

## Обзорно-аналитическая информация

### АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ТЕОРЕМ О ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ И ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А. ХЕЙДАРИ, аспирант,  
В.В. ГАЛИШНИКОВА, канд. техн. наук, доцент  
Российский университет дружбы народов,  
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

*В данной работе приведен обзор существующих теорем, позволяющих определить предельные нагрузки и нагрузки приспособляемости стальных конструкций при малых перемещениях путем решения задачи оптимизации.*

*Показано, что все рассмотренные теоремы используют принцип линейной суперпозиции для формирования сочетаний нагрузок. Если поведение конструкции становится геометрически нелинейным вследствие больших перемещений, то суперпозиция нагрузок становится невозможной. Сделан вывод о невозможности использования теорем о приспособляемости и, как следствие, основанных на них методов оптимизации, при расчете конструкций со значительной геометрической нелинейностью.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: стальные конструкции, пластичность, приспособляемость

#### **1. Предельная нагрузка и приспособляемость стальных конструкций**

Геометрическая и физическая нелинейность оказывают большое влияние на деформации и устойчивость стальных конструкций. Если конструкция испытывает большие перемещения, то условия равновесия и зависимости напряжения-деформации могут существенно отличаться от соответствующих выражений при малых перемещениях. Если материал в какой-то части конструкции достигает текучести, то распределение жесткостей в конструкции изменяется, и образуется механизм.

Поведение стальных конструкций при монотонно возрастающей нагрузке значительно отличается от их поведения при циклических нагрузках. Если нагрузка на конструкцию монотонно возрастает, то ее части поэтапно достигают текучести. Пластические зоны распространяются с ростом нагрузки до тех пор, пока не достигается предельное значение нагрузки, при котором конструкция превращается в механизм, и дальнейший рост деформаций происходит без дальнейшего увеличения нагрузки. Считается, что конструкция достигла своей предельной нагрузки. Если нагрузка на конструкцию изменяется циклически, и все части конструкции остаются упругими, то ее поведение будет одинаковым во всех циклах нагружения, а прочность будет зависеть от усталостных характеристик стали. Если же какие-то части конструкции достигают текучести в первых циклах нагружения, то возможны два случая ее дальнейшей работы [1]. В некоторых конструкциях после первых нескольких циклов нагружения поведение становится упругим, и остается упругим в последующих циклах нагружения. Этот тип поведения называется приспособляемостью. В других конструкциях, пластические деформации нарастают с каждым циклом, до тех пор, пока конструкция не достигает предела прочности или становится непригодной к эксплуатации из-за чрезмерных деформаций. Такой тип поведения называется прогрессирующей деформацией.

Фундаментальные теоремы приспособляемости конструкций были сформулированы Меланом [9] в 1936 году и Койтером [2,7] в 1956 году. Мелан сформулировал статическую теорему приспособляемости, в которой утверждается, что приспособляемость наступит, если существует такое не зависящее от времени самоуравновешенное поле остаточных напряжений, что при любых изменениях нагрузки в заданных пределах сумма этого поля с полем напряжений в идеально упругом теле не вызывает текучести ни в какой точке конструкции ни в какой момент времени.

Койтер сформулировал кинематическую теорему приспособляемости, в которой утверждается, что приспособляемость конструкции отсутствует, если существует кинематически допустимое поле деформаций  $\epsilon_p$ , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\int_B \sum_k (\sigma_{ek} - \sigma_{yk})^T \dot{\epsilon}_{pk} dv > 0, (1) \dot{\epsilon}_p = \sum_k \dot{\epsilon}_{pk} . \quad (2)$$

Здесь  $\sigma_{ek}$  - напряжение от нагрузки  $\mathbf{p}_k$ ,  $\sigma_{yk}$  - напряжение текучести, связанное через ассоциированный закон течения с кинематически допустимой скоростью деформации  $\dot{\epsilon}_{pk}$  для нагрузки  $\mathbf{p}_k$ .

Теоремы Мелана и Койтера сформулированы в виде неравенств для статически допустимых полей напряжений, которые в общем случае не удовлетворяют кинематическим условиям (Мелан) или для кинематически допустимых полей скоростей деформаций, которые не удовлетворяют статическим условиям (Койтер). Теоремы обычно не приводят к точному решению, удовлетворяющему статическим и кинематическим условиям. Вместо этого, для нахождения наилучшего приближения к точному решению используются методы оптимизации. Если возможно нахождение глобального оптимума, то полученное решение будет точным.

Возникает вопрос, почему подходы Мелана и Койтера в расчетах на предельную нагрузку и приспособляемость предпочитают методам точного решения, которые удовлетворяют как статическим, так и кинематическим условиям и не требуют решения задач оптимизации? Причиной этому в прошлом веке были чрезмерная вычислительная сложность точных методов, заключающаяся в необходимости получения пошаговых точных решений, учитывающих возникновение текучести в различных участках конструкции при различных уровнях нагрузки. Удивительно то, что это отношение к прямым точным методам решения сохраняется и в нашем веке. Примером может служить работа [11], посвященная итерационному решению задач на приспособляемость. Учитывая мощность современных компьютеров и программного обеспечения, вопрос о правомерности использования непрямых методов, основанных на решении задач оптимизации, приобрел особую актуальность, даже для задач с малыми перемещениями.

Аналитический обзор, приведенный в данной статье, выполнен с целью разработки метода, позволяющего учитывать большие перемещения в расчетах на приспособляемость. Авторы поставили своей задачей оценить возможность применения существующего множества теорем приспособляемости и большого числа методов расчета, основанных на этих теоремах, к расчету на приспособляемость конструкций, подверженных большим перемещениям. С этой целью в данной работе приведены все существующие на настоящее время теоремы приспособляемости и представлены их доказательства.

На основе результатов выполненного анализа авторами разработан инкрементальный метод прямого упругопластического расчета стальных стержневых конструкций, учитывающий статические и кинематические условия, а также физические законы. Метод разработан для применения в компьютерных приложениях и может быть эффективно использован в инженерной практике. Результаты работы представлены в сопутствующей статье.

## 2. Свойства сталей

### 2.1. Одноосное напряженное состояние

Идеализированная диаграмма напряжения-деформации для цикла одноосного нагружения - разгрузки образца показана на рис. 1(а). Упругие нагружение и разгрузка происходят с модулем упругости  $E$ , а пластическая деформация происходит при постоянном значении напряжения текучести  $\sigma_y$  при растяжении и  $-\sigma_y$  при сжатии. Знакопеременная пластичность, приведенная на рис. 1(б), происходит под действием циклической нагрузки. Пластическая деформация возрастает на величину  $\epsilon_p$  при растяжении и уменьшается на величину  $\epsilon_p$  при сжатии. После некоторого числа циклов нагружения образец может разрушиться от малоциклового усталости.

Прогрессирующая деформация, показанная на рис. 1(в), происходит от того, что нарастание пластической деформации под действием растягивающей нагрузки превосходит обратную деформацию под действием сжимающей нагрузки. Происходит недопустимое накопление пластических деформаций, препятствующее эксплуатации конструкции.

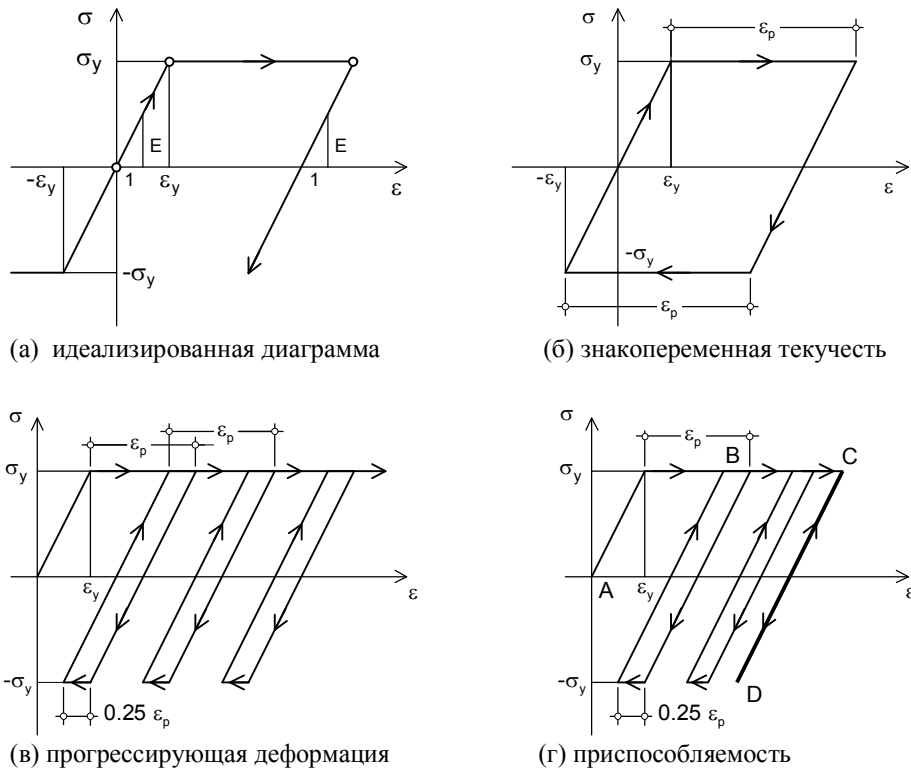


Рис. 1. Диаграммы одноосного напряженно-деформированного состояния мягкой стали

На рис.1(г) показана диаграмма приспособляемости образца. Начало диаграммы от точки А до точки В соответствует поведению образца при прогрессирующей деформации. В последующих циклах нагружения образец деформируется упруго. На диаграмме упругая работа отображается отрезком CD.

### 2.2. Многоосные напряженные состояния

Текучесть и пластическое течение стального образца, подверженного многоосным напряженным состояниям, описывается при помощи поверхностей текучести и законов течения. Поверхности текучести формулируются через инварианты напряжений  $I_k$ , которые являются коэффициентами характеристического полинома тензора напряжений  $\mathbf{S}$  с координатами  $\sigma_{im}$  и главными напряжениями  $p_i$ :

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = p_1 + p_2 + p_3, \quad (3)$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1, \quad (4)$$

$$I_3 = \det \mathbf{S} = p_1 p_2 p_3. \quad (5)$$

Эксперименты показывают, что текучесть стали не зависит от гидростатического давления  $p$ :

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3). \quad (6)$$

Таким образом, поверхность текучести стали описывается инвариантами напряжения  $J_k$  тензора - девиатора напряжений  $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - p\mathbf{I}$ :

$$J_1 = 0, \quad (7)$$

$$J_2 = 0.1667 \left( (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \quad (8)$$

$$= 0.1667 \left( (p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2 \right)$$

$$J_3 = \det \bar{\mathbf{S}}. \quad (9)$$

Для различных материалов в литературе описано большое количество поверхностей текучести. Для стали чаще всего используется критерий текучести Мизеса, основанный на инварианте  $J_2$ . Этот критерий утверждает, что текучесть стали наступает, когда функция текучести  $f(\boldsymbol{\sigma})$  становится равной нулю:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) - 2\sigma_y^2. \quad (10)$$

Область  $f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$  называется зоной текучести. Ее граница  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  называется поверхностью текучести. Рассмотрим соседние напряженные состояния  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}$  на поверхности текучести и обозначим градиент функции текучести  $\mathbf{g}$ . Разложение функции текучести в ряд Тейлора с центром в  $\boldsymbol{\sigma}$  показывает, что градиент  $\mathbf{g}$  ортогонален инкременту напряжения  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \wedge f(\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}) = 0 \wedge f(\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{g}^T \Delta\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \mathbf{g}^T \Delta\boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (11)$$

Инкремент напряжения  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  дает полный инкремент деформации  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , который равен сумме упругого инкремента деформации  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e$  и пластического инкремента деформации  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p$ . Упругое соотношение напряжение-деформация  $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e$  определяет значение  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e$ , тогда как  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p$  определяется из закона течения  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mu \mathbf{h}$ , где  $\mu$  - параметр течения. Функция течения  $\mathbf{h}$  для стали обычно принимается равной градиенту  $\mathbf{g}$  функции текучести (ассоциированная пластичность). Таким образом, полный инкремент равен

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{E}^{-1} \Delta\boldsymbol{\sigma} + \mu \mathbf{g}. \quad (12)$$

### 2.3. Циклы напряжений и пластическая диссипация

Пусть начальное напряженное состояние стального образца характеризуется вектором  $\boldsymbol{\sigma}_0$ . При увеличении нагрузки достигается напряженное состояние  $\boldsymbol{\sigma}_y$ , при котором наступает текучесть образца.

Полный инкремент деформаций  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p$  вызывает изменение напряженного состояния  $\boldsymbol{\sigma}_y + \Delta\boldsymbol{\sigma}$ . Затем нагрузка снижается до достижения начального напряженного состояния  $\boldsymbol{\sigma}_0$ . Полная работа  $W$  на единицу объема, выполненная во время цикла нагружения, равна

$$W = \oint (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}_0) d\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (13)$$

Упругая работа во время цикла напряжение равна нулю, так как начальное и конечное напряженные состояния равны. Таким образом, полная работа в цикле нагружения равна

$$W = (\boldsymbol{\sigma}_y - \boldsymbol{\sigma}_0)^T \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\sigma}^T \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p. \quad (14)$$

Полагается, что для устойчивых материалов, подобных стали, справедлив постулат Друкера [1], о том, что инкрементальная внутренняя энергия материала не может убывать и что пластическая работа в цикле нагружения неотрицательна:

$$d\boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0, \quad (15)$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^T \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p \geq 0. \quad (16)$$

Применив постулат Друкера к выражению (14), получим

$$(\boldsymbol{\sigma}_y - \boldsymbol{\sigma}_0)^T \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\sigma}^T \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p \geq 0. \quad (17)$$

Для малых начальных напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_0 \ll \boldsymbol{\sigma}_y$  выражение (17) означает, что угол  $\theta$  между векторами  $\boldsymbol{\sigma}_y - \boldsymbol{\sigma}_0$  и  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p$  находится в интервале  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Следовательно, вектор инкремента пластической деформации  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p$  при напряжении  $\boldsymbol{\sigma}_y$  на-

правлен в сторону внешней нормали  $\mathbf{g}$  поверхности текучести, как требует выражение (11). Это правило называется правилом нормальности или ассоциированным законом течения. Так как все векторы  $\boldsymbol{\sigma}_y - \boldsymbol{\sigma}_0$  составляют с внешней нормалью  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p$  угол менее  $\pi/2$ , то поверхность текучести должна быть выпуклой. Это правило называется правилом выпуклости поверхности нагружения.

Скалярное произведение  $\boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$  и скорости пластической деформации  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  называется пластической диссипацией. Пластическая диссипация является мерой скорости, с которой энергия рассеивается в единице объема благодаря пластической деформации. Максимальная пластическая диссипация среди всех напряженных состояний в замкнутой области текучести называется функцией пластической диссипации и обозначается  $D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ :

$$D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \max_{\boldsymbol{\sigma}_0} (\boldsymbol{\sigma}_0^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \text{ при } f(\boldsymbol{\sigma}_0) \leq 0. \quad (18)$$

Из постулата Друкера в формулировке (17) следует, что

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0) \leq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_y^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \geq \boldsymbol{\sigma}_0^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p. \quad (19)$$

Выражения (18) и (19) доказывают следующие свойства функции диссипации:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0) \leq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_y^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \geq \boldsymbol{\sigma}_0^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \quad (20)$$

$$D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \max_{\boldsymbol{\sigma}_0} (\boldsymbol{\sigma}_0^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \text{ при } f(\boldsymbol{\sigma}_0) \leq 0. \quad (21)$$

Определение (18) и свойство (21) показывают, что из всех возможных напряженных состояний  $\boldsymbol{\sigma}_0$  материал принимает то, которое требует максимальной пластической работы.

### 3. Теоремы о предельной нагрузке

#### 3.1. Возможные состояния

Рассмотрим ферму, подверженную модельной нагрузке  $\bar{\mathbf{p}}$ . Нагрузка, действующая на ферму в псевдовремя  $t$  пропорциональна коэффициенту нагружения  $\lambda(t)$ . Предположим, что функция  $\lambda(t)$  монотонно возрастает, и, как следствие, монотонно возрастает нагрузка  $\mathbf{p}$ . Максимальная нагрузка, которую может нести конструкция, называется предельной нагрузкой  $\mathbf{p}_{\text{lim}}$ , а соответствующее максимальное значение коэффициента нагружения называется предельным коэффициентом нагружения  $\lambda_{\text{lim}}$ .

$$\mathbf{p}(t) = \lambda(t) \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}_{\text{lim}} = \max_t \mathbf{p}(t) = \lambda_{\text{lim}} \bar{\mathbf{p}}. \quad (22)$$

Пусть  $\mathbf{d}$  - вектор координат перемещений в узлах фермы от нагрузки  $\mathbf{p}$ , а  $\mathbf{e}$  - вектор деформаций в стержнях фермы. Скорость деформаций  $\dot{\mathbf{e}}$  связана со скоростью перемещений  $\dot{\mathbf{d}}$  через матрицу связи деформаций и перемещений  $\mathbf{V}$  фермы:

$$\mathbf{p}(t) = \lambda(t) \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}_{\text{lim}} = \max_t \mathbf{p}(t) = \lambda_{\text{lim}} \bar{\mathbf{p}}. \quad (23)$$

Пусть усилия в стержнях фермы составляют вектор сил  $\mathbf{s}$ , а длины стержней – элементы диагональной матрицы  $\mathbf{L}$ . Усилия в стержнях находятся в равновесии с приложенной нагрузкой, если удовлетворяется следующее уравнение:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{L} \mathbf{s} = \lambda \bar{\mathbf{p}}. \quad (24)$$

Напряженное состояние  $\boldsymbol{\sigma}$  in в стержне называется пластически возможным, если оно лежит внутри пластической области, так, что  $f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ . Вектор усилий в стержнях фермы  $\mathbf{s}_s$  называется статически возможным, если усилия в стержнях находятся в равновесии с приложенной нагрузкой и напряжения в стержнях являются пластически

возможными. Коэффициент нагружения  $\lambda_s$  статически возможного состояния конструкции называется статически возможным коэффициентом нагружения. Статически возможный вектор усилий в стержнях не обязательно является кинематически возможным (см. ниже).

$$\mathbf{B}^T \mathbf{L} \mathbf{s}_s = \lambda_s \bar{\mathbf{p}}. \quad (25)$$

Потенциальный механизм разрушения с положительной внешней мощностью (скоростью работы) называется кинематически возможным состоянием. Кинематически возможное состояние не обязательно является статически возможным. Пара векторов  $(\dot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{e}})$ , удовлетворяющая уравнению (23), является кинематически возможной, если скорость работы положительна:

$$\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{d}} > 0 \Rightarrow \lambda_k \bar{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{d}} > 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{d}} > 0. \quad (26)$$

Кинематически возможный коэффициент нагружения  $\lambda_k$  определяется, полагая скорость работы  $\dot{W}_{ext}$  внешних нагрузок равной внутренней диссипации  $D_{int}$  в объеме стержней:

$$\lambda_k \bar{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{d}} = D_{int} = \mathbf{s}_y \mathbf{L} \dot{\mathbf{e}}_p \Rightarrow \lambda_k = \frac{\mathbf{s}_y \mathbf{L} \dot{\mathbf{e}}_p}{\bar{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{d}}}. \quad (27)$$

### 3.2. Фундаментальная теорема о предельной нагрузке

*Никакой статически возможный коэффициент нагружения не может превосходить никакого кинематически возможного коэффициента нагружения.*

Для того, чтобы доказать эту теорему, рассмотрим произвольное статически возможное поле, заданное вектором внутренних усилий в стержнях  $\mathbf{s}_s$  и коэффициентом нагружения, удовлетворяющим уравнению (25). Рассмотрим далее произвольное кинематически возможное состояние, заданное скоростью перемещений  $\dot{\mathbf{d}}_k$  и скоростью деформаций  $\dot{\mathbf{e}}_k$ , удовлетворяющим уравнениям (23) и (26). Кинематически возможный коэффициент нагружения  $\lambda_k$  задан уравнением (27):

$$\lambda_k = \frac{D_{int}(\dot{\mathbf{e}}_k)}{\bar{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{d}}_k}. \quad (28)$$

Так как статически возможный вектор внутренних усилий в стержнях  $\mathbf{s}_s$  является пластически возможным, то из выражений (19) и (27) следует, что

$$\mathbf{s}_s^T \dot{\mathbf{e}}_p \leq \mathbf{s}_y^T \dot{\mathbf{e}}_p \Rightarrow D_{int}(\dot{\mathbf{e}}_k) = \mathbf{s}_y^T \mathbf{L} \dot{\mathbf{e}}_k \geq \mathbf{s}_s^T \mathbf{L} \dot{\mathbf{e}}_k. \quad (29)$$

Скорость деформаций  $\dot{\mathbf{e}}_k$  подставляется из выражения (23) в правую часть выражения (29). Диссипация  $D_{int}$  из выражения (28) подставляется в левую часть уравнения (29):

$$\mathbf{s}_s^T \mathbf{L} \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}}_k \leq \lambda_k \bar{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{d}}_k. \quad (30)$$

Произведение  $\mathbf{B}^T \mathbf{L} \mathbf{s}_s$  подставляется из выражения (25) в левую часть уравнения (30):

$$\lambda_s \bar{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{d}}_k \leq \lambda_k \bar{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{d}}_k. \quad (31)$$

Вследствие условия (26) произведение  $\bar{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{d}}_k$  в выражении (31) положительно, и может быть сокращено:

$$\lambda_s \leq \lambda_k. \quad (32)$$

Неравенство (32) доказывает фундаментальную теорему предельного состояния. Состояние конструкции в момент начала разрушения называется пластическим предельным состоянием. Предельный коэффициент нагружения  $\lambda_{lim}$  ограничивается с двух сторон статическими коэффициентами нагружения  $\lambda_s$  и кинематическими коэффициентами нагружения  $\lambda_k$

$$\lambda_s \leq \lambda_{lim} \leq \lambda_k. \quad (33)$$

3.3 Статическая теорема о предельной нагрузке

Коэффициент нагружения пластического предельного состояния является наибольшим статически возможным коэффициентом нагружения.

Эта теорема задает нижнюю границу предельного коэффициента нагружения  $\lambda_{lim}$  и называется статической теоремой о предельной нагрузке. Вычисление предельного коэффициента нагружения при помощи этой теоремы представляет собой оптимизационную задачу нахождения наибольшего статически возможного коэффициента нагружения. Рассмотрим тело  $B$ , подверженное заданным модельным поверхностным силам  $\bar{\mathbf{t}}$  с координатами  $\bar{t}_i$ , действующим на части поверхности  $A_\sigma$  тела. Обозначим вектор внешней нормали к поверхности  $A_\sigma$  через  $\mathbf{n}$ , а его координаты -  $n_m$ . Нагрузка, действующая на тело, равна модельным поверхностным силам, умноженным на коэффициент нагружения  $\lambda_s$ . Напряженное состояние тела описывается вектором  $\boldsymbol{\sigma}$  с координатами  $\sigma_{im}$ . Напряженное состояние статически возможно для нагрузки  $\lambda_s \bar{\mathbf{t}}$  если во всех точках объема тела удовлетворяются условия равновесия и условия течения, а во всех точках участка поверхности  $A_\sigma$  удовлетворяются статические условия на поверхности тела:

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in B, \quad (34)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad \mathbf{x} \in B, \quad (35)$$

$$\sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 + \sigma_{i3} n_3 = \lambda_s \bar{t}_i \quad \mathbf{x} \in A_\sigma. \quad (36)$$

Если уравнения (34) - (36) удовлетворяются, то напряженное состояние  $\boldsymbol{\sigma}$  является статически возможным, а  $\lambda_s$  - статически возможный коэффициент нагружения. Задача оптимизации заключается в определении наибольшего значения статически возможных коэффициентов нагружения, которые называются предельными коэффициентами нагружения  $\lambda_{lim}$ .

3.4 Кинематическая теорема о предельной нагрузке

Коэффициент нагружения пластического предельного состояния представляет собой наименьший кинематически возможный коэффициент нагружения.

Эта теорема задает верхнюю границу предельного коэффициента нагружения  $\lambda_{lim}$  и называется кинематической теоремой о предельной нагрузке. Вычисление  $\lambda_{lim}$  при помощи этой теоремы представляет собой оптимизационную задачу отыскания наименьшего кинематически возможного коэффициента нагружения.

Рассмотрим тело  $B$ , поверхность которого состоит из участка  $A_\sigma$  с заданными модельными поверхностными силами  $\bar{\mathbf{t}}$  и участка  $A_u$ , на котором скорость перемещений равна нулю:  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ . Скорость перемещений тела равна  $\dot{\mathbf{u}}$ . Координаты  $\epsilon_{im}$  вектора скоростей деформаций  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  кинематически совместимы, так как они получены дифференцированием координат скоростей перемещений  $\dot{u}_i$ . Кинематически возможный коэффициент нагружения  $\lambda_k$  вычисляется как отношение скорости внутренней работы  $\dot{W}_{int}$  к скорости внешней работы  $\dot{W}_{ext}$ :

$$\dot{W}_{ext} = \int_{A_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^T \dot{\mathbf{u}} da > 0 \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{на} \quad A_u, \quad (37)$$

$$\dot{W}_{int} = \int_B D_p(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) dv \quad \text{и} \quad \dot{\epsilon}_{im} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_m} + \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial x_i} \right), \quad (38)$$

$$\lambda_k = \frac{\dot{W}_{int}}{\dot{W}_{ext}}. \quad (39)$$

4. Фундаментальные теоремы приспособляемости

4.1 Область нагружения

В расчете на приспособляемость полагается, что конструкция подвергается пвидам нагрузок, изменяющихся во времени. Каждая схема нагрузки преобразуется в вектор нагрузок  $\bar{\mathbf{p}}_k(t)$  модели. Зависящий от времени вектор нагрузок выражается как произведение не зависящего от времени вектора модельной нагрузки  $\mathbf{p}_k$  и зависящего от времени коэффициента нагружения  $\alpha_k(t)$ , находящегося в ограниченном не зависящем от времени диапазоне  $[\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ :

$$\bar{\mathbf{p}}_k(t) = \alpha_k(t) \mathbf{p}_k, \quad \alpha_k^- \leq \alpha_k(t) \leq \alpha_k^+. \quad (40)$$

Полагается, что в течение жизненного цикла конструкция может подвергаться любому сочетанию нагрузок  $\mathbf{q}(t)$ , представляющему собой линейную комбинацию  $n$  нагрузок с независимо заданными интервалами параметров  $\alpha_k(t)$ :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{p}}_k(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) \mathbf{p}_k. \quad (41)$$

Множество значений, которые принимает вектор нагрузок  $\mathbf{q}(t)$  для заданных функций времени  $\alpha_k(t)$ , где  $k = 1, \dots, n$  называется историей нагружения конструкции. Целью теории приспособляемости является установление общих принципов поведения упругопластических конструкций, которые не зависят от истории нагружения, а зависят только от моделей приложенных нагрузок и предельных значений параметров  $\alpha_k$ .

Рассмотрим  $n$ -мерное пространство, где каждая ось ассоциирована с коэффициентом нагружения  $\alpha_k$ . Пусть координаты точек в этом пространстве задаются векторной функцией  $\mathbf{a}(t)$ . Значения, которые может принимать функция  $\mathbf{a}(t)$ , называются областью нагружения конструкции. Благодаря границам (40) область нагружения представляет собой гиперкуб с  $2^n$  вершинами  $\hat{P}_m$ . На рис. 2 показана область нагружения для конструкции с двумя нагрузками. Траектория  $\mathbf{a}(t)$ , которой следует точка  $\hat{P}$  в области нагружения, называется траекторией нагружения конструкции. В определенный момент времени  $\hat{t}$  коэффициент нагружения  $\alpha_1(\hat{t})$  имеет значение  $\hat{\alpha}_1$ , а коэффициент нагружения  $\alpha_2(\hat{t})$  - значение  $\hat{\alpha}_2$ , таким образом точка  $\hat{P} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$  на графике представляет сочетание нагрузок  $\mathbf{q}(t)$  во время  $\hat{t}$ . Вследствие ограничений (40) точка  $\hat{P}$  остается в замкнутой области нагружения.

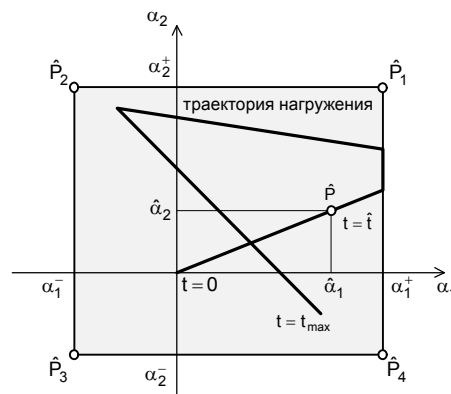


Рис. 2. Область нагружения для двух видов нагрузки с траекторией нагружения  $\mathbf{q}(t)$

4.2 Скорость пластической деформации

Напряженное состояние  $\boldsymbol{\sigma}$  в любой конструкции ограничивается зоной текучести, описанной в разд. 2.2, которая задает статически допустимую область  $E$ . Пусть  $f(\boldsymbol{\sigma})$  -



выпуклая функция течения, такая, что  $f(\mathbf{0}) < 0$ . Область  $E$  является замкнутой и выпуклой. Ее граница задана условием  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ,

$$E := \{\boldsymbol{\sigma} \mid f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0\}. \quad (42)$$

Скорость деформаций  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  является производной деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$  по псевдовремени  $t$ . Полная скорость деформации является суммой скорости упругой деформации  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$  и скорости пластической деформации  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p. \quad (43)$$

Физический закон устанавливает соотношение между скоростью напряжения  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  и скоростью упругой деформации  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$  через матрицу упругих свойств материала  $\mathbf{E}$ , которая является положительно определенной:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \mathbf{E}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p). \quad (44)$$

Скорость пластической деформации  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  может быть отличной от нуля только если напряженное состояние является состоянием текучести  $\boldsymbol{\sigma}_y$  с  $f(\boldsymbol{\sigma}_y) = 0$ . Значение скорости пластической деформации зависит от градиента  $\mathbf{g}$  функции течения и от параметра течения  $\mu$  в выражении (12):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\mu} \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}_y), \quad \dot{\mu} \geq 0. \quad (45)$$

Если справедлив постулат Друкера, то из выражения (12) следует:

$$\forall (\boldsymbol{\sigma} \in E): (\boldsymbol{\sigma}_y - \boldsymbol{\sigma})^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \geq 0. \quad (46)$$

Так как  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  по определению является внутренней точкой области  $E$ , из выражения (12) следует, что

$$\forall (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \neq \mathbf{0}): \boldsymbol{\sigma}_y^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p > 0. \quad (47)$$

Для заданного сочетания нагрузок  $\mathbf{q}(t)$  конструкция приспособляется и начинает вести себя упруго если после начальной стадии  $0 \leq t \leq t_0$ , во время которой могут возникать и накапливаться пластические деформации, отклик конструкции становится упругим, так, что полная пластическая работа конечна:

$$\int_0^\infty \left\{ \int_B \boldsymbol{\sigma}(t)^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t) dt \right\} dt < \infty. \quad (48)$$

#### 4.3 Упругое и остаточное поля деформации

Пусть напряженное состояние  $\boldsymbol{\sigma}_{ek}$  для каждой схемы нагрузки  $\mathbf{p}_k$  определяется линейным расчетом. Упругое напряженное состояние  $\boldsymbol{\sigma}_e(t)$  конструкции от действия сочетания нагрузок с вектором коэффициентов нагружения  $\boldsymbol{\alpha}_k$  определяется суперпозицией нагружений:

$$\boldsymbol{\sigma}_e(t) = \sum_1^n \alpha_k(t) \boldsymbol{\sigma}_{ek}. \quad (49)$$

Напряженные состояния  $\boldsymbol{\sigma}_e(t)$ , которые возникают в конструкции, если вектор коэффициентов нагружения принимает все возможные значения в области нагружения, называется областью упругих напряжений  $S_e$  конструкции. Приспособляемость конструкции подразумевает существование по крайней мере одного не зависящего от времени самоуравновешенного поля самоуравновешенных остаточных напряжений  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  для которого сумма  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  и любого поля упругих напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_e(t) \in S_e$  лежит внутри зоны текучести:

$$\forall (\boldsymbol{\sigma}_e(t) \in S_e): f(\boldsymbol{\sigma}_e(t) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \leq 0. \quad (50)$$

*Доказательство.* Из неравенства (47) следует, что скорость деформаций должна стремиться к нулю для всех сочетаний нагрузок  $\mathbf{q}(t)$  в области нагружения  $Q$ , так как полная пластическая работа в выражении (48) конечна:

$$\forall(\mathbf{q}(t) \in Q): \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t) = \mathbf{0}. \quad (51)$$

Так как скорость упругих напряжений  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e(t)$  для заданной скорости нагружения единственна, то разность между скоростью напряжений  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  и скоростью упругих напряжений  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e(t)$  стремится к нулю если скорость пластических деформаций стремится к нулю:

$$\forall(\mathbf{q}(t) \in Q): \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e(t)) = \mathbf{0}. \quad (52)$$

Если предел скоростей напряжений  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  и  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e(t)$  в выражении (52) стремится к нулю, то предельное значение разности между напряжениями  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  и  $\boldsymbol{\sigma}_e(t)$  стремится к постоянному значению  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ :

$$\forall(\boldsymbol{\sigma}_e(t) \in S_e): \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}_e(t) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (53)$$

Так как напряжение  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  от приложенной нагрузки лежит в зоне текучести, то из выражения (53) следует, что выражение (50) справедливо. Поле остаточных напряжений  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  самоуравновешенным так как поля напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  и  $\boldsymbol{\sigma}_e(t)$  находятся в равновесии с одной и той же приложенной нагрузкой.

#### 4.4 Статическая теорема приспособляемости

Приспособляемость наступит, если существует не зависящее от времени самоуравновешенное поле напряжений  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , для которого удовлетворяются следующие условия:

$$\forall(\boldsymbol{\sigma}_e(t) \in S_e): \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \boldsymbol{\sigma}_e(t) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (54)$$

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) < 0. \quad (55)$$

*Доказательство.* Для любой истории нагружения  $\mathbf{q}(t)$  напряжение  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  и полная деформация  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  в теле могут быть выражены через самоуравновешенное поле напряжений  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  и пластическую деформацию  $\boldsymbol{\varepsilon}_p(t)$ , связанную с напряжениями  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}_e(t) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t), \quad (56)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_e(t) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)) + \boldsymbol{\varepsilon}_p(t). \quad (57)$$

Введем вспомогательную функцию  $\Psi(t)$ , которая является положительно определенной, так как матрица физических свойств материала  $\mathbf{E}$  положительно определена, и проинтегрируем ее по псевдовремени  $t$  используя выражение (54):

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \int_B (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{E}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) dv \geq 0, \quad (58)$$

$$\dot{\Psi}(t) = \int_B (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{E}^{-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) dv. \quad (59)$$

Скорости напряжений в выражении (59) связаны со скоростями деформаций следующими зависимостями:

$$\mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t), \quad (60)$$

$$\mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e. \quad (61)$$

Левые части уравнений (60) и (61) подставляются в выражение (59):

$$\dot{\Psi}(t) = \int_B (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e) dv - \int_B (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p dv. \quad (62)$$

Скорости деформаций  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$  и  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(t)$  кинематически совместимы. Разность напряжений  $\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  самоуравновешена, так как оба поля напряжений ассоциированы с одним и тем же сочетанием нагрузок  $\mathbf{q}(t)$ . Следовательно, первый интеграл в правой части уравнения (62) равен нулю. По условию (55)  $f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) < 0$  если  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in E$ . Скорость деформаций  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  отлична от нуля только в случае  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_y$ . Таким образом, неравенство (46) может быть применено ко второму интегралу правой части выражения (62):

$$\dot{\psi}(t) = - \int_B (\boldsymbol{\sigma}_y - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p dv < 0, \quad \text{если } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \neq \mathbf{0}. \quad (63)$$

Так как функция  $\psi(t)$  в выражении (58) положительна и выражение (63) показывает, что  $\psi(t)$  монотонно убывает в пластическом процессе, то пределы производной функции  $\dot{\psi}(t)$  и скорости деформаций  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  равны нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\psi}(t)) = \mathbf{0} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \mathbf{0}. \quad (64)$$

Напряжение  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  в области текучести E удовлетворяет условию  $f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) < 0$ . Следовательно, для достаточно малых значений параметра  $\nu \in \mathbb{R}$  напряжение  $(1 + \nu)\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  удовлетворяет условию

$$f((1 + \nu)\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t)) \leq 0. \quad (65)$$

Так как напряжение  $(1 + \nu)\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  лежит в области E, справедливо выражение (19):

$$(\boldsymbol{\sigma}(t) - (1 + \nu)\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t))^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t) \geq 0. \quad (66)$$

Проинтегрируем выражение (66) по объему тела B, используя выражение (63) для производной вспомогательной функции  $\dot{\psi}(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_B \boldsymbol{\sigma}(t)^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t) dv &\geq (1 + \nu) \int_B \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t)^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t) dv, \\ \nu \int_B \boldsymbol{\sigma}(t)^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t) dv &\leq (1 + \nu) \int_B (\boldsymbol{\sigma}(t) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t))^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t) dv = -(1 + \nu) \dot{\psi}(t). \end{aligned} \quad (67)$$

Выражение (67) затем интегрируется по времени в пределах продолжительности процесса нагружения:

$$\int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_B \boldsymbol{\sigma}(t)^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t) dv \right\} dt \leq \frac{1 + \nu}{\nu} (\psi(0) - \psi(\infty)). \quad (68)$$

Из определения (58) функции  $\psi$  видно, что  $\psi(\infty) \geq 0$ , таким образом правая часть выражения (68) может быть сведена к следующему:

$$\frac{1 + \nu}{\nu} (\psi(0) - \psi(\infty)) \leq \frac{1 + \nu}{\nu} \psi(0). \quad (69)$$

Так как во время  $t = 0$  пластическая деформация  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  равна нулю, напряжение  $\boldsymbol{\sigma}(0)$  является упругим, и, следовательно

$$\psi(0) = \frac{1}{2} \int_B (\boldsymbol{\sigma}_e - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{E}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_e - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) dv. \quad (70)$$

Подставим разность  $\boldsymbol{\sigma}_e - \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  из (54) в правую часть выражения (70):

$$\psi(0) = \frac{1}{2} \int_B \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{E}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}} dv. \quad (71)$$

Подставим выражения (69) и (71) в выражение (68):

$$\int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_B \boldsymbol{\sigma}(t)^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t) dv \right\} dt \leq \frac{1+\nu}{2\nu} \int_B \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{E}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}} dv. \quad (72)$$

Для поля напряжений  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \neq \mathbf{0}$  правая часть уравнения (72) строго положительна, так как матрица  $\mathbf{E}$  положительно определенная. Следовательно, условие приспособляемости (48) удовлетворяется.

#### 4.5 Кинематическая теорема приспособляемости

Приспособляемость конструкции не наступает, если существует кинематически возможное поле скоростей деформаций  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\exists(\boldsymbol{\sigma}_{ek} \in S_e): \int_B \sum_k (\boldsymbol{\sigma}_{ek} - \boldsymbol{\sigma}_{yk})^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pk} dv > 0, \quad (73)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \sum_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pk}. \quad (74)$$

Кинематически возможные скорости пластических деформаций  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pk}$  связаны с напряженными состояниями текучести  $\boldsymbol{\sigma}_{yk}$  через закон течения (45).

Доказательство. Теорема доказывается от противного. Предполагается, что приспособляемость наступает, и существует независящее от времени напряженное состояние  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , определенное выражением (50):

$$\forall \boldsymbol{\sigma}_e(t) \in S_e: (f(\boldsymbol{\sigma}_e(t) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \leq 0. \quad (75)$$

Следовательно, для всех случаев нагружения  $k$  может быть применено выражение (46):

$$\forall(\boldsymbol{\sigma}_{ek} \in S_e): (\boldsymbol{\sigma}_{yk} - \boldsymbol{\sigma}_{ek} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \geq 0. \quad (76)$$

Выражения (76) суммируются по  $k$  и интегрируются по объему тела:

$$\int_B \sum_k (\boldsymbol{\sigma}_{yk} - \boldsymbol{\sigma}_{ek})^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pk} dv - \int_B \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p dv \geq 0. \quad (77)$$

Второй интеграл равен нулю так как напряженное состояние  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  самоуравновешено:

$$\forall(\boldsymbol{\sigma}_{ek} \in S_e): \int_B \sum_k (\boldsymbol{\sigma}_{ek} - \boldsymbol{\sigma}_{yk})^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pk} dv \leq 0. \quad (78)$$

Так как условие (78) противоречит условию (73) теоремы, то сделанное предположение является ложным. Если условия теоремы выполняются, то приспособляемость конструкции не наступает.

#### 4.6 Коэффициент надежности приспособляемости

Пусть все коэффициенты области нагружения умножаются на коэффициент надежности  $\lambda$ . Наибольший коэффициент надежности, для которого наступает приспособляемость, называется коэффициентом надежности приспособляемости и обозначается  $\lambda_a$ . Коэффициент нагружения называется статическим коэффициентом нагружения и обозначается  $\lambda_s$ , если выполняются условия статической теоремы приспособляемости:

$$\exists(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \bar{S}): \forall(\boldsymbol{\sigma}_e \in S_e): f(\lambda_s \boldsymbol{\sigma}_e + \bar{\boldsymbol{\sigma}}) < 0. \quad (79)$$

Коэффициент нагружения называется кинематическим коэффициентом нагружения и обозначается  $\lambda_m$ , если выполняются условия кинематической теоремы приспособляемости:

$$\exists(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \sum_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pk}): \exists(\boldsymbol{\sigma}_{ek} \in S_e): \int_B \sum_k (\lambda_m \boldsymbol{\sigma}_{ek} - \boldsymbol{\sigma}_{yk})^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pk} dv > 0. \quad (80)$$

Наибольший статический коэффициент нагружения  $\max \lambda_s$ , наименьший кинематический коэффициент нагружения  $\min \lambda_m$  и коэффициент надежности приспособляемости  $\lambda_a$  равны:

$$\lambda_a = \max \lambda_s = \min \lambda_m. \quad (81)$$

Приближенные значения коэффициента надежности приспособляемости  $\lambda_a$ , полученные путем вычисления статического коэффициента нагружения, называются безопасными коэффициентами нагружения так как  $\lambda_s \leq \lambda_a$ . Приближенные значения коэффициента безопасности приспособляемости  $\lambda_a$ , полученные путем вычисления кинематических коэффициентов нагружения, называются небезопасными коэффициентами нагружения, так как  $\lambda_m \geq \lambda_a$ .

### 5. Расширения фундаментальных теорем приспособляемости

#### 5.1. Преобразования функции течения

В данном разделе выполнено расширение теорем приспособляемости, позволяющее заменить расчет на приспособляемость для всех сочетаний нагрузок в области нагружения расчетом на приспособляемость для единственной истории нагружения. Авторы следовали концепциям, предложенным Кёнигом [8] и Ву [11]. Для облегчения выводов, математическая форма функции течения преобразуется к виду, удобному для линейной комбинации напряженных состояний. К функции течения добавляется константа  $h$ , так, чтобы на поверхности течения выполнялись условия  $f(\mathbf{0})=0$  и  $f(\boldsymbol{\sigma})=h$ . Напряженные состояния в зоне текучести теперь удовлетворяют условию  $0 \leq f(\boldsymbol{\sigma}) \leq h$ . Модифицированная функция течения для напряженных состояний  $\boldsymbol{\sigma}_1$  и  $\boldsymbol{\sigma}_2$  имеет следующие свойства:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \leq f(\boldsymbol{\sigma}_1) + f(\boldsymbol{\sigma}_2), \quad (82)$$

$$\forall (c \geq 1): f(\boldsymbol{\sigma}) \leq f(c\boldsymbol{\sigma}) \leq c f(\boldsymbol{\sigma}). \quad (83)$$

Рассмотрим линейные комбинации  $\boldsymbol{\sigma}_3$  напряженных состояний  $\boldsymbol{\sigma}_1$  и  $\boldsymbol{\sigma}_2$  в зоне текучести:

$$\boldsymbol{\sigma}_3 = c\boldsymbol{\sigma}_1 + (1-c)\boldsymbol{\sigma}_2 \quad \text{при} \quad 0 \leq c \leq 1, \quad f(\boldsymbol{\sigma}_1) \leq h, \quad f(\boldsymbol{\sigma}_2) \leq h, \quad (84)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}_3) = f(c\boldsymbol{\sigma}_1 + (1-c)\boldsymbol{\sigma}_2) \leq c f(\boldsymbol{\sigma}_1) + (1-c)f(\boldsymbol{\sigma}_2) \leq ch + (1-c)h = h. \quad (85)$$

#### 5.2. Теорема о границе приспособляемости

Если конструкция приспособляется на любой траектории нагружения, состоящей исключительно из граничных точек ее области нагружения, то она приспособляется на любой траектории нагружения, состоящей из внутренних и граничных точек области нагружения.

Доказательство. Пусть  $\boldsymbol{\alpha}_B(t)$  - вектор коэффициентов нагружения для точки на границе области нагружения с коэффициентами  $\boldsymbol{\alpha}_{Bk}(t)$ . Так как конструкция приспособляется на любой траектории нагружения на границе области Q, то существует не зависящее от времени самоуравновешенное остаточное напряженное состояние  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , такое, что в любой точке конструкции в любое время удовлетворяется следующее неравенство:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{Bk} \boldsymbol{\sigma}_{ek} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}\right) \leq h. \quad (86)$$

Коэффициент нагружения  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  траектории нагружения, содержащей внутренние точки выпуклой области нагружения может быть выражен как линейная комбинация граничных значений  $\boldsymbol{\alpha}_{B1}$  и  $\boldsymbol{\alpha}_{B2}$ . Функция текучести в  $\boldsymbol{\alpha}$  выражается через функции текучести в  $\boldsymbol{\alpha}_{B1}$  и  $\boldsymbol{\alpha}_{B2}$ :

$$\boldsymbol{\alpha} = c\boldsymbol{\alpha}_{B1} + (1-c)\boldsymbol{\alpha}_{B2} \quad 0 \leq c \leq 1, \quad (87)$$

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \boldsymbol{\sigma}_{ek} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}\right) = f\left(\sum_{k=1}^n (c\alpha_{Bk1} \boldsymbol{\sigma}_{ek} + (1-c)\alpha_{Bk2} \boldsymbol{\sigma}_{ek}) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}\right). \quad (88)$$

Неравенство (86) справедливо для обеих граничных точек:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{Bk1} \boldsymbol{\sigma}_{ek} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}\right) \leq h \quad \wedge \quad f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{Bk2} \boldsymbol{\sigma}_{ek} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}\right) \leq h. \quad (89)$$

Используем свойство (85) функции течения в выражениях (88) и (89):

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \sigma_{ek} + \bar{\sigma}\right) \leq h. \quad (90)$$

Конструкция приспособляется на траектории нагружения  $\alpha(t)$ , содержащей внутренние точки области  $Q$ , так как выражение (90) справедливо в любой точке конструкции в любой момент времени.

### 5.3 Теорема об оболочке

Если конструкция приспособляется на любой траектории нагружения в своей замкнутой области нагружения  $Q$ , то она также приспособляется на любой траектории нагружения в любой замкнутой выпуклой оболочке области  $Q$ .

Доказательство. Неравенство (90) справедливо, так как конструкция приспособляется на любой траектории нагружения  $\alpha(t)$  в своей замкнутой области нагружения  $Q$ . Пусть  $\alpha_H$  - вектор функций нагрузок выпуклой оболочки области  $Q$  с коэффициентами  $\alpha_{Hk}$ . Любая точка выпуклой оболочки либо является точкой на границе области  $Q$ , либо может быть представлена в виде линейной комбинации двух точек  $\alpha_{B1}$  и  $\alpha_{B2}$  на границе области  $Q$ . Функция течения в точке  $\alpha_H$  выражается через функции течения в точках  $\alpha_{B1}$  и  $\alpha_{B2}$ :

$$\alpha_H = c \alpha_{B1} + (1-c) \alpha_{B2} \quad 0 \leq c \leq 1, \quad (91)$$

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{Hk} \sigma_{ek} + \bar{\sigma}\right) = f\left(\sum_{k=1}^n (c \alpha_{Bk1} \sigma_{ek} + (1-c) \alpha_{Bk2} \sigma_{ek}) + \bar{\sigma}\right). \quad (92)$$

Так как конструкция приспособляется на любой траектории нагружения на границе своей области нагружения, справедливы неравенства (89). Из выражений (85) и (92) следует, что

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{Hk} \sigma_{ek} + \bar{\sigma}\right) \leq h. \quad (93)$$

Так как неравенство (93) справедливо для любой точки конструкции в любой момент времени, конструкция приспособляется на любой траектории нагружения на выпуклой оболочке  $H$  ее области нагружения  $Q$ . Из граничной теоремы следует, что конструкция приспособляется на любой траектории нагружения в замкнутой оболочке области  $Q$ .

### 5.4 Теорема о вершинах

Конструкция приспособляется на любой траектории нагружения в заданной области нагружения  $Q$ , если она приспособляется на циклической траектории нагружения, содержащей все вершины области нагружения  $Q$ .

*Циклическая траектория нагружения.* Траектория нагружения называется циклической с периодом  $T$ , если ее функция коэффициентов нагружения  $\alpha(t)$  является периодической функцией. Пусть период функции равен  $T$ :

$$\alpha(t + aT) = \alpha(t) \quad a = 1, 2, \dots \quad (94)$$

Пусть  $\alpha_c(t)$  - вектор коэффициентов нагружения циклической траектории нагружения с коэффициентами  $\alpha_{ck}(t)$ . Множество значений, которые принимает вектор-функция коэффициентов нагружения в течение цикла нагружения, называется циклической областью нагружения и обозначается  $Q_c$ . На рисунке 3 показаны две циклических траектории нагружения в области нагружения, показанной на рисунке 2 при двух видах нагрузок.

Доказательство теоремы о вершинах выполняется при помощи трех вспомогательных лемм.

*Лемма 1.* Если конструкция приспособляется на заданной циклической траектории нагружения, то она приспособляется на любой траектории нагружения, содержащейся в области циклических нагружений  $Q_c$  этой траектории.

*Доказательство.* Так как конструкция приспособляется на траектории нагружения  $\alpha_c(t)$  с коэффициентами  $\alpha_{ck}(t)$ , то существует независимое от времени самоурав-

новешенное остаточное напряженное состояние  $\bar{\sigma}$ , для которого в любой точке тела в любой момент времени  $t$  удовлетворяется условие (95):

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ck} \sigma_{ek} + \bar{\sigma}\right) \leq h. \quad (95)$$

Рассмотрим любую траекторию нагружения  $\alpha(t)$ , состоящую из точек в циклической области  $Q_c$ . Каждая из этих точек является точкой на циклической траектории нагружения; таким образом, неравенство (95) удовлетворяется во всех точках траектории  $\alpha(t)$ . Из статической теоремы приспособляемости следует, что конструкция приспособляется на траектории нагружения  $\alpha(t)$ .

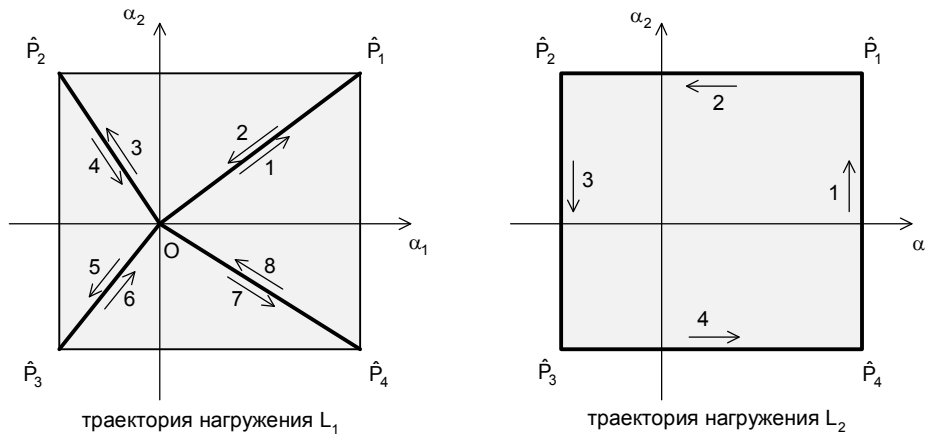


Рис. 3. Циклические траектории нагружения в области нагружения

*Лемма 2.* Если конструкция приспособляется на циклической траектории нагружения, циклическая область которой  $Q_c$  содержит границу заданной области нагружения  $Q$ , то конструкция приспособляется на любой траектории нагружения в выпуклой оболочке области  $Q$ .

*Доказательство.* Так как конструкция приспособляется на циклической траектории нагружения с циклической областью  $Q_c$ , то из леммы 1 следует, что конструкция приспособляется на любой траектории нагружения в области  $Q_c$ . Так как принято, что область  $Q_c$  содержит границу заданной области нагружения  $Q$ , то конструкция приспособляется на любой траектории, содержащейся в границе области  $Q$ . Теорема о границе показывает, что конструкция приспособляется на любой траектории в области  $Q$ , если она приспособляется на любой траектории, принадлежащей границе области  $Q$ . Наконец, теорема о выпуклой оболочке показывает, что конструкция приспособляется на любой траектории нагружения в выпуклой оболочке области  $Q$ , если она приспособляется на любой траектории нагружения области  $Q$ .

*Лемма 3.* Если конструкция приспособляется на циклической траектории нагружения  $\alpha_c(t)$  с циклической области  $Q_c$  и выпуклая оболочка области  $Q_c$  содержит границу заданной области  $Q$ , то конструкция приспособляется на любой траектории нагружения в выпуклой оболочке области  $Q$ .

*Доказательство.* Если конструкция приспособляется на циклической траектории нагружения  $\alpha_c(t)$ , то из леммы 1 следует, что конструкция приспособляется на любой траектории нагружения ассоциированной циклической области нагружения  $Q_c$ . Теорема о выпуклой оболочке утверждает, что конструкция приспособляется на любой траектории нагружения, содержащейся в выпуклой оболочке области  $Q_c$ , если она приспособляется на любой траектории нагружения в области  $Q_c$ . Лемма 3 основана на условии, что циклическая область  $Q_c$  содержит границу заданной области нагружения  $Q$ . Следовательно, конструкция приспособляется на любой траектории нагружения на границе области  $Q$ . Наконец, лемма 2 утверждает, что конструкция приспособ-

ливается на любой траектории нагружения в выпуклой оболочке области  $Q$ , если она приспособливается на любой траектории нагружения на границе области  $Q$ .

*Доказательство теоремы о вершинах.* Циклические траектории нагружения, содержащие все вершины области нагружения  $Q$ , показаны на рис. 3. Если конструкция приспособливается на циклической траектории нагружения, содержащей все вершины области  $Q$ , то ее циклическая область  $Q_c$  содержит все вершины выпуклой области нагружения  $Q$ . Так как обе области выпуклые, то выпуклая оболочка области  $Q_c$  содержит границу области  $Q$ , если она содержит вершины области  $Q$ . Лемма 3 утверждает, что конструкция приспособливается на любой траектории нагружения в выпуклой оболочке области нагружения  $Q$ , если  $Q_c$  содержит границу области  $Q$ . Это доказывает теорему о вершинах. Теорема о вершинах является основой расчета на приспособляемость, так как она позволяет получить решение, рассматривая лишь одну траекторию нагружения. Циклическая траектория нагружения  $L_1$ , показанная на рисунке 3, была использована в пошаговом расчете на приспособляемость, выполненном в работе Борковского и Клейбера [12]. Морель [13] использовал траекторию нагружения  $L_2$ , так же приведенную на рисунке 3, для конечно-элементного расчета на приспособляемость.

### 6. Заключение

В данной статье рассмотрен последовательный набор теорем, позволяющий определить предельные нагрузки и нагрузки приспособляемости стальных конструкций при малых перемещениях путем решения задачи оптимизации.

Доказательства теорем демонстрируют, что все теоремы используют принцип линейной суперпозиции для образования сочетаний нагрузок. Если поведение конструкции становится геометрически нелинейным вследствие больших перемещений, то суперпозиция нагрузок становится невозможной. Следовательно, для расчета конструкций со значительной геометрической нелинейностью необходимы новые методы расчетов на предельную нагрузку и приспособляемость.

### Л и т е р а т у р а

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М. Изд-во "Наука". 1969.
2. Коитер В. Общие теоремы теории упруго - пластических сред, ИЛ, 1961.
3. Прагер В., Проблемы теории пластичности, Физматгиз, 1958.
4. Borkowski, A.; Kleiber, M. (1980). On a numerical approach to shakedown analysis of structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 22, 101.
5. Casciaro, R.; Garcea, G.(2002). An iterative method of shakedown analysis. *Comp. Meth. Mech. Engr.* 191, p. 5761-5792.
6. Drucker, D.C. (1959). A definition of stable inelastic materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 26, p. 101-195.
7. Koiter, W.T. (1956). A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures. *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet. B* 59, p. 24-34.
8. König, J.A.(1987). *Shakedown of elastic-plastic structures*. Elsevier Publishers, Amsterdam.
9. Melan, E. (1936). *Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal-plastischen Baustoffen*, Sitz.Berl.Ak.Wiss. 145, p. 195–218.
10. Morelle, P. (1984). Structural shakedown analysis by dual finite-element formulations. *Eng. Struct.*, Vol. 6, p. 70-79.
11. Vu Duc Khoi (2001). Dual limit and shakedown analysis of structures. *Doc. Th., Univ. of Liege*

### A REVIEW OF LIMIT LOAD AND SHAKEDOWN THEOREMS FOR THE ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF STEEL STRUCTURES

A. Heidari, V. V. Galishnikova  
Peoples Friendship University of Russia, Moscow

A consistent set of theorems is presented in this paper which permits the determination of ultimate and shakedown loads of steel structures with small displacements by solving an optimization problem. The proofs of the theorems show that all theorems depend on the linear superposition of load cases to form load combinations. If the behavior of the structure becomes geometrically nonlinear because it is affected by large displacements, load cases can no longer be superimposed. New concepts are therefore required for the limit and shakedown analysis of structures with significant geometric nonlinearity.

**Key words:** steel structures, plasticity, shakedown.