УДК 519.852
DOI 10.18822/byusu20240357-62

# МАКСИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ДОПУСТИМЫХ ОШИБОК АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

**Носков Сергей Иванович**
доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры «Информационные системы и защита информации»,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
Иркутск, Россия
E-mail: sergey.noskov.57@mail.ru

**Шахуров Антон Николаевич**
студент кафедры «Информационные системы и защита информации»,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
Иркутск, Россия
E-mail: Fantom3920@yandex.ru

Предмет исследования: ошибки аппроксимации линейной регрессионной модели в рамках логико-алгебраического подхода к анализу данных.

Цель исследования: разработать алгоритмический способ решения задачи максимизации числа допустимых ошибок аппроксимации с применением вычислительного аппарата линейно-булева программирования.

Методы и объекты исследования: объектом исследования является линейная регрессионная модель, методами – линейный регрессионный анализ и аппарат математического программирования.

Основные результаты исследования: предложен алгоритмический способ максимизации числа допустимых абсолютных и относительных ошибок аппроксимации линейного регрессионного уравнения, сводящийся к решению задач линейно-булева программирования приемлемой для практических ситуаций размерности. Решение сформированных задач этого типа не должно вызывать вычислительных проблем в силу значительного числа эффективных программных средств, например размещенной в Интернете в свободном доступе программы LPsolve.

**Ключевые слова:** регрессионная модель, абсолютные и относительные ошибки аппроксимации, задача линейно-булева программирования, модель пассажирооборота воздушного транспорта.

# MAXIMIZING THE NUMBER OF ALLOWABLE APPROXIMATION ERRORS WHEN BUILDING A LINEAR REGRESSION MODEL

**Sergey I. Noskov**
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Professor of the Department of Information Systems and Information Security,
Irkutsk State Transport University,
Irkutsk, Russia
E-mail: sergey.noskov.57@mail.ru

**Anton N. Shakhurov**
student of the Department of Information Systems and Information Security,
Irkutsk State Transport University,
Irkutsk, Russia
E-mail: Fantom3920@yandex.ru

Subject of research: errors in approximation of a linear regression model within the framework of a logical-algebraic approach to data analysis.

Purpose of the study: to develop an algorithmic method for solving the problem of maximizing the number of permissible approximation errors using a linear-Boolean programming computer.

Methods and objects of research: the object of research is a linear regression model, the methods are linear regression analysis and mathematical programming apparatus.

Main results of the study: an algorithmic method is proposed for maximizing the number of permissible absolute and relative errors in approximation of a linear regression equation, which reduces to solving linear-Boolean programming problems of a dimension acceptable for practical situations. Solving generated problems of this type should not cause computational problems due to a significant number of effective software tools, for example, the LPsolve program, which is freely available on the Internet.

**Keywords:** regression model, absolute and relative approximation errors, linear-Boolean programming problem, air transport passenger turnover model.

## ВВЕДЕНИЕ

Методы математического моделирования являются эффективным средством исследования сложных, с множеством межфакторных структурных взаимодействий, систем различного характера и масштаба. Эти методы позволяют формализовывать свойственные таким системам закономерности функционирования и развития путем создания их качественных абстрактных аналогов, что открывает широкие перспективы в существенном повышении действенности вырабатываемых управляющих сигналов.

Регрессионные модели – весьма широкий класс математических моделей, разрабатываемых для исследования сложных объектов любой природы. Рассмотрим необходимый составной элемент практически любой модели этого типа – регрессионное уравнение (зависимость) вида:

$$y_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{ki} + \varepsilon_k, k = \overline{1,n}, \quad (1)$$

где $y$ – зависимая, а $x_i$ – $i$-я независимая переменная, $\alpha_i$ – $i$-й подлежащий оцениванию параметр, $\varepsilon_k$ – ошибки аппроксимации, $k$ – номер наблюдения, $n$ – их число (длина выборки данных). Будем считать все переменные и ошибки уравнения (1) детерминированными.

Представим уравнение (1) в векторной форме:

$$y=X\alpha+\varepsilon,$$

где $y=(y_1,\ldots,y_n)^T$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)^T$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)^T$, $X-(n\times m)$ – матрица с компонентами $x_{ki}$. При наличии в уравнении (1) свободного члена первый столбец матрицы $X$ состоит из единиц.

Построение и использование регрессионных моделей в прикладных целях часто сопровождается анализом свойств ошибок аппроксимации. Так, в работе [1] представлена гладкая функция для аппроксимации функции контрольных потерь с тем, чтобы можно было использовать методы оптимизации на основе градиента для подбора модели квантильной регрессии. Обсуждаются свойства гладкого приближения, предложены два алгоритма минимизации сглаженной целевой функции. В [2] рассматривается задача выбора и оценки модели квантильной регрессии с известной структурой групп в предикторах. Для медианного случая модель оценивается путем минимизации штрафной целевой функции потерь (ошибок аппроксимации) Хубера. Статья [3] посвящена анализу существования двух непротиворечивых оценок параметров линейных предикторов в регрессии Пуассона, где ковариата измеряется с ошибками. В [4] рассматривается проблема выбора переменных в квантильной регрессии с авторегрессионными ошибками аппроксимации.

Все наиболее часто используемые в регрессионном анализе критерии адекватности моделей, в частности множественной детерминации, Фишера, Стьюдента, Дарбина – Уотсона, включают в свои расчетные формулы ошибки аппроксимации и отражают те или иные частные характеристики в качестве модельного описания сложных объектов. Так, в работе [5] критерий множественной детерминации использовался при разработке регрессионной модели индекса нормализации разницы растительности лугов и пахотных земель вдоль нарушенной полосы отвода трубопроводов Баку – Тбилиси – Джейхан и Южно-Кавказского трубопровода для целей планирования восстановления растительности. В качестве климатических факторов были выделены годовое количество осадков, годовое суммарное испарение, температура поверхности Земли, годовая минимальная и максимальная температура воздуха и солнечная радиация. Учитывались также грунтовые факторы: высота, ракурс, грунтовые воды и глубина верхнего слоя почвы. В [6] отмечается, что регрессия Стьюдента является полезным расширением нормальной модели, которую можно использовать для статистического моделирования наборов данных, включающих ошибки с тяжелыми хвостами и/или выбросами. Обсуждается также регрессия Стьюдента с переменной дисперсией, в которой как среднее значение, так и дисперсия зависят от объясняющих переменных. Проблема, представляющая интерес, заключается в одновременном выборе значимых переменных как в модели среднего значения, так и в модели дисперсии. Описана унифицированная процедура, позволяющая выделять значимую переменную. В работе [7] предложен алгоритм применения критерия Дарбина – Уотсона для анализа автокорреляции ошибок аппроксимации. В исследовании [8] этот критерий использован при моделировании качества воздуха. В качестве независимых переменных при этом использованы концентрация твердых частиц и метеорологические параметры (температура, влажность, скорость и направление ветра) за 5 лет с трех промышленных станций мониторинга качества воздуха в Малайзии. В работе [9] предлагаются простые, основанные на критерии Дарбина – Уотсона тесты для проверки корреляции рядов, которые применимы в моделях линейной регрессии. Процедуры тестирования устойчивы при различных распределениях случайных ошибок. Асимптотические распределения предложенной статистики получены с помощью совместной центральной предельной теоремы для нескольких общих квадратичных форм и дельта-метода. В [10] с помощью критерия Фишера проведен регрессионный анализ загрязнения тяжелыми металлами почв и донных отложений прудов, находящихся в зоне с повышенной автотранспортной нагрузкой.

В работе [11] предложен метод оценивания параметров модели (1) путем минимизации средней и максимальной относительных ошибок аппроксимации.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Наиболее популярными методами построения регрессионного уравнения (1) принято считать методы наименьших квадратов (МНК) и модулей (МНМ) (см., например, [12, 13]). Первый из них позволяет аналитически представить формулу для расчета вектора параметров:

$$\alpha=(X^TX)^{-1}X^Ty.$$

Для применения МНМ следует либо воспользоваться методом вариационно-взвешенных квадратичных приближений [14], основанным на использовании специальным образом организованной итерационной процедуры, либо путем [13] сведения задачи

$$\mathrm{E}=\sum_{k=1}^{n}|\varepsilon_k|\to\min \qquad (2)$$

к задаче линейного программирования (ЛП) следующим образом.

Введем в рассмотрение переменные $u_k \geq 0$ (положительные части ошибок $\varepsilon_k$) и $v_k \geq 0$ (отрицательные части ошибок $\varepsilon_k$), $k=\overline{1,n}$следующим образом:

$$u_k = \begin{cases} \varepsilon_k, & \varepsilon_k > 0 \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$v_k = \begin{cases} -\varepsilon_k, & \varepsilon_k < 0 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что при этом справедливы следующие равенства:

$$\varepsilon_k = u_k - v_k,\ |\varepsilon_k| = u_k + v_k,\ u_k v_k = 0.$$

Представим уравнение (1) в виде системы тождеств:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{ki} + u_k - v_k = y_k,\ k = \overline{1,n}, \quad (3)$$

$$u_k \geq 0,\ v_k \geq 0,\ k = \overline{1,n}, \quad (4)$$

Тогда задача (2) эквивалента задаче ЛП с ограничениями (3), (4) и целевой функцией

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) \to \min. \quad (5)$$

Предложенный в [11] метод минимизации средней относительной ошибки аппроксимации $\tilde{E} = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\varepsilon_k}{y_k}\right| / n$ сводится к задаче ЛП с ограничениями (3), (4) и целевой функцией

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{y_k}\right| (u_k + v_k) \to \min. \quad (6)$$

Там же предложен способ минимизации максимальной относительной ошибки аппроксимации

$$r = \max_{k=1,n} \left|\frac{\varepsilon_k}{y_k}\right| \to \min.$$

Для этого система ограничений (3), (4) дополняется неравенствами:

$$u_k + v_k - |y_k|\, r \leq 0,\ k = \overline{1,n}, \quad (7)$$

а целевая функция (6) заменяется на следующую:

$$r \to \min. \quad (8)$$

Решение трех сформированных задач ЛП (3) – (5), (3), (4), (6) и (3), (4), (7), (8) не вызывает вычислительных проблем в силу значительного числа эффективных программных средств, например размещенной в Интернете в свободном доступе программы LPsolve.

Поставим задачу максимизации числа наблюдений выборки, для которых модуль ошибки аппроксимации не превышает некоторой наперед заданной величины $d$ (трактуемой как допустимая абсолютная ошибка), или, формально:

$$|S| \to \max, \quad (9)$$

где

$$S = \{ k \in \{1,2,\ldots n\} \mid |\varepsilon_k| \leq d \},$$

а через $|S|$ обозначено число элементов (мощность) множества $S$. Таким образом, $S$ – множество номеров наблюдений выборки, абсолютные ошибки аппроксимации для которых допустимы.

Допустимым ошибкам можно придать и относительный характер путем постановки задачи

$$|\tilde{S}| \to \max, \quad (10)$$

где

$$\tilde{S} = \{ k \in \{1,2,\ldots n\} \mid |\varepsilon_k| \leq \tilde{d} y_k \},$$

а $\tilde{d}$ представляет собой долю фактических значений зависимой переменной, выраженную в процентах (например, $\tilde{d}$ = 0.03 соответствует 3 %).

Введем в рассмотрение булевы переменные $\sigma_k$, $k=\overline{1,n}$ по правилу:

$$\sigma_k = \begin{cases} 1, & |\varepsilon_k| \leq d \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а также ограничения

$$u_k + v_k + M\,\sigma_k \leq M + d, \quad (11)$$

где $M$ – наперед заданная большая положительная константа.

Тогда задача (9) эквивалентна задаче линейно-булева программирования (ЛБП) с ограничениями (3), (4), (11),

$$\sigma_k \in \{0,1\},\ k = \overline{1,n} \quad (12)$$

и целевой функцией

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k - \delta \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) \to \max, \quad (13)$$

где $\delta$ – наперед заданное малое положительное число, сравнимое с нулем. Присутствие в (13) второго слагаемого гарантирует выполнение условия $u_k v_k = 0$ для всех $k$, следующего из приведенного выше определения переменных $u_k$ и $v_k$.

При решении задачи (10) необходимо ограничение (11) в задаче ЛБП (3) (4), (11) – (13) заменить на следующее:

$$u_k + v_k + M\,\sigma_k \leq M + \tilde{d} y_k. \quad (14)$$

Применим описанный способ идентификации параметров линейной регрессии для моделирования пассажирооборота воздушного транспорта Российской Федерации. Введем следующие обозначения:

$y$ – пассажирооборот воздушного транспорта, млрд пасс. км;

$x_1$ – среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций, руб.;

$x_2$ – численность трудоспособного населения в России, млн чел.

В качестве информационной базы для моделирования используем статистиче скую ежегодную информацию за 2002–2019 гг. [15]. С помощью МНК, МНМ и изложенного выше подхода будем строить линейную двухфакторную модель без свободного члена:

$$y_k = \alpha_1 x_{k1} + \alpha_2 x_{k2} + \varepsilon_k,\ k=\overline{1,18}.$$

В результате получим:

- МНК

$$y= 0.00586x_1 + 0.36409x_2,\quad E = 173.1,\ \tilde{E} = 0.29\ \%, \tag{15}$$

- МНМ

$$y= 0,00577x_1 + 0,40365x_2,\quad E = 172.3,\ \tilde{E} = 0.41\ \%. \tag{16}$$

Значения критериев адекватности $E$ и $\tilde{E}$ указывают на высокую адекватность моделей (15) и (16).

В таблицах 1 и 2 отражены мощности множеств $S$ и $\tilde{S}$ для моделей (15) и (16).

**Таблица 1.** Мощность множеств $S$ для моделей (15) и (16)

| d | \|S\| | |
|---|---|---|
| | Модель (15) | Модель (16) |
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 3 |
| 3 | 6 | 3 |
| 4 | 7 | 9 |
| 5 | 7 | 9 |
| 6 | 7 | 9 |
| 7 | 9 | 9 |
| 8 | 10 | 11 |
| 9 | 11 | 11 |
| 10 | 11 | 12 |

**Таблица 2.** Мощность множеств $|\tilde{S}|$ для моделей (15) и (16)

| $\tilde{d}$ | $\|\tilde{S}\|$ | |
|---|---|---|
| | Модель (15) | Модель (16) |
| 0.01 | 2 | 3 |
| 0.02 | 6 | 5 |
| 0.03 | 6 | 5 |
| 0.04 | 8 | 7 |
| 0.05 | 9 | 10 |
| 0.06 | 10 | 11 |
| 0.07 | 10 | 12 |
| 0.08 | 10 | 13 |
| 0.09 | 13 | 14 |
| 0.1 | 14 | 15 |

Из анализа таблицы 1 следует, что при $d \le 3$ число $|S|$ для модели (15) не меньше, чем для модели (16), при $d > 3$ – не больше.

Из таблицы же 2 следует, что такой границей является число $\tilde{d}$=0.04.

В таблице 3 представлены результаты решения задачи ЛБП (3), (4), (11) – (13) по максимизации числа абсолютных ошибок аппроксимации для различных значений $d$.

Отметим, что значение $d$=4 соответствует модели (16).

В таблице 4 помещены результаты решения задачи ЛБП (3), (4), (14), (12), (13) по максимизации числа относительных ошибок аппроксимации для различных значений $\tilde{d}$.

**Таблица 3.** Результаты решения задачи (3), (4), (11) – (13) по максимизации числа абсолютных ошибок аппроксимации для различных значений $d$

| d | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | \|S\| | E | S |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00449 | 0.51449 | 5 | 379.7 | 1,2,4,5,7 |
| 2 | 0.00480 | 0.49584 | 6 | 299.8 | 1,2,4,5,6,15 |
| 3 | 0.00481 | 0.47436 | 7 | 315.1 | 1,2,4,5,6,7,15 |
| 4 | 0.00577 | 0.40365 | 9 | 172.3 | 1,2,4,5,6,10,14,16,17 |
| 5 | 0.00474 | 0.51125 | 9 | 308.7 | 1,2,3,4,5,6,7,9,15 |
| 6 | 0.00576 | 0.42403 | 11 | 175.6 | 1,2,3,4,5,6,10,11,14,16,17 |
| 7 | 0.00576 | 0.41295 | 11 | 173.5 | 1,2,3,4,5,6,10,11,14,16,17 |
| 8 | 0.00590 | 0.39136 | 12 | 179.7 | 1,2,3,4,5,6,10,11,14,16,17,18 |
| 9 | 0.00579 | 0.39540 | 12 | 172.5 | 1,2,3,4,5,6,9,10,11,14,16,17 |
| 10 | 0.00597 | 0.32857 | 13 | 178.1 | 1,2,4,5,6,7,9,10,11,14,16,17,18 |

**Таблица 4.** Результаты решения задачи (3), (4), (14), (12), (13) по максимизации числа относительных ошибок аппроксимации для различных значений $\tilde{d}$

| $\tilde{d}$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | \|$\tilde{S}$\| | E | S |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 0.00587 | 0.35011 | 6 | 174.8 | 5,6,10,14,16,17 |
| 0.02 | 0.00489 | 0.48631 | 7 | 285.8 | 1,2,4,5,6,9,15 |
| 0.03 | 0.00592 | 0.37499 | 9 | 178.4 | 4,5,6,10,11,14,16,17,18 |
| 0.04 | 0.00551 | 0.42849 | 10 | 195.6 | 1,2,4,5,6,9,10,14,16,17 |
| 0.05 | 0.00577 | 0.40847 | 11 | 173.0 | 1,2,4,5,6,10,11,14,16,17,18 |
| 0.06 | 0.00599 | 0.39015 | 13 | 189.0 | 1,2,4,5,6,10,11,12,13,14,16,17,18 |
| 0.07 | 0.00583 | 0.42082 | 14 | 181.0 | 1,2,3,4,5,6,10,11,12,13,14,16,17,18 |
| 0.08 | 0.00576 | 0.41629 | 15 | 174.4 | 1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,13,14,16,17,18 |
| 0.09 | 0.00541 | 0.43853 | 15 | 208.5 | 1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,14,15,16,17,18 |
| 0.1 | 0.00573 | 0.40035 | 16 | 175.9 | 1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,16,17,18 |

Анализ таблиц 3, 4 позволяет сделать следующие выводы.

Поведение оценок параметров $\alpha_1$ и $\alpha_2$, а также суммы модулей ошибок E не является монотонным при росте значений $d$ и $\tilde{d}$. При этом мощность множеств $S$ и $\tilde{S}$ естественным образом возрастает.

Попадание какого-либо номера наблюдения выборки в состав множеств $S$ или $\tilde{S}$ для меньших значений $d$ или $\tilde{d}$ отнюдь не гарантирует этого для бóльших значений.

Разумеется, окончательный выбор конкретного значения $d$ или $\tilde{d}$ и, соответственно, оценок параметров приведенной выше двухфакторной модели пассажирооборота воздушного транспорта Российской Федерации остается за исследователем в зависимости от целей моделирования и его индивидуальных предпочтений относительно значений $d$, $\tilde{d}$, $|S|$, $|\tilde{S}|$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе предложен алгоритмический способ максимизации числа допустимых абсолютных и относительных ошибок аппроксимации линейного регрессионного уравнения, сводящийся к решению задач линейно-булева программирования приемлемой для практических ситуаций размерности. Решение сформированных задач ЛП и ЛБП не должно вызывать вычислительных проблем в силу значительного числа эффективных программных средств, например размещенной в Интернете в свободном доступе программы LPsolve.

Применение МНК и МНМ позволяет построить весьма адекватные модели пассажирооборота воздушного транспорта Российской Федерации. Поведение оценок параметров модели, а также суммы модулей ошибок не является монотонным при росте уровней допустимых значений абсолютных и относительных ошибок аппроксимации. При этом мощность множеств числа допустимых ошибок естественным образом возрастает. Кроме того, попадание какого-либо номера наблюдения выборки в состав множеств номеров допустимых ошибок для их меньших значений отнюдь не гарантирует этого для бóльших значений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zheng, S. Gradient descent algorithms for quantile regression with smooth approximation / S. Zheng. – DOI 10.1007/s13042-011-0031-2 // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. – 2011. – № 2. – P. 191–207
2. Sherwood, B. Quantile regression feature selection and estimation with grouped variables using Huber approximation / B. Sherwood, S. Li. – DOI 10.1007/s11222-022-10135-w // Statistics and Computing. – 2022. – № 32 (75). – URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s11222-022-10135-w (date of application: 24.09.2024).
3. Kukush, A. Three estimators for the poisson regression model with measurement errors / A. Kukush, H. Schneeweis, R. Wolf. – DOI 10.1007/bf02777577 // Statistical Papers. – 2004. – № 45. – P. 351–368.
4. Variable selection in quantile regression when the models have atoregressive errors / W. Zhao, R. Zhang, Y. Lv, J. Liu. – DOI 10.1016/j.jkss.2012.11.003// Oh Journal of the Korean Statistical Society. – 2014. – № 43 (3). – P. 513–530.
5. Bayramov, E. Determination of main climate and ground factors controlling vegetation cover regrowth along oil and gas pipelines using multiple, spatial and geographically weighted regression procedures / E. Bayramov, M. F. Buchroithner, E. McGurty. – DOI 10.1007/s12665-011-1429-6 // Environmental Earth Sciences. – 2012. – № 66. – P. 2047–2062.
6. Zhao, W. Variable selection of varying dispersion student-t regression models / W. Zhao, R. Zhang. – DOI 10.1007/s11424-014-2223-9// Journal of Systems Science and Complexity. – 2015. – Vol. 28. – P. 961–977.
7. Георгиев, Н. С. Проверка автокорреляции в остатках критерием Дарбина – Уотсона / Н. С. Георгиев, А. Д. Юрченко. – Текст : непосредственный // Аллея науки. – 2020. – № 2 (6). – С. 182–185.
8. Application of Step Wise Regression Analysis in Predicting Future Particulate Matter Concentration Episode / A. Nazif, N. I.Mohammed, A. Malakahmad, M. S. Abualqumboz. – DOI 10.1007/s11270-016-2823-1 // Water, Air, & Soil Pollution. – 2016. – № 227 (117). – URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s11270-016-2823-1 (date of application: 24.09.2024).
9. Yin, Y. Model-free tests for series correlation in multivariate linear regression / Y. Yin. – DOI 10.48550/arXiv.1901.05595 // Journal of Statistical Planning and Inference. – 2020. – № 206. – P. 179–195.
10. Сорокин, А. В. Взаимосвязь накопления тяжелых металлов в донных отложениях и почве при проведении оценки загрязненности рекреационных зон автотранспортом / А. В. Сорокин, Е. В. Сотникова. – Текст : непосредственный // Технические науки – от теории к практике. – 2014. – № 36. – С. 145–151.
11. Носков, С. И. Минимизация средней и максимальной относительных ошибок аппроксимации регрессионной модели / С. И. Носков. – Текст : непосредственный // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – № 1. – С. 340–343.
12. Дрейпер, Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит. – 3-е издание. – Москва : Вильямс, 2016. – 912 с. – Текст : непосредственный.
13. Демиденко, Е. З. Линейная и нелинейная регрессии / Е. З. Демиденко. – Москва : Финансы и статистика, 1981. – 302 с. – Текст : непосредственный.
14. Мудров, В. И. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки / В. И. Мудров, В. А. Кушко. – 2-е издание. – Москва : Радио и связь, 1983. – 304 с. – Текст : непосредственный.
15. Носков, С. И. Разработка регрессионной модели пассажирооборота воздушного транспорта Российской Федерации двумя альтернативными методами / С. И. Носков, Ю. А. Бычков, К. С. Перфильева. – Текст : электронный // Вестник кибернетики. – 2023. – № 22 (1). С. 36–42. – URL: https://www.vestcyber.ru/jour/article/view/502 (дата обращения: 03.12.2023).