss. 20, pp. 20. <https://doi.org/10.3390/dj5020020>
 9. Guerra F., Mazur M., Nardi G. M., Corridore D., Pasqualotto D., Rinado F., Ottolenghi L. Dental hypomineralized enamel resin infiltration. Clinical indications and limits. *Senses and Sciences*, 2015, vol. 2, iss. 4, pp. 1–5. <https://doi.org/10.14616/sands-2015-4-135139>
 10. Sadyrin E. V., Kislyakov E. A., Karotkiyan R. V., Yogina D. V., Droган E. G., Swain M. V., Maksyukov S. Yu., Nikolaev A. L., Aizikovich S. M. Influence of citric acid concentration and etching time on enamel surface roughness of prepared human tooth: *In vitro* study. In: Altenbach H., Brünig M., Kowalewski Z. (eds.) *Plasticity, Damage and Fracture in Advanced Materials*. Advanced Structured Materials, vol. 121. Cham, Springer, 2020, pp. 135–150. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34851-9_8
 11. Hicks J., Garcia-Godoy F., Flaitz C. Biological factors in dental caries: Role of remineralization and fluoride in the dynamic process of demineralization and remineralization (part 3). *Journal of Clinical Pediatric Dentistry*, 2004, vol. 28, iss. 3, pp. 203–214. <https://doi.org/10.17796/jcpd.28.3.w06104271746j34n>
 12. Gomez J. Detection and diagnosis of the early caries lesion. *BMC Oral Health*, 2015, vol. 15 (Suppl. 1), S3. <https://doi.org/10.1186/1472-6831-15-S1-S3>
 13. Başaran G., Veli I., Başaran E. G. Non-cavitated approach for the treatment of white spot lesions: A case report. *International Dental Research*, 2011, vol. 1, iss. 2, pp. 65–69. <https://doi.org/10.5577/intdentres.2011.vol1.no2.5>
 14. Yuan H., Li J., Chen L., Cheng L., Cannon R. D., Mei L. Esthetic comparison of white-spot lesion treatment modalities using spectrometry and fluorescence. *The Angle Orthodontist*, 2014, vol. 84, iss. 2, pp. 343–349. <https://doi.org/10.2319/032113-232.1>
 15. Eckstein A., Helms H. J., Knösel M. Camouflage effects following resin infiltration of postorthodontic white-spot lesions *in vivo*: One-year follow-up. *The Angle Orthodontist*, 2015, vol. 85, iss. 3, pp. 374–380. <https://doi.org/10.2319/050914-334.1>
 16. Kim S., Kim E. Y., Jeong T. S., Kim J. W. The evaluation of resin infiltration for masking labial enamel white spot lesions. *International Journal of Paediatric Dentistry*, 2011, vol. 21, iss. 4, pp. 241–248. <https://doi.org/10.1111/j.1365-263X.2011.01126.x>
 17. Sadyrin E. V., Yogina D. V., Swain M. V., Maksyukov S. Yu., Vasiliev A. S. Efficacy of dental materials in terms of apparent mineral density restoration: Composite resin, glass ionomer cement and infiltrant. *Composites Part C: Open Access*, 2021, vol. 6, pp. 100192. <https://doi.org/10.1016/j.jcomc.2021.100192>
 18. Sadyrin E. V., Yogina D. V., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Evaluation of density and microgeometrical characteristics of glass-ionomer cement and composite resin fillings: A biomechanical *ex vivo* study. *Russian Journal of Biomechanics*, 2022, vol. 26, iss. 2, pp. 67–73 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2022.2.06>



19. Borges A. B., Caneppele T. M. F., Masterson D., Maia L. C. Is resin infiltration an effective esthetic treatment for enamel development defects and white spot lesions? A systematic review. *Journal of Dentistry*, 2017, vol. 56, pp. 11–19. <https://doi.org/10.1016/j.jdent.2016.10.010>
20. Fisher J., Glick M. A new model for caries classification and management: The FDI World Dental Federation caries matrix. *Journal of the American Dental Association*, 2012, vol. 143, iss. 6, pp. 546–551. <https://doi.org/10.14219/jada.archive.2012.0216>
21. Alyahya A., Alqareer A., Swain M. Microcomputed tomography calibration using polymers and minerals for enamel mineral content quantitation. *Medical Principles and Practice*, 2019, vol. 28, iss. 3, pp. 247–255. <https://doi.org/10.1159/000499186>
22. Hikita K., Van Meerbeek B., De Munck J., Ikeda T., Van Landuyt K., Maida T., Lambrechts P., Peumans M. Bonding effectiveness of adhesive luting agents to enamel and dentin. *Dental Materials*, 2007, vol. 23, iss. 1, pp. 71–80. <https://doi.org/10.1016/j.dental.2005.12.002>
23. Swain M. V., Xue J. State of the art of micro-CT applications in dental research. *International Journal of Oral Science*, 2009, vol. 1, iss. 4, pp. 177–188. <https://doi.org/10.4248/IJOS09031>
24. Sadyrin E. V. Correlating the mechanical properties of the mineral density of brown spot lesion in dentine using nanoindentation and X-ray micro-tomography. In: Altenbach H., Eremeyev V. A., Vasiliev A. S. (eds.) *Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications*. Advanced Structured Materials, vol. 155. Cham, Springer, 2022, pp. 389–398. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81705-3_21
25. Huang T. T. Y., He L. H., Darendeliler M. A., Swain M. V. Correlation of mineral density and elastic modulus of natural enamel white spot lesions using X-ray microtomography and nanoindentation. *Acta Biomaterialia*, 2010, vol. 6, iss. 12, pp. 4553–4559. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2010.06.028>
26. Sadyrin E. V., Mitrin B. I., Yogina D. V., Swain M. V. Preliminary study of distribution of mechanical properties and mineral density by depth of liquid saturated carious dentine. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2021, vol. 102, Art. 012056. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1029/1/012056>

Поступила в редакцию / Received 21.11.2022

Принята к публикации / Accepted 23.12.2022

Опубликована / Published 01.03.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 95–112

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 95–112

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-95-112>, EDN: MGPFPX

Научная статья

УДК 629.78

Новый алгоритм квазиоптимальной переориентации космического аппарата

Я. Г. Сапунков, А. В. Молоденков[✉]

Институт проблем точной механики и управления РАН (ИПТМУ РАН), Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

Сапунков Яков Григорьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, iptmuran@san.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7149-5117>, AuthorID: 7447

Молоденков Алексей Владимирович, доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, molalexei@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4991-4220>, AuthorID: 7448

Аннотация. Рассматривается классическая задача оптимального управления пространственной переориентацией космического аппарата как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости космического аппарата без ограничения на вектор-функцию управления и с фиксированным временем переходного процесса. Как критерий оптимальности используется функционал энергии, затраченной на поворот космического аппарата. В рамках концепции Пуансо, описывающей произвольное угловое движение твердого тела в терминах обобщенного конического движения, проведена модификация задачи оптимального управления угловым движением космического аппарата, и его траектория задана в этом классе движений. При этом общность исходной задачи практически не нарушается, так как известные точные решения классической задачи оптимального углового движения динамически-симметричного космического аппарата в случаях плоского поворота или регулярной прецессии и аналогичные решения модифицированной задачи полностью совпадают; в других случаях в числовых расчетах классической и модифицированной задач расхождение между значениями функционала оптимизации составляет не более нескольких процентов, включая повороты космического аппарата на большие углы. Поэтому предлагаемое решение модифицированной задачи может использоваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости космического аппарата, на основе решения обратной задачи динамики твердого тела получена формула для вектора управляющего момента космического аппарата. Дается квазиоптимальный алгоритм оптимального поворота космического аппарата. Приведены числовые примеры, показывающие близость решений классической и модифицированной задач оптимальной переориентации космического аппарата.

Ключевые слова: оптимальное управление, космический аппарат, произвольное твердое тело, квазиоптимальное аналитическое решение, алгоритм

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 22-21-00218) и в рамках темы FFNM-2022-0007.



Для цитирования: Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Новый алгоритм квазиоптимальной переориентации космического аппарата // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 95–112. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-95-112>, EDN: MGPFPX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

The new algorithm of quasi-optimal reorientation of a spacecraft

Ya. G. Sapunkov, A. V. Molodenkov[✉]

Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

Yakov G. Sapunkov, iptmuran@san.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7149-5117>, AuthorID: 7447

Alexei V. Molodenkov, molalexei@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4991-4220>, AuthorID: 7448

Abstract. The classical problem of optimal control of the attitude maneuver of a spacecraft as a rigid body of arbitrary dynamic configuration under arbitrary boundary conditions for the angular position and angular velocity of a spacecraft without restriction on the control vector function and with a fixed transition time is considered. As a criterion of optimality, the functional of the energy spent on the rotation of a spacecraft is used. Within the bounds of the Poincaré concept describing arbitrary angular motion of a rigid body in terms of generalized conical motion, a modification of the problem of optimal control of the angular motion of a spacecraft is carried out and its trajectory is given in this class of motions. At the same time, the generality of the original problem is practically not violated, since the known exact solutions to the classical problem of optimal angular motion of a dynamically symmetric spacecraft in cases of plane rotation or regular precession and similar solutions of the modified problem completely coincide; in other cases, in numerical calculations of the classical and modified problems, the discrepancy between the values of the optimization functional is no more than a few percent, including spacecraft rotations at large angles. Therefore, the proposed solution of the modified problem can be used as quasi-optimal with respect to the classical problem. Explicit expressions for the quaternion of the orientation and the vector of angular velocity of a spacecraft are given, a formula for the vector of the control moment of a spacecraft is obtained based on the solution of the inverse problem of the dynamics of a rigid body. The quasi-optimal algorithm for optimal rotation of a spacecraft is given. Numerical examples showing the proximity of solutions to the classical and modified problems of optimal reorientation of a spacecraft are given.

Keywords: optimal control, spacecraft, arbitrary rigid body, quasi-optimal analytical solution, algorithm

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00218) and within the theme FFM-2022-0007.

For citation: Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. The new algorithm of quasi-optimal reorientation of a spacecraft. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 95–112 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-95-112>, EDN: MGPFPX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Задачам управления угловым движением космического аппарата (КА) в различных постановках посвящено большое количество публикаций (например, обзорная статья [1], книги [2–4] и обширные ссылки на литературу в них). Однако сложность стоящих здесь проблем, отсутствие общих аналитических решений продолжают оставлять эту проблематику актуальной. Аналитическое решение задачи программного углового движения для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи; в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем аналитическое решение задачи оптимального поворота в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В статье рассматривается классическая задача оптимального в смысле минимума энергозатрат и фиксированного времени поворота КА произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА без ограничения на функцию управления. С применением кватернионов на основании принципа максимума Л. С. Понтрягина получены выражения для структуры оптимального управления, функции Гамильтона – Понтрягина и сопряженной системы уравнений, т.е. сформулирована краевая задача оптимизации. Кратко описано численное решение краевой задачи оптимального управления [5] на основе алгоритма Левенберга – Марквардта, представляющего собой комбинацию модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Из большого количества проведенных численных расчетов решения задачи об оптимальном развороте КА для различных граничных условий и различных распределений масс в КА, что характеризуется значениями главных моментов инерции, можно сделать следующие выводы: кинематические характеристики разворота КА (кватернион ориентации и вектор угловой скорости) слабо зависят от распределения масс в КА и в основном определяются граничными условиями задачи; управляющий момент существенно зависит от распределения масс в КА и граничных условий задачи. Слабая зависимость кинематических характеристик оптимального движения КА от его динамической конфигурации обеспечивает близость решений классической задачи оптимальной переориентации и так называемой модифицированной задачи оптимального разворота при произвольной динамической конфигурации КА.

В статье представлено аналитическое решение модифицированной задачи оптимального по энергии поворота КА при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА, доведенное до алгоритма. В классе обобщенных конических движений произведена модификация классической задачи оптимального поворота, которая позволила получить аналитические решения для уравнений движения, содержащие произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача с квадратичным функционалом, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. Найденное аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное (квазиоптимальное) решение классической



задачи оптимального разворота КА при произвольных граничных условиях. Получены явные выражения для вектора угловой скорости, управляющего момента и траектории движения КА. Вектор управляющего момента получается из вектора угловой скорости на основе решения обратной задачи динамики твердого тела.

Следует отметить, что предлагаемый в статье подход к решению задачи хорошо соответствует концепции Пуансо из теоретической механики, когда за всяким произвольным движением твердого тела вокруг неподвижной точки стоит обобщенное коническое движение. Поэтому траектория движения КА определялась в классе обобщенных конических движений. При этом для случаев аналитической разрешимости классической задачи оптимального поворота при сферической симметрии КА, когда наложены ограничения на краевые условия задачи — плоский эйлеров поворот, коническое движение, — аналитические решения классической и модифицированной задач полностью совпадают. В остальных случаях в численных примерах при решении классической и модифицированной задачи расхождение между величинами функционала качества, который является определяющей характеристикой задачи, составляет от долей процента до нескольких процентов, включая большие повороты КА на 180° .

Предлагаемый в статье метод решения задачи ранее был успешно применен к задаче оптимальной по быстродействию переориентации КА произвольной динамической конфигурации с ограниченным управлением [6] и задаче оптимального в смысле комбинированного функционала поворота осесимметричного КА с нефиксированным временем переходного процесса [7].

Отметим, что в литературе известны некоторые квазиоптимальные решения задачи поворота КА с использованием обратной задачи динамики твердого тела, например [8, 9]. В [8] решение получено с помощью принципа оптимальности Р. Беллмана на основе задачи оптимальной переориентации КА в кинематической постановке, где функцией управления выступает вектор угловой скорости КА. Направление вектора угловой скорости КА при этом определяется граничными условиями по угловому положению КА. В [9] решение задачи получено посредством представления кватерниона ориентации КА полиномами и выражения вектора угловой скорости через этот кватернион. Однако никаких гарантий (доказанных теорем или соображений из теоретической механики), что на всей совокупности угловых движений КА при любых граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА эти решения будут достаточно хорошо аппроксимировать оптимальную траекторию углового движения КА, не приводится.

1. Постановка задачи

Движение КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации вокруг центра масс описывается уравнениями [2]:

$$\begin{aligned} 2\dot{\Lambda} &= \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}(t), & (1) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}], & (2) \end{aligned}$$

где $\Lambda = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ — кватернион, описывающий положение КА в инерциальном пространстве; $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ — вектор угловой скорости; i_1, i_2, i_3 — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами трехмерного векторного пространства



$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$; символ \circ означает кватернионное умножение; $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение; $\mathbf{M}(t) = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T$ — вектор внешнего момента, действующего на КА, матрица

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

— тензор инерции. Фазовые координаты Λ, ω и управление \mathbf{M} удовлетворяют требованиям задачи оптимального управления [10] ($\Lambda(t), \omega(t)$ непрерывные функции и \mathbf{M} кусочно-непрерывная функция); кватернион $\Lambda(t)$ нормирован, т. е. $\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. В динамических уравнениях Эйлера (2) I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции твердого тела.

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \Lambda(T) = \Lambda_T \quad (3)$$

и угловой скорости КА

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \omega(T) = \omega_T. \quad (4)$$

Требуется определить оптимальное управление $\mathbf{M}^{\text{opt}}(t)$ системой (1), (2) при граничных условиях (3) и (4), доставляющее минимум функционалу

$$J = \int_0^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} dt, \quad (5)$$

где время T произвольно и зафиксировано.

2. Переход к безразмерным переменным

Перейдем от размерных переменных в задаче к безразмерным по формулам

$$I_* = ((I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)/3)^{1/2}, \quad I_k^{\text{dimless}} = I_k/I_*, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\omega^{\text{dimless}} = T\omega, \quad t^{\text{dimless}} = T^{-1}t, \quad \mathbf{M}^{\text{dimless}} = I_*^{-1}T^2\mathbf{M}, \quad J^{\text{dimless}} = I_*^{-2}T^3 J,$$

при этом вид формул (1)–(4) не изменится, а функционал (5) запишется так:

$$J = \int_0^1 \mathbf{M}^T \mathbf{M} dt. \quad (6)$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи (1)–(4) (где $T = 1$), (6) в безразмерных переменных, и верхний индекс у них будет опущен.

3. Применение принципа максимума

Выполним процедуру принципа максимума Л. С. Понтрягина [2, 10]. Введем вспомогательные функции $\Psi(t)$ (кватернион) и $\varphi(t)$ (вектор), сопряженные к фазовым переменным Λ, ω . Составим функцию Гамильтона – Понтрягина

$$H = -\psi^*(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\Psi, \Lambda \circ \omega) / 2 + (\varphi, \Gamma^{-1}\mathbf{M} - \Gamma^{-1}[\omega, \mathbf{I}\omega]), \quad (7)$$



где постоянная $\psi^* \geq 0$, а (\cdot, \cdot) — скалярное произведение векторов. Будем рассматривать невырожденные решения краевой задачи принципа максимума, для которых $\psi^* > 0$. В силу однородности функции Гамильтона – Понтрягина H в формуле (7) положим $\psi^* = 1$.

Сопряженная система:

$$\begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega, \\ \dot{\varphi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) / 2 - [\mathbf{I}^{-1}\varphi, \mathbf{I}\omega] + \mathbf{I}[\mathbf{I}^{-1}\varphi, \omega], \end{cases} \quad (8)$$

где «vect» обозначает векторную часть кватерниона, а « $\tilde{}$ » — сопряжение кватерниона. Как видно, уравнения для переменных Ψ и Λ совпадают, а их решения различаются на кватернионную мультипликативную константу \mathbf{C} :

$$\Psi = \mathbf{C} \circ \Lambda. \quad (9)$$

Используя это и введя обозначение [2]

$$\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \quad (10)$$

где $\mathbf{c}_v = \text{vect } \mathbf{C}$, сопряженную систему (8) запишем так:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2 - [\mathbf{I}^{-1}\varphi, \mathbf{I}\omega] + \mathbf{I}[\mathbf{I}^{-1}\varphi, \omega]. \end{cases}$$

Следует отметить, что применение этого приема [2], основанного на самосопряженности дифференциальной кватернионной системы уравнений (1) (замена кватернионной сопряженной переменной Ψ на векторную переменную \mathbf{p} (10)), позволяет понизить размерность краевой задачи, получаемой после применения принципа максимума, на четыре единицы.

Условие максимума функции Гамильтона – Понтрягина (7) дает следующую структуру оптимального управления:

$$\mathbf{M}^{\text{opt}} = \mathbf{I}^{-1}\varphi/2. \quad (11)$$

Как видно, вектор-функция управления в задаче носит непрерывный характер.

Функция Гамильтона – Понтрягина (7) с учетом новой переменной \mathbf{p} (10) примет вид

$$H = -(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{p}, \omega) / 2 + (\varphi, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\omega, \mathbf{I}\omega]). \quad (12)$$

4. Наводящие соображения

В данном разделе приводятся примеры численного решения задачи оптимального поворота для различных вариантов динамической конфигурации КА (твёрдого тела) и соображения, основанные на этих примерах.

Численное решение задачи оптимального поворота КА (1)–(4), (6) сводится к решению краевой задачи для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \\ \dot{\omega} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\omega, \mathbf{I}\omega], \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2 - [\mathbf{I}^{-1}\varphi, \mathbf{I}\omega] + \mathbf{I}[\mathbf{I}^{-1}\varphi, \omega], \\ \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \quad \mathbf{c}_v = \text{const}, \end{cases} \quad (13)$$



$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad (14)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_T, \quad \omega(T) = \omega_T, \quad (15)$$

$$\mathbf{M}^{\text{opt}} = \mathbf{I}^{-1} \varphi / 2, \quad (16)$$

откуда подлежат нахождению величины \mathbf{M}^{opt} , Λ^{opt} , ω^{opt} , \mathbf{c}_v .

Конечное условие (15) необходимо переписать в семимерном фазовом пространстве $\Lambda \times \omega$ в виде

$$\text{vect}(\Lambda(T) \circ \tilde{\Lambda}_T) = 0, \quad \omega(T) = \omega_T. \quad (17)$$

Для решения краевой задачи (13), (14), (16), (17) применялся итерационный численный метод, представляющий собой комбинацию методов Рунге – Кутты, Ньютона и градиентного спуска [5]. Важно отметить, что условие совпадения кватерниона ориентации твердого тела в конечный момент времени с кватернионом, определяющим заданную конечную ориентацию твердого тела (условие (15)), заменено условием обращения в нуль векторной части кватернионного произведения $\Lambda(T) \circ \tilde{\Lambda}_T$ (17). В [11] автор пытался выполнить условие $\Lambda(T) = \Lambda_T$, что приводило к вырождению матриц частных производных от невязок. В качестве первого приближения по недостающим начальным условиям при решении краевой задачи (13), (14), (16), (17) оптимального управления с произвольными граничными условиями по угловому положению и угловой скорости твердого тела берутся начальные условия по переменным φ и \mathbf{p} , полученные при решении задачи оптимального разворота сферически симметричного КА (твердого тела) в классе плоских эйлеровых поворотов.

Для твердых тел с различным распределением масс сравним кинематические характеристики оптимального движения в задачах оптимального разворота с одними и теми же граничными условиями. Например,

$$\Lambda_0 = (0.7951, 0.2981, -0.3975, 0.3478), \quad \omega_0 = (0.2739, -0.2388, -0.3), \quad (18)$$

$$\Lambda_T = (0.8443, 0.3984, -0.3260, 0.1485), \quad \omega_T = (0.0, 0.0, -0.59). \quad (19)$$

Тело 1. Сферически симметричное твердое тело $I_1 = I_2 = I_3 = 1.0$.

Тело 2. Произвольное твердое тело $I_1 = 0.9869$, $I_2 = 1.1843$, $I_3 = 0.7895$.

Тело 3. Произвольное твердое тело $I_1 = 0.9506$, $I_2 = 1.3308$, $I_3 = 0.5704$.

Тело 4. МКС (ранняя версия [12]) как произвольное твердое тело $I_1 = 4853000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $I_2 = 23601000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $I_3 = 26278000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ (размерные моменты инерции) или $I_1 = 0.2358$, $I_2 = 1.1466$, $I_3 = 1.2766$ (безразмерные величины).

Тело 5. «Спейс Шаттл» (динамические характеристики КА «Спейс Шаттл» такие же, как у почти осесимметричного твердого тела):

$$I_1 = 3400648 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad I_2 = 21041672 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \quad \text{или} \quad I_1 = 0.1967, \quad I_2 = 1.2168, \quad I_3 \approx I_2.$$

Тело 6. Произвольное твердое тело $I_1 = 0.9116$, $I_2 = 1.3674$, $I_3 = 0.5470$.

В табл. 1 приведены кинематические характеристики (компоненты кватерниона положения твердого тела и вектора угловой скорости) для пяти из вышеуказанных тел при $t = 0.5$ (в середине промежутка времени оптимального движения) при решении задачи оптимального управления с граничными условиями (18), (19) в классической постановке. В последней строке табл. 1 для сравнения приводятся данные, полученные при решении модифицированной задачи оптимального управления, о которой пойдет речь в разделах 6, 7 статьи.

Для тех же тел при тех же граничных условиях в табл. 2 приводятся компоненты векторов углового ускорения $\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t)\mathbf{i}_1 + \varepsilon_2(t)\mathbf{i}_2 + \varepsilon_3(t)\mathbf{i}_3 = \dot{\omega}(t)$ для начала, середины и конца процесса оптимального управления ($t = 0$, $t = 0.5$, $t = T = 1$).



Таблица 1 / Table 1

Кинематические характеристики КА при граничных условиях (18), (19)
Kinematic characteristics of a spacecraft under boundary conditions (18), (19)

Класс тела	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
Тело 1	0.8096	0.3625	-0.3768	0.2668	-0.0502	-0.0114	-0.4937
Тело 2	0.8095	0.3628	-0.3766	0.2670	-0.0499	-0.0115	-0.4941
Тело 3	0.8093	0.3631	-0.3765	0.2674	-0.0496	-0.0116	-0.4949
Тело 4	0.8077	0.3654	-0.3773	0.2678	-0.0506	-0.0159	-0.4949
Тело 5	0.8086	0.3634	-0.3780	0.2668	-0.0519	-0.0137	-0.4948
Модифицированная задача	0.8099	0.3627	-0.3756	0.2673	-0.0488	-0.0098	-0.4938

Таблица 2 / Table 2

Вектор углового ускорения КА при граничных условиях (18), (19)
Angular acceleration vector of a spacecraft under boundary conditions (18), (19)

Класс тела	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\varepsilon_1(0.5)$	$\varepsilon_2(0.5)$	$\varepsilon_3(0.5)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$
Тело 1	-0.9854	0.7259	-0.4892	-0.2917	0.2087	-0.2878	0.5077	-0.1272	-0.0985
Тело 2	-0.9649	0.7262	-0.4736	-0.3051	0.2053	-0.2902	0.5357	-0.1154	-0.0965
Тело 3	-0.9399	0.7235	-0.4449	-0.3207	0.2039	-0.2942	0.5681	-0.1076	-0.0940
Тело 4	-0.9262	0.6536	-0.4422	-0.3182	0.2586	-0.2978	0.5591	-0.2446	-0.0886
Тело 5	-0.7914	0.6537	-0.4345	-0.3968	0.2549	-0.3002	0.7341	-0.2381	-0.0875
Модифицированная задача	-0.9647	0.7634	-0.4932	-0.3103	0.1687	-0.2847	0.5350	-0.0220	0.1024

Также приведем кинематические характеристики оптимального движения различных тел для случая, когда начальное состояние тела определяется соотношением (18), а конечное состояние соотношением

$$\mathbf{A}_T = (0.79368, 0.49375, -0.26823, 0.23309), \quad \boldsymbol{\omega}_T = (0.2, 0.3, -0.2). \quad (20)$$

В табл. 3 для тел 1, 6, 4, 5 приводятся компоненты кватерниона положения и вектора угловой скорости при $t = 0.5$.

Таблица 3 / Table 3

Кинематические характеристики КА при граничных условиях (18), (20)
Kinematic characteristics of a spacecraft under boundary conditions (18), (20)

Класс тела	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
Тело 1	0.78995	0.41434	-0.35808	0.28583	0.32168	-0.01522	-0.52451
Тело 6	0.78999	0.41442	-0.35860	0.27492	0.32414	-0.01453	-0.52402
Тело 4	0.79080	0.41371	-0.35618	0.27679	0.31768	-0.01578	-0.52304
Тело 5	0.79103	0.41317	-0.35664	0.27635	0.31932	-0.01491	-0.52314

Для тех же тел при тех же граничных условиях в табл. 4 приводятся компоненты векторов углового ускорения при $t = 0$, $t = 0.5$, $t = T = 1$.

Аналогичные расчеты проводились и для других начальных и конечных состояний тел. Из табл. 1-4 и других проведенных расчетов с другими граничными условиями



Таблица 4 / Table 4

Вектор углового ускорения КА при граничных условиях (18), (20)
 Angular acceleration vector of a spacecraft under boundary conditions (18), (20)

Класс тела	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\varepsilon_1(0.5)$	$\varepsilon_2(0.5)$	$\varepsilon_3(0.5)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$
Тело 1	0.26547	0.38677	-1.00250	-0.06733	0.52385	0.10458	-0.43888	0.74958	1.18404
Тело 6	0.19271	0.34271	-1.05149	-0.05270	0.54857	0.12304	-0.41047	0.70409	1.16712
Тело 4	0.36496	0.53821	-1.00244	-0.07017	0.44837	0.10585	-0.54722	0.88317	1.18497
Тело 5	0.28551	0.51819	-1.00680	-0.04259	0.45769	0.10771	-0.55803	0.86381	1.18517

видно, что кинематические характеристики оптимального движения тел существенно зависят от начального и конечного состояния тел и слабо зависят от распределения масс в теле. Отсюда следует, что, используя кинематические характеристики тела со сферической симметрией, из динамических уравнений Эйлера с учетом моментов инерции произвольных тел можно вычислить управляющие моменты для движения произвольных тел. Такие моменты можно рассматривать как квазиоптимальные управляющие моменты для перевода твердых тел из начального состояния в конечное состояние. Выражения для траектории углового движения и угловой скорости твердого тела (КА) можно построить аналитически в явном виде на основе решения модифицированной задачи оптимального разворота, а управляющий момент определить исходя из решения обратной задачи динамики твердого тела. Покажем это.

5. Модифицированная задача оптимальной переориентации

Движение КА по-прежнему описывается соотношениями (1)–(4), (6), при этом начальное и конечное значения по угловому положению и угловой скорости КА произвольны.

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального разворота твердого тела (КА) является разрешимость классической задачи Дарбу — аналитического определения кватерниона $\Lambda(t)$ из уравнения (1) при известных $\Lambda_0, \omega(t)$.

Для кватернионного дифференциального уравнения (1) при условии, что вектор угловой скорости $\omega(t)$ задается выражением

$$\omega(t) = \mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t), \tag{21}$$

в котором $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции времени, известно решение [13], удовлетворяющее начальному условию (3):

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}, \tag{22}$$

где символ « $\exp\{\cdot\}$ » обозначает кватернионную экспоненту [2]. Формулы (21), (22) включают в себя все известные точные аналитические решения традиционной задачи оптимального разворота КА при его сферической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения КА постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1–3, 14].

Заметим [13], что задачу Дарбу с произвольно заданным вектором угловой скорости $\omega(t)$ с помощью замен переменных можно свести к решению уравнения



типа (1) с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}^*(t) = -(\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)),$$

отличающейся от (21) только знаком. При этом явное аналитическое решение этой задачи, как и при произвольном векторе $\boldsymbol{\omega}(t)$, не известно. Таким образом, предлагаемая структура угловой скорости (21) хорошо соотносится с концепцией Пуансо, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела [15].

Выражение (21) и решение (22) можно обобщить, добавив поворот на постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой поворот задается с помощью кватерниона \mathbf{K} , $\|\mathbf{K}\| = 1$. Тогда вектор $\boldsymbol{\omega}$ и кватернион Λ будут определяться соотношениями

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}, \quad (23)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}. \quad (24)$$

Будем рассматривать вторые производные от функций f и g в качестве управляющих параметров. Тогда если ввести обозначения

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad (25)$$

то можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих управляемую систему:

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = u_1, \quad \dot{g}_1 = u_2, \quad (26)$$

где f, f_1, g, g_1 — фазовые координаты, u_1, u_2 — управляющие параметры. Ограничимся случаем, когда кватернион \mathbf{K} представляется в виде произведения

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\}, \quad (27)$$

где α_1, α_2 — некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 определяют поворот вектора $\boldsymbol{\omega}$ (21) вокруг осей $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. Поворот вокруг оси \mathbf{i}_3 уже включен в формулу (23), если учесть, что в функцию $g(t)$ входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион $\tilde{\mathbf{K}}$ будет представляться так:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\}. \quad (28)$$

Условия того, что выражения для $\boldsymbol{\omega}, \Lambda$ (23), (24) удовлетворяют граничным условиям (3), (4) ((17)) с учетом (27), (28), запишутся как

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_0, \quad (29)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_T, \quad (30)$$

$$\Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \Lambda_T. \quad (31)$$

Тогда для управляемой системы (26) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления, решение которой можно рассматривать как приближенное (квазиоптимальное) решение задачи (1)–(5) ((6)): требуется найти оптимальные



управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, которые переводят управляемую систему (26) из начального состояния

$$f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0) \quad (32)$$

в конечное состояние

$$f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T), \quad (33)$$

удовлетворяющие соотношениям (29)–(31), в которых α_1 , α_2 выступают как параметры, подлежащие определению, и доставляют минимум функционалу

$$J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt. \quad (34)$$

Соотношения (29)–(31) можно переписать в виде

$$(\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad (35)$$

$$(\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\omega}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} = \\ & = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2. \end{aligned} \quad (37)$$

Такую задачу оптимального управления будем называть модифицированной задачей оптимального разворота КА (твёрдого тела). Управляющий момент, соответствующий решению модифицированной задачи оптимального разворота КА, определяется из (2) по формуле

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]. \quad (38)$$

6. Решение задачи с помощью принципа максимума

Функция Гамильтона – Понтрягина для поставленной задачи оптимального управления имеет вид

$$H = -(u_1^2 + u_2^2) + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2, \quad (39)$$

где $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ – сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2. \quad (40)$$

Общее решение уравнений (40), содержащее произвольные постоянные c_1, \dots, c_4 , имеет вид

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4.$$

Из условия максимума для функции Гамильтона – Понтрягина (39) определяется оптимальное управление

$$u_1 = \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2, \quad u_2 = \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2. \quad (41)$$

После подстановки (41) в систему уравнений (26) находится общее решение для фазовых координат, содержащее восемь произвольных постоянных c_1, \dots, c_8 :

$$\begin{aligned} f &= -c_1 t^3/12 + c_3 t^2/4 + c_5 t + c_6, & g &= -c_2 t^3/12 + c_4 t^2/4 + c_7 t + c_8, \\ f_1 &= -c_1 t^2/4 + c_3 t/2 + c_5, & g_1 &= -c_2 t^2/4 + c_4 t/2 + c_7. \end{aligned} \quad (42)$$



В связи с тем что c_6 входит в функцию f как аддитивная постоянная, из формулы (24) видно, что эта постоянная не оказывает влияния; поэтому c_6 можно положить равной нулю. Таким образом, для определения девяти неизвестных постоянных задачи $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ и α_1, α_2 служат девять уравнений из системы (35)–(37) (отметим, что в кватернионном уравнении (37) независимыми являются только три уравнения в скалярной форме из-за нормированности кватерниона Λ). Если формулы (42) подставить в (23), (24), то будут получены аналитические выражения для определения законов изменения оптимальной угловой скорости и оптимальной траектории КА. Эти выражения определяют оптимальный в смысле минимума функционала энергозатрат (34) разворот КА в классе обобщенных конических движений. Управляющий момент согласно (23) и (38)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{K}} \circ ((\mathbf{i}_1(u_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) + \\ + \mathbf{i}_2(u_1 \cos g - f_1 g_1 \sin g) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{K}) + [\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1 \sin g + \\ + \mathbf{i}_2 f_1 \cos g + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K}, \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1 \sin g + \mathbf{i}_2 f_1 \cos g + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K})]. \end{aligned} \quad (43)$$

Формула (43) с учетом (41), (42) определяет аналитическое решение для управляющего момента, соответствующего решению модифицированной задачи. Модифицированная задача оптимального разворота твердого тела (КА) тем самым решена полностью.

Следует отметить, что при сферической симметрии КА ($I_1 = I_2 = I_3$) квадрат модуля управляющего момента выражается через управляющие параметры и фазовые координаты модифицированной задачи следующим образом:

$$\mathbf{M}^2 = u_1^2 + f_1^2 g_1^2 + u_2^2. \quad (44)$$

Если в задаче оптимального разворота сферически-симметричного КА векторы граничных условий по угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\omega}_T$ положить параллельными $\text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T)$ (плоский эйлеров разворот КА), то решения задач в классической и модифицированной постановках полностью совпадут. То же самое можно сказать и о случае, когда решение классической задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА получено в классе конических движений [14]. В этих случаях слагаемое $f_1^2 g_1^2$ в (44) обращается в нуль и функционал (34) полностью переходит в функционал (5) ((6)) классической задачи. В задаче поворота сферически-симметричного КА при произвольных граничных условиях, полагая, что $\int_0^1 f_1^2 g_1^2 dt$ мало по сравнению с $\int_0^1 \mathbf{M}^2 dt$, в (44) можно опустить последнее слагаемое. Тогда модифицированная задача оптимального управления в переменных f, g, f_1, g_1, u_1, u_2 с функционалом (34) и выражениями (23), (24), (35)–(38), (42), (43) будет соответствовать классической задаче оптимального поворота сферически-симметричного тела в классе обобщенных конических движений. На основании рассуждений раздела 5 статьи модифицированная задача может рассматриваться как квазиоптимальная задача поворота произвольного КА при произвольных граничных условиях.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального разворота КА произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях в классе обобщенных конических движений в безразмерных переменных.

Шаг 1. По заданным граничным условиям по угловому положению Λ_0, Λ_T (3), угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_T$ (4) и времени переориентации КА ($T = 1$) из формул (27), (28)



и девяти уравнений системы (35)–(37) определяются девять неизвестных постоянных задачи $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8, \alpha_1, \alpha_2$ и строятся функции f, f_1, g, g_1 .

Шаг 2. Используя формулы (27), находим компоненты кватерниона \mathbf{K} .

Шаг 3. По формуле (23)

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}$$

вычисляется вектор угловой скорости КА.

Шаг 4. По формуле (24)

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}$$

вычисляется кватернион ориентации твердого тела.

Шаг 5. Используя формулу (43), вычисляется вектор управляющего момента КА.

Шаг 6. По формулам (6), (43) вычисляется значение безразмерного функционала оптимизации задачи оптимальной переориентации.

7. Численные примеры

В данном разделе рассматриваются сравнительные результаты численных решений классической и модифицированной задач оптимального разворота КА (твердого тела). Для модифицированной задачи выполнялись расчеты по аналитическому алгоритму раздела 6 статьи. Значения постоянных $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_6, c_8$, входящих в аналитическое решение модифицированной задачи, для разворота с граничными условиями (18), (19) таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -0.0421, & \alpha_2 &= -0.2226, & c_1 &= 3.2902, & c_2 &= -1.4885, & c_3 &= 2.2113, \\ c_4 &= -1.45, & c_5 &= -0.4156, & c_6 &= 0, & c_7 &= -0.2221, & c_8 &= -0.9216. \end{aligned}$$

Решения классической и модифицированной задачи оказались близки. Для примера в табл. 5–7 приведем значения компонент вектора $\mathbf{M}(t)$ на концах и в середине интервала времени движения твердого тела (КА) в этих двух решениях для тел вида 3–5.

Таблица 5 / Table 5

Вектор управляющего момента для КА вида 3
Control moment vector for a spacecraft of type 3

t	M_1^{classic}	M_2^{classic}	M_3^{classic}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	-0.9480	0.9316	-0.2786	-0.9715	0.9847	-0.3062
0.5	-0.3093	0.2807	-0.1676	-0.2987	0.2337	-0.1622
T=1	0.5401	-0.1432	-0.0536	0.5085	-0.0293	-0.0584

Таблица 6 / Table 6

Вектор управляющего момента для КА вида 4
Control moment vector for a spacecraft of type 4

t	M_1^{classic}	M_2^{classic}	M_3^{classic}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	-0.2091	0.8349	-0.6241	-0.2181	0.9608	-0.6893
0.5	-0.0741	0.2697	-0.3795	-0.0725	0.1683	-0.3630
T=1	0.1318	-0.2804	-0.1131	0.1261	-0.0253	-0.1307



Таблица 7 / Table 7

Вектор управляющего момента для КА вида 5
Control moment vector for a spacecraft of type 5

t	M_1^{classic}	M_2^{classic}	M_3^{classic}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	-0.1556	0.8793	-0.5955	-0.1897	1.0127	-0.6669
0.5	-0.0780	0.2846	-0.3644	-0.0610	0.1807	-0.3459
T=1	0.1444	-0.2897	-0.1065	0.1052	-0.2682	-0.1246

В табл. 8 приводятся значения функционала качества процесса управления (6) для тел 1–5, полученные в результате решения классической и модифицированной задач оптимального управления с граничными условиями (18), (19).

Таблица 8 / Table 8

Значения функционалов для классической и модифицированной задач
Functional values for classical and modified problems

Класс тела	Тело 1	Тело 2	Тело 3	Тело 4	Тело 5
J^{classic}	0.4782	0.4920	0.4947	0.35522	0.35797
J^{modif}	0.4797	0.4935	0.4966	0.36404	0.36775

Из данных табл. 8 видно, что с возникновением существенной разницы между моментами инерции твердого тела I_1, I_2, I_3 увеличивается расхождение между управляющими моментами, полученными при решении классической и модифицированной задач в зависимости от характера изменения моментов инерции твердого тела между собой. Но в то же время различие между значениями функционала качества процесса управления (6), вычисленными при решении классической и модифицированной задач, приемлемо. Надо заметить, что значение функционала качества процесса управления — определяющая характеристика задачи.

Также проводились расчеты по решению задачи оптимального разворота для случаев, когда начальное состояние твердого тела (КА) определялось соотношениями (18). Конечное положение тела задавалось поворотом тела из начального положения на некоторый угол вокруг эйлеровой оси, единичный вектор которой определялся координатами

$$(0.04500, -0.07519, -0.99615). \tag{45}$$

Таблица 9 / Table 9

Кватернион конечного положения КА
Quaternion of the spacecraft final position

$\varphi, ^\circ$	$\lambda_0(T)$	$\lambda_1(T)$	$\lambda_2(T)$	$\lambda_3(T)$
30.0	0.84643	0.40650	-0.31853	0.12982
60.0	0.84013	0.48716	-0.21783	-0.09703
90.0	0.77657	0.53461	-0.10229	-0.31727
120.0	0.66009	0.54564	0.02023	-0.51589
150.0	0.49863	0.51948	0.14136	-0.67935
180.0	0.30318	0.45792	0.25286	-0.79652

В табл. 9 приводятся компоненты кватернионов конечного положения твердого тела (КА) для поворотов на различные величины эйлерова угла в градусах вокруг вектора с направлением (45).

В табл. 10 приводятся значения функционалов $J^{\text{classic}}, J^{\text{modif}}$ классической и модифицированной задач, определяющих качество процесса перевода тел 1, 6, 4 из начального состояния (45) в конечные состояния по табл. 9 и при ω_T (19),



Таблица 10 / Table 10

Оптимальное и квазиоптимальное значения функционалов при переводе КА из начального состояния (18) в конечные положения по табл. 9 при угловой скорости (19)

Optimal and quasi-optimal values of functionals when a spacecraft is transferred from initial state (18) to final positions according to Table 9 at angular velocity (19)

Тело	J	$\varphi = 30.0^\circ$	$\varphi = 60.0^\circ$	$\varphi = 90.0^\circ$	$\varphi = 150.0^\circ$	$\varphi = 180.0^\circ$
1	J^{classic}	0.52385	4.63277	15.31437	56.39081	86.78094
	J^{modif}	0.52510	4.63724	15.32882	56.52086	87.51533
	ΔJ	0.00125	0.00447	0.01445	0.13005	0.73439
	%	0.24	0.10	0.09	0.23	0.85
6	J^{classic}	0.48938	1.68431	4.99284	17.73522	27.05714
	J^{modif}	0.49142	1.69229	5.08024	18.48275	28.29371
	ΔJ	0.00204	0.00798	0.08740	0.74753	1.23657
	%	0.40	0.48	1.75	4.20	4.56
4	J^{classic}	0.44007	7.25434	24.73075	88.98745	132.97487
	J^{modif}	0.44918	7.26926	24.80963	92.18788	142.39358
	ΔJ	0.00911	0.01492	0.07888	3.30042	9.41871
	%	2.07	0.21	0.32	3.71	7.08

с указанием разности между значениями этих функционалов $\Delta J = J^{\text{modif}} - J^{\text{classic}}$ и процентного расхождения $(\Delta J / J^{\text{classic}}) \cdot 100\%$.

В табл. 11 приводятся подобные показатели, когда конечная угловая скорость твердых тел определяется вектором $\omega_T = (0.0, 0.0, 0.0)$, т. е. в этом случае твердое тело (КА) переводится в состояние покоя.

Из большого количества проведенных численных расчетов решения задачи об оптимальном развороте КА (твердого тела) для различных граничных условий и для различных распределений масс в теле, что характеризуется значениями главных моментов инерции I_1, I_2, I_3 , можно сделать следующие выводы:

1) кинематические характеристики разворота КА (кватернион ориентации Λ и вектор угловой скорости ω) в классической задаче слабо зависят от распределения масс в КА и в основном определяются граничными условиями задачи, а в модифицированной задаче кинематические характеристики вращения КА зависят только от граничных условий задачи;

2) управляющий момент существенно зависит от распределения масс в КА и граничных условий как в классической, так и в модифицированной постановках задачи. Слабая зависимость кинематических характеристик оптимального движения КА (твердого тела) от его динамической конфигурации обеспечивает близость решений модифицированной и классической задач оптимального разворота КА при произвольной динамической конфигурации. Решение модифицированной задачи может рассматриваться как квазиоптимальное решение классической задачи поворота КА.

Следует отметить, что кватернион ориентации КА $\Lambda(t)$ может быть двузначным [2], т. е. Λ и $-\Lambda$ соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.



Таблица 11 / Table 11

Оптимальное и квазиоптимальное значения функционалов при переводе КА из начального состояния (18) в конечные положения по табл. 9 и состоянию покоя

Optimal and quasi-optimal values of functionals when a spacecraft is transferred from initial state (18) to final positions according to Table 9 and to rest state

Тело	J	$\varphi = 90.0^\circ$	$\varphi = 120.0^\circ$	$\varphi = 150.0^\circ$	$\varphi = 180.0^\circ$
1	J^{classic}	24.25074	45.17597	72.66431	106.71186
	J^{modif}	24.28745	45.19513	72.77169	107.40843
	ΔJ	0.03672	0.01916	0.10738	0.69657
	%	0.15	0.04	0.15	0.65
6	J^{classic}	7.67679	14.14398	22.61087	33.03152
	J^{modif}	7.82727	14.55971	23.46155	34.32325
	ΔJ	0.15048	0.41573	0.85068	1.29173
	%	1.92	2.94	3.76	3.91
4	J^{classic}	39.30956	72.66173	113.88517	162.63861
	J^{modif}	39.45538	73.72885	118.74480	174.83836
	ΔJ	0.14582	1.06712	4.85963	12.19975
	%	0.37	1.47	4.26	7.53
5	J^{classic}	35.85965	67.01230	83.69665	158.59297
	J^{modif}	35.91027	67.10659	83.93641	159.06287
	ΔJ	0.06062	0.09429	0.23 0.976	46990
	%	0.17	0.14	0.29	0.30

Заключение

Представленное в статье аналитическое квазиоптимальное решение классической задачи оптимального разворота КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости может найти свое применение при построении систем управления КА. Предлагаемый алгоритм с хорошими точностями решает задачу оптимальной переориентации КА и не требует численного решения краевой задачи оптимизации или иного сложного численного решения. Полученные результаты на основе решения обратной задачи динамики твердого тела могут быть обобщены на случаи управления КА при наличии в постановке задачи элементов нежесткости конструкции КА и различных возмущений. Результаты также могут быть применены для КА нанокласса, имеющих ограничения на вычислительные мощности.

Список литературы

1. *Scrivener S. L., Thompson R. C.* Survey of time-optimal attitude maneuvers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1994. Vol. 17, iss. 2. P. 225–233. <https://doi.org/10.2514/3.21187>
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва : Наука, 1973. 320 с.
3. *Junkins J. L., Turner J. D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. New York : Elsevier, 1986. 515 p. <https://doi.org/10.1016/c2009-0-09714-1>
4. *Crassidis J. L., Markley F. L.* Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and



- Control. New York : Springer, 2014. 486 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0802-8>
5. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Численное решение задачи оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 6. С. 66–70.
 6. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal solution of the problem of the time-optimal rotation of a spacecraft // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2021. Vol. 60, iss. 4. P. 639–653. <https://doi.org/10.1134/S1064230721030114>
 7. Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Analytical solution of the problem on an axisymmetric spacecraft attitude maneuver optimal with respect to a combined functional // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82, iss. 7. P. 1183–1200. <https://doi.org/10.1134/S0005117921070043>
 8. Акуленко Л. Д., Лилов Л. К. Синтез квазиоптимальной системы переориентации и стабилизации КА // Космические исследования. 1990. Т. 28, вып. 2. С. 186–197.
 9. Boyarko G. A., Romano M., Yakimenko O. A. Time-optimal reorientation of a spacecraft using an inverse dynamics optimization method // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2011. Vol. 34, iss. 4. P. 1197–1208. <https://doi.org/10.2514/1.49449>
 10. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва : Наука, 1961. 391 с.
 11. Lastman G. J. A shooting method for solving two-point boundary-value problems arising from non-singular bang-bang optimal control problems // International Journal of Control. 1978. Vol. 27, iss. 4. P. 513–524. <https://doi.org/10.1080/00207177808922388>
 12. Банит Ю. Р., Беляев М. Ю., Добринская Т. А., Ефимов Н. И., Сазонов В. В., Стажков В. М. Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2002. № 57.
 13. Molodenkov A. V. On the solution of the Darboux problem // Mechanics of Solids. 2007. Vol. 42, iss. 2. P. 167–176. <https://doi.org/10.3103/S002565440702001X>
 14. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motion // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. Vol. 52, iss. 3. P. 491–501. <https://doi.org/10.1134/S1064230713020081>
 15. Molodenkov A. V., Perelyaev S. E. Solution of approximate equation for modified Rodrigues vector and attitude algorithm design // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2021. Vol. 44, iss. 6. P. 1224–1227. <https://doi.org/10.2514/1.G006008>

References

1. Scrivener S. L., Thompson R. C. Survey of time-optimal attitude maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1994, vol. 17, iss. 2, pp. 225–233. <https://doi.org/10.2514/3.21187>
2. Branets V. N., Shmyglevskij I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachax orientatsii tverdogo tela* [The Use of Quaternions in Problems of Orientation of Solid Bodies]. Moscow, Nauka, 1973. 320 p. (in Russian).
3. Junkins J. L., Turner J. D. *Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers*. New York, Elsevier, 1986. 515 p. <https://doi.org/10.1016/c2009-0-09714-1>
4. Crassidis J. L., Markley F. L. *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*. New York, Springer, 2014. 486 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0802-8>
5. Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Numerical solution of the optimal spacecraft reorientation problem. *Mechatronics, Automation, Control*, 2008, iss. 6, pp. 10–15.
6. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal solution of the problem of the time-optimal rotation of a spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2021, vol. 60, iss. 4, pp. 639–653. <https://doi.org/10.1134/S1064230721030114>
7. Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Analytical solution of the problem on an axisymmetric spacecraft attitude maneuver optimal with respect to a combined functional. *Automation*



- and Remote Control*, 2021, vol. 82, iss. 7, pp. 1183–1200. <https://doi.org/10.1134/S0005117921070043>
8. Akulenko L. D., Lilov L. K. Synthesis of a quasi-optimal system of reorientation and stabilization of spacecraft. *Kosmicheskie issledovaniya* [Space Research], 1990, vol. 28, iss. 2, pp. 186–197 (in Russian).
 9. Boyarko G. A., Romano M., Yakimenko O. A. Time-optimal reorientation of a spacecraft using an inverse dynamics optimization method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, vol. 34, iss. 4, pp. 1197–1208. <https://doi.org/10.2514/1.49449>
 10. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka, 1961. 391 p. (in Russian).
 11. Lastman G. J. A shooting method for solving two-point boundary-value problems arising from non-singular bang-bang optimal control problems. *International Journal of Control*, 1978, vol. 27, iss. 4, pp. 513–524. <https://doi.org/10.1080/00207177808922388>
 12. Banit Yu. R., Belyaev M. Yu., Dobrinskaya T. A., Efimov N. L., Sazonov V. V., Stazhkov V. M. *Estimating the Inertia Tensor of the International Space Station on the Base of the Telemetry Information*. Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS Preprint, 2002, no. 57 (in Russian).
 13. Molodenkov A. V. On the solution of the Darboux problem. *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, iss. 2, pp. 167–176. <https://doi.org/10.3103/S002565440702001X>
 14. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, iss. 3, pp. 491–501. <https://doi.org/10.1134/S1064230713020081>
 15. Molodenkov A. V., Perelyaev S. E. Solution of approximate equation for modified Rodrigues vector and attitude algorithm design. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2021, vol. 44, iss. 6, pp. 1224–1227. <https://doi.org/10.2514/1.G006008>

Поступила в редакцию / Received 16.06.2022

Принята к публикации / Accepted 31.08.2022

Опубликована / Published 01.03.2023



ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 113–125
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 113–125

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-113-125>

EDN: QQEIGU

Научная статья
УДК 004.89

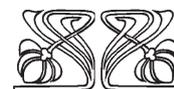
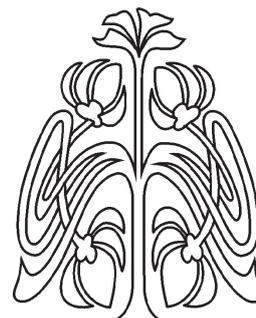
Метод автоматического поиска структуры и параметров нейронных сетей для решения задач обработки информации

А. Д. Обухов

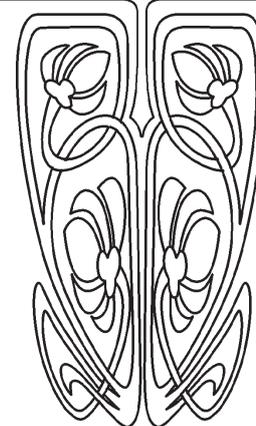
Тамбовский государственный технический университет, Россия, 392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106

Обухов Артем Дмитриевич, кандидат технических наук, доцент кафедры систем автоматизированной поддержки принятия решений, obuhov.art@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-3450-5213>, AuthorID: 751895

Аннотация. Нейронные сети активно применяются при решении различных прикладных задач анализа, обработки и генерации данных. При их использовании одним из сложных этапов является подбор структуры и параметров нейронных сетей (количество и типы слоев нейронов, функции активации, оптимизаторы и т. д.), обеспечивающих наибольшую точность и, следовательно, успешность решения поставленной задачи. В настоящее время данный вопрос решается путем аналитического подбора архитектуры нейронной сети исследователем или разработчиком программного обеспечения. Существующие автоматические инструменты (AutoKeras, AutoGAN, AutoSklearn, DEvol и др.) недостаточно универсальны и функциональны. Поэтому в рамках данной работы рассматривается метод автоматического поиска структуры и параметров нейронных сетей различного типа (многослойных плотных, сверточных, генеративно-состязательных, автоэнкодеров и др.) для решения широкого класса задач. Представлена формализация метода и его основные этапы. Рассмотрена апробация метода, доказывающая его эффективность относительно аналитического решения при подборе архитектуры нейронной сети. Проведено сравнение метода с существующими аналогами, выявлено его преимущество по точности сформированных нейронных сетей и времени поиска



Научный
отдел





решения. Результаты исследования могут использоваться при решении большого класса задач обработки данных, для которых требуется автоматизировать подбор структуры и параметров нейронной сети.

Ключевые слова: нейронные сети, машинное обучение, оптимизация структуры нейронных сетей, анализ и обработка данных, сверточные нейронные сети, автоэнкодеры, генеративно-состязательные сети

Благодарности: Работа выполнена при поддержке лаборатории медицинских VR тренажерных систем для обучения, диагностики и реабилитации, Тамбовский государственный технический университет.

Для цитирования: Обухов А. Д. Метод автоматического поиска структуры и параметров нейронных сетей для решения задач обработки информации // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 113–125. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-113-125>, EDN: QQEIGU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Method of automatic search for the structure and parameters of neural networks for solving information processing problems

A. D. Obukhov

Tambov State Technical University, 106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russia

Artem D. Obukhov, obuhov.art@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-3450-5213>, AuthorID: 751895

Abstract. Neural networks are actively used in solving various applied problems of data analysis, processing and generation. When using them, one of the difficult stages is the selection of the structure and parameters of neural networks (the number and types of layers of neurons, activation functions, optimizers, and so on) that provide the greatest accuracy and, therefore, the success of solving the problem. Currently, this issue is being solved by analytical selection of the neural network architecture by a researcher or software developer. Existing automatic tools (AutoKeras, AutoGAN, AutoSklearn, DEvol and others) are not universal and functional enough. Therefore, within the framework of this work, a method of automatic search for the structure and parameters of neural networks of various types (multilayer dense, convolutional, generative-adversarial, autoencoders, and others) is considered for solving a wide class of problems. The formalization of the method and its main stages are presented. The approbation of the method is considered, which proves its effectiveness in relation to the analytical solution in the selection of the architecture of the neural network. A comparison of the method with existing analogues is carried out, its advantage is revealed in terms of the accuracy of the formed neural networks and the time to find a solution. The research results can be used to solve a large class of data processing problems for which it is required to automate the selection of the structure and parameters of a neural network.

Keywords: neural networks, machine learning, optimization of the neural network structure, data analysis and processing, convolutional neural networks, autoencoders, generative-adversarial networks

Acknowledgements: This work was supported by the Laboratory of medical VR simulation systems for training, diagnostics and rehabilitation, Tambov State Technical University.



For citation: Obukhov A. D. Method of automatic search for the structure and parameters of neural networks for solving information processing problems. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 113–125 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-113-125>, EDN: QQEIGU

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Методы машинного обучения, в частности нейронные сети, широко применяются при решении задач анализа, обработки и генерации данных в различных сферах человеческой деятельности для автоматизации процессов работы с информацией [1]. При их использовании этап подбора структуры и параметров нейронных сетей является наиболее важным и сложным, так как от него зависит итоговая точность сети и, следовательно, успешность решения поставленной задачи. Изначально выбор типа нейронной сети и поиск ее оптимальных настроек производился аналитическим (экспертным) путем, однако в последние годы появились теоретические методы [2, 3] и программные решения (AutoKeras [4], DEvol [5, 6], AutoSklearn [7], Google AutoML [8], AutoGAN [9]), направленные на автоматизацию данного процесса.

Подходы к автоматическому поиску структур и параметров нейронных сетей связаны с формированием различных конфигураций сетей и их сравнением на контрольном наборе данных, что приводит к значительному потреблению вычислительных ресурсов или временным затратам и, следовательно, затрудняет их широкое распространение и применение. Поиск оптимальных параметров и архитектур аналитическим методом не гарантирует оптимального решения при низкой квалификации разработчиков или исследователей. Следовательно, это ограничивает возможность применения подобных подходов в небольших командах без привлечения специалистов в области машинного обучения и обработки информации с соответствующим уровнем компетенций.

Поэтому актуальной задачей является автоматизация процесса подбора структуры и параметров нейронных сетей. В работе коллектива ученых [10] рассматривается подход, основанный на исследовании пространства возможных архитектур, образованного путем добавления или удаления слоев и изменения их параметров. Для поиска оптимальных настроек сети используются контроллер и функция вознаграждения, оценивающая полученные решения.

Другим теоретическим подходом, направленным на снижение сложности процесса выбора структуры и обучения нейронных сетей, стала методология, предложенная в исследовании [11]. Ее особенностью является реализация единственной, универсальной нейронной сети, способной работать с множеством сценариев за счет использования сотен или тысяч подсетей с одним общим ядром. Это позволяет не искать специализированную структуру для каждой конкретной задачи, а использовать универсальную модель. Эффективность решения растет при росте количества сценариев (задач).

Анализ практических подходов к автоматизированному выбору структуры нейронных сетей позволил выделить следующие программные решения [12]: AutoKeras [4], DEvol [5, 6], AutoSklearn [7], Google AutoML [8], AutoGAN [9]. В каждом из инструментов используются свои подходы для нахождения оптимальных настроек и архитектур нейронных сетей: байесовская оптимизация параметров сетей (AutoSklearn, AutoKeras), генетическое программирование (DEvol), контроллеры на основе нейронных сетей (Google AutoML, AutoGAN).



Проведенный анализ данных инструментов показал следующие результаты, представленные в таблице.

Сравнение существующих подходов по автоматического поиску архитектур нейронных сетей
Table. Comparison of the existing approaches for automatic search for neural network architectures

Критерий	AutoKeras	DEvol	AutoSklearn	AutoGAN
Классификация данных	+	+	+	–
Регрессия	+	+	+	–
Генерация данных заданного класса	–	–	–	+
Сжатие состояния объекта	–	–	–	–
Прогнозирование данных	+	+	+	–
Восстановление значений	+	+	+	–
Преобразование данных	+	+	–	+
Определение категории задач	+	–	+	–
Подбор структуры нейронной сети	+	+	+	+
Многомерность входных и выходных векторов	–	+	–	+

В качестве основных критериев сравнения использовались функциональные особенности (возможность решения задач классификации, регрессии, генерации, сжатия, прогнозирования, восстановления, преобразования), а также способность автоматического определения категории задач для более точного выбора архитектуры (например, сверточных слоев при работе с изображениями), перебор различных типов нейронных сетей и возможность работы с многомерными входными и выходными данными. Сравнение проведено на основе данных из документации рассматриваемых инструментов [4–9], а также в ходе их установки и проверки функциональности в рассматриваемых категориях задач.

Проведенный анализ позволил сделать следующие выводы. AutoKeras не поддерживает многомерные входные данные, а только одномерный вектор. Выходные данные могут быть представлены единственным значением, что приводит к необходимости создания нескольких выходов для представления векторов. Это создает значительные трудности при обработке данных и ограничивает применимость библиотеки без внесения существенных корректив в структуру исходных данных.

DEvol требует ручной настройки функции потерь, иначе понижается эффективность библиотеки при решении задач регрессии.

AutoSklearn также не поддерживает многомерные входные и выходные данные. Кроме того, невозможно формирование нескольких независимых входов или выходов.

Вышеперечисленные библиотеки не поддерживают работу с нейронными сетями генеративно-состязательного типа и автоэнкодерами.

В отличие от них библиотека AutoGAN реализует подбор структуры генеративно-состязательной сети. Она показывает высокую эффективность при генерации данных на основе датасетов CIFAR10 и STL-10, однако ее архитектура крайне тяжело адаптируется под другие наборы данных. Особенно это касается данных, представленных в виде многомерных численных значений, а не изображений, так как средства оптимизации структуры нейронной сети в данной библиотеке основаны на метрике Inception Score и использовании модели Inception V3. Это значительно ограничивает применение этой библиотеки.

Таким образом, на основе проведенного анализа существующих подходов к поиску архитектур нейронных сетей получено, что универсального метода, применимого



для поиска структур и параметров различных нейронных сетей, не существует, что подтверждает актуальность проводимых исследований. В рамках работы планируется реализация и апробация метода, позволяющего реализовать все функциональные критерии, перечисленные в таблице.

1. Материалы и методы

Определим структуру и параметры произвольной нейронной сети NN следующим выражением:

$$NN = (X, Y, W, TN, SN, HN), \quad (1)$$

где X, Y — набор входных и выходных векторов данных соответственно, размерность X составляет N_X , Y — N_Y ; W — множество всех весов нейронной сети; TN — тип архитектуры нейронной сети (многослойная плотная, сверточная, генеративно-состязательная, рекуррентная, автоэнкодер и т. д.); SN — структура нейронной сети, отражающая количество слоев, нейронов в каждом из них, связи между слоями, выбранные функции активации; HN — гиперпараметры нейронной сети (скорость обучения, размер пакета, параметры регуляризации).

Функция $Y = NN(X, W)$ математически выражает нейронную сеть NN . Нахождение весов W и метода отображения X и W в Y определяет структуру SN , тип TN и параметры HN нейронной сети NN [13].

Тогда необходимо сформировать вектор выходных данных $Y = (y_1, \dots, y_m)$ заданной размерности со структурой данных SY на основе обработки вектора входных данных $X = (x_1, \dots, x_n)$ заданной размерности со структурой данных с помощью некоторой нейронной сети NN_j , входящей в множество всех возможных архитектур нейронных сетей NN . Для решения поставленной задачи в автоматическом режиме необходимо автоматизировать процесс подбора структуры и параметров нейронных сетей в зависимости от категории K_i задачи и формата исходных данных. Под понятием «структура данных» будем понимать класс данных, однозначно определяющий множество характеристик и значений каждого элемента класса, а также множество операций, которые могут быть к ним применены, и пусть S — множество всех классов данных. Тогда под структурой данных SA некоторого вектора $A = (a_1, \dots, a_t)$ будем понимать образ множества A при отображении $fs : A \rightarrow SA$, где $SA \in S$.

Рассмотрим формализованное представление метода автоматического поиска структуры и параметров нейронной сети, включающее следующие этапы.

1. Формализация вектора входных $X = (x_1, \dots, x_n)$ и выходных $Y = (y_1, \dots, y_m)$ данных, определение их структур (классов данных): SX и SY соответственно.
2. Анализ связей между входными и выходными данными, что позволит определить категорию K_i решаемой задачи.
3. Подготовка и обработка исходных данных. На этом этапе осуществляется преобразование исходных данных X путем выполнения различных операций: нормализации, округления, перехода от непрерывных значений к категориальным, использование разреженных матриц вместо дискретных значений, лемматизация, очистка исходных данных от лишней или служебной информации и т. д. Реализация перечисленных операций возможна в автоматическом режиме за счет набора библиотек программного кода, а их применение позволяет ускорить работу нейронных сетей и повысить их точность. Каждая категория задач K_i реализует свою процедуру обработки данных.
4. В соответствии с выбранной задачей K_i в автоматическом режиме выбирается архитектура (1) нейронной сети $NN^* \in NN$: итерационно осуществляется



анализ точности нейронных сетей $NN_j \in NN$ на небольшой выборке данных $X_0 \in X$. К основным варьируемым параметрам относятся:

- архитектура модели нейронной сети (последовательная, функциональная);
- тип используемых слоев нейронов (плотные для численных значений, сверточные для изображений, рекуррентные для последовательностей, слои нормализации для уменьшения эффекта переобучения);
- количество плотных слоев нейронов (от 1 до 20);
- количество слоев исключения (dropout) (от 0 до 9);
- количество специализированных слоев (сверточных, рекуррентных и т.д.) (от 1 до 10);
- количество нейронов в слое (от 5 до 2000);
- тип активационных функций (линейная, сигмоидальная, гиперболический тангенс, ReLU, SELU);
- оптимизатор (SGD, Adam, Adamax, Nadam, RMSprop);
- функция потерь (MSE, MAE, MAPE, кросс-энтропия, бинарная энтропия);
- количество эпох обучения (от 3 до 300).

Подмножество сетей $NN_a \subset NN$, показывающее наилучшую точность, используется дальше и модифицируется, подмножество $NN \setminus NN_a$ отбрасывается. Этап 4 повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность либо разрешенное время на выполнение этапа. Для каждой задачи K_i определяется конкретное подмножество возможных архитектур и параметров нейронных сетей, что позволяет сократить время поиска оптимальной архитектуры и исключить изначально неэффективные решения. Если структура входных данных соответствует изображениям (определяется на шаге 2 и 3), то используются сверточные слои, если многомерным векторам временных последовательностей — рекуррентные и т.д. Таким образом, в рамках каждой категории задачи возможно сократить максимальное количество возможных сочетаний параметров и структуры нейронной сети с сотен миллионов до нескольких десятков тысяч.

5. Нейронная сеть NN^* обучается на всем тренировочном наборе $X_{train} \in X$. Оценивается ее точность A . В случае превышения ошибки $A(NN^*)$ заданного порога ε осуществляется возврат к этапу 4. Способ вычисления ошибки (например, на основе среднеквадратичного отклонения, перекрестной энтропии или иных метрик) определен для каждой задачи.
6. Если обученная нейронная сеть обеспечивает требуемую точность ($A(NN^*) \leq \varepsilon$), то осуществляется контрольный замер на данных $X_{test} \in X$, $X_{test} \cap X_{train} = \emptyset$. Полученные средствами нейронной сети значения Y_{test} оцениваются на принадлежность области допустимых значений Y .
7. Нейронная сеть используется для решения выбранной задачи K_i .

Таким образом, разработанный метод позволяет в автоматическом режиме подобрать необходимые параметры и структуру нейронных сетей в зависимости от выбранной категории задач K_i .

2. Программная реализация метода

Для программной реализации метода использовались язык программирования Python и библиотека по работе с машинным обучением Keras. Выбор языка программирования обусловлен возможностью объективного сравнения с альтернативными решениями, которые также реализованы на Python, наличием удобных инструментов для анализа и обработки больших объемов данных. Необходимо отметить, что пред-



лагаемый метод может быть реализован с применением как различных фреймворков (Caffe, PyTorch, TensorFlow, Darknet, XGBoost и др.), так и языков программирования. Keras использовался по причине простоты реализации нейронных сетей за счет высокого уровня абстракции. Архитектура программного обеспечения имеет следующий вид (рис. 1): первый компонент определяет конкретную категорию задач обработки данных для исходных структур информации, а второй – реализует все основные этапы метода автоматического поиска структур и параметров нейронных сетей.

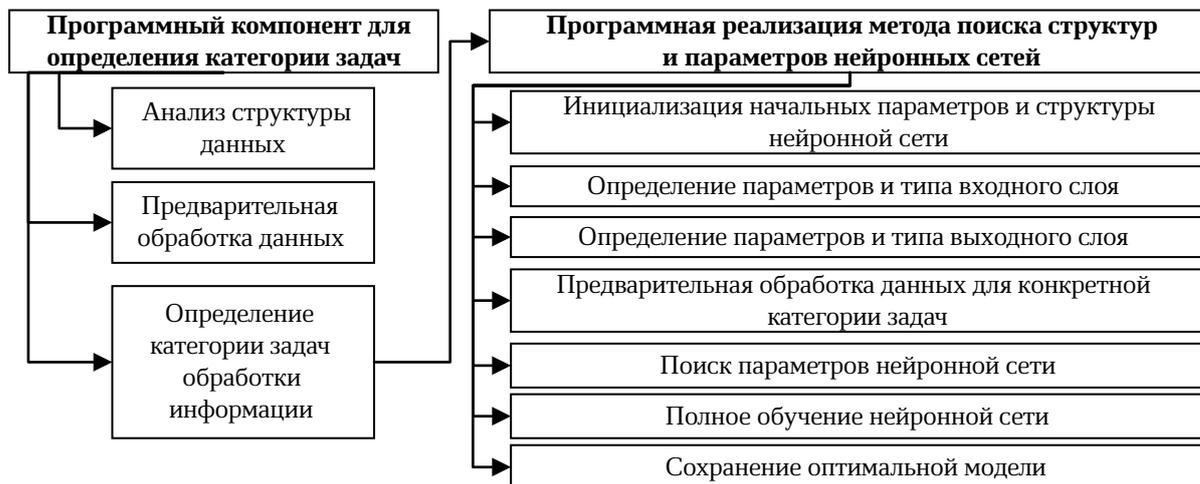


Рис. 1. Структура программного обеспечения для поиска параметров нейронных сетей

Fig. 1. The structure of software for searching the parameters of neural networks

В рамках второго компонента разработан родительский программный класс, обеспечивающий основную функциональность метода, от которого уже осуществлено наследование набора классов, решающих конкретные задачи обработки данных (сжатие данных, прогнозирование, генерация и т. д.).

3. Апробация метода

Для проверки метода проведем несколько экспериментов, в которых сравним точность работы нейронных сетей, полученных аналитическим способом, со сформированными разработанным программным обеспечением, реализующим метод автоматического поиска.

В первом эксперименте осуществим подбор структуры и параметров нейронной сети автоэнкодера. В качестве датасета используем MNIST (60 000 изображений размером 28×28 пикселей для обучения, 10 000 — для тестирования), так как на нем можно визуально оценить качество сжатия и восстановления из скрытого представления исходных данных. На рис. 2 представлены результаты данного эксперимента, а также значения основных метрик и параметров: H — длина сжатого состояния; T — время поиска структуры и параметров нейронной сети; L_0 , L — значение функции потерь (среднеквадратичной ошибки) до и после применения метода.

Во втором эксперименте найдем оптимальную структуру и параметры для генеративно-сопоставительной сети на примере датасета MNIST (рис. 3). Задача усложняется тем, что процесс обучения сетей такого типа нестабилен, что связано с одновременной динамической тренировкой двух конкурирующих моделей. Поэтому важен правильный контроль процесса обучения двух моделей и его своевременный перезапуск в



	Исходный объект	Аналитическое решение	Разработанный метод
$N=10$ $T=478$ $L0=0.15$ $L=0.11$			

Рис. 2. Результаты поиска структуры нейронной сети автоэнкодера

Fig. 2. Results of searching for the structure of an autoencoder neural network

случае дисбаланса в сторону одной из моделей. Для этого используется постоянная оценка качества сгенерированных моделей с применением разработанной ранее модифицированной метрики Inception Score [14]. Особенность метрики заключается в переходе от сети Inception V3 к произвольному классификатору при расчете предельной вероятности (среднего значения условных вероятностей для объектов в группе). Так как задано $N = 10$ классов цифр, то обучается нейронная сеть, осуществляющая соответствующую классификацию по N категориям. Для изображений в классификаторе используется последовательность сверточных слоев. Далее эта нейронная сеть подставляется вместо Inception V3 в программную реализацию метрики Inception Score.

	Аналитическое решение	Разработанный метод
$T=1437$ $IS=7.74$		
	$IS=5.78$	

Рис. 3. Результаты поиска структуры генеративно-сопоставительной сети

Fig. 3. Search results for the structure of a generative-adversarial network

Прирост модифицированной метрики Inception Score после применения метода составил 34%. Полученные значения можно интерпретировать следующим образом: аналитическое решение способно сгенерировать 5.78 различных классов из 10, после применения метода — 7.74 из 10 возможных.

В результате в первом эксперименте значение функции потерь после поиска оптимальных параметров и структуры нейронной сети было сокращено на 26%, а во втором эксперименте значение метрики Inception Score улучшено на 34%, что подтверждает применимость изложенного метода для решения поставленной задачи.

4. Сравнительный анализ эффективности метода

Для проверки эффективности предлагаемого метода относительно существующих подходов к автоматическому формированию нейронных сетей осуществим его сравнение с библиотеками AutoKeras, DEvol, AutoSklearn. AutoGAN не участвует в сравнении, так как его возможности ограничены только генерацией изображений.

Разработанный метод отвечает всем критериям, представленным в таблице, что отражает его большую универсальность и функциональность, применимость для



поиска структур и параметров широкого набора типов нейронных сетей (генеративных, рекуррентных, сверточных и т. д.), что успешно доказано при апробации в предыдущем разделе.

Для оценки времени нахождения структур нейронных сетей и их итоговой точности при различных методах проведено несколько экспериментов:

- классификация объектов (датасет MNIST, функция ошибки — кросс-энтропия) [15];
- регрессия фрагмента данных на основе остальных значений (датасет Adult, функция ошибки — MSE) [16];
- прогнозирование временного ряда (датасеты Individual household electric power consumption, HAR accelerometer, функция ошибки — MSE) [16].

Получены следующие результаты (точность — в процентах, время поиска структуры и параметров нейронной сети — в секундах):

- классификация (MNIST): AutoKeras (99.8%, 2162), DEvol (99%, 3434), AutoSklearn (96.9%, 1897), предлагаемый метод (на основе автоэнкодера — 98.3%, 63, на основе рекуррентной сети — 98.1%, 192);
- регрессия (Adult): AutoKeras (86.9%, 954), DEvol (82.0%, 570), AutoSklearn (83.6%, 1121), предлагаемый метод (84.9%, 320);
- прогнозирование (Individual household electric power consumption): DEvol (99.7%, 2030), предлагаемый метод (99.9%, 1142);
- прогнозирование (HAR accelerometer): DEvol (94.8%, 1566), предлагаемый метод (92.9%, 868).

Не все методы использовались в каждом эксперименте, что обусловлено их ограничениями (см. таблицу). На рис. 4 и 5 представлены сводные диаграммы сравнения средней точности (в процентах) и среднего времени поиска структуры нейронной сети (в секундах) соответственно для каждого подхода.

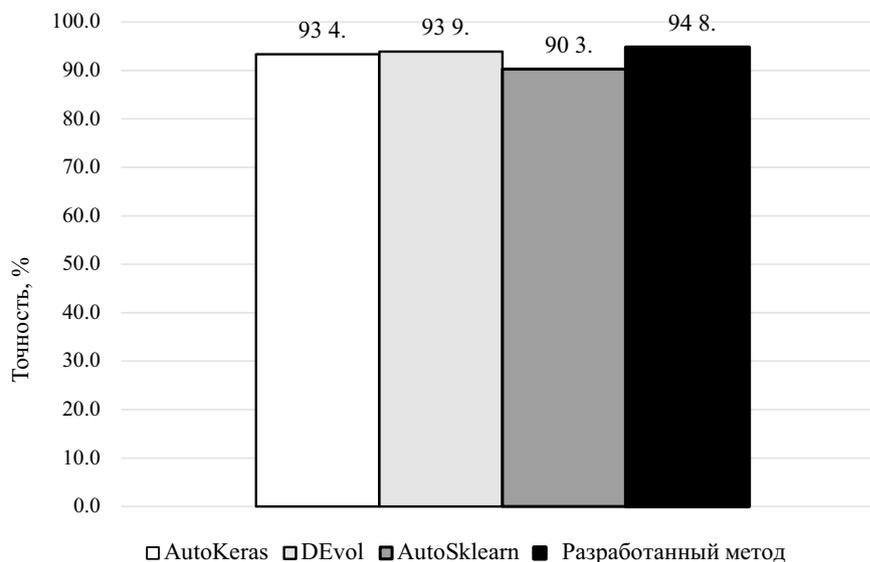


Рис. 4. Сравнение точности нейронных сетей, полученных различными методами поиска структуры нейронных сетей

Fig. 4. Comparison of the accuracy of neural networks obtained by various methods of searching for the structure of neural networks

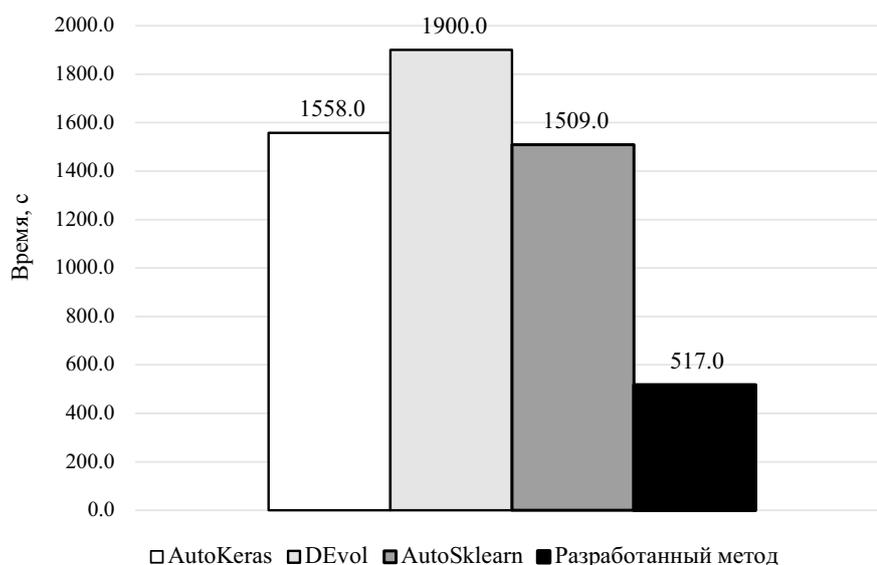


Рис. 5. Сравнение времени решения задачи поиска структуры нейронных сетей различными методами

Fig. 5. Comparison of the time of solving the problem of finding the structure of neural networks by different methods

Таким образом, средняя точность нейронных сетей после применения разработанного метода составила 94.8%, а среднее время поиска структуры и параметров сетей — 517 сек. Средняя точность остальных методов равна 92.5%. В среднем время решения задач остальными методами равнялось 1655 сек.

Полученные результаты сравнительного анализа показывают преимущество разработанного метода по времени нахождения оптимальных структур и параметров нейронных сетей произвольного типа, а также по итоговой точности полученных сетей.

Заключение

Предложенный метод автоматического поиска структур и параметров нейронных сетей основан на определении категории задач обработки данных и переборе множеств варьируемых характеристик нейронных сетей на небольшой тестовой выборке, что способствует сокращению времени поиска при сохранении высокой точности итогового решения. Разработанный метод отличается от аналогов большей универсальностью, что позволяет использовать его для формирования многослойных, сверточных, рекуррентных, генеративно-состязательных нейронных сетей, а также автоэнкодеров.

Метод апробирован на примере двух задач (формирования автоэнкодера и генеративно-состязательной сети), относительно аналитического решения получено улучшение метрик на 26–34%. Сравнение метода при решении различных задач (классификация, регрессия, прогнозирование) с конкурентными программными библиотеками показало его превосходство по времени нахождения решения (до 3.2 раза) и итоговой точности нейронной сети (до 2.3%).

Таким образом, предложенный метод поиска структур и параметров достаточно прост в реализации, применим для широкого набора типов нейронных сетей и, соответственно, задач обработки информации, отличается быстроедействие и высокой



точностью. Область его применения включает разработку адаптивных информационных систем, интеллектуальных модулей анализа, обработки и генерации данных, систем, основанных на технологиях машинного зрения и обучения. В рамках проводимой в Тамбовском государственном техническом университете научной деятельности метод успешно апробирован при решении следующих задач: анализ данных о перемещении пользователя в виртуальной реальности, преобразование данных при передаче между компонентами тренажерных комплексов, персонализация интерфейса адаптивных систем электронного документооборота [17, 18].

Список литературы

1. Бескровный А. С., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Использование сверточной нейронной сети для автоматизации построения двумерных твердотельных моделей позвонков // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 502–516. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-502-516>
2. Li H., Yuan D., Ma X., Cui D., Cao L. Genetic algorithm for the optimization of features and neural networks in ECG signals classification // Scientific Reports. 2017. Vol. 7, iss. 1. P. 1–12. <https://doi.org/10.1038/srep41011>
3. He X., Zhao K., Chu X. AutoML: A Survey of the State-of-the-Art // Knowledge-Based Systems. 2021. Vol. 212. P. 106622. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2020.106622>
4. Jin H., Song Q., Hu X. Auto-keras: An efficient neural architecture search system // Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2019. P. 1946–1956. <https://doi.org/10.1145/3292500.3330648>
5. Real E., Aggarwal A., Huang Y., Le Q. V. Regularized evolution for image classifier architecture search // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2019. Vol. 33. P. 4780–4789. <https://doi.org/10.1609/aaai.v33i01.33014780>
6. Budjac R., Nikmon M., Schreiber P., Zahradnikova B., Janacova D. Automated machine learning overview // Research Papers Faculty of Materials Science and Technology Slovak University of Technology. 2019. Vol. 27, iss. 45. P. 107–112. <https://doi.org/10.2478/rput-2019-0033>
7. Feurer M., Klein A., Eggenberger K., Springenberg J., Blum M., Hutter F. Efficient and robust automated machine learning // Automated Machine Learning. 2019. P. 113–134. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05318-5_6
8. Le Q., Zoph B. Using machine learning to explore neural network architecture // Google Research Blog. 2017. URL: <https://research.googleblog.com/2017/05/using-machine-learning-to-explore.html> (дата обращения: 05.04.2022).
9. Gong X., Chang S., Jiang Y., Wang Z. Autogan: Neural architecture search for generative adversarial networks // Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. 2019. P. 3224–3234. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2019.00332>
10. Liu C., Zoph B., Neumann M., Shlens J., Hua W., Li L. J., Murphy K. Progressive Neural Architecture Search // Computer Vision – ECCV 2018. ECCV 2018 / eds.: V. Ferrari, M. Hebert, C. Sminchisescu, Y. Weiss. Cham : Springer, 2018. P. 19–34. (Lecture Notes in Computer Science, vol. 11205). https://doi.org/10.1007/978-3-030-01246-5_2
11. Cai H., Gan C., Han S. Once for all: Train one network and specialize it for efficient deployment // arXiv preprint arXiv:1908.09791. 2019.
12. Truong A., Walters A., Goodsitt J., Hines K., Bruss C. B., Farivar R. Towards automated machine learning: Evaluation and comparison of AutoML approaches and tools // 2019 IEEE 31st International Conference on Tools with Artificial Intelligence. 2019. P. 1471–1479. <https://doi.org/10.1109/ICTAI.2019.00209>
13. Moen E., Bannon D., Kudo T., Graf W., Covert M., Van Valen D. Deep learning for cellular image analysis // Nature Methods. 2019. Vol. 16, iss. 12. P. 1233–1246. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0403-1>



14. Obukhov A., Krasnyanskiy M. Quality assessment method for GAN based on modified metrics inception score and Frechet inception distance // Proceedings of the Computational Methods in Systems and Software. 2020. P. 102–114. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63322-6_8
15. MNIST handwritten digit database, Yann LeCun, Corinna Cortes and Chris Burges. URL: <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/> (дата обращения: 05.04.2022).
16. UCI Machine Learning Repository. URL: <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.php> (дата обращения: 05.04.2022).
17. Obukhov A., Siukhin A., Dedov D. The model of the automatic control system for a treadmill based on neural networks // 2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). 2020. P. 1–5. <https://dx.doi.org/10.1109/FarEastCon50210.2020.9271589>
18. Обухов А. Д., Краснянский М. Н. Нейросетевой метод обработки и передачи данных в адаптивных информационных системах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, вып. 1. С. 149–164. <https://doi.org/10.35634/vm210111>

References

1. Beskrovny A. S., Bessonov L. V., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Using the mask-RCNN convolutional neural network to automate the construction of two-dimensional solid vertebral models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 502–516 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-502-516>
2. Li H., Yuan D., Ma X., Cui D., Cao L. Genetic algorithm for the optimization of features and neural networks in ECG signals classification. *Scientific Reports*, 2017, vol. 7, iss. 1, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1038/srep41011>
3. He X., Zhao K., Chu X. AutoML: A survey of the state-of-the-art. *Knowledge-Based Systems*, 2021, vol. 212, pp. 106622. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2020.106622>
4. Jin H., Song Q., Hu X. Auto-keras: An efficient neural architecture search system. *Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 2019, pp. 1946–1956. <https://doi.org/10.1145/3292500.3330648>
5. Real E., Aggarwal A., Huang Y., Le Q. V. Regularized evolution for image classifier architecture search. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2019, vol. 33, pp. 4780–4789. <https://doi.org/10.1609/aaai.v33i01.33014780>
6. Budjac R., Nikmon M., Schreiber P., Zahradnikova B., Janacova D. Automated machine learning overview. *Research Papers Faculty of Materials Science and Technology Slovak University of Technology*, 2019, vol. 27, iss. 45, pp. 107–112. <https://doi.org/10.2478/rput-2019-0033>
7. Feuerer M., Klein A., Eggenesperger K., Springenberg J., Blum M., Hutter F. Efficient and robust automated machine learning. *Automated Machine Learning*, 2019, pp. 113–134. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05318-5_6
8. Le Q., Zoph B. Using machine learning to explore neural network architecture. *Google Research Blog*, 2017. Available at: <https://research.googleblog.com/2017/05/using-machine-learning-to-explore.html> (accessed 5 April 2022).
9. Gong X., Chang S., Jiang Y., Wang Z. Autogan: Neural architecture search for generative adversarial networks. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, 2019, pp. 3224–3234. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2019.00332>
10. Liu C., Zoph B., Neumann M., Shlens J., Hua W., Li L. J., Murphy K. Progressive Neural Architecture Search. In: Ferrari V., Hebert M., Sminchisescu C., Weiss Y. (eds.) *Computer Vision – ECCV 2018. ECCV 2018. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 11205. Cham, Springer, 2018, pp. 19–34. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01246-5_2



11. Cai H., Gan C., Han S. Once for all: Train one network and specialize it for efficient deployment. *arXiv preprint*, arXiv:1908.09791. 2019.
12. Truong A., Walters A., Goodsitt J., Hines K., Bruss C. B., Farivar R. Towards automated machine learning: Evaluation and comparison of AutoML approaches and tools. *2019 IEEE 31st International Conference on Tools with Artificial Intelligence*, 2019, pp. 1471–1479. <https://doi.org/10.1109/ICTAI.2019.00209>
13. Moen E., Bannon D., Kudo T., Graf W., Covert M., Van Valen D. Deep learning for cellular image analysis. *Nature Methods*, 2019, vol. 16, iss. 12, pp. 1233–1246. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0403-1>
14. Obukhov A., Krasnyanskiy M. Quality assessment method for GAN based on modified metrics inception score and Frechet inception distance. *Proceedings of the Computational Methods in Systems and Software*, 2020, pp. 102–114. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63322-6_8
15. *MNIST handwritten digit database*, Yann LeCun, Corinna Cortes and Chris Burges. Available at: <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/> (accessed 5 April 2022).
16. *UCI Machine Learning Repository*. Available at: <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.php> (accessed 5 April 2022).
17. Obukhov A., Siukhin A., Dedov D. The model of the automatic control system for a treadmill based on neural networks. *2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon)*, 2020, pp. 1–5. <https://dx.doi.org/10.1109/FarEastCon50210.2020.9271589>
18. Obukhov A., Krasnyanskiy M. Neural network method of data processing and transmission in adaptive information systems. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, iss. 1, pp. 149–164 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/vm210111>

Поступила в редакцию / Received 26.07.2021

Принята к публикации / Accepted 12.09.2022

Опубликована / Published 01.03.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 126–138
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 126–138
mmi.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-126-138>, EDN: PCOXKQ

Научная статья

УДК 005

Обработка информации для системы поддержки принятия решений при противопожарном мониторинге лесных массивов

А. А. Сорокин[✉], Н. С. Мальцева, Д. В. Кутузов, А. В. Осовский

Астраханский государственный технический университет, Россия, 414056, г. Астрахань, ул. Татищева, д. 16

Сорокин Александр Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры связи, alsorokin.astu@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5085-8417>, AuthorID: 499675

Мальцева Наталия Сергеевна, кандидат технических наук, доцент кафедры связи, maltsevans@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9731-4281>, AuthorID: 525018

Кутузов Денис Валерьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры связи, d_kutuzovs@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7963-1259>, AuthorID: 159988

Осовский Алексей Викторович, кандидат технических наук, доцент кафедры связи, a_osovskiy@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3174-9765>, AuthorID: 159989

Аннотация. Целью настоящего исследования стало формирование положений для получения интегральной оценки, характеризующей рейтинг участков лесного массива по уровню пожароопасности. Получение подобной оценки производится на основании агрегирования множества параметров, характеризующих климатические условия, и факторов, учитывающих антропогенное влияние на заданном участке лесного массива. Учитывая разнородность подобных параметров, для их агрегирования использованы методы нечеткого логического вывода и теории нечетких множеств. Сам комплекс для определения оценки лесного массива реализован в виде иерархической системы нечеткого вывода. Исследование процесса функционирования сформированного комплекса показало, что его выходная закономерность имеет преимущественно ступенчатый характер. Подобный результат позволяет проводить классификацию анализируемых участков лесного массива на группы состояния. Дальнейшее исследование сформированных классов состояний методами кластерного анализа позволяет выявлять участки с близкими характеристиками. Использование результатов классификации позволяет провести ранжирование участков лесного массива по очередности оказания управляющих воздействий в виде профилактических или подготовительных мероприятий по снижению пожароопасности или увеличению оперативности реагирования на возгорание. Полученные результаты ориентированы на их использование в системах поддержки принятия решений по управлению лесными массивами и другими видами прилегающих к ним территорий и социально-экономических образований.

Ключевые слова: системный анализ, нечеткие множества, пожароопасность, лесное хозяйство

Для цитирования: Сорокин А. А., Мальцева Н. С., Кутузов Д. В., Осовский А. В. Обработка информации для системы поддержки принятия решений при противопожарном мониторинге лесных массивов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика.



Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 126–138. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-126-138>, EDN: PCOXKQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Information processing for the decision support system for fire monitoring of forest areas

A. A. Sorokin[✉], N. S. Maltseva, D. V. Kutuzov, A. V. Osovsky

Astrakhan State Technical University, 16 Tatishcheva St., Astrakhan 414056, Russia

Alexander A. Sorokin, alsorokin.astu@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5085-8417>, AuthorID: 499675

Nataliya S. Maltseva, maltsevans@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9731-4281>, AuthorID: 525018

Denis V. Kutuzov, d_kutuzovs@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7963-1259>, AuthorID: 159988

Alexey V. Osovsky, a_osovskiy@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3174-9765>, AuthorID: 159989

Abstract. The purpose of our study was to formulate provisions for obtaining an integral assessment characterizing the rating of forest areas in terms of fire hazard. We obtained this estimate based on the aggregation of many parameters characterizing climatic conditions and factors that take into account anthropogenic influence in a given area of the forest. Considering the heterogeneity of such parameters, we used the methods of fuzzy inference and the theory of fuzzy sets to aggregate them. The complex for determining the assessment of the forest area is implemented in the form of a hierarchical fuzzy inference system. We investigated the process of functioning of the formed complex and found that its output pattern is predominantly stepwise. This result makes it possible to classify the analyzed forest areas into states groups. Further studies of the classes of states formed by us by the methods of cluster analysis make it possible to identify areas with similar characteristics. The use of the classification results makes it possible to rank forest areas according to the order of preventive or preparatory measures to reduce fire hazard or increase responsiveness in case of a fire. The results obtained by us are aimed at using in decision support systems for the management of forests and other types of adjacent territories.

Keywords: systems analysis, fuzzy sets, fire hazard, forestry

For citation: Sorokin A. A., Maltseva N. S., Kutuzov D. V., Osovsky A. V. Information processing for the decision support system for fire monitoring of forest areas. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 126–138 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-126-138>, EDN: PCOXKQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Как описывается в постановлении Правительства РФ от 18.10.2021 № 1769 «О внесении изменений в государственную программу Российской Федерации “Развитие лесного хозяйства”», к числу проблем, сдерживающих развитие лесного комплекса России, относится «недостаточная эффективность систем охраны и защиты лесов,



разобщенность лесопожарных сил»¹. Лесные пожары ежегодно наносят ущерб экосистемам и экономикам различных регионов. Процесс горения лесных массивов сопровождается выделением в окружающую среду большого количества разных вредных веществ, включая углекислый газ. Подобное негативно влияет на глобальные процессы, включая парниковый эффект, сокращение и исчезновение редких представителей флоры и фауны [1,2]. Предупреждение о пожаре осуществляется при помощи систем сбора и обработки информации. Достаточно широкое распространение получили системы видеомониторинга [3]. Ограничение подобных систем связано с тем, что регистрация возгорания осуществляется после его возникновения. Таким образом, формируется задержка на оказание мер, направленных на устранение возгорания.

Кроме использования описанных систем мониторинга проводятся мероприятия по профилактике возгораний и повышению готовности и эффективности противопожарных сил. Планирование подобных мероприятий основано на оценивании пожароопасности контролируемой территории. Оценка пожароопасности проводится с использованием методов, позволяющих агрегировать значения параметров, влияющих на возникновение и распространение возгорания. Примеры оценок: комплексный показатель пожарной опасности (КППО) В. Г. Нестерова; индекс лесной пожароопасности FFDI (Forest Fire Danger Index); индекс природной пожароопасности FWI (Fire Weather Index) и другие методы определения аналогичных оценок [4]. Особенность методов вычисления этих оценок — трудности агрегирования параметров измеряемых величин на различных метрических шкалах и учет их неравномерного влияния на итоговый результат. Устранение ограничений у используемых методов для определения индексов лесной пожароопасности (ИЛП) обуславливает необходимость усовершенствования положений по обработке информации о состоянии лесных массивов.

1. Обзор литературных источников и постановка задачи исследования

Анализ [4–7] показал, что развитие методов по определению ИЛП сопровождается увеличением количества учитываемых параметров. Учитываемые параметры можно разделить на группы: (г1) климатического характера (температура, влажность воздуха, скорость ветра и т. д.); (г2) состояния горючих материалов (вид растительности, лесной подстилки, глубина залегания торфа и т. д.); (г3) антропогенного воздействия на окружающую среду (близость промышленных объектов, населенных пунктов, других мест пребывания людей). Агрегирование параметров проводится с использованием операторов обработки информации (ООИ). В качестве ООИ используются различные математические операции.

Анализ параметров (г1)–(г3) показал, что они могут оцениваться на разных метрических шкалах, иметь различный уровень влияния на итоговый результат, а сам уровень влияния может зависеть от местности. Повышение количества учитываемых факторов при определении ИЛП позволяет более полно описывать объект наблюдения и лучшим образом формировать управляющие воздействия (УВ). Реализация УВ позволяет проводить мероприятия по устранению причин возгорания или формировать резервы для ликвидации последствий возгорания. Увеличение количества учитываемых

¹О внесении изменений в государственную программу Российской Федерации «Развитие лесного хозяйства»: постановление Правительства РФ от 18.10.2021 № 1769. URL: <http://government.ru/docs/all/133785> (дата обращения: 20.03.2022).



мых параметров привело к возрастанию количества и усложнению математических операций, формирующих ОИИ для определения ИЛП.

Анализ методов определения ИЛП [4–7] позволил выявить противоречие между необходимостью увеличения количества агрегируемых параметров и усложнением ОИИ, используемых для агрегирования этих параметров. Для устранения противоречия целесообразна разработка положений по определению ИЛП участков лесных массивов с учетом различных факторов природного и антропогенного характера.

Целью работы является предложение положений по агрегированию различных разнородных параметров для определения индекса лесной пожароопасности.

2. Положения для определения индекса пожароопасности

2.1. Анализ методов обработки информации на основе положений теории нечетких множеств и нечеткого логического вывода

Анализ [8–11] показывает, что для агрегирования параметров, измеряемых на различных метрических шкалах и имеющих разнообразные уровни влияния на итоговый результат, получили распространение методы, основанные на использовании нейронных сетей [8], и методы, основанные на положениях теории нечетких множеств (ТНМ) [9, 10, 12]. Особенностью методов, основанных на применении нейронных сетей, является необходимость формирования репрезентативной обучающей выборки. Задача формирования подобной выборки является достаточно сложной, поскольку в ней в «нужном» количестве должны находиться все обучающие примеры, с которыми на практике может столкнуться аналитическая система. Отдельного внимания заслуживают вопросы формирования структуры нейронных сетей. Кроме этого, нейронная сеть фактически является «черным ящиком», что затрудняет для исследователя понимание процесса формирования полученной оценки. Альтернативой подобным системам выступают системы обработки информации, основанные на положениях ТНМ. ТНМ стала одной из основ формализации экспертных систем (ЭС). ЭС получили распространение в различных предметных областях и позволяют агрегировать информацию в условиях неопределенности значения параметров, например, когда информация о части анализируемых параметров представлена в вербальной форме или когда присутствует неопределенность в формировании ОИИ по причине невозможности получения обучающей выборки.

Сущность использования положений ТНМ заключается в разделении диапазона значений входных и выходных переменных $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ на множество перекрывающихся интервалов $\{i_j\}$, где j — номер интервала. Количество интервалов i определяется экспертной группой. Возможность интервалов перекрывать друг друга и обуславливает «нечеткость», поскольку часто переход значения контролируемого параметра из «одной» качественной области значений в «другую» имеет плавный характер, а не ступенчатый (как это предусматривается в «четкой» логике). Каждому интервалу $i \subset \{i_j\}$ соответствует определенное семантическое значение t , называемое термом. Каждый терм вербально описывает состояние переменной на заданном интервале. Общее количество термов соответствует количеству интервалов i , на которые был разделен диапазон значений переменной x . Общее количество термов t , описывающих состояние переменной x , называется термножеством $\{t_j\}$. Каждому терму $t \subset \{t_j\}$ ставится в соответствие функция принадлежности (ФП) $\mu_{t_j}(x)$. Область определения ФП соответствует диапазону значений переменной x на интервале i . Область значения ФП изменяется в диапазоне от 0 до 1.



При $\mu_{t_j}(x) = 1$ значение переменной x полностью соответствует семантическому значению заданного термина t , описывающего состояние переменной на этом интервале. При $\mu_{t_j}(x) = 0$ значение переменной полностью не соответствует семантическому значению заданного термина t .

Реализация оператора агрегирования нескольких значений входных переменных и последующие их преобразования в выходную переменную выполняются при помощи продукционных правил (ПП). ПП формируются экспертом соответствующей области знаний и показывают, какое семантическое значение получает выходная переменная при определенной комбинации семантических значений входных переменных. При условии, что система нечеткого вывода (СНВ) имеет несколько входных переменных и одно выходное, ПП можно представить в виде

$$p : if (x_1 = t_{x_1}) \wedge \dots \wedge (x_k = t_{x_k}) \Rightarrow (y_p = t_y), \zeta, \quad (1)$$

где p — номер правила; x_1, \dots, x_k — набор переменных; $t_{x_1} \dots t_{x_k}$ — термы, которые описывают состояние соответствующих переменных; y_p — выходная переменная; t_y — один из термов термножества, описывающего состояние переменной y ; ζ — коэффициент доверия (КД) к правилу. Кроме операции логического И (\wedge) для агрегирования переменных используются логические операции ИЛИ (\vee) и отрицание (\neg). Совокупность ПП, которые описывают все необходимые для воспроизведения объекта моделирования состояния входных переменных, образует базу знаний (БЗ). Если БЗ сформирована с использованием правил вида (1), ее можно представить в виде

$$\bigcup_{p=1}^{p_{\max}} \left[\bigcap_{k=1}^{k_{\max}} (x_k = t_{x_k}) \Rightarrow (y_p = t_y), \zeta \right] = y, \quad (2)$$

где y — значение выходной переменной. Если правила в БЗ имеют вид (1), то СНВ имеет структуру MISO (Multiple Input Single Output). Далее рассматриваются СНВ с этой структурой. Методы обработки информации в СНВ реализуются при помощи различных алгоритмов. С учетом [9, 10] широкое распространение получили алгоритмы Мамдани и Такаги – Сугено. Алгоритмы включают в себя следующие операции: 1) фаззификация — представление четкой информации в нечетком виде, выполняется при помощи ФП; 2) агрегирование переменных — выполняется при помощи правил вида (1); 3) активация правил — определяет значение выходной переменной, полученной при помощи правила с учетом КД; 4) аккумулялирование результатов правил — проводится объединение выходных значений; 5) дефаззификация — преобразование нечеткого выходного значения в численную оценку. В зависимости от вида алгоритма отдельные операции могут объединяться. В алгоритме Такаги – Сугено объединены операции 4) и 5). Далее рассматриваются СНВ, основанные на алгоритме Такаги – Сугено. Одной из трудностей использования СНВ является «проклятие размерности». Ограничение связано с увеличением количества правил в БЗ при увеличении количества агрегируемых переменных и количества термов, при помощи которых описывается состояние переменной. Устранение «проклятия размерности» возможно при помощи использования иерархических СНВ (ИСНВ). Сущность ИСНВ заключается: 1) в разделении множества входных переменных на подмножества; 2) в построении для каждого подмножества отдельной СНВ, в результате их функционирования формируется множество промежуточных переменных; 3) использовании для агрегирования промежуточных выходных переменных СНВ последующих уровней иерархии. Формирование СНВ последующих уровней иерархии продолжается до тех пор, пока не будет получено множество целевых выходных переменных [12].



2.2. Формирование положений для анализа состояния участков лесного массива

Особенностью анализируемого объекта исследования — лесного массива, для которого рассчитывается ИЛП, является наличие разнообразных параметров, от которых зависит возможность возгорания. Часть параметров имеет количественное значение групп (г1) и (г2), а часть параметров из группы (г3) — качественное значение. В зависимости от места нахождения участка лесного массива количество параметров и степень их важности может изменяться. Кроме этого, основная задача при определении рейтинга лесных массивов по уровню пожарной опасности — установление приоритетности проведения профилактических мероприятий по предотвращению возгорания или ликвидационных мер по устранению пожара.

В качестве исходных данных для разрабатываемой модели предлагается агрегировать параметры из групп (г1)–(г3). С учетом [4–7] для формирования ИЛП контролируемого участка предлагается использовать параметры, перечень которых, диапазон значений и семантические обозначения соответствующих термов приведены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Перечень параметров для формирования ИЛП
The list of parameters for the formation of FFDI (Forest Fire Danger Index)

Наименование параметра	Ед. изм.	Диапазон значений				
		Плохое	Скорее плохое	Среднее	Скорее хорошее	Хорошее
Климатические условия						
Влажность воздуха, x_1	%	0 ÷ 10	10 ÷ 30	30 ÷ 60	60 ÷ 90	90 ÷ 100
Температура воздуха, x_2	°С	+35 ÷ +50	+25 ÷ +35	+20 ÷ +25	+10 ÷ +20	-50 ÷ +10
Скорость ветра, x_3	м/с	20 ÷ 15	15 ÷ 10	10 ÷ 5	5 ÷ 2.5	2.5 ÷ 0
Количество осадков за предыдущий день, x_4	мм	0 ÷ 1	1 ÷ 2	2 ÷ 6	6 ÷ 20	20 ÷ 30
Количество осадков в течение текущего дня, x_5	мм	0 ÷ 1	1 ÷ 2	2 ÷ 6	6 ÷ 20	20 ÷ 30
Оценка захламленности леса сухостоем (балл)						
Доля сухих деревьев, x_6	%	50 ÷ 100	20 ÷ 50	10 ÷ 20	5 ÷ 10	0 ÷ 5
Доля частично засохших деревьев, x_7	%	70 ÷ 100	50 ÷ 70	40 ÷ 50	10 ÷ 40	0 ÷ 10
Оценка состояния $k_{ЛГМ1}$						
Влажность ЛГМ ₁ , x_8	%	0 ÷ 6	6 ÷ 12	12 ÷ 18	18 ÷ 22	22 ÷ 100
Температура ЛГМ ₁ , x_9	°С	+35 ÷ +50	+25 ÷ +35	+20 ÷ +25	+10 ÷ +20	-50 ÷ +10
Оценка состояния $k_{ЛГМ2}$						
Влажность ЛГМ ₂ , x_{10}	%	0 ÷ 9	9 ÷ 15	15 ÷ 20	20 ÷ 25	25 ÷ 100
Температура ЛГМ ₂ , x_{11}	°С	+35 ÷ +50	+25 ÷ +35	+20 ÷ +25	+10 ÷ +20	-50 ÷ +10
Оценка состояния $k_{ЛГМ3}$						
Влажность ЛГМ ₃ , x_{12}	%	0 ÷ 11	11 ÷ 18	18 ÷ 25	25 ÷ 33	33 ÷ 100
Температура ЛГМ ₃ , x_{13}	°С	+35 ÷ +50	+25 ÷ +35	+20 ÷ +25	+10 ÷ +20	-50 ÷ +10
Оценка состояния залежей торфа с глубиной залегания более 18 см						
Влажность торфа, x_{14}	%	0 ÷ 11	11 ÷ 18	18 ÷ 25	25 ÷ 33	33 ÷ 100
Температура торфа, x_{15}	°С	+65 ÷ +100	+40 ÷ +65	+25 ÷ +40	+10 ÷ +25	0 ÷ +10
Толщина слоя торфа, x_{16}	м	0.5 ÷ 1	1 ÷ 2	2 ÷ 3	3 ÷ 4	4 ÷ 5
Оценка антропогенной опасности						
Оценка пожароопасности производственных объектов, x_{17}	балл	80 ÷ 100	60 ÷ 80	40 ÷ 60	20 ÷ 40	0 ÷ 20
Оценка пожароопасности продуктопроводов, x_{18}	балл	80 ÷ 100	60 ÷ 80	40 ÷ 60	20 ÷ 40	0 ÷ 20
Оценка пожароопасности транспортных магистралей, x_{19}	балл	80 ÷ 100	60 ÷ 80	40 ÷ 60	20 ÷ 40	0 ÷ 20
Оценка пожароопасности социальных объектов (населенные пункты, домовладения), x_{20}	балл	80 ÷ 100	60 ÷ 80	40 ÷ 60	20 ÷ 40	0 ÷ 20
Оценка пожароопасности туристических объектов, x_{21}	балл	80 ÷ 100	60 ÷ 80	40 ÷ 60	20 ÷ 40	0 ÷ 20



В случае необходимости диапазоны значений переменных могут корректироваться в зависимости от вида участка лесного массива. Вычислительные комплексы на основе ИСНВ позволяют добавлять или исключать переменные, которые описывают необходимый набор параметров. ИСНВ, используемая для определения ИЛП, показана на рис. 1.

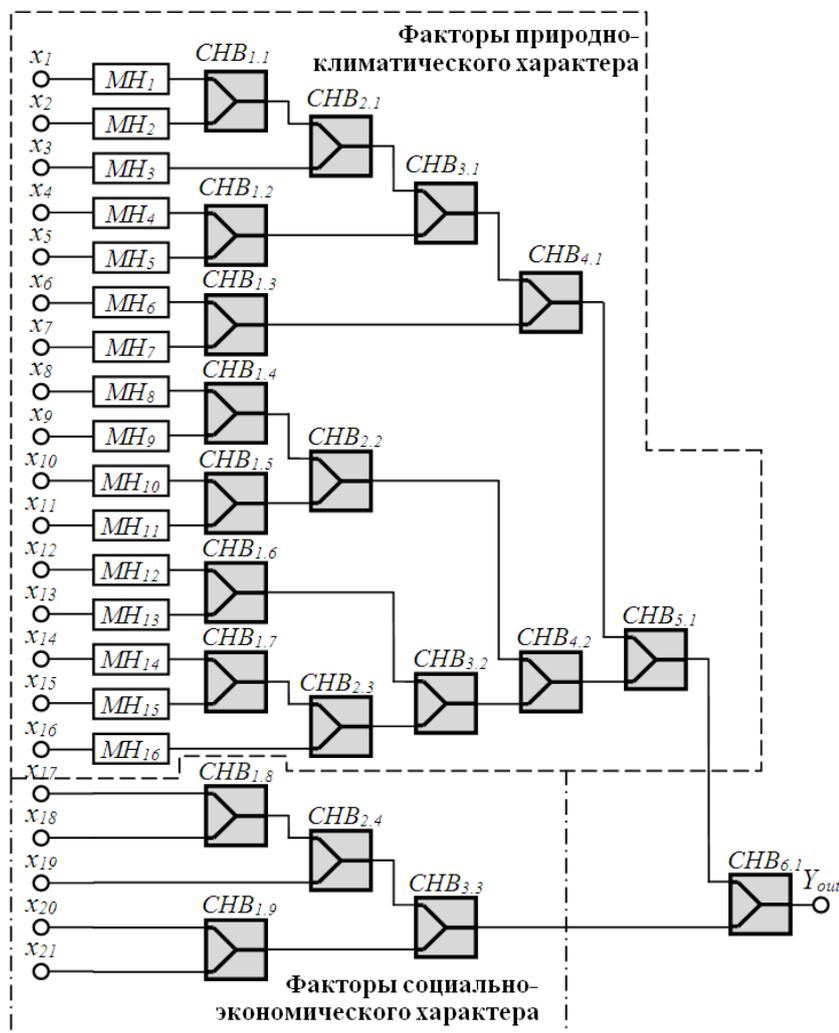


Рис. 1. Структура иерархической системы нечеткого вывода для определения индекса лесной пожароопасности

Fig. 1. The structure of the hierarchical fuzzy inference system for determining the rating of forest areas by the level of fire hazard

Особенностью рассматриваемой ИСНВ является наличие: а) блоков нормализации ($БН_1 \div БН_{16}$), которые используются для предварительной обработки параметров, информация о которых представлена на различных метрических шкалах; б) блока сепарации (сепарирующие СНВ), используемого для придания выходной закономерности $Y_{out.1}$ ступенчатого характера $Y_{out.2}$. Свойство ИСНВ формировать «ступенчатую» закономерность показано в [12]. Наличие подобного свойства позволяет на базе ИСНВ реализовать вычислительную систему, которая будет обеспечивать распределение объектов анализа по классам состояния.

Использование $БН_1 \div БН_{16}$ необходимо для приведения значений входных параметров к единой метрической шкале. С учетом [9, 11, 12] подобная операция выполняется



для упрощения формирования СНВ. В рамках исследований значения входных переменных приведены к диапазону от 0 до 100 баллов, где 0 — это наихудшее значение, а 100 — наилучшее. Применительно к рассматриваемой задаче нормализации подвергнуты переменные $x_1 \div x_{16}$. Ниже представлены операторы для переменных $x_1 \div x_3$:

$$\begin{array}{l}
 \text{для } x_1 : \\
 y = \begin{cases} 0; x \geq 50; \\ -\frac{1}{3}x + \frac{50}{3}; x \in [35; 50); \\ -3x + 110; x \in [30; 35); \\ -2x + 80; x \in [26; 30); \\ -3.4x + 116.4; x \in [21; 26); \\ -5x + 150; x \in [19; 21); \\ -3.4x + 119.6; x \in [14; 10); \\ -2x + 100; x \in [10; 5); \\ -2.4 + 104; x \in [5; 10); \\ -\frac{8}{55}x + \frac{1020}{11}; x \in [-50; 5); \\ 100; x > -50, \end{cases} \\
 \text{для } x_2 : \\
 x_n = \begin{cases} 0.5x_a; x_a \in [0; 10); \\ 3x_a - 25; x_a \in [10; 15); \\ 0.8x_a + 8; x_a \in [15; 25); \\ 3.4x_a - 57; x_a \in [25; 30); \\ 0.5x_a + 30; x_a \in [30; 50); \\ 1.7x_a - 30; x_a \in [50; 60); \\ \frac{8}{15}x_a + 40; x_a \in [60; 75); \\ 0.8x_a + 20; x_a \in [75; 100); \\ 100; x_a = 100, \end{cases} \\
 \text{для } x_3 : \\
 y = \begin{cases} 100; x = 0; \\ -4x + 100; x \in (0; 2); \\ -6x + 104; x \in (2; 4); \\ -8x + 112; x \in (4; 5); \\ -8.5x + 114; x \in (5; 7); \\ -\frac{10}{3}x + \frac{235}{3}; x \in (7; 10); \\ -8.5x + 130; x \in (10; 12); \\ -4x + 76; x \in (12; 14); \\ -7.5x + 125; x \in (14; 16); \\ -1.25x + 25; x \in (16; 20); \\ 0; x > 20. \end{cases}
 \end{array}$$

Принцип формирования операторов нормализации для переменных $x_4 \div x_{16}$ аналогичный. Вид ФП переменных, использованных для формирования СНВ, показан на рис. 2.

Термы, используемые для описания значений переменной, имеют следующие значение: NB — плохое; NM — скорее плохое; Z — среднее; PM — скорее хорошее; PB — хорошее влияние на значение выходной переменной.

Для описания выходных переменных используется аналогичный набор термов. Семантические значения термов следующие: NB — плохое; NM — скорее плохое; Z — среднее; PM — скорее хорошее; PB — хорошее. В качестве ФП для описания термов выходных переменных используются константы. Терму NB соответствует 0, терму NM — 25, терму Z — 50, терму PM — 75, а терму PB — значение 100 баллов. После проведения классификации участки, получившие 0 баллов, имеют наивысшую пожароопасность; 25 — повышенную; 50 — среднюю; 75 — низкую; 100 — наименьшую пожароопасность.

Выходная закономерность СНВ, реализуемая при помощи ПП вида (1) и алгоритма Такаги – Сугено, описывается при помощи поверхности, отображающей значения выходной переменной при заданных парах значений входных переменных. Поверхности СНВ показаны на рис. 3.

Работоспособность комплекса проверялась при помощи численного моделирования.

3. Проверка работоспособности предлагаемых теоретических положений

Для проверки предлагаемых положений было сформировано тестовое множество, состоящее из 173 векторов значений. Предполагается, что каждый вектор описывает участок леса, находящегося под наблюдением. В качестве допущения принимается,

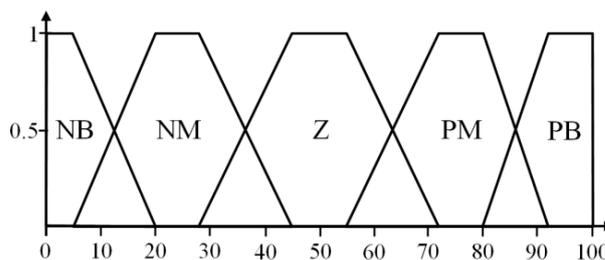
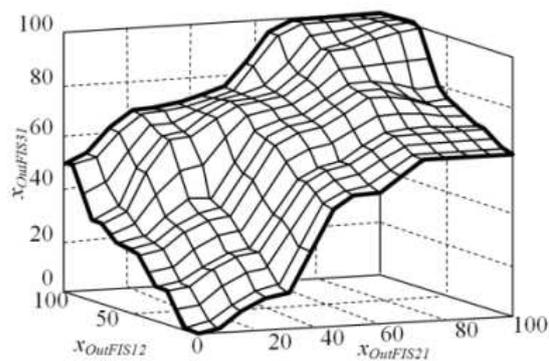
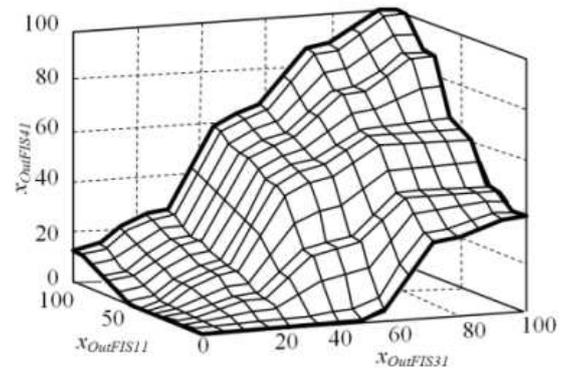


Рис. 2. Внешний вид функции принадлежности входных переменных

Fig. 2. Appearance of membership functions of input variables



$ж / h$



$з / i$

Окончание рис. 3. $ж$ — СНВ₃₁; $з$ — СНВ₄₁ / End of Fig. 3. h is FIZ₃₁; i is FIZ₄₁

что переменные независимы и прошли предварительную обработку, связанную с исключением аномальных данных. Диапазон значений переменных и другие статистические характеристики анализируемой выборки приведены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Характеристики анализируемой выборки значений
Characteristics of the analyzed sample of values

Наименование параметра	Минимум	Максимум	Среднее (медианное)	Ср. квадратич. отклонение
Влажность воздуха, x_1 , %	2.0	100.0	68.0	25.0
Температура воздуха, x_2 , °С	-10	50	11	14
Скорость ветра, x_3 , м/с	0.0	19.0	5.5	4.7
Количество осадков за предыдущий день, x_4 , мм	0.0	30.0	15.0	9.6
Количество осадков в течение текущего дня, x_5 , мм	0.0	30.0	18.0	9.7
Доля сухих деревьев, x_6 , %	0	91	17	21
Доля частично засохших деревьев, x_7 , %	0	50	19	16
Влажность ЛГМ ₁ , x_8 , %	0.0	50.0	25.0	9.4
Температура ЛГМ ₁ , x_9 , °С	-10	50	11	15
Влажность ЛГМ ₂ , x_{10} , %	0.0	49.0	25.0	9.4
Температура ЛГМ ₂ , x_{11} , °С	-10	48	13	15
Влажность ЛГМ ₃ , x_{12} , %	2.0	50.0	26.0	9.6
Температура ЛГМ ₃ , x_{13} , °С	-10	50	13	16
Влажность торфа, x_{14} , %	0.0	50.0	25.0	9.2
Температура торфа, x_{15} , °С	0	78	25	20
Толщина слоя торфа, x_{16} , м	0	4.6	1.4	1
Оценка пожарной безопасности производственных объектов, x_{17} , балл	3	99	80	21
Оценка пожароопасности продуктопроводов, x_{18} , балл	18	99	82	21
Оценка пожарной безопасности транспортных магистралей, x_{19} , балл	7	99	80	22
Оценка пожарной безопасности социальных объектов (населенные пункты, домовладения), x_{20} , балл	11	99	79	22
Оценка пожарной безопасности туристических объектов, x_{21} , балл	11	99	76	23

Задача моделирования — показать, каким образом вычислительная система ран-



жирует анализируемые объекты. После моделирования результаты упорядочены по возрастанию. Закономерность, сформированная на выходе $Y_{out.1}$ ИСНВ, показана на рис. 4, а. Закономерность, сформированная на выходе $Y_{out.2}$ после сепарирующих СНВ, показана на рис. 4, б.

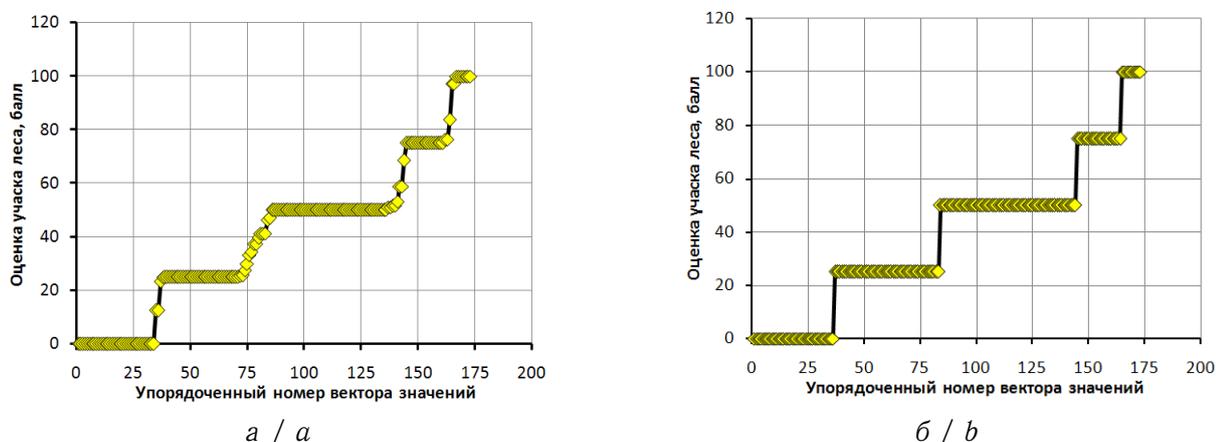


Рис. 4. Входная (а) и выходная (б) закономерности исследуемой модели (цвет онлайн)

Fig. 4. Input (a) and Output (b) regularity of the investigated model (color online)

Как видно из данных рис. 4, после использования сепарирующих СНВ закономерность приобрела ступенчатый характер, в результате чего каждый анализируемый участок лесного массива оказался сопоставлен определенному классу состояния.

4. Обсуждение результатов исследований

Предложенная система анализа состояния участков лесного массива позволяет агрегировать различную информацию, на основании которой оценивается пожароопасность. В результате происходит классификация наблюдаемых участков лесного массива по степени пожароопасности. Подобное позволяет определить очередность проведения профилактических или подготовительных мероприятий при управлении лесным массивом. Особенностью предложенных положений являются следующие возможности: 1) обобщение опыта экспертных групп при определении пожароопасности с учетом факторов климатического (природного) и социально-экономического (антропогенного) характера; 2) корректировки диапазонов значений оцениваемых параметров в зависимости от специфики лесного массива. Обобщение экспертных мнений за счет использования методов формирования баз знаний позволяет привлекать к построению оператора обработки информации специалистов из различных областей знаний. Следовательно, имеется возможность адаптации системы к специфике определенного региона, а также изменения количества и видов переменных, учитываемых при расчете индекса пожароопасности участка.

Дальнейшее использование методов кластерного анализа позволяет выявить в сформированных классах состояния объекты с близкими значениями оцениваемых параметров, что будет говорить о схожести ситуаций, возникших на участках. Реализация подобной задачи возможна при помощи совместного использования алгоритма горной кластеризации [13] для выявления центров кластеров и совместного использования метрик Минковского и Хаусдорфа [14] для нахождения объектов, которые наиболее близки к найденным центрам кластеров.



Заключение

В ходе исследований предложен вычислительный комплекс для оценивания состояния участков лесных массивов по степени пожароопасности. Основой комплекса являются методы теории нечетких множеств и нечеткого логического вывода. Предложенные положения позволяют агрегировать параметры, значения которых представлены на разных метрических шкалах и имеют различный уровень влияния на итоговый результат. Реализация вычислительного комплекса для определения рейтинга лесного массива проведена при помощи формирования иерархической системы нечеткого вывода. Как показало исследование, выходная закономерность сформированной вычислительной системы имеет преимущественно ступенчатый характер, что позволило решить задачу распределения элементов анализируемой выборки на классы состояния. Подобная классификация совместно с известными методами кластерного анализа позволяет использовать результаты анализа для планирования работ по профилактическим или подготовительным мерам по ликвидации лесных пожаров. Развитие предложенных положений открывает возможности формирования систем поддержки принятия решений, предназначенных для организации хозяйственных процессов по управлению лесными массивами и другими, прилегающими к ним социально-экономическими и организационно-техническими системами.

Список литературы

1. Кухар И. В., Бердникова Л. Н., Орловский С. Н., Мартыновская С. Н., Коршун В. Н., Карнаухов А. И. Влияние вредных и опасных факторов лесных пожаров на окружающую среду // Хвойные бореальной зоны. 2019. Т. 37, № 5. С. 307–312. EDN: [VKCKGD](#)
2. Соколов М. М. Стратегии России по введению трансграничного углеродного регулирования в ЕС // Геоэкономика энергетики. 2021. Т. 15, № 3. С. 84–97. https://doi.org/10.48137/2687-0703_2021_15_3_84
3. Минаков Е. И., Калистратов Д. С., Мирчук С. Г. Модель информационно-измерительной системы видеомониторинга лесных пожаров // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 11–2. С. 194–200. EDN: [YSJJA0](#)
4. Губенко И. М., Рубинштейн К. Г. Сравнительный анализ методов расчета индексов пожарной опасности // Труды гидрометеорологического научно-исследовательского центра Российской Федерации. 2012. Вып. 347. С. 207–222. EDN: [PTTLPP](#)
5. Wotton M. B. Interpreting and using outputs from the Canadian Forest Fire Danger Rating System in research applications // Environmental and Ecological Statistics. 2009. Vol. 16, iss. 2. P. 107–131. <https://doi.org/10.1007/s10651-007-0084-2>
6. Sharples J. J., McRae R. H. D., Weber R. O., Gill A. M. A simple index for assessing fire danger rating // Environmental Modelling & Software. 2009. Vol. 24, iss. 6. P. 764–774. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2008.11.004>
7. Van Wagner C. E. Development and structure of the Canadian Forest Fire Weather Index System. Ottawa : Canadian Forestry Service, Headquarters, 1987. 35 p. (Forestry Technical Report, vol. 35). URL: <https://cfs.nrcan.gc.ca/publications?id=19927> (дата обращения: 20.03.2022).
8. Галушкин А. И. Нейронные сети: основы теории. Москва : Горячая Линия-Телеком, 2010. 496 с.
9. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. 800 с.
10. Штовба С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. Москва : Горячая Линия-Телеком, 2007. 288 с.
11. Lee K. H. First Course on Fuzzy Theory and Applications. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2005. 335 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-32366-X>
12. Сорокин А. А. Усовершенствование информационно-аналитических комплексов на



основе иерархических систем нечеткого логического вывода // Управление большими системами. 2020. Вып. 88. С. 99–123. <https://doi.org/10.25728/ubs.2020.88.5>

13. Yager R. R., Filev D. P. Approximate clustering via the mountain method // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 1994. Vol. 24, iss. 8. P. 1279–1284. <https://doi.org/10.1109/21.299710>
14. Леонтьев В. К. О мерах сходства и расстояниях между объектами // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2009. Т. 49, № 11. С. 2041–2058.

References

1. Kukhar I. V., Berdnikova L. N., Orlovskii S. N., Martynovskaia S. N., Korshun V. N., Karnaukhov A. I. The impact of harmful and dangerous factors of forest fires on the environment. *Conifers of the Boreal Area*, 2019, vol. 37, iss. 5, pp. 307–312 (in Russian). EDN: VKCKGD
2. Sokolov M. M. Russia's strategies for the introduction of cross-border carbon regulation in the EU. *Geoeconomics of Energy*, 2021, vol. 15, iss. 3, pp. 84–97 (in Russian). https://doi.org/10.48137/2687-0703_2021_15_3_84
3. Minakov E. I., Kalistratov D. S., Mirchuk S. G. The model of information-measuring system of forest fires videomonitoring. *Izvestiya Tula State University. Technical Science*, 2017, iss. 11–2, pp. 194–200 (in Russian). EDN: YSJJAO
4. Gubenko I. M., Rubinshtein K. G. Comparative analysis of methods of fire danger indexes evaluation. *Proceedings of the Hydrometeorological Research Center of the Russian Federation*, 2012, iss. 347, pp. 207–222 (in Russian). EDN: PTTLPP
5. Wotton M. B. Interpreting and using outputs from the Canadian Forest Fire Danger Rating System in research applications. *Environmental and Ecological Statistics*, 2009, vol. 16, iss. 2, pp. 107–131. <https://doi.org/10.1007/s10651-007-0084-2>
6. Sharples J. J., McRae R. H. D., Weber R. O., Gill A. M. A simple index for assessing fire danger rating. *Environmental Modelling & Software*, 2009, vol. 24, iss. 6, pp. 764–774. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2008.11.004>
7. Van Wagner C. E. *Development and structure of the Canadian Forest Fire Weather Index System*. Forestry Technical Report, vol. 35. Ottawa, Canadian Forestry Service, Headquarters, 1987. 35 p. Available at: <https://cfs.nrcan.gc.ca/publications?id=19927> (accessed 20 March 2022).
8. Galushkin A. I. *Neironnye seti: osnovy teorii* [Neural Networks: Fundamentals of Theory]. Moscow, Goryachaya Liniya-Telekom, 2010. 496 p. (in Russian).
9. Pegat A. *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie* [Fuzzy Modeling and Control]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy, 2017. 800 p. (in Russian).
10. Shtovba S. D. *Proektirovanie nechetkikh sistem sredstvami MATLAB* [Designing fuzzy systems by means of MATLAB]. Moscow, Goryachaya Liniya-Telekom, 2007. 288 p. (in Russian).
11. Lee K. H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005. 335 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-32366-X>
12. Sorokin A. A. Improvement of information-analytical complexes based on hierarchical systems of fuzzy output. *Large-Scale Systems Control*, 2020, iss. 88, pp. 99–123 (in Russian). <https://doi.org/10.25728/ubs.2020.88.5>
13. Yager R. R., Filev D. P. Approximate clustering via the mountain method. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1994, vol. 24, iss. 8, pp. 1279–1284. <https://doi.org/10.1109/21.299710>
14. Leont'ev V. K. On measures of similarity and distances between objects. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, iss. 11, pp. 1949–1965. <https://doi.org/10.1134/S0965542509110116>

Поступила в редакцию / Received 23.03.2022

Принята к публикации / Accepted 01.06.2022

Опубликована / Published 01.03.2023



ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Том 23, выпуск 1

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития
Серия: История. Международные отношения

Серия: Математика. Механика. Информатика

Серия: Науки о Земле
Серия: Социология. Политология

Серия: Физика
Серия: Филология. Журналистика

Серия: Философия. Психология. Педагогика
Серия: Химия. Биология. Экология

Серия: Экономика. Управление. Право

