Строительная механика инженерных конструкций и сооружений
STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2025. 21(5). 414–431

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)
HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ
ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-5-414-431
EDN: ECUDSM

Научная статья / Research article

Реологические уравнения состояния бетона

Е.А. Ларионов[1], В.П. Агапов[1], А.С. Маркович[1,2]✉, К.Р. Айдемиров[3]

[1] Российский университет дружбы народов, *Москва, Российская Федерация*
[2] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, *Москва, Российская Федерация*
[3] Дагестанский государственный технический университет, *Махачкала, Российская Федерация*
✉ markovich-as@rudn.ru

Поступила в редакцию: 8 июня 2025
Доработана: 4 сентября 2025 г.
Принята к публикации: 3 октября 2025 г.

Аннотация. Установлено квазилинейное представление нелинейного реологического уравнения состояния бетона, выведенного на основе концепции статистического распределения прочности отдельных фракций, в объединении образующих элемент конструкции. В нелинейной постановке для нестареющего бетона известный принцип Л. Больцмана суперпозиции деформаций ползучести реализуется по приращениям структурного напряжения способных к силовому сопротивлению фракций при неубывающем нагружении. Для стареющего бетона в отличие от предшествующих подходов реализовано наложение частичных приращений деформаций, порожденных приращениями уровня напряжений. Это приводит к корректному учету старения бетона, уточняющему вид известных реологических уравнений. Приведены удобные в приложениях квазилинейные формы реологических уравнений. Концепция прочностной структуры бетона и идентичность функций старения прочности, модуля упругости и ползучести позволяют сведение уравнения ползучести к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Это упрощает, в частности, решение задач релаксации напряжений, значимых в расчетах конструкций на долгосрочную безопасность.

Ключевые слова: наложение, прочность, старение, ползучесть бетона, релаксация напряжений, деформация

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: *Ларионов Е.А.* — общая концепция исследования, валидация; *Агапов В.П.* — выводы и рекомендации; *Маркович А.С., Айдемиров К.Р.* — анализ научной литературы, написание текста. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Для цитирования: *Ларионов Е.А., Агапов В.П., Маркович А.С., Айдемиров К.Р.* Реологические уравнения состояния бетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 5. С. 414–431. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-414-431 EDN: ECUDSM

Ларионов Евгений Алексеевич, доктор технических наук, профессор кафедры технологии строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY AuthorID: 365207, ORCID: 0000-0002-4906-5919; e-mail: evgenylarionov39@yandex.ru

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Маркович Алексей Семенович, доктор технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; профессор кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434; ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Айдемиров Курбан Рабаданович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций и гидротехнических сооружений, Дагестанский государственный технический университет, Российская Федерация, 367026, г. Махачкала, пр. Имама Шамиля, д. 70; eLIBRARY SPIN-код: 8167-4343, ORCID: 0009-0005-1474-4275; e-mail: kyrayd@mail.ru

Rheological Equations of State of Concrete

Evgeny A. Larionov[1], Vladimir P. Agapov[1], Alexey S. Markovich[1,2]✉, Kurban R. Aidemirov[3]

[1]RUDN University, *Moscow, Russian Federation*
[2]Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), *Moscow, Russian Federation*
[3]Daghestan State Technical University, *Makhachkala, Russian Federation*
✉ markovich-as@rudn.ru

Received: July 27, 2025
Revised: September 4, 2025
Accepted: October 3, 2025

Abstract. A quasilinear representation of a nonlinear rheological equation of concrete state has been established, derived on the basis of the concept of statistical strength distribution of individual fractions combined to form a structural element. In the nonlinear formulation for ageless concrete, L. Boltzmann's well-known principle of superposition of creep deformations is realized by increments of structural stress of fractions capable of force resistance under non-decreasing loading. For aging concrete, in contrast to previous approaches, the superposition of partial increments of deformations generated by increments in stress levels is implemented. This leads to the correct consideration of concrete aging, clarifying the type of known rheological equations. Quasilinear forms of rheological equations that are convenient in applications are given. The concept of the strength structure of concrete and the identity of the aging functions of strength, modulus of elasticity and creep make it possible to reduce the creep equation to a linear differential equation with constant coefficients. This simplifies, in particular, the solution of stress relaxation problems, which are important in the calculations of structures for long-term safety.

Keywords: superposition, strength, aging, concrete creep, stress relaxation, deformation

Conflicts of interest. The authors declare no conflict of interest.

Authors' contribution: *Larionov E.A.* — general concept of research, validation; *Agapov V.P.* — conclusions and recommendations; *Markovich A.S., Aidemirov K.R.* — analysis of scientific literature, writing. All authors read and approved the final version of the article.

For citation: *Larionov E.A., Agapov V.P., Markovich A.S., Aidemirov K.R.* Rheological equations of state of concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2025;21(5):414–431. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-414-431 EDN: ECUDSM

1. Введение

Уравнения механического состояния значимы в теории бетона, и им посвящено большое количество работ, отраженных частично в [1; 2]. Эти уравнения представляют теоретические обоснования экспериментально выявленных при эталонных нагружениях феноменологических зависимостей. В неравновесном процессе силового деформирования существенную роль играет явление прироста деформации при постоянном напряжении, называемое ползучестью. Учет ползучести бетона, естественно, приводит к реологическим уравнениям состояния. Традиционный вывод этих уравнений использует принцип наложения деформаций и заключается в суммировании в некоторый момент t частичных приращений $\Delta\varepsilon_{cr}(t,\tau_i)$ деформаций ползучести, порожденных частичными приращениями $\Delta\sigma(\tau_i)$ напряжения $\sigma(\tau)$ в последовательные предыдущие моменты времени τ_i. В линейной теории ползучести идеального (нестареющего) бетона принцип наложения известен как принцип суперпозиции Л. Больцмана [3] — деформация $\Delta\varepsilon_{cr}(t,\tau_i)$ определяется напряжением $\Delta\sigma(\tau_i)$ и его продолжительностью $(t-\tau_i)$ и не зависит от $\Delta\sigma(\tau_j)$ и $(t-\tau_j)$ при $i \neq j$. Взаимонезависимость деформа-

Evgeny A. Larionov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Engineering Academy, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY AuthorID: 365207, ORCID: 0000-0002-4906-5919; e-mail: evgenylarionov39@yandex.ru

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Alexey S. Markovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Professor of the Department of Metal and Timber Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9203-1434, ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Kurban R. Aidemirov, PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Building Structures and Hydraulic Structures, Dagestan State Technical University, 70, I. Shamily avenue, Makhachkala, 367026, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8167-4343, ORCID: 0009-0005-1474-4275; e-mail: kyrayd@mail.ru

ций $\Delta\varepsilon_{cr}(t,\tau_i)$ позволяет нахождение отвечающего приращению напряжения $\Delta\sigma(t,t_0)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\sigma(\tau_i)$ полного приращения $\Delta\varepsilon_{cr}(t,t_0)$ деформации ползучести суперпозицией (наложением) $\Delta\varepsilon_{cr}(t,\tau_i)$:

$$\Delta\varepsilon_{cr}(t,t_0)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\varepsilon_{cr}(t,\tau_i)=\sum_{i=0}^{n-1}C_0(t,\tau_i)\Delta\sigma(\tau_i), \tag{1}$$

где $C_0(t,\tau_i)$ — мера ползучести идеального бетона в момент t при нагружении в момент τ_i.

При постоянном модуле упругости E приращению $\Delta\sigma(t,t_0)$ отвечает приращение мгновенной деформации:

$$\Delta\sigma_{el}(t,t_0)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{E}. \tag{2}$$

Согласно (1) и (2) получим равенство

$$\Delta\varepsilon(t,t_0)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{E}+C_0(t,\tau_i)\right]\Delta\sigma(\tau_i), \tag{3}$$

выражающее принцип наложения деформаций в наследственной теории ползучести Больцмана – Вольтерра.

Предельный переход в (3) позволяет получить выражение

$$\Delta\varepsilon(t,t_0)=\frac{\Delta\sigma(t,t_0)}{E}+\int_{t_0}^{t}C_0(t,\tau)d\sigma(\tau). \tag{4}$$

Добавление к $\Delta\varepsilon(t,t_0)$ деформации $\left[\frac{1}{E}+C_0(t,\tau_i)\right]\sigma(t_0)$ приводит к уравнению

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma(t)}{E}+\int_{t_0}^{t}C_0(t,\tau)d\sigma(\tau)+C_0(t,t_0)\sigma(t_0),$$

преобразующемуся к виду

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma(t)}{E}-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{5}$$

Для стареющего бетона принимается мера ползучести

$$C^*(t,\tau)=\Theta(t)C_0(t,\tau),\quad C_0(t,\tau)=C_0(\infty,28)f(t,\tau), \tag{6}$$

где $\Theta(t)$ — функция старения; $C_0(\infty,28)$ — предельная мера ползучести $C_0(t,\tau)$ при $t_0=28$ суток; $f(t,\tau)$ — функция накопления деформаций ползучести, причем

$$f(t,\tau)=1-ke^{-\gamma(t-t_0)},$$

где $0<k\le 1$, γ — эмпирический коэффициент.

Зависимость функции $f(t,\tau)$ от аргумента $(t-\tau)$ определяется природой запаздывающих деформаций ползучести.

Решением дифференциального уравнения

$$\frac{dC^*(t,\tau)}{dt}=\gamma\left[C^*(\infty,\tau)-C(t,\tau)\right],\tag{7}$$

отражающего пропорциональность скорости затухания деформаций ползучести ее дефициту, является функция

$$f(t,\tau)=1-e^{-\gamma(t-t_0)}.\tag{8}$$

Замечание. Полагая $k<1$ в функции $f(t,\tau)$, при $\tau=t$ получим

$$C^*(t,t)=\Theta(t)C_0(\infty,28)(1-k)\neq 0.$$

Это соответствует наличию так называемой кратковременной ползучести, что противоречит инерционной природе запаздывающих деформаций ползучести. Вместе с тем соотношение $C^*(t,t)\neq 0$ коррелирует с экспериментально наблюдаемым начальным всплеском кривой ползучести, рассматриваемым как следствие быстро натекающей ползучести.

В [4; 5] для стареющего бетона по аналогии с уравнением Больцмана – Вольтерра предлагается линейное реологическое уравнение

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau.\tag{9}$$

А.А. Гвоздев, принимая линейную зависимость для мгновенной деформации $\varepsilon_{el}(t)=\dfrac{\sigma(t)}{E(t)}$, полагал, что ползучесть состоит из линейной части $\varepsilon_{cr}^{l}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}C^*(t,\tau)d\sigma(\tau)$ и нелинейной части $\varepsilon_{cr}^{nl}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}L(t,\tau,\sigma)d\sigma(\tau)$, порожденной структурными повреждениями [2].

В.М. Бондаренко, наряду с деформацией ползучести $\varepsilon_{cr}(t,t_0)$, полагал нелинейной зависимость и мгновенной деформации $\varepsilon_{el}(t)$ от $\sigma(t)$ и вывел нелинейное реологические уравнение [1]

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S_{el}(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}S_{cr}(\tau)\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau,\tag{10}$$

где $S_{el}(t)$ и $S_{cr}(\tau)$ — нелинейные функции напряжений, порождающие мгновенные и запаздывающие деформации соответственно.

В [6; 7] на основе концепции прочностной структуры бетона получена модификация принципа суперпозиции Л. Больцмана и выведено нелинейное реологическое уравнение с единой для мгновенных и запаздывающих деформаций функцией напряжений $S(t)$.

Согласно концепции прочностной структуры величина $S(\tau)$ представляет напряжение $\sigma_{str}(\tau)$, способных к силовому сопротивлению фракций бетонного элемента, названного в [6] структурным. При этом $\sigma_{str}(\tau)=S^0(\tau)\sigma(\tau)$, $S^0(\tau)$ является нелинейной функцией уровня напряжений $\eta=\dfrac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}$ и выводится нелинейное реологическое уравнение [7–9]

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S^0(t)\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}S^0(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\,. \tag{11}$$

При допущении равенств $S_{el}(t)=S_{el}^0(t)\sigma(t)$ и $S_{cr}(\tau)=S_{cr}^0(\tau)\sigma(\tau)$ уравнение (10) приводится к виду

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S_{el}^0(t)\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}S_{cr}^0(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\,. \tag{12}$$

В приложениях удобна квазилинейная форма нелинейных уравнений, означающая представление деформации $\varepsilon(t,t_0)$ как произведение порожденной напряжением $\sigma(\tau)$ деформации $\varepsilon_{el}(t,t_0)$ на множитель квазилинейности $\hat{S}^0(t)$:

$$\varepsilon(t,t_0)=\hat{S}^0(t)\sigma(t)\left[\frac{1}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)}\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]. \tag{13}$$

Из равенств (12) и (13) явствует, что $\hat{S}^0(t)$ есть решение уравнения

$$\hat{S}^0(t)\sigma(t)\left[\frac{1}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)}\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]=\frac{S_{el}^0(t)\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}S_{cr}^0(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\,. \tag{14}$$

В [10; 11] полагают $S_{el}^o(t)=1+V_{el}\left[\eta(t)\right]^{m_{el}}$, $S_{cr}^o(t)=1+V_{cr}\left[\eta(t)\right]^{m_{cr}}$, $\hat{S}^0(t)=1+\hat{V}\left[\eta(t)\right]^{\hat{m}}$. Параметры $\hat{V}$ и $\hat{m}$ определяют согласно (14) при $\sigma(\tau)=R$ и $\sigma(\tau)=\gamma R$, $0{,}6\le\gamma\le 0{,}8$ и предъявляют равенство

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\left\{1+\hat{V}\left[\eta(t)\right]^{\hat{m}}\right\}\sigma(t)}{E_l^{ep}(t,t_0)} \tag{15}$$

как квазилинейное представление нелинейного уравнения (12),

где $E_l^{ep}(t,t_0)=\left[\frac{1}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)}\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]^{-1}$ — временный линейный модуль деформаций.

Функция $f\left[\eta(t)\right]=1+\hat{V}\left[\eta(t)\right]^{\hat{m}}$ является грубой аппроксимацией решения $\hat{S}^0(t)$ уравнения (14), и равенство (15) не выражает квазилинейное представление уравнения (12).

Таким образом, возникает задача корректного квазилинейного представления уравнений (11) и (12).

Уравнение (9) в [4; 5] выводится по приведенной выше схеме наложением деформаций $\Delta\varepsilon_{cr}(t,\tau_i)=C^*(t,\tau_i)\Delta\sigma(\tau_i)$. При этом не учитывается прочность бетона $R(\tau_i)$ в момент приложения напряжения $\Delta\sigma(\tau_i)$, что приводит к некорректному ядру ползучести в [12; 13].

Задача уточнения известных уравнений модификацией принципа суперпозиции Л. Больцмана реализуется в контексте.

З а м е ч а н и е. Нелинейные относительно $\sigma(\tau)$ уравнения состояния бетона являются линейными относительно $\sigma_{str}(\tau)$, и в релаксационных задачах нахождение $\sigma_{str}^{0}(t)$ осуществляется известными методами, а напряжение $\sigma^{0}(t)$ определяется решением уравнения $S^{0}\left[\dfrac{\sigma(t)}{R(t)}\right]\sigma(t)=\sigma_{str}^{0}(t)$ [14; 15].

Идентичность функций старения меры ползучести и модуля упругости позволяет сведение интегрального уравнения состояния к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами относительно деформации $\varepsilon_{el}(t)=\dfrac{\sigma_{str}(t)}{E(t)}$. Решение $\varepsilon_{el}^{0}(t)$ этого уравнения определяет $\sigma_{str}^{0}(t)=E(t)\varepsilon_{el}^{0}(t)$.

2. Линейные реологические уравнения состояния

Физико-механические процессы влекут изменение показателей прочности $R(\tau)$, упругости $E(\tau)$ и меры ползучести $C^{*}(t,\tau)$.

На основе экспериментальных данных [16] выявлена общность функций старения этих показателей и установлено равенство [17]

$$\Theta(\tau)=\frac{R(28)}{R(\tau)}. \tag{16}$$

При постоянном на интервале (t,τ) напряжении $\sigma(\tau)$

$$\varepsilon_{cr}(t,\tau)=\Theta(\tau)C_0(t,\tau)\sigma(\tau),$$

или

$$\varepsilon_{cr}(t,\tau)=C_0(t,\tau)\hat{\sigma}(\tau),\quad \hat{\sigma}(\tau)=\Theta(\tau)\sigma(\tau), \tag{17}$$

и согласно (11)

$$\varepsilon_{cr}(t,\tau)=C_0(t,\tau)R(28)\eta(\tau), \tag{18}$$

где $\eta(\tau)=\dfrac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}$ — уровень напряжений, $\hat{\sigma}(\tau)$ — приведенное к моменту τ его приложения напряжение, $\hat{\sigma}(\tau)=R(28)\eta(\tau)$.

Приращение уровня напряжений $\Delta\eta(\tau_i)$ порождает приращение деформаций ползучести

$$\Delta\varepsilon_{cr}(t,\tau_i)=C_0(t,\tau_i)\Delta\hat{\sigma}(\tau_i)=C_0(t,\tau_i)R(28)\Delta\eta(\tau_i). \tag{19}$$

Полагая в линейной постановке зависимость приращения лишь от величины $\Delta\hat{\sigma}(\tau_i)$ и его длительности, получим аналогичное (19) равенство

$$\Delta\varepsilon_{cr}(t,t_0)=\sum_{i=1}^{n-1}C_0(t,\tau_i)\Delta\hat{\sigma}(\tau_i), \tag{20}$$

а переходя к пределу:

$$\Delta\varepsilon_{cr}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}C_0(t,\tau)\,d\hat{\sigma}(\tau)=\int_{t_0}^{t}C_0(t,\tau)R(28)\,d\eta(\tau). \tag{21}$$

Поскольку $d\hat{\sigma}(\tau)=\Theta(\tau)d\sigma(\tau)+\sigma(\tau)\dot{\Theta}(\tau)d\tau$, то

$$\Delta\varepsilon_{cr}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}C^*(t,\tau)\,d\sigma(\tau)+\int_{t_0}^{t}C_0(t,\tau)\sigma(\tau)\dot{\Theta}(\tau)\,d\tau. \tag{22}$$

Интегрируя первый интеграл по частям, получим

$$\Delta\varepsilon_{cr}(t,t_0)=-C^*(t,t_0)\sigma(t_0)-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau+\int_{t_0}^{t}C_0(t,\tau)\sigma(\tau)\dot{\Theta}(\tau)\,d\tau. \tag{23}$$

Учитывая, что

$$\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\int_{t_0}^{t}\Theta(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau+\int_{t_0}^{t}C_0(t,\tau)\sigma(\tau)\dot{\Theta}(\tau)\,d\tau$$

и уравнение (22), имеем

$$\Delta\varepsilon_{cr}(t,t_0)=-C^*(t,t_0)\sigma(t_0)-\int_{t_0}^{t}\Theta(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau,$$

а, добавляя начальную деформацию, получим

$$\varepsilon_{cr}(t,t_0)=-\int_{t_0}^{t}\Theta(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{24}$$

Сумма $\varepsilon(t,t_0)=\varepsilon_{el}(t)+\varepsilon_{cr}(t,t_0)$ представляет собой линейное реологическое уравнение состояния бетона наследственной теории старения. Таким образом,

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\Theta(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{25}$$

З а м е ч а н и е. Для меры ползучести $C^*(t,\tau)=\Theta(\tau)C_0(t,\tau)$ уравнение (9) представлено в виде

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\Theta(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau-\int_{t_0}^{t}C_0(t,\tau)\sigma(\tau)\dot{\Theta}(\tau)\,d\tau. \tag{26}$$

Различие уравнений (9) и (25) возникает из-за учета при выводе уравнения (25) не только величины приращения напряжения $\Delta\sigma(\tau_i)$, но и прочности $R(\tau_i)$ в момент его приложения. Этот учет реализуется при наложении частичных приращений деформации ползучести $\Delta\varepsilon_{cr}(t,\tau_i)$ согласно равенству (19), выражающему модификацию принципа суперпозиции Л. Больцмана [3].

З а м е ч а н и е. Для старого бетона величина $\dot{\Theta}(\tau)\approx 0$ и допустимо пренебречь последним слагаемым в уравнении (26).

Наряду с применением принципа наложения частичных приращений деформаций ползучести величину $\Delta\varepsilon_{cr}(t,t_0)$ можно определить путем интегрирования полного дифференциала [14]

$$d\left[C^*(t,\tau)\sigma(\tau)\right]=C^*(t,\tau)d\sigma(\tau)+\sigma(\tau)\left[\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau+\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial t}dt\right] \tag{27}$$

функции $\varepsilon_{cr}(t,\tau)=C^*(t,\tau)\sigma(\tau)$.

Поскольку $\int\limits_{t_0}^{t}C^*(t,\tau)d\sigma(\tau)=-C^*(t,t_0)\sigma(t_0)-\int\limits_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau$, с учетом (8) в результате получим

$$\Delta\varepsilon_{cr}(t,t_0)=-C^*(t,t_0)\sigma(t_0)-\int\limits_{t_0}^{t}\Theta(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau$$

и добавлением деформаций $C^*(t,t_0)\sigma(t_0)$ и $\frac{\sigma(t)}{E(t)}$, приходим к уравнению (25).

Замечание. Предлагаемый способ представляет другой подход для вывода уравнения состояния (25) и формально реализует принцип наложения частичных деформаций $\frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{E(t)}$ и $C_0(t,\tau_i)R(28)\Delta\eta(\tau_i)$ с учетом эволюции модуля упругости $E(t)$ и прочности $R(t)$.

Замечание. Представлением деформаций $\varepsilon(t,\tau)=\left[\frac{1}{E(t)}+C^*(t,\tau)\right]\sigma(\tau)$ в виде $\varepsilon(t,\tau)=\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]\sigma(\tau)$ вводится мера ползучести $C(t,\tau)$, не учитывающая эволюцию модуля упругости $E(\tau)$. Это обстоятельство влечет следующее соотношение между мерами ползучести $C^*(t,\tau)$ и $C(t,\tau)$:

$$C^*(t,\tau)=C(t,\tau)+\frac{1}{E(\tau)}-\frac{1}{E(t)}. \tag{28}$$

Согласно (28) уравнение (9) приобретает вид

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int\limits_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau-\int\limits_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau. \tag{29}$$

Неизбежно возникающее при подстановке соотношения (28) в уравнение (9) слагаемое $J_0=-\int\limits_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau$ в работе [12] ошибочно объявлено лишним, что послужило поводом для заявления «Принцип наложения как основополагающая ошибка в теории ползучести…» [13].

3. Нелинейные реологические уравнения состояния

Согласно двухкомпонентной ползучести по А.А. Гвоздеву [2] при одноосном напряженном состоянии

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau-\int_{0}^{\sigma_{\max}}f(\sigma)F\left[T(\sigma,t)\right]d\sigma, \tag{30}$$

где $f(\sigma)$ — нелинейная функция напряжений, $F\left[T(\sigma,t)\right]$ — функция от суммарной длительности $T(\sigma,t)$ напряжений к моменту t.

В [4] для нелинейной теории предлагается уравнение

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau-\int_{t_0}^{t}f\left[\sigma(\tau)\right]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{31}$$

Нелинейное реологическое уравнение состояния бетона впервые вывел В.М. Бондаренко [1]. Представленные в (10) функции $S_{el}\left[\eta(t)\right]$ и $S_{cr}\left[\eta(\tau)\right]$ в виде $S_{el}(\eta)=S_{el}^{0}(\eta)\sigma(t)$ и $S_{cr}(\eta)=S_{cr}^{0}(\eta)\sigma(\tau)$ преобразуют уравнение (10) в форму

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S_{el}^{0}(\eta)\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}S_{cr}^{0}(\eta)\sigma(\tau)\frac{\partial C^{*}(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{32}$$

В отличие от традиционного подхода бетон рассматривается как объединение твердых фракций (зерен), соединенных упругими связями — цементными волокнами со статистически распределенными прочностями. Концепция прочностной структуры позволяет обосновать принцип наложения деформаций в нелинейной постановке [6; 7].

Структурные повреждения при неубывающем нагружении $N(\tau)$ порождают перераспределение напряжений с разрушенных связей на способные к силовому сопротивлению целые связи, увеличивая их расчетное напряжение

$$\sigma(\tau)=\frac{N(\tau)}{A} \tag{33}$$

до так называемого структурного напряжения

$$\sigma_{str}(\tau)=\frac{N(\tau)}{A(\tau)}, \tag{34}$$

где $A(\tau)$ — площадь нормального сечения целых (рабочих) в момент времени τ связей и фракций.

Согласно (33) и (34)

$$\sigma_{str}(\tau)=\frac{A}{A(\tau)}\sigma(\tau)=S^{0}(\tau)\sigma(\tau). \tag{35}$$

Функция $S^{0}(\tau)=\frac{A}{A(\tau)}$ определяет меру увеличения расчетного напряжения $\sigma(\tau)$ до структурного $\sigma_{str}(\tau)$ в процессе постепенного разрушения части связей. Поскольку разрушение каждой связи в момент τ зависит от ее прочности в этот момент, следовательно, мера $S^{0}(\tau)$ является функцией от уровня напряжений $\eta(\tau)=\frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}$.

Например, по П.И. Васильеву [18]:

$$S^0(\tau) = 1 + V\left[\frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}\right]^m, \tag{36}$$

где V и m — эмпирические коэффициенты.

Перераспределение напряжений влечет нелинейную зависимость деформаций $\varepsilon(\tau)$ от напряжений $\sigma(\tau)$ и взаимозависимость частичных приращений деформации ползучести $\Delta\varepsilon_{cr}(t,\tau_i)$ [6], ибо эффект каждого догружения $\Delta\sigma(\tau_i)$ определяется площадью рабочих фракций $A(\tau_i)$, зависящей от всех предшествующих догружений $\Delta\sigma(\tau_j)$, $j \le i$.

Реологическое уравнение описывает напряженно-деформированное состояние целых на промежутке (t_0,t) связей и фракций, объединение которых образует рабочую часть V_t бетонного элемента V.

Приращение $\Delta\sigma_{str}(\tau_i)$ не разрушает связи и фракции V_t, и именно это влечет независимость приращений деформаций ползучести в момент τ_i:

$$\Delta\varepsilon_{cr}(t,\tau_i) = C_0(t,\tau_i)\Delta\sigma_{str}(\tau_i) \tag{37}$$

от остальных приращений в момент τ_j $(i \ne j)$, а потому

$$\Delta\varepsilon_{cr}(t,t_0) = \sum_{i=1}^{n-1} C_0(t,\tau_i)\Delta\sigma_{str}(\tau_i). \tag{38}$$

Соотношение (38) является аналогом принципа наложения Л. Больцмана в нелинейной постановке и приводит к уравнениям состояния для нестареющего бетона

$$\varepsilon(t,t_0) = \frac{\sigma_{str}(t)}{E} - \int_{t_0}^{t} \sigma_{str}(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{39}$$

или

$$\varepsilon(t,t_0) = \frac{S^0(t)\sigma(t)}{E} - \int_{t_0}^{t} S^0(\tau)\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{40}$$

По аналогии с линейной постановкой получим нелинейное уравнение состояния для стареющего бетона:

$$\varepsilon(t,t_0) = \frac{\sigma_{str}(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^{t} \Theta(\tau)\sigma_{str}(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{41}$$

Расчетная модель структуры бетона в статистической теории прочности представляется набором зерен, соединенных неравновесными связями, прочность которых является случайной величиной. Эта модель восходит к Вейбулу [19] и развита в [20; 21].

Гипотеза, что в процессе нагружения $N(\tau)$ связи деформируются линейно с одинаковым модулем упругости, приводит к линейной диаграмме $\sigma-\varepsilon$. Экспериментальные диаграммы, для построения которых используются напряжения $\sigma(\tau)$, не зависящие от площади рабочих связей $A(\tau)$, получаются нелинейными. По концепции прочностной структуры бетона зависимость $\sigma_{str}(t)$ и $\varepsilon(t)$ является линейной и отношение $\varepsilon(t)=\dfrac{\sigma_{str}(t)}{E(t)}$ на диаграмме изображается прямой, названной в [22; 23] фиктивной диаграммой.

Замечание. С позиции прочностной структуры бетона эта прямая представляет графическую интерпретацию деформирования целых на отрезке $[0,t]$ связей при неубывающем нагружении.

Замечание. При разгружении работают лишь целые связи и экспериментально построенный параллельный фиктивной (согласно [22; 23]) диаграмме отрезок подтверждает линейную зависимость $\sigma_{str}(t)$ от $\varepsilon(t)$.

4. Квазилинейные представления уравнений состояния

Согласно равенствам $\Theta(\tau)\sigma(\tau)\dfrac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}=-\sigma(\tau)\dfrac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial t}$ и $\sigma_{str}(\tau)=S^0(\tau)\sigma(\tau)$ уравнения (25) и (41) представлены в виде

$$\varepsilon(t,t_0)=\sigma(t)\left[\frac{1}{E(t)}+\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)}\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial t}d\tau\right], \tag{42}$$

$$\varepsilon(t,t_0)=S^0(t)\sigma(t)\left[\frac{1}{E(t)}+\int_{t_0}^{t}\frac{S^0(\tau)\sigma(\tau)}{S^0(t)\sigma(t)}\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial t}d\tau\right]. \tag{43}$$

Введем величины $\tilde{\delta}_l(t,t_0)$ и $\tilde{\delta}_{nl}(t,t_0)$, представляющие собой линейные и нелинейные податливости соответственно. Тогда на основании уравнений (42) и (43) получим временные упругопластические модули в линейной и нелинейной поставках:

$$\tilde{E}_l^{ep}(t,t_0)=\frac{1}{\tilde{\delta}_l(t,t_0)}=\left[\frac{1}{E(t)}+\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)}\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial t}d\tau\right]^{-1}, \tag{44}$$

$$\tilde{E}_{nl}^{ep}(t,t_0)=\frac{1}{\tilde{\delta}_{nl}(t,t_0)}=\left[\frac{1}{E(t)}+\int_{t_0}^{t}\frac{S^0(\tau)\sigma(\tau)}{S^0(t)\sigma(t)}\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial t}d\tau\right]^{-1}. \tag{45}$$

Уравнению (25), представленному в виде

$$\varepsilon(t,t_0)=\sigma(t)\left[\frac{1}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\Theta(\tau)\frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)}\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial t}d\tau\right]=\sigma(t)\delta_l(t,t_0), \tag{46}$$

соответствует временный линейный модуль

$$E_l^{ep}(t,t_0)=\frac{1}{\delta_l(t,t_0)}=\left[\frac{1}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\Theta(\tau)\frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)}\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]^{-1}, \tag{47}$$

а в нелинейной постановке — временный модуль

$$E_{nl}^{ep}(t,t_0)=\frac{1}{\delta_{nl}(t,t_0)}=\left[\frac{1}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\Theta(\tau)\frac{S^0(\tau)\sigma(\tau)}{S^0(t)\sigma(t)}\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]^{-1}. \qquad (48)$$

Согласно (43) и (45) при суперпозиции по приращениям уровня напряжений

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S^0(t)\sigma(t)}{\tilde{E}_{nl}^{ep}(t,t_0)}, \qquad (49)$$

а при суперпозиции по приращениям напряжений

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S^0(t)\sigma(t)}{E_{nl}^{ep}(t,t_0)}. \qquad (50)$$

Представления деформации $\varepsilon(t,t_0)$ в нелинейной постановке

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\tilde{S}^0(t)\sigma(t)}{\tilde{E}_{l}^{ep}(t,t_0)}, \qquad (51)$$

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\hat{S}^0(t)\sigma(t)}{E_{l}^{ep}(t,t_0)} \qquad (52)$$

с соответствующими функциями квазилинейности $\tilde{S}^0(t)$ и $\hat{S}^0(t)$ называются квазилинейными.

При постоянном на отрезке $[t_0,t]$ напряжении $\sigma(\tau)$

$$\tilde{S}^0(t)=S^0(t),\quad \hat{S}^0(t)=S^0(t), \qquad (53)$$

а при неубывающем $\sigma(\tau)$ эти функции определяются из равенств

$$\tilde{S}^0(t)\tilde{\delta}_l(t,t_0)=S^0(t)\tilde{\delta}_{nl}(t,t_0),\quad \hat{S}^0(t)\delta_l(t,t_0)=S^0(t)\delta_{nl}(t,t_0). \qquad (54)$$

Согласно (54) и равенствам (42)–(45)

$$\tilde{S}^0(t)=S^0(t)\frac{\tilde{E}_{l}^{ep}(t,t_0)}{\tilde{E}_{nl}^{ep}(t,t_0)},\quad \hat{S}^0(t)=S^0(t)\frac{E_{l}^{ep}(t,t_0)}{E_{nl}^{ep}(t,t_0)}. \qquad (55)$$

При неубывающем напряжении $\sigma(\tau)$ имеем $S^0(\tau)<S^0(t)$, а потому $\tilde{\delta}_{nl}(t,t_0)<\tilde{\delta}_l(t,t_0)$ и $\tilde{E}_{nl}^{ep}(t,t_0)>\tilde{E}_{l}^{ep}(t,t_0)$. Аналогично получим $E_{nl}^{ep}(t,t_0)>E_{l}^{ep}(t,t_0)$ и с учетом (55)

$$\tilde{S}^0(t)<S^0(t),\quad \hat{S}^0(t)<S^0(t). \qquad (56)$$

Согласно $\hat{S}^0(t)<S^0(t)$ представление $\varepsilon(t,t_0)$ в виде

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S^0(t)\sigma(t)}{E_{l}^{ep}(t,t_0)}, \qquad (57)$$

предъявляемое как квазилинейное, получается из квазилинейного

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\hat{S}^0(t)\sigma(t)}{E_l^{ep}(t,t_0)} \qquad (58)$$

заменой $\hat{S}^0(t)$ на $S^0(t)$, что в силу (55) эквивалентно замене $E_{nl}^{ep}(t,t_0)$ на $E_l^{ep}(t,t_0)$.

Равенством (57) согласно (55) дается оценка величины $\varepsilon(t,t_0)$ сверху.

Замечание. При $S^0(\tau)=S^0\left[\eta(\tau)\right]=1+V\left[\frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}\right]^m$ равенство (57) при напряжениях $\sigma(\tau)$, близких к $R(\tau)$, является аппроксимацией квазилинейного представления.

Идея квазилинейного представления деформации $\varepsilon(t,t_0)$ для согласования уравнений с экспериментальными данными принадлежит Ю.Н. Работнову [24], предложившему для нестареющего бетона $\left(E(\tau)=E,\ \Theta(\tau)=1\right)$ уравнение

$$S\left[\varepsilon(t,t_0)\right]=\frac{\sigma(t)}{E}-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau . \qquad (59)$$

Замечание. В [24] принимается одинаковость функций нелинейности напряжений $S_{el}^{o}(\tau)$ и $S_{cr}^{o}(\tau)$. Это коррелирует с прочностной структурой бетона, согласно которой функции напряжений $S_{el}(\tau)$ и $S_{cr}(\tau)$ представляют структурное напряжение $\sigma_{str}(\tau)=S^0(\tau)\sigma(\tau)$. Из $S_{el}(\tau)=\sigma_{str}(\tau)$ и $S_{cr}(\tau)=\sigma_{str}(\tau)$ следует $S_{el}(\tau)=S_{cr}(\tau)=S^0(\tau)\sigma(\tau)$, а потому $S_{el}(\tau)=S_{cr}(\tau)=S^0(\tau)$.

В [1] функции $S_{el}(\tau)$ и $S_{cr}(\tau)$ принимаются в форме [18]:

$$S_{el}^{o}\left[\eta(\tau)\right]=1+V_e\left[\eta(\tau)\right]^{m_e}, \qquad (60)$$

$$S_{cr}^{o}\left[\eta(\tau)\right]=1+V_c\left[\eta(\tau)\right]^{m_c}, \qquad (61)$$

где V_e, V_c, m_e, m_c — эмпирические коэффициенты.

Принятие в равенстве $S_{cr}(\tau)=S^0(\tau)\sigma(\tau)$ функции $S^0(\tau)$ в аналогичной форме (по П.И. Васильеву [18]) естественно, ибо $S^0(\tau)=\frac{A}{A(\tau)}$ и соответствующая при напряжениях $\sigma(\tau)$ целым фракциям площадь $A(\tau)$ определяется условием $R_i(\tau)\geq\sigma(\tau)$, что эквивалентно $\frac{R_i(\tau)}{R(\tau)}\geq\frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}$.

При постоянном на отрезке времени $[t_0,t]$ напряжении $\sigma(\tau)$, согласно [1]

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S_{el}^0(\eta)\sigma(t)}{E(t)}+C^*(t,t_0)S_{cr}^0(\eta)\sigma(t). \qquad (62)$$

Полагая, что постоянное на (t_0,t) напряжение $\sigma_{str}(\tau)=S^0(\eta)\sigma(\tau)$ порождает такую же деформацию, получим

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{S^0(\eta)\sigma(t)}{E(t)}+C^*(t,t_0)S^0(\eta)\sigma(t). \qquad (63)$$

Согласно уравнениям (62) и (63)

$$S^0(\eta)\left[\frac{1}{E(t)}+C^*(t,t_0)\right]=\frac{S_{el}^0(\eta)}{E(t)}+C^*(t,t_0)S_{cr}^0(\eta)$$

и

$$S^0(\eta)=\frac{S_{el}^0(\eta)+S_{cr}^0(\eta)E(t)C^*(t,t_0)}{1+E(t)C^*(t,t_0)}. \tag{64}$$

Из равенств (60), (61), (36) и (64) при $\eta=1$ получим

$$S^0(1)=1+V=\frac{1+V_e+(1+V_c)E(t)C^*(t,t_0)}{1+E(t)C^*(t,t_0)}, \tag{65}$$

$$V=S^0(1)-1. \tag{66}$$

При некотором $0<\eta_0<1$ имеем $V\eta_0^m=S^0(\eta_0)-1$, $\eta_0^m=\dfrac{S^0(\eta_0)-1}{V}$, $m\ln\eta_0=\ln\dfrac{S^0(\eta_0)-1}{S^0(1)-1}$ и

$$m=\frac{1}{\ln\eta_0}\ln\frac{S^0(\eta_0)-1}{S^0(1)-1}. \tag{67}$$

Замечание. Определенная по заданным функциям $S_{el}^o(\eta)$ и $S_{cr}^o(\eta)$ функция $S^0(\eta)$ не обеспечивает квазилинейное представление $\varepsilon(t,t_0)$ при $\sigma(\tau)\neq\text{const}$. Кроме того, не исключено, что наблюдаемое различие V_e и V_c, m_e и m_c в уравнениях (60) и (61) принадлежит диапазону погрешностей измерений.

Согласно (59) имеет место равенство

$$S\left[\varepsilon(t,t_0)\right]=\varepsilon_l(t,t_0). \tag{68}$$

При $S\left[\varepsilon(t,t_0)\right]=\dfrac{\varepsilon_l(t,t_0)}{S_{el}^0(t)}$, где $S_{el}^0(t)$ (с учетом $E(t)=E$ и $\Theta(\tau)=1$) определяется вторым из равенств (55), получим квазилинейное представление

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{\hat{S}^0(t)\sigma(t)}{E_l^{ep}(t,t_0)}. \tag{69}$$

Для реологического уравнения состояния бетона [1]

$$e^{-\varepsilon(t,t_0)/\varepsilon_R(t)}\varepsilon(t,t_0)=\sigma(t)\left[\frac{1}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)}\frac{\partial C^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]. \tag{70}$$

$\varepsilon(t,t_0)=e^{\varepsilon(t,t_0)/\varepsilon_R(t)}\varepsilon_l(t,t_0)$ и квазилинейное представление

$$\varepsilon(t,t_0)=\frac{e^{\varepsilon(t,t_0)/\varepsilon_R(t)}\sigma(t)}{E_l^{ep}(t,t_0)} \quad (71)$$

при кратковременном нагружении, полагая $\varepsilon(t,t_0)=\varepsilon$, $\sigma(t)=\sigma$, $R(t)=R$, $E_l^{ep}(t,t_0)=E$, согласно (71) получим функцию

$$\sigma=E\varepsilon e^{-\varepsilon/\varepsilon_R}, \quad (72)$$

описывающую диаграмму $\sigma-\varepsilon$ (включая ниспадающую ветвь) в форме В.М. Бондаренко [1].

При $\sigma=R$ имеем $R=E\varepsilon_R e^{-1}$ и $E=eR/\varepsilon_R$, а потому

$$\sigma=\frac{eR}{\varepsilon_R}\varepsilon e^{-\varepsilon/\varepsilon_R}, \quad \frac{\sigma}{R}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R}e^{1-\varepsilon/\varepsilon_R}. \quad (73)$$

Величины η и ξ являются уровнями напряжений и деформаций, а равенство

$$\eta=\xi e^{1-\xi} \quad (74)$$

представляет уравнение состояния бетона, описываемое в параметрах η и ξ.

При $\hat{S}^0(t)=e^{m^{-1}\left[\varepsilon(t,t_0)/\varepsilon_R(t)\right]^m}$ диаграмма $\sigma-\varepsilon$ получается в виде $\sigma=E\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_R}e^{m^{-1}(\varepsilon/\varepsilon_R)^m}$ [25], а параметрическое уравнение

$$\eta=\xi e^{m^{-1}-\xi}. \quad (75)$$

Если диаграмма $\sigma-\varepsilon$ задается согласно $\sigma=R\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\varepsilon/\varepsilon_R)^i$ [26], то соответствующее параметрическое уравнение имеет вид

$$\eta=\sum_{i=1}^{n}a_i\xi^i. \quad (76)$$

Зависимость $\sigma-\varepsilon$ на плоскости в координатах (ε,σ) изображается графиком функции $\sigma=f(\varepsilon)$. Длительное нагружение описывается функцией $\sigma=\varphi\left[t,\varepsilon(t)\right]$, которой отвечает поверхность в координатах (t,ε,σ). Ее пересечением с плоскостью $\tau=t$ (параллельной плоскости $\varepsilon-\sigma$) является кривая Γ_t, по которой, с учетом того, что $\xi=\varepsilon(t,t_0)/\varepsilon_R(t)$ и $\eta=\sigma(t)/R(t)$, строится кривая $\tilde{\Gamma}_t$ на плоскости $\varepsilon-\sigma$. Эта кривая описывает диаграмму $\sigma-\varepsilon$, а соответствующая функция $\eta=F(\xi)$ представляет собой параметрическое уравнение состояния.

Таким образом, параметры η и ξ для неравновесного процесса деформирования являются аналогами параметров σ и ε для равновесных механических систем.

Замечание. Структура параметрического уравнения, определяемая функцией $\hat{S}^0(t)$, не зависит от режима нагружения. Это позволяет по найденным при кратковременном нагружении значениям η и ξ определить параметры $\sigma(t)=\eta R(t)$ и $\varepsilon(t,t_0)=\xi\varepsilon_R(t)$ длительного нагружения.

Параметрическое уравнение (74) при условии идентичности $S_{el}^0(t)$ и $S_{cr}^0(t)$ вывел В.Г. Назаренко, рассматривая состояние бетона как состояние неравновесной термодинамической системы

[27]. Параметры η и ξ, характеризующие прочностные и деформационные свойства бетона, связываются с помощью его удельной энергии целостности $W(t)$ [28]. Величина $W(t)$ является максимальным энергетическим ресурсом сопротивления деформированию единицы объема бетона и представляется площадью, ограниченной полной диаграммой $\sigma-\varepsilon$ фигуры.

Адаптация теории ползучести к методу конечных элементов при формулировке уравнений ползучести в приращениях выполнена в монографии [29].

5. Заключение

В результате проведенного исследования авторами сделан ряд выводов.

1. Наложением частичных приращений деформаций, порожденных последовательными приращениями уровня напряжений, выведены уравнения механического состояния бетона. Учет прочности бетона в моменты приложения нагружения уточняет его известные уравнения состояния в линейной и нелинейной постановке.

2. Общий для мгновенных и запаздывающих деформаций множитель нелинейности напряжений превышает множитель квазилинейности, умножением на который линейной части деформации получается ее квазилинейное представление. Делением нелинейной деформации на эти множители выделяются соответственно обратимая и линейная ее части.

3. Обратимые деформации реализуются целыми до момента начала разгружения связями за счет накопленного ими приращения потенциальной энергии при нагружении. Отсутствие в процессе разгружения перераспределения напряжений между этими связями влечет линейную зависимость напряжений от деформаций. Это обосновывает наблюдаемый в экспериментах факт, известный как признак Ясинского — Энгессера.

4. Отмеченная выше некорректность уравнений механического состояния бетона порождена не принципом наложения деформаций, а его реализацией по приращениям напряжений как для идеального бетона. Наложение деформаций по приращениям уровня напряжений приводит к корректным уравнениям состояния, что означает необоснованность заявлений об ошибочности принципа наложения.

5. Правомерность принципа наложения в теории ползучести бетона создает возможность применения этой теории в расчетах бетонных и железобетонных конструкций методом конечных элементов.

Список литературы

1. *Бондаренко В.М., Бондаренко С.В.* Инженерные методы нелинейной теории железобетона. Москва : Стройиздат, 1982. 287 с.

2. *Галустов К.З.* Нелинейная теория ползучести бетона и расчет железобетонных конструкций. Москва : Физматлит, 2006. 248 с. ISBN 5-94052-116-9 EDN: QNMEHH

3. *Boltzmann L.* Zur theorie der elastischen nachwirkung // Sitzungsberichte Kaiserliche Akademie wissenhaft Wien Mathematische-Naturwissenhaft. 1874. Vol. 70. No. 2. P. 275–305. https://doi.org/10.1002/andp.18782411107

4. *Арутюнян Н.Х.* Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона // Механика в СССР за 50 лет. 1972. Т. 3. С. 155–202.

5. *Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б.* Теория ползучести неоднородных тел. Москва : Наука, 1983. 336 с.

6. *Ларионов Е.А., Бондаренко В.М.* Принцип наложения деформаций при структурных повреждениях элементов конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 2. С. 16–22. EDN: NUCYYV

7. *Ларионов Е.А., Ларионов А.Е.* К теории нелинейной ползучести // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 58–65. EDN: TQATUF

8. *Ларионов Е.А., Рынковская М.И., Гринько Е.А.* Реологические уравнения состояния бетона и релаксация напряжений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022 Т. 18 № 1. С. 22–34. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-22-34 EDN: WXGEUF

9. *Ларионов Е.А., Маркович А.С., Алешина О.О.* Принцип наложения деформаций в теории железобетона // Строительная механика и расчет сооружений. 2024. № 3 (314). С. 2–12. http://doi.org/10.37538/0039-2383.2024.3.2.12 EDN: KITWID

10. *Бондаренко В.М.* Элементы диссипативной теории силового сопротивления железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 2. С. 47–57. EDN: RZRQOF

11. *Бондаренко В.М., Римшин В.И.* Квазилинейные уравнения силового сопротивления и диаграмма σ — ε бетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 40–44. EDN: SYZJHL

12. *Санжаровский Р.С., Манченко М.М.* Ошибки в теории ползучести железобетона и современные нормы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 3. С. 25–32. EDN: VUCZKL

13. *Санжаровский Р.С., Тер-Эммануильян Т.Н., Манченко М.М.* Принцип наложения как основополагающая ошибка теории ползучести и стандартов по железобетону // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 92–104. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104 EDN: XQIAXR

14. *Larionov E.A., Nazarenko V.G., Rynkovskaya M.I., Grinko E.A.* Relaxation of stress in elements of reinforced concrete structures // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2022. Vol. 18. No. 6. P. 534–543. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-534-543

15. *Ларионов Е.А., Маркович А.С., Гринько Е.А.* Релаксация напряжений в железобетонных элементах конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2024. № 1. С. 32–38. http://doi.org/10.37538/0039-2383.2024.1.32.38 EDN: KDMPWU

16. *Александровский С.В., Соломонов С.В.* Зависимость деформаций ползучести бетона от начального уровня напряжений // Межотраслевые вопросы строительства. 1972. № 6. С. 6–12.

17. *Назаренко В.Г., Звездов А.И., Ларионов Е.А., Квасников А.А.* Некоторые аспекты теории ползучести бетона // Бетон и железобетон. 2021. № 603 (1). С. 40–43. EDN: RNJWLR

18. *Васильев П.И.* К вопросу о выборе феноменологической теории ползучести бетона // Ползучесть строительных материалов и конструкций: Москва : Стройиздат. 1964. С. 106–114.

19. *Weibull W.A.* Statistical representation of fatigue failures in solids // Transactions of the Royal Institute of Technology. Göteborg: Elanders boktr., 1949. 49 p.

20. *Болотин В.В.* Некоторые вопросы теории хрупкого разрушения. Расчеты на прочность. Москва : Машиностроение. 1962. Вып. 8. С. 36–52.

21. *Харлаб В.Д.* Обобщение вейбуловской статистической теории хрупкого разрушения // Механика стержневых систем и сплошных сред. 1987. № 11. С. 150–152.

22. *Санжаровский Р.С., Манченко М.М.* Ползучесть бетона и его мгновенная нелинейность деформирования в расчетах конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 2. С. 33–40. EDN: TNEVQL

23. *Беглов А.Д., Санжаровский Р.С., Тер-Эммануильян Т.Н.* Современная теория ползучести железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 1. С. 3–13. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-1-3-13 EDN: WVKFJM

24. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. Москва : Наука, 1966. 752 с.

25. *Маилян Д.Р.* Влияние армирования и эксцентриситета сжимающего усилия на деформативность бетона и характер диаграммы сжатия // Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона. Ростов-на-Дону, 1979. С.70–82.

26. *Бамбура А.Н.* Диаграмма напряжение — деформация для бетона при центральном сжатии // Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона : сб. науч. тр. Ростов-на-Дону : РИСИ, 1980. С. 19–22.

27. *Назаренко В.Г., Боровских А.В.* Диаграмма деформирования бетонов с учетом ниспадающей ветви // Бетон и железобетон. 1999. № 2. С. 18–22. URL: https://science.totalarch.com/magazine/concrete/concrete_1999_02.pdf (дата обращения: 12.07.2025).

28. *Ларионов Е.А.* К вопросу о длительной прочности бетона // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2005. № 8 (560). С. 28–33. EDN: PFAILF

29. *Агапов В.П., Маркович А.С.* Нелинейные модели бетонных и железобетонных конструкций. Теория и реализация в ВК ПРИНС. Москва : РУДН, 2023. 263 с. ISBN 978-5-209-11784-1

References

1. Bondarenko V.M., Bondarenko S.V. *Engineering methods of nonlinear theory of reinforced concrete*. Moscow: Strojizdat Publ.; 1982. (In Russ.)

2. Galustov K.Z. *Nonlinear theory of concrete creep and calculation of reinforced concrete structures*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.) ISBN 5-94052-116-9 EDN QNMEHH

3. Boltzmann L. On the theory of elastic aftereffects. *Proceedings of the Imperial Academy of Sciences Vienna, mathematical and natural sciences*. 1874;70(2):275–305. (In German)

4. Arutyunyan N.Kh. Creep of aging materials. Creep of concrete. *Mechanics in the USSR for 50 years*. 1972;3:155–202. (In Russ.)

5. Arutyunyan N.Kh., Kolmanovsky V.B. *Theory of creep of inhomogeneous bodies*. Moscow: Nauka Publ.; 1983. (In Russ.)

6. Larionov E.A., Bondarenko V.M. Strains superposition principle when construction elements have structural damages. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2011;(2):16–22. (In Russ.) EDN NUCYYV

7. Larionov E.A., Larionov A.E. On the theory of nonlinear creep. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2015;(2):58–65. (In Russ.) EDN TQATUF

8. Larionov E.A., Rynkovskaya M.I., Grinko E.A. Rheological equations of concrete state and relaxation of stress. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):22–34. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-22-34

9. Larionov E.A., Markovich A.S., Aleshina O.O. The principle of superposition of deformations in the theory of reinforced concrete. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2024;3(314):2–12. (In Russ.) http://doi.org/10.37538/0039-2383.2024.3.2.12 EDN KITWID

10. Bondarenko V.M. Elements of the dissipative theory of force resistance of reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(2):47–57. (In Russ.) EDN RZRQOF

11. Bondarenko V.M., Rimshin V.I. Quasilinear equations of force resistance and the σ — ε diagram of concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(6):40–44. (In Russ.) EDN SYZJHL

12. Sanzarovsky R.S., Manchenko M.M. Errors in the concrete theory and creepmodern regulations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(3):25–32. (In Russ.) EDN VUCZKL

13. Sanzharovsky R.S., Ter-Emmanuilyan T.N., Manchenko M.M. Superposition principle as the fundamental error of the creep theory and standards of the reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(2):92–104. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104

14. Larionov E.A., Nazarenko V.G., Rynkovskaya M.I., Grinko E.A. Relaxation of stress in elements of reinforced concrete structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2022;18(6):534–543. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-534-543

15. Larionov E.A., Markovich A.S., Grinko E.A. Relaxation of stress in elements of reinforced concrete structures. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2024;(1):32–38. (In Russ.) http://doi.org/10.37538/0039-2383.2024.1.32.38 EDN KDMPWU

16. Aleksandrovsky S.V., Solomonov S.V. Dependence of concrete creep deformations on the initial stress level. *In the collection of inter-industry issues in construction*. 1972;(6):6–12. (In Russ.)

17. Nazarenko V.G., Zvezdov A.I., Larionov E.A., Kvasnikov A.A. Some aspects of the concrete creep theory. *Concrete and Reinforced Concrete*. 2021;603(1):40–43. (In Russ.)

18. Vasiliev P.I. *On the issue of choosing a phenomenological theory of concrete creep*. In the book Creep of building materials and structures. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1964. p. 106–114.

19. Weibull W.A. *Statistical representation of fatigue failures in solids.* Transactions of the Royal Institute of Technology. Gothenburg: Elanders Bookstore; 1949.

20. Bolotin V.V. *Some questions of the theory of brittle fracture*. Strength calculations, Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1962. Vol. 8. p. 36–52. (In Russ.)

21. Kharlab V.D. Generalization of Weibull statistical theory of brittle fracture. *Mechanics of Rod Systems and Continuous Media*. 1987;(11):150–152.

22. Sanzarovsky R.S., Manchenko M.M. The creep of concrete and its instantaneous nonlinearity of deformation in the structural calculations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2015;(2):33–40.

23. Beglov A.D., Sanjarovskiy R.S., Ter-Emmanuilyan T.N. Modern theory of creep of reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(1):3–13. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-1-3-13

24. Rabotnov Yu.N. *Creep of structural elements*. Moscow: Nauka Publ.; 1966. (In Russ.)

25. Mailyan D.R. *Effect of reinforcement and eccentricity of compressive force on the deformability of concrete and the nature of the compression diagram*. In the book. Issues of strength, deformability and crack resistance of reinforced concrete, Rostov-on-Don, 1979:70–82. (In Russ.)

26. Bambura A.N. Stress-strain diagram for concrete under central compression. *Issues of strength, deformability and crack resistance of reinforced concrete: Collection of scientific papers.* Rostov-on-Don: RISI Publ.; 1980. P. 19–22. (In Russ.)

27. Nazarenko V.G., Borovskikh A.V. Concrete deformation diagram taking into account the falling branch. *Concrete and Reinforced Concrete*. 1999;(2):18–22. (In Russ.) Available from: https://science.totalarch.com/magazine/concrete/concrete_1999_02.pdf (accessed: 12.07.2025).

28. Larionov E.A. On the issue of long-term strength of concrete. *News of Higher Educational Institutions. Construction.* 2005;8(560):28–33. (In Russ.) EDN PFAILF

29. Agapov V.P., Markovich A.S. *Nonlinear models of concrete and reinforced concrete structures. Theory and implementation in PRINS software:* monograph. Moscow: RUDN, 2023. (In Russ.) ISBN 978-5-209-11784-1