УДК 330.42

DOI: 10.17323/1813-8691-2025-29-1-42-71

О решении детерминированной и стохастической задачи домашнего хозяйства с конечным горизонтом планирования

Пильник Н.П.

В статье на примере оптимизационной задачи домохозяйства, которое принимает решение об объемах потребления и инвестирования, показано, какие сложности возникают в детерминированных и стохастических постановках на конечном временном интервале. В задаче для ее разрешимости на конечном временном интервале добавляется специальное терминальное условие на собственный капитал агента, обобщающее стандартные варианты таких условий.

В статье рассматриваются две постановки. Первая постановка – детерминированный случай, предполагающий, что домохозяйству известны траектории всех экзогенных переменных на всем рассматриваемом временном интервале. Найдено аналитическое решение этой задачи и показано, что за счет выбора параметра терминального ограничения в задаче на конечном временном интервале всегда можно получить траекторию потребления из решения аналогичной задачи, поставленной для бесконечного горизонта планирования. Если же выбирать коэффициент терминального условия так, чтобы оптимальная траектория потребления продолжала предыдущее историческое значение, то при определенном сочетании начальных условий задача домохозяйства может быть либо разрешима только до определенного горизонта планирования, либо быть вообще неразрешима.

Вторая постановка – стохастический случай, когда домохозяйство знает только закон распределения экзогенных переменных. Полное аналитическое решение в этом случае представить не удается, однако предлагается последовательный алгоритм, который позволяет получить пошаговое описание расчета такого решения. Исследование свойств построенной модели позволяет показать, насколько отличается работа со стохастическими оптимизацион-

Пильник Николай Петрович – к.э.н., доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; с.н.с., Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН; с.н.с., Научно-исследовательский финансовый институт Минфина России. E-mail: npilnik@hse.ru

Статья поступила: 17.11.2024/Статья принята: 06.02.2025.

ными задачами для анализа отклонений от некоторой выделенной траектории состояний (сбалансированного роста) в ответ на реализацию других состояний (шоков) от задачи анализа конкретных реализовавшихся траекторий переменных агента.

Ключевые слова: терминальные условия; оптимизационная задача домохозяйства; конечный горизонт планирования; условия оптимальности в форме Лагранжа; сбалансированный рост.

Для цитирования: Пильник Н.П. О решении детерминированной и стохастической задачи домашнего хозяйства с конечным горизонтом планирования. *Экономический журнал ВШЭ*. 2025; 29(1): 42–71.

For citation: Pilnik N.P. On the Solution of a Deterministic and Stochastic Household Problem with a Finite Planning Horizon. *HSE Economic Journal.* 2025; 29(1): 42–71. (In Russ.)

1. Введение

Описание поведения экономических агентов в динамических моделях с помощью принципа оптимальности является одним из основных способов объяснения закономерностей изменения количественных переменных в современной экономической теории. Задачи такого типа используются как отдельные блоки более общих моделей – моделей экономического равновесия, представляющих собой популярный инструмент анализа и прогнозирования развития национальной экономики. Чаще всего речь идет о динамических стохастических моделях общего равновесия (DSGE), в которых оптимизационные задачи агентов формулируются в дискретном времени с бесконечным горизонтом планирования, а часть переменных, которые не являются управлением агента, описываются как случайные процессы.

Такие оптимизационные задачи кроме непосредственно функционала, который агент максимизирует, начиная от текущего (в терминах модели) момента времени до горизонта планирования, как правило, включают набор ограничений в виде равенств или неравенств, связывающих переменные модели в один и тот же или в соседние периоды времени. Отдельно следует сказать о граничных условиях таких динамических задач. Начальные условия выглядят вполне естественно с экономической точки зрения: значения переменных типа «запас» наследуются из периода, предшествующего текущему. Конечные (или терминальные) условия, как правило, являются необходимыми с математической точки зрения для обеспечения разрешимости задачи, но оказываются сложнее для экономической интерпретации.

Специфика использования терминальных условий в значительной степени зависит от способа описания времени в модели: является ли рассматриваемый интервал конечным или бесконечным, дискретным или непрерывным. В случае конечного временного множества (и соответственно конечного горизонта планирования) терминальное условие сводится к одному или нескольким соотношениям на значения переменных агента в последний момент времени. В случае бесконечного временного множества терминальное условие приходится формулировать через предельные соотношения.

Задачи агентов в дискретном времени в детерминированной постановке рассматриваются, как правило, на бесконечном временном интервале (см.: [Chang, 1998; Kamihigashi, 2001; Blot, Hayek, 2014]. Главное преимущество таких задач в возможности получения полного аналитического решения. Для этого чаще всего используются условия оптимальности в форме Лагранжа, а терминальное условие, сформулированное как ограничения на возможный рост переменных типа «запас» на бесконечности, позволяет найти начальное значение переменной типа «поток», используемой в качестве аргумента функционала агента. Аналогичный формат терминальных условий используется и при решении оптимизационных задач через уравнение Беллмана как, например, в работах [Wiszniewska-Matyszkiel, 2011; Da Lio, 2000; Tkachev, Abate, 2012].

Задачи агентов в непрерывном времени оказываются сложнее из-за необходимости корректного описания пространства функций, в котором ищется решение. Тем не менее в детерминированной постановке здесь также иногда удается найти решение в аналитическом виде. Задачи с конечным горизонтом планирования удобнее решать через условия оптимальности в форме Лагранжа, как в [Андреев и др., 2007; Pospelov, 2013]. В этом случае оказывается возможным поставить единое терминальное условие на линейную комбинацию фазовых переменных модели, коэффициенты которой определяются в процессе решения. Задачи с бесконечным горизонтом планирования удобнее решать через принцип максимума Понтрягина. И хотя по форме эти условия достаточно схожи с их аналогами в дискретном времени, однако при их использовании возникает целый ряд технических проблем, требующий аккуратного изучения получаемых условий оптимальности, как показано в работах [Aseev et al., 2012; Carlsonet et al., 2012; Лобанов, 1999].

Добавление в задачу агента стохастических переменных существенно усложняет ее исследование и делает практически невозможным получение аналитического решения. При этом терминальное условие остается ее обязательным элементом, однако теперь нужно уточнять, в каком смысле оно должно выполняться (на каждой возможной траектории, в среднем или, например, с заданной вероятностью). Сама формулировка терминального условия в стохастических задачах на бесконечном временном горизонте оказывается весьма нетривиальным вопросом, как показано в [Ljungqvist, 2018; Benveniste, 1982; Brock, 1982].

Большинство современных динамических моделей общего равновесия используют именно стохастическую версию оптимизационных задач. Варианты включаемых в них терминальных условий можно найти в [Ljungqvist, Sargent, 2018; Candless, 2009; Fernández-Villaverde, 2016]. Тем не менее важно отметить, что в большинстве прикладных DSGE-моделей вопрос терминальных условий отдельно не рассматривается в предположении, что используется их стандартная версия, корректность применения которой не всегда очевидна. Это связано со стандартной практикой исследования не исходной, а линеаризованной вокруг траектории сбалансированного роста версии модели. Как мы покажем далее на относительно простом примере, такие переходы могут порождать свои проблемы и не всегда их следует считать корректными.

В этой статье мы рассмотрим оптимизационную задачу домохозяйства, которое принимает решение об объемах потребления и инвестирования на конечном временном интервале, в двух постановках. Первая постановка – детерминированный случай, предполагающий, что домохозяйству известны траектории всех экзогенных переменных на всем рассматриваемом временном интервале. Вторая постановка – стохастический случай, когда домохозяйство знает только закон распределения экзогенных переменных. Детерминированная постановка позволит получить аналитическое решение и подробно проанализировать свойства, которые привносит в модель специфическое условие трансверсальности, изначально описанное в работе [Пильник, Поспелов, 2007]. На примере стохастической постановки модели будет показано, какие сложности, связанные с использованием терминальных условий, могут возникать в задачах стохастической оптимизации и DSGE-моделях.

В статье рассматривается задача только одного экономического агента – домохозяйства. В большинстве современных DSGE-моделей именно этот блок (или один из блоков этого типа) описывается наиболее детально и представляет основную сложность. В этом плане выводы, полученные в статье, относятся не только к таким оптимизационным задачам, но и моделям равновесия в целом.

2. Детерминированный случай

2.1. Постановка задачи домохозяйства

Перейдем к рассмотрению детерминированной постановки оптимизационной задачи. Рассмотрим домохозяйство, которое максимизирует полезность собственного потребления на протяжении последовательности моментов времени из конечного набора $t = 0,\ldots,T-1$.

$$\text{(2.1)} \qquad \sum_{t=0}^{T-1} U\left(C_t\right)\beta^t \to \max$$

за счет выбора траекторий потребления C_t, объема купленных инвестиционных товаров I_t, остатков денежных средств M_t, объема накопленных сбережений B_t и вложений в капитал K_t в рамках финансового баланса

$$\text{(2.2)} \qquad M_{t+1} - M_t = W_t - p_t^C C_t - p_t^I I_t - B_{t+1} + \left(1 + r_t^B\right)B_t + r_t^K p_{t-1}^I K_t,\ t = 0,\ldots,T-1,$$

где W_t – экзогенный входящий денежный поток, который можно интерпретировать и как оплату труда, и как объем получаемых дивидендов; p_t^C, p_t^I – цены потребительских и инвестиционных товаров; r_t^B, r_t^K – доходности накопленных сбережений и вложений в капитал. Отметим, что, в отличие от задач в непрерывном времени, при формулировке задач в дискретном времени могут использоваться различные обозначения индекса времени для запасов и потоков. В настоящей статье используется система обозначений, аналогичная [McCandless, 2009; Costa, 2018], которая предполагает, что для запасов индекс времени указывает на начало периода. Таким образом, домохозяйство выбирает переменные типа «поток» C_t, I_t для моментов времени $t = 0,\ldots,T-1$, а переменные типа «запас» M_t, B_t, K_t для моментов времени $t = 1,\ldots,T$, причем значения M_0, B_0, K_0 считаются известными. Отдельно заметим, что в списке начальных условий только запасы, решение задачи агента, как будет показано далее, не будет зависеть от начальных условий потоков.

Например, M_t – объем денежных средств на начало периода t, а M_{t+1} – объем денежных средств на начало периода $t+1$, что эквивалентно объему денежных средств на конец периода t. В изменение этого запаса вносят изменения потоки периода t, например, входящий денежный поток W_t. В этой логике потоки периода t, которые измеряются в ценах базового периода, умножаются на средние индексы цен этого же периода как, например, $p_t^C C_t$, а проценты по запасам начисляются на значения соответствующих запасов на начало периода, т.е. $r_t^B B_t$.

Сложнее обстоит ситуация с расчетом доходности капитала r_t^K, поскольку начисления происходят не на объем капитала K_t, а на стоимость капитала в предыдущем периоде $p_{t-1}^I K_t$, поскольку именно эта сумма отражает объем вложений в этот актив со стороны домохозяйства. При этом поскольку (2.2) может быть записано в том числе для момента $t = 0$, то в задаче появляется произведение $p_{-1}^I K_0$, относящееся не к стартовому периоду $t = 0$, а скорее к предыдущему периоду, предшествующему интервалу планирования, значения переменных в котором считаются заданными. Таким образом, K_0 – начальное значение капитала в рассматриваемой задаче, а p_{-1}^I – начальное значение цен, в которых номинирован этот капитал.

В качестве функции полезности будет использоваться CRRA-функция в виде

(2.3) $$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Заметим, что далее, если не уточняется иное, предполагается, что в используемых соотношениях параметр времени t изменяется от 0 до $T-1$, как в (2.2).

Также в задаче ставится динамическое ограничение, связывающее инвестиции и изменение вложений в капитал

(2.4) $$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t,$$

где δ – норма амортизации капитала. Наконец, в задачу домохозяйства добавляется ограничение ликвидности, определяющее его спрос на деньги для работы с другими активами

(2.5) $$M_t \geq \tau^B B_t + \tau^K p_{t-1}^I K_t,\ t = 1,\ldots,T-1.$$

Поскольку задача решается на конечном временном интервале, то дополнительно ставится терминальное ограничение в виде

(2.6) $$M_T + a_T^B B_T + a_T^K K_T \geq \gamma\left(M_0 + a_0^B B_0 + a_0^K K_0\right).$$

В такой постановке предполагается, что домохозяйство решает свою задачу при известных для всех моментов времени экзогенных переменных $W_t, p_t^C, p_t^I, r_t^B, r_t^K$, причем если переменные W_t, p_t^C, r_t^B, r_t^K известны для всех моментов времени 0 до $T-1$, то для p_t^I в силу (2.2) должно быть задано кроме значений для всех моментов времени 0 до $T-1$ еще и начальное значение, обозначаемое p_{-1}^I.

Заметим, что использование в (2.2) вместо слагаемого $r_t^K p_{t-1}^I K_t$ его аналога $r_t^K p_t^I K_t$ может показаться более естественным, однако это не так. Кроме содержательного соображения, что доходность рассчитывается от объема вложений, т.е. стоимости капитала в предыдущем периоде, задаваемого величиной $p_{t-1}^I K_t$, обратим также внимание на то, что при использовании в этом выражении переменной p_t^I возникает проблема оценки стоимости капитала в последний момент времени K_T, поскольку, как будет показано далее, эта оценка связана с переменной p_T^I, которая относится к моменту времени после рассматриваемого интервала. И если для детерминированной постановки знание этой переменной агентом еще можно предположить, то для рассматриваемой далее стохастической постановки это приводит к явному противоречию.

Отдельно остановимся на терминальном условии (2.6), общую идею постановки которого, основанную на описании динамики первого интеграла поля экстремалей оптимизационной задачи, можно найти в работе [Пильник, Поспелов, 2007]. Там же представлено исследование свойств этого условия в рамках моделей общего равновесия в непрерывном времени. Это условие связывает значение запасов агента (в непрерывной постановке – фазовых переменных) в начальный и конечный моменты времени через заданный коэффициент γ, допустимые значения которого, обеспечивающие разрешимость исходной задачи, обсуждаются в подразделе 2.3.2. В свою очередь коэффициенты $a_T^B, a_T^K, a_0^B, a_0^K$ определяются в процессе решения задачи агента и не требуют задания на этапе ее постановки. В работе [Андреев и др., 2007] показано, что наличие в задаче одного условия такого вида оказывается достаточным для существования решения на конечном временном интервале.

Также отметим, что полученные далее выводы относительно свойств решения оптимизационной задачи домашнего хозяйства верны не только для представленного в рамках соотношений (2.1)–(2.6) наборе переменных. Вообще говоря, эта задача может быть существенно изменена или дополнена другими потоками и запасами (налоги, показатели рынка труда, валютные активы или пассивы и так далее). В рассматриваемом случае для наглядности выбраны наиболее часто используемые в моделях общего равновесия переменные.

2.2. Решение задачи домохозяйства

Для оптимальности траекторий C_t, I_t, M_t, B_t, K_t достаточно, чтобы они доставляли максимум функции Лагранжа

$$\begin{aligned}&\sum_{t=0}^{T-1} U(C_t)\beta^t + \xi_t\left(-M_{t+1} + M_t + W_t - p_t^C C_t - p_t^I I_t - B_{t+1} + \left(1 + r_t^B\right)B_t + r_t^K p_{t-1}^I K_t\right) + \\ &+\psi_t\left(-K_{t+1} + K_t + I_t - \delta K_t\right) + \varphi_t\left(M_t - \tau^B B_t - \tau^K p_{t-1}^I K_t\right) + \\ &+\Phi\left(M_T + a_T^B B_T + a_T^K K_T - \gamma\left(M_0 + a_0^B B_0 + a_0^K K_0\right)\right)\end{aligned} \tag{2.7}$$

при выполненных условиях дополняющей нежесткости для учета неравенств (2.5) и (2.6).

(2.8)
$$\varphi_t\left(M_t - \tau^B B_t - \tau^K p^I_{t-1} K_t\right) = 0,\ \varphi_t \ge 0,\ M_t \ge \tau^B B_t + \tau^K p^I_{t-1} K_t,\ t = 1,\ldots,T-1,$$
$$\Phi\Big(M_T + a^B_T B_T + a^K_T K_T - \gamma\left(M_0 + a^B_0 B_0 + a^K_0 K_0\right)\Big),$$

(2.9)
$$\Phi \ge 0,\ M_T + a^B_T B_T + a^K_T K_T \ge \gamma\left(M_0 + a^B_0 B_0 + a^K_0 K_0\right).$$

Выражение (2.7) достигает максимума по траекториям C_t, M_t, K_t, I_t, B_t тогда и только тогда, когда в каждой точке обращаются в ноль производные по C_t, I_t, $t = 0,\ldots,T-1$, производные по M_t, K_t, B_t, $t = 1,\ldots,T-1$, а также производные по M_T, K_T, B_T (момент времени T выделяется отдельно в силу специфичности условий оптимальности для конца интервала планирования). Тогда получим следующие три группы условий, отличающихся моментами времени, для которых они актуальны. Первая группа – условия оптимальности по C_t, I_t, записанные для $t = 0,\ldots,T-1$,

(2.10)
$$U'(C_t)\beta^t - \xi_t p^C_t = 0,$$

(2.11)
$$\psi_t - \xi_t p^I_t = 0.$$

Вторая группа – условия оптимальности по M_t, K_t, B_t, записанные для $t = 0,\ldots,T-2$,

(2.12)
$$-\xi_t + \xi_{t+1} + \varphi_{t+1} = 0,$$

(2.13)
$$\xi_{t+1} r^K_{t+1} p^I_t - \psi_t + \psi_{t+1}(1+\delta) - \varphi_{t+1}\tau^K p^I_t = 0,$$

(2.14)
$$-\xi_t + \xi_{t+1}\left(1 + r^B_{t+1}\right) - \varphi_{t+1}\tau^B = 0.$$

Третья группа – условия оптимальности по M_T, K_T, B_T

(2.15)
$$-\xi_{T-1} + \Phi = 0,$$

(2.16)
$$-\psi_{T-1} + \Phi a^K_T = 0,$$

(2.17)
$$-\xi_{T-1} + \Phi a^B_T = 0.$$

Соотношения (2.2), (2.4), (2.8)–(2.17) образуют полную систему условий для определения решения задачи домохозяйства.

В силу свойств функции полезности $U(C_t)$ (бесконечному значению производной в нуле и положительности при любом конечном значении аргумента) и положительности цен p^C_t из (2.10) следует, что переменная ξ_t положительна при всех $t = 0,\ldots,T-1$. Тогда из (2.15) следует, что

(2.18)
$$\Phi = \xi_{T-1} > 0.$$

В свою очередь из условия (2.11) и пары условий (2.16), (2.17) могут быть найдены коэффициенты терминального ограничения (2.6) перед переменными в последний момент времени T

(2.19) $$a_T^B = 1, \quad a_T^K = p_{T-1}^I.$$

Представляется естественным аналогичным образом задать и значения коэффициентов терминального ограничения (2.6) перед переменными в начальный момент времени

(2.20) $$a_0^B = 1, \quad a_0^K = p_{-1}^I.$$

Отметим, что в соотношении (2.20) появляется индекс $t = -1$, обозначающий, что используется последнее известное значение цен инвестиционных товаров из предыстории. Тогда в силу условия дополняющей нежесткости (2.9) с учетом строго неравенства (2.18) и значений на коэффициенты (2.19) и (2.20) можем переписать терминальное условие (2.6) в виде

(2.21) $$M_T + B_T + p_{T-1}^I K_T = \gamma\left(M_0 + B_0 + p_{-1}^I K_0\right).$$

В силу неотрицательности двойственной переменной φ_t из (2.12) следует, что ξ_t не может возрастать по времени, т.е.

(2.22) $$\varphi_t = \xi_{t-1} - \xi_t \geq 0.$$

Тогда согласно (2.18) и (2.22) можем утверждать, что для всех моментов времени

$$\xi_t > 0.$$

Поэтому для удобства дальнейших преобразований введем переменную ρ_t, равную темпу падения двойственной переменной к финансовому балансу ξ_t, в виде

(2.23) $$\rho_t = -\frac{\xi_t - \xi_{t-1}}{\xi_t}.$$

Кроме того, также для компактности используемых соотношений введем показатели инфляции для инвестиционного и потребительского товара

(2.24) $$i_t^I = \frac{p_t^I - p_{t-1}^I}{p_{t-1}^I}, \; i_t^C = \frac{p_t^C - p_{t-1}^C}{p_{t-1}^C}.$$

Тогда из (2.12), (2.14) и (2.23) получим

(2.25) $$\rho_t = \frac{r_t^B}{1 + \tau^B}.$$

В свою очередь из (2.12), (2.13), (2.11) с учетом введенных обозначений (2.23) и (2.24) следует

$$\rho_t = \frac{r_t^K + i_t^I - \left(1 + i_t^I\right)\delta}{1 + \tau^K}. \qquad (2.26)$$

Из (2.25) и (2.26) можно видеть, что между переменными r_t^B, r_t^K и i_t^I должна существовать постоянная линейная связь, в противном случае задача домохозяйства окажется неразрешима. Технически такая особенность решения связана с тем, что мы не ставим ограничения на переменные B_t и K_t, содержательно – с тем, что мы изначально хотим найти внутреннее решение, предполагающее одновременную положительность обоих активов. Задачи с ограничениями (причем это могут быть не только требования неотрицательности, но и более сложные ограничения) представляют собой особый интерес, но в данном случае рассматриваться не будут.

Будем считать, что процентная ставка r_t^B строго положительна для всех моментов времени. Тогда из (2.25) следует, что $\rho_t > 0$, а поэтому из (2.23) и (2.22) получаем, что $\varphi_t > 0$. Следовательно, в силу условия дополняющей нежесткости (2.8) ограничение (2.5) будет выполнено как строгое равенство.

$$M_t = \tau^B B_t + \tau^K p_{t-1}^I K_t,\ t = 1, \ldots, T-1. \qquad (2.27)$$

В работах [Андреев и др., 2007; Pospelov, 2013] для более общего аналога рассматриваемой задачи показано, что для описания решения задачи агента удобно ввести переменную, представляющую собой линейную комбинацию запасов, находящихся в управлении агента, в виде

$$\Omega_t = M_t + B_t + p_{t-1}^I K_t. \qquad (2.28)$$

Как показано в работе [Пильник, Поспелов, 2007], переменная Ω_t может быть интерпретирована как собственный капитал агента. Возможна также ее интерпретация как объем чистых активов, но в случае рассматриваемой задачи это не так наглядно, поскольку в ней отсутствуют пассивы (хотя в качестве кредитов можно рассмотреть случай отрицательной B_t). Тогда финансовый баланс (2.2) с учетом условий оптимальности (2.25), (2.26) и (2.27) может быть записан в весьма компактом виде

$$\Omega_{t+1} - \Omega_t = \rho_t \Omega_t + W_t - p_t^C C_t. \qquad (2.29)$$

Уравнение (2.29) описывает причины изменения собственного капитала агента во времени. В случае рассматриваемой задачи увеличение собственного капитала происходит за счет доходности ρ_t и внешнего притока W_t, а уменьшение – за счет расходов на потребление $p_t^C C_t$. Выше мы уже говорили о том, что рассматриваемая задача может быть расширена за счет добавления других переменных. Удобство замены (2.28), основанной на (2.6) и условиях оптимальности (2.19), позволяет и в более общих случаях получить соотношение вида (2.29) и далее работать с ним, а не с исходным набором активов и пассивов агента.

Замена (2.28) также позволяет переписать и терминальное условие (2.21) в виде

$$\Omega_T = \Omega_0 \gamma. \tag{2.30}$$

Таким образом терминальное ограничение (2.6) может интерпретироваться как условие на рост собственного капитала агента в течение периода его планирования.

Условие (2.10) в предположении о виде функции полезности (2.3) позволяет получить динамическое уравнение для потребления

$$C_t = C_{t-1}\beta^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1+\rho_t}{1+i_t^C}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ t = 1,\ldots,T-1 \tag{2.31}$$

и выразить траекторию потребления через параметры, экзогенные и двойственные переменные задачи домохозяйства как

$$C_t = \tilde{C}\beta^{\frac{t+1}{\alpha}}\left(\prod_{i=0}^{t}\frac{1+\rho_i}{1+i_i^C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.32}$$

Отдельно следует остановиться на константе $\tilde{C}$. Если бы задача ставилась в непрерывном времени (как, например, в работе [Пильник, Поспелов, 2007]), то константа $\tilde{C}$ соответствовала бы начальному значению управления, которое тоже определяется из задачи агента. В случае задачи в дискретном времени более естественно рассматривать величину C_0 в качестве объема потребления в первом периоде, которая, как можно видеть из (2.32), выражается через константу $\tilde{C}$ следующим образом:

$$C_0 = \tilde{C}\beta^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1+\rho_0}{1+i_0^C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.33}$$

Обратим внимание, что если известна предыстория поведения домохозяйства на каком-то временном интервале, предшествующем рассматриваемому в задаче (например, анализируется случай последовательного решения задач аналогичных рассматриваемой), то может быть известна величина C_{-1} – уровень потребления в момент $t = -1$, непосредственно предшествующий определяемому домохозяйством в рамках задачи. Переменная C_t является управлением типа «поток», поэтому для нее значение C_{-1} и константа $\tilde{C}$ из (2.33) совершенно не обязаны совпадать, поэтому отождествлять константу $\tilde{C}$ с начальным значением переменной в случае задачи в дискретном времени, вообще говоря, неверно.

Для того чтобы определить $\tilde{C}$, разрешим (2.29) относительно начального значения собственного капитала

$$\Omega_{t+1} = \Omega_0 \prod_{i=0}^{t} \left(1+\rho_i\right) + \sum_{i=0}^{t} \left(W_i - p_i^C C_i\right) \prod_{j=i+1}^{t} \left(1+\rho_j\right). \tag{2.34}$$

Аналогично [Пильник, Поспелов, 2007] введем для удобства параметр $\overline{\gamma}$ в виде

$$\overline{\gamma} = 1 - \gamma \prod_{t=0}^{T-1} \frac{1}{1+\rho_t}. \tag{2.35}$$

Тогда, переписав выражение (2.34) в момент времени $t = T-1$ с учетом (2.30), (2.32) и (2.35), получим

$$\tilde{C} = \frac{\Omega_0 \overline{\gamma} + \sum\limits_{t=0}^{T-1} W_t \prod\limits_{i=0}^{t} \frac{1}{1+\rho_i}}{p_{-1}^C \sum\limits_{t=0}^{T-1} \beta^{\frac{t+1}{\alpha}} \left(\prod\limits_{i=0}^{t} \frac{1+\rho_i}{1+i_i^C} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}. \tag{2.36}$$

2.3. Исследование решения детерминированной задачи домохозяйства

2.3.1. Задача с бесконечным горизонтом планирования как предельный случай задачи домохозяйства

В этом разделе мы покажем несколько свойств рассматриваемой детерминированной оптимизационной задачи, поставленной на конечном временном интервале, связанных с использованием терминального условия в виде (2.6). Во-первых, покажем его достаточную общность, позволяющую получать как предельный случай граничное условие из задач с бесконечным горизонтом планирования, описанных в работах [McCandless, 2009; Chang, 1998; Kamihigashi, 2001; Blot, Hayek, 2014].

Для этого заметим, что из (2.34) может быть получена удобная форма записи условия трансверсальности для задачи на бесконечном временном горизонте $T \to +\infty$. Для этого перепишем в виде

$$\sum_{i=0}^{T-1} \left(p_i^C C_i - W_i\right) \prod_{j=0}^{i} \frac{1}{1+\rho_j} = \Omega_0 - \Omega_T \prod_{i=0}^{T-1} \frac{1}{1+\rho_i}. \tag{2.37}$$

Аналогично [McCandless, 2009] перейдем к пределу $T \to +\infty$ и потребуем, чтобы рост Ω_T был ограничен в смысле

$$\lim_{T \to +\infty} \Omega_T \prod_{t=0}^{T-1} \frac{1}{1+\rho_t} = 0. \tag{2.38}$$

При этом задача будет разрешима только тогда, когда выполнено неравенство, следующее из (2.34) и неотрицательности расходов на потребление $p_t^C C_t$,

$$\sum_{t=0}^{T-1} W_t \prod_{i=0}^{t} \frac{1}{1+\rho_i} \geq -\Omega_0 \overline{\gamma}, \tag{2.39}$$

которое задает соотношение между начальным условием на Ω_0 и траекторией W_t. Аналог (2.39) в задаче с бесконечным временным горизонтом $T \to +\infty$ будет иметь вид

$$\sum_{t=0}^{+\infty} W_t \prod_{i=0}^{t} \frac{1}{1+\rho_i} \geq -\Omega_0. \tag{2.40}$$

Таким образом, можно утверждать, что задача с бесконечным горизонтом планирования является предельным случаем рассматриваемой задачи с учетом терминального условия(2.38). Важно отметить, что даже в задаче с несколькими запасами (в случае задачи в непрерывном времени – фазовыми переменными) для существования решения, как показано в [Пильник, Поспелов, 2007], оказывается достаточно одного терминального условия.

2.3.2. Воспроизводимость в задаче с конечным горизонтом траекторий из задачи с бесконечным горизонтом

Второй особенностью рассматриваемого терминального условия является возможность в задаче, поставленной на конечном временном интервале, воспроизводить часть оптимальной траектории потребления из задачи с бесконечным горизонтом планирования за счет выбора параметра терминального условия.

Покажем, при каких значениях параметров терминального условия (2.6) в задаче с конечным горизонтом T за счет выбора параметра γ может быть воспроизведена часть траектории управления C_t, полученная в задаче с бесконечным горизонтом. Для этого приравняем соотношение (2.36), записанное для конечного значения T и для $T \to +\infty$ при выполнении условия трансверсальности (2.38). Выразив параметр $\overline{\gamma}$, получим

$$\overline{\gamma}^* = A_T + \frac{1}{\Omega_0}\left(A_T \sum_{t=0}^{+\infty} W_t \prod_{i=0}^{t} \frac{1}{1+\rho_i} - \sum_{t=0}^{T-1} W_t \prod_{i=0}^{t} \frac{1}{1+\rho_i} \right), \tag{2.41}$$

где

$$A_T = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^{\frac{t+1}{\alpha}} \left(\prod_{i=0}^{t} \frac{1+\rho_i}{1+i_i^C} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \Bigg/ \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^{\frac{t+1}{\alpha}} \left(\prod_{i=0}^{t} \frac{1+\rho_i}{1+i_i^C} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \tag{2.42}$$

Причем выражение (2.41) может принимать и отрицательные значения при соответствующих значениях W_t.

Однако нужно учитывать, что особенностью терминального условия (2.6) являются ограничения на возможные значения параметра γ, при которых задача домохозяйства в принципе разрешима. Заметим, что в том числе ставится вопрос о возможности выбора параметра терминального условия в соответствии с (2.41)–(2.42). Определим, какие допустимые значения может в принципе принимать параметр $\overline{\gamma}$. Минимальное значение $\overline{\gamma}$, соответствующее максимальному значению γ, согласно (2.35), может быть получено из условия, что $\tilde{C} = 0$ (и тем самым согласно (2.32) оптимальный уровень потребления $C_t = 0$) и записывается в виде пары эквивалентных условий

$$\overline{\gamma}_{\min} = -\frac{1}{\Omega_0}\sum_{t=0}^{T-1} W_t \prod_{i=0}^{t} \frac{1}{1+\rho_i}, \tag{2.43}$$

$$\gamma_{\max} = \prod_{t=0}^{T-1}(1+\rho_t) + \frac{1}{\Omega_0}\sum_{t=0}^{T-1} W_t \prod_{i=t+1}^{T-1}(1+\rho_i). \tag{2.44}$$

Минимальное значение γ, соответствующее максимальному значению $\overline{\gamma}$, может быть найдено из условия (2.34), но записанного не от стартового момента ноль, а от конечного момента T так, чтобы $\lim\limits_{t\to+\infty}\Omega_t$ удовлетворял условию (2.38). То есть фактически мы тем самым находим минимальное (возможно отрицательное) значение собственного капитала Ω_T, которое при минимальном потреблении $C_t = 0$ за горизонтом T способно обеспечить выполнение условия трансверсальности (2.38). Таким образом можем записать

$$\gamma_{\min} = -\frac{1}{\Omega_0}\sum_{t=T}^{+\infty} W_t \prod_{i=T}^{t} \frac{1}{1+\rho_i}, \tag{2.45}$$

$$\overline{\gamma}_{\max} = 1 + \frac{1}{\Omega_0}\left(\prod_{i=0}^{T-1}\frac{1}{1+\rho_i}\right)\sum_{t=T}^{+\infty} W_t \prod_{i=T}^{t}\frac{1}{1+\rho_i}. \tag{2.46}$$

Заметим, что если входящий поток W_t отсутствует, то согласно соотношениям (2.43) и (2.46) $\overline{\gamma}$ может принимать значения в отрезке $[0,1]$, что позволяет ее интерпретировать как долю максимально возможного собственного капитала Ω_T (которую можно найти из (2.34) при $C_t = 0$), использованную для потребления.

Покажем, что $\overline{\gamma}^*$ из (2.41) всегда может быть реализована. Заметим, что из (2.42) $A_T \geq 0$. Тогда неравенство $\overline{\gamma}_{\min} \leq \overline{\gamma}^*$ следует из (2.40), (2.41) и (2.43). Если же учесть, что из (2.42) также следует, что $A_T \leq 1$, то из (2.41) и (2.46) следует, что $\overline{\gamma}^* \leq \overline{\gamma}_{\max}$. Таким образом, в рассматриваемой задаче домохозяйства с конечным горизонтом планирования T при любых начальных условиях (при которых существует решение, т.е. выполнено (2.40)) можно подобрать параметр γ так, что траектории потребления C_t и собственного капитала Ω_t (что следует из (2.34)) совпадут с частями траекторий этих же переменных, полученных в задаче с бесконечным горизонтом планирования.

Кроме того, можно сформулировать и более сильное утверждение, следующее из предыдущего вывода. Рассмотрим набор дискретных временных интервалов $[\tau_0,T_0],[\tau_1,T_1],[\tau_2,T_2],\ldots,[\tau_n,T_n]$, где $\tau_0=0$ и для всех i верно, что $\tau_i \le \tau_{i+1} \le T_i$, т.е. каждый следующий интервал начинается внутри предыдущего. Домохозяйство в каждый момент τ_i решает свою задачу для интервала $[\tau_i,T_i]$ при заданном значении запасов (или собственного капитала Ω_{τ_i}) и следует полученному решению вплоть до момента τ_{i+1}. В момент τ_{i+1} домохозяйство фиксирует значения своих запасов (или собственного капитала $\Omega_{\tau_{i+1}}$) и перерешивает свою задачу для интервала $[\tau_{i+1},T_{i+1}]$, после чего последовательность действий повторяется.

В такой постановке оказывается возможным подобрать такие значения параметров терминальных условий $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ для каждого из рассматриваемых интервалов, что на отрезке $[0,T_n]$ будет реализована траектория потребления C_t и собственного капитала Ω_t, совпадающая с решением задачи домохозяйства, изначально сформулированной на отрезке $[0,T_n]$ с учетом (2.41), (2.42). То есть хотя отдельные участки траектории C_t были получены в разных оптимизационных задачах, связанных между собой только через начальные значения запасов, итоговый результат будет удовлетворять (2.31) для всех $t\in[0,T_n]$.

2.3.3. Продолжимость предыдущей траектории потребления

Третья особенность рассматриваемой задачи связана с возможностью продолжения предыдущей траектории потребления. В отличие от переменных, характеризующих уровень накопленных запасов M_t,B_t,K_t, значения которых наследуются из предыдущих периодов через задание начальных значений M_0,B_0,K_0, значение потребления из предшествующего планируемому интервалу момента времени в решении вообще не используется. Возникает естественный вопрос, насколько описанное выше свойство преемственности по времени может быть воспроизведено для произвольного стартового значения потребления.

Пусть в периоде, предшествующем периоду ноль, в результате решения домохозяйством своей задачи на интервале $[t',T']$, таком что $t'<0\le T'$, было получено значение потребления C_{-1}. Тогда может быть решена обратная задача: из соотношения (2.36) может быть найдено значение параметра $\overline{\gamma}$, обеспечивающее преемственность траектории потребления в смысле $\tilde{C}=C_{-1}$,

$$\text{(2.47)}\qquad \overline{\gamma}^{**}=\frac{1}{\Omega_0}\left(C_{-1}p_{-1}^{C}\sum_{t=0}^{T-1}\beta^{\frac{t+1}{\alpha}}\left(\prod_{i=0}^{t}\frac{1+\rho_i}{1+i_i^C}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-\sum_{t=0}^{T-1}W_t\prod_{i=0}^{t}\frac{1}{1+\rho_i}\right).$$

Проверим продолжимость произвольного значения C_{-1}. Для этого согласно (2.43)–(2.46) должно быть выполнено двойное неравенство

(2.48) $$\overline{\gamma}_{\min} \le \overline{\gamma}^{**} \le \overline{\gamma}_{\max}.$$

Левая часть (2.48) в силу неотрицательности C_{-1} по описанному выше построению выполнена всегда. В свою очередь, правая часть (2.48) согласно (2.47) и (2.46) выполняется, только если

(2.49) $$C_{-1} p_{-1}^{C} \sum_{t=0}^{T-1} \beta^{\frac{t+1}{\alpha}} \left(\prod_{i=0}^{t} \frac{1+\rho_i}{1+i_i^C} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \le \Omega_0 + \sum_{t=0}^{+\infty} W_t \prod_{i=0}^{t} \frac{1}{1+\rho_i}.$$

В силу (2.49) значение C_{-1} может попасть в одну из трех групп. Если

(2.50) $$C_{-1} \le \frac{\Omega_0 + \sum_{t=0}^{+\infty} W_t \prod_{i=0}^{t} \frac{1}{1+\rho_i}}{p_{-1}^{C} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^{\frac{t+1}{\alpha}} \left(\prod_{i=0}^{t} \frac{1+\rho_i}{1+i_i^C} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}},$$

то может быть построена траектория потребления, продолжающая значение C_{-1}, т.е. в смысле (2.33) выполняется $\tilde{C} = C_{-1}$ при любом горизонте T. Заметим, что правая часть неравенства совпадает с (2.36) при $T \to +\infty$.

Если же соотношение (2.50) не выполнено, то это означает, что значение C_{-1} не может быть продолжено на бесконечном горизонте и существует некоторый T^*, при котором (2.49) еще выполняется, а при $T^* + 1$ нарушается. Причем, если выполняется неравенство

$$C_{-1} > \frac{\Omega_0 + \sum_{t=0}^{+\infty} W_t \prod_{i=0}^{t} \frac{1}{1+\rho_i}}{p_{-1}^{C} \beta^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1+\rho_0}{1+i_0^C} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}},$$

то это означает, что $T^* = 0$, т.е. такой уровень потребления не может быть реализован ни на одном шаге.

Таким образом, при нарушении соотношения (2.50) в задаче с бесконечным горизонтом планирования ни при каких условиях не может выполняться соотношение (2.31) для момента времени $t = 0$, связывающее решение задачи C_0 с заданным значением C_{-1}, которое могло быть унаследовано от решения аналогичной задачи домохозяйства, но на более «раннем» интервале.

По результатам этого раздела мы можем сделать заключение, что используемое терминальное условие (2.6) в детерминированной оптимизационной задаче не только позволяет рассматривать как частный случай наиболее часто используемую постановку на бесконечном временном интервале, но позволяет воспроизводить в задаче с конечным горизонтом часть будущей траектории потребления из задачи с бесконечным горизонтом за счет выбора параметра терминального условия. Причем такой выбор параметра возможен всегда в отличие от выбора параметра для продолжения предыдущей траектории потребления. Далеко не все начальные значения потребления можно реализовать как решение оптимизационной задачи на бесконечном временном интервале. Более того, существуют такие начальные значения потребления, которые нельзя реализовать даже при решении задачи на один шаг вперед.

3. Стохастический случай

3.1. Постановка задачи домохозяйства

Найдя аналитическое решение задачи домохозяйства в детерминированной постановке и исследовав свойства оптимальных траекторий в зависимости от выбора параметров временного множества и терминального условия, перейдем к рассмотрению стохастической постановки. В целом, техника решения и отдельные выводы будут достаточно сильно перекликаться с предыдущим разделом, однако добавление случайных величин, как будет показано ниже, делают задачу домохозяйства существенно более сложной с точки зрения поиска аналитического решения.

Для описания случайности в оптимизационной задаче будем считать, что в каждый момент времени t случайным образом реализуется состояние s_t из множества возможных вариантов S. Последовательность реализовавшихся состояний от момента 0 до момента t будем обозначать как $s^t = (s_0, s_1, \ldots, s_t)$, а вероятность ее реализации как $\pi_t(s^t)$. Тогда можно считать аналогично [Ljungqvist, Sargent, 2018; Fernández-Villaverde et al., 2016], что домохозяйство максимизирует математическое ожидание полезности собственного потребления, которое может быть записано в виде

$$\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s^t} U\left(C_t\left(s^t\right)\right)\pi_t\left(s^t\right)\beta^t \to \max, \tag{3.1}$$

за счет выбора траекторий потребления $C_t(s^t)$, остатков денежных средств $M_t(s^{t-1})$, объема накопленных сбережений $B_t(s^{t-1})$ и вложений в капитал $K_t(s^{t-1})$ в рамках финансового баланса

$$\begin{aligned} M_{t+1}\left(s^t\right) - M_t\left(s^{t-1}\right) &= W_t\left(s^t\right) - p_t^C\left(s^t\right)C_t\left(s^t\right) - p_t^I\left(s^t\right)I_t\left(s^t\right) - \\ &- B_{t+1}\left(s^t\right) + \left(1 + r_t^B\left(s^t\right)\right)B_t\left(s^{t-1}\right) + r_t^K\left(s^t\right)p_{t-1}^I\left(s^{t-1}\right)K_t\left(s^{t-1}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Аналогично детерминированному случаю ставится динамическое ограничение, связывающее инвестиции и изменение вложений в капитал

$$(3.3)\qquad K_{t+1}\left(s^{t}\right)-K_{t}\left(s^{t-1}\right)=I_{t}\left(s^{t}\right)-\delta K_{t}\left(s^{t-1}\right),$$

и требование на минимальный объем денежных средств

$$(3.4)\qquad M_{t}\left(s^{t-1}\right)\geq\tau^{B}B_{t}\left(s^{t-1}\right)+\tau^{K}p_{t-1}^{I}\left(s^{t-1}\right)K_{t}\left(s^{t-1}\right).$$

Начальные условия для M_0, B_0, K_0 считаются известными и ставится терминальное ограничение в виде

$$(3.5)\qquad M_{T}\left(s^{T-1}\right)+a_{T}^{B}\left(s^{T-1}\right)B_{T}\left(s^{T-1}\right)+a_{T}^{K}\left(s^{T-1}\right)K_{T}\left(s^{T-1}\right)\geq\gamma\left(M_{0}+a_{0}^{B}B_{0}+a_{0}^{K}K_{0}\right).$$

Обратим внимание, что коэффициенты терминального условия $a_T^B\left(s^{T-1}\right), a_T^K\left(s^{T-1}\right)$ зависят от реализовавшегося состояния, что может показаться несколько странным. Выше в соотношении (2.19) для детерминированной версии модели было показано, что эти коэффициенты при решении задачи приобретают смысл цен соответствующих запасов. Вполне естественно, что в разных состояниях эти цены приобретают разные значения (как, например, в ограничении 3.2)), а устойчивой остается только функциональная связь между этими коэффициентами и экзогенными переменными задачи. В этом смысле ограничение (3.5) можно воспринимать не как одно ограничение, которое должно быть выполнено в каждом состоянии в последний момент времени, а как семейство ограничений, в котором найдется свое для каждого состояния. При этом правая часть (3.5) не зависит от реализовавшегося состояния, поэтому можно считать, что это ограничение представляет собой требование на минимальный объем собственного капитала агента при всех реализуемых в различных состояниях мира значений экзогенных переменных.

В такой постановке предполагается, что домохозяйство решает свою задачу при известных для каждого состояния экзогенных переменных $W_t\left(s^t\right), p_t^C\left(s^t\right), p_t^I\left(s^t\right)$, $r_t^B\left(s^t\right), r_t^K\left(s^t\right)$, но не зная, о конкретном реализовавшемся состоянии, ориентируясь только на его вероятность.

3.2. Решение задачи домохозяйства

3.2.1. Достаточные условия оптимальности задачи

Для решения сформулированной задачи далее будут использоваться условия в форме Лагранжа, адаптированные для задач со стохастическими переменными. Эта техника, в целом, является достаточно стандартной и используется, например, при решении задач агентов в DSGE-моделях (подробнее она описана в [Ljungqvist, Sargent, 2018]). Тем не менее в большинстве современных работ пропускается этап работы с отдельными траекториями состояний мира и выписываются сразу условия оптимальности в терминах математических ожиданий. Но поскольку в настоящей статье рассматривается задача на конечном временном интервале со специфическими терминальными условиями, то далее будет использовано именно подробное описание по траекториям состояний мира.

Необходимые (и в силу вогнутости задачи достаточные) условия могут быть получены за счет вариации Лагранжиана вида (2.7), записанного с учетом двойного суммирования как в (3.1) и учета влияния реализовавшихся состояний на выполнение соотношений (3.2), (3.3), (3.4), а также терминального условия (3.5), по управлениям C_t, M_t, K_t, I_t, B_t. Эти условия для каждой последовательности состояний s^t записываются в виде следующего набора уравнений. Первая группа – условия оптимальности по C_t, I_t, записанные для $t = 0,\dots,T-1$,

(3.6) $$U'\left(C_t\left(s^t\right)\right)\pi_t\left(s^t\right)\beta^t - \xi_t\left(s^t\right)p_t^C\left(s^t\right) = 0,$$

(3.7) $$\psi_t\left(s^t\right) - \xi_t\left(s^t\right)p_t^I\left(s^t\right) = 0.$$

Вторая группа – условия оптимальности по M_t, K_t, B_t, записанные для $t=0,\dots,T-2$

(3.8) $$-\xi_t\left(s^t\right) + \sum_{s^{t+1}|s^t}\xi_{t+1}\left(s^{t+1}\right) + \varphi_{t+1}\left(s^t\right) = 0,$$

(3.9) $$\sum_{s^{t+1}|s^t}\left(\xi_{t+1}\left(s^{t+1}\right)r_{t+1}^K\left(s^{t+1}\right)p_t^I\left(s^t\right) - \psi_{t+1}\left(s^{t+1}\right)\right) + \\ + \psi_t\left(s^t\right)\left(1+\delta\right) - \varphi_{t+1}\left(s^t\right)\tau^K p_t^I\left(s^t\right) = 0,$$

(3.10) $$-\xi_t\left(s^t\right) + \sum_{s^{t+1}|s^t}\xi_{t+1}\left(s^{t+1}\right)\left(1 + r_{t+1}^B\left(s^{t+1}\right)\right) - \varphi_{t+1}\left(s^t\right)\tau^B = 0.$$

Третья группа – условия оптимальности по M_t, K_t, B_t

(3.11) $$-\xi_{T-1}\left(s^{T-1}\right) + \Phi\left(s^{T-1}\right) = 0,$$

(3.12) $$-\psi_{T-1}\left(s^{T-1}\right) + \Phi\left(s^{T-1}\right)a_T^K\left(s^{T-1}\right) = 0,$$

(3.13) $$-\xi_{T-1}\left(s^{T-1}\right) + \Phi\left(s^{T-1}\right)a_T^B\left(s^{T-1}\right) = 0.$$

Соотношения (3.2), (3.3), (3.6)–(3.13), а также аналоги условий дополняющей нежесткости (2.8), (2.9) образуют полную систему условий для определения решения задачи домохозяйства в этой постановке.

Аналогично рассуждениям (2.18)–(2.20) можем на основании (3.11), (3.12) и (3.13) последовательно записать

(3.14) $$\Phi\left(s^{T-1}\right) = \xi_{T-1}\left(s^{T-1}\right) > 0,$$

(3.15) $$a_T^B\left(s^{T-1}\right) = 1,\ a_T^K\left(s^{T-1}\right) = p_{T-1}^I\left(s^{T-1}\right).$$

И как следствие из (3.14) и (3.15) получим аналогичное (2.21) терминальное условие, которое должно быть выполнено для всех возможных конечных состояний s^{T-1}

$$M_T\left(s^{T-1}\right)+B_T\left(s^{T-1}\right)+p_{T-1}^I\left(s^{T-1}\right)K_T\left(s^{T-1}\right)=\gamma\left(M_0+B_0+p_{-1}^I K_0\right). \tag{3.16}$$

Заметим, что соотношение (3.16) выполняется в любом случае, независимо от предыдущих состояний. Дело в том, что в момент $T-1$ агент уже знает значения всех экзогенных переменных, поэтому для него уже не остается неопределенности, и он направит все свои свободные в смысле (3.16) средства на увеличение потребления.

Аналогичное (2.23) выражение для доходности в случае стохастической задачи может быть записано для каждой пары последовательных состояний

$$\rho_t\left(s^t\right)=-\frac{\xi_t\left(s^t\right)-\xi_{t-1}\left(s^{t-1}\right)}{\xi_t\left(s^t\right)}. \tag{3.17}$$

Тогда с учетом (3.8), (3.9), (3.7) и (3.17) можно записать

$$\rho_t\left(s^t\right)=\frac{r_t^B\left(s^t\right)}{1+\tau^B}. \tag{3.18}$$

А с учетом (2.24), (3.8), (3.7), (3.10) и (3.17)

$$\rho_t\left(s^t\right)=\frac{r_t^K\left(s^t\right)+i_t^I\left(s^t\right)-\left(1+i_t^I\left(s^t\right)\right)\delta}{1+\tau^K}. \tag{3.19}$$

Таким образом, аналогично (2.25) и (2.26) из соотношений (3.18) и (3.19) снова для разрешимости задачи агента требуется связь между переменными r_t^B, r_t^K и i_t^I, выполненная отдельно для каждого состояния s^t.

С учетом использованной ранее замены (2.28) на основании соотношений (3.16), (3.18) и (3.19) финансовый баланс (3.2) может быть записан как уравнение на собственный капитал домохозяйства

$$\Omega_{t+1}\left(s^t\right)=\left(1+\rho_t\left(s^t\right)\right)\Omega_t\left(s^{t-1}\right)+W_t\left(s^t\right)-p_t^C\left(s^t\right)C_t\left(s^t\right), \tag{3.20}$$

а терминальное условие (3.5) переписано в виде

$$\Omega_T\left(s^{T-1}\right)=\Omega_0\gamma. \tag{3.21}$$

3.2.2. Алгоритм решения задачи

Далее опишем алгоритм получения полного решения задачи домохозяйства. Рассмотрим уравнение (3.20), записанное в последний момент $T-1$

(3.22) $$\Omega_T(s^{T-1}) = \left(1+\rho_{T-1}\left(s^{T-1}\right)\right)\Omega_{T-1}\left(s^{T-2}\right) + W_{T-1}\left(s^{T-1}\right) - p^C_{T-1}\left(s^{T-1}\right)C_{T-1}\left(s^{T-1}\right).$$

Из (3.22) может быть получено выражение для величины собственного капитала $\Omega_{T-1}\left(s^{T-2}\right)$ через следующее значение $\Omega_T\left(s^{T-1}\right)$, которое с учетом (3.21) записывается в виде

(3.23) $$\Omega_{T-1}\left(s^{T-2}\right) = \frac{\gamma\Omega_0 + W_{T-1}\left(s^{T-1}\right) - p^C_{T-1}\left(s^{T-1}\right)C_{T-1}\left(s^{T-1}\right)}{1+\rho_{T-1}\left(s^{T-1}\right)}.$$

Соотношение (3.23) может быть записано для разных состояний s^{T-1}, произвольную несовпадающую пару из которых для примера обозначим как s_j^{T-1} и s_k^{T-1}. Тогда в предположении, что каждому из этих состояний предшествовало одно и то же состояние s^{T-2} из (3.23), можем записать связь

(3.24) $$\frac{\gamma\Omega_0 + W_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right) - p^C_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)C_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)}{1+\rho_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)} = \\ = \frac{\gamma\Omega_0 + W_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right) - p^C_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right)C_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right)}{1+\rho_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right)}.$$

И таким образом из (3.24) можем выразить

(3.25) $$C_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right) = \frac{\left(1+\rho_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)\right)p^C_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right)}{\left(1+\rho_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right)\right)p^C_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)} \cdot C_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right) + \\ + \frac{\rho_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right) - \rho_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)}{1+\rho_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right)} \cdot \frac{\gamma\Omega_0}{p^C_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)} + \\ + \frac{1}{p^C_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)} \cdot \left(W_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right) - \frac{1+\rho_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)}{1+\rho_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right)} \cdot W_{T-1}\left(s_k^{T-1}\right)\right).$$

Соотношение (3.6) с учетом (3.8) и (3.17) может быть переписано в виде

(3.26) $$\frac{U'\left(C_{T-2}\left(s_i^{T-2}\right)\right)\pi_{T-2}\left(s_i^{T-2}\right)}{p^C_{T-2}\left(s_i^{T-2}\right)} = \\ = \sum_{s_j^{T-1}}\left(1+\rho_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)\right)\frac{\beta U'\left(C_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)\right)\pi_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)}{p^C_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)}.$$

Или с учетом (2.3) можно переписать (3.26) как

$$C_{T-2}\left(s^{T-2}\right)=\beta^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{s_j^{T-1}}\frac{1+\rho_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)}{1+i_{T-1}^{C}\left(s_j^{T-1}\right)}\pi_{T-1}\left(s_j^{T-1}\mid s^{T-2}\right)\left(C_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)\right)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \tag{3.27}$$

где

$$\pi_{T-1}\left(s_j^{T-1}\mid s^{T-2}\right)=\frac{\pi_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)}{\pi_{T-2}\left(s^{T-2}\right)}. \tag{3.28}$$

После этого на основе (3.27) с учетом (3.25) и (3.28) получается набор соотношений, который при заданных для каждого состояния s_j^{T-1} при фиксированном s^{T-2} значениях $\rho_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)$, которые определяются из экзогенных переменных согласно (3.18) и (3.19), позволяет при известном $C_{T-2}\left(s^{T-2}\right)$ найти каждое последующие $C_{T-1}\left(s_j^{T-1}\right)$. Кроме того, с использованием тех же (3.25), (3.27) и (3.28) соотношение (3.23) может быть переписано как зависимость $\Omega_{T-1}\left(s^{T-2}\right)$ от $C_{T-2}\left(s^{T-2}\right)$, экзогенных переменных $W_{T-1}\left(s^{T-1}\right)$, $p_{T-1}^{C}\left(s^{T-1}\right)$ и уже определившейся согласно (3.18) $\rho_{T-1}\left(s^{T-1}\right)$.

Далее эта процедура повторяется последовательно для каждого предыдущего момента времени. Аналогично (3.22) для момента $T-2$ выписывается соотношение на собственный капитал

$$\begin{aligned}\Omega_{T-1}\left(s^{T-2}\right)&=\left(1+\rho_{T-2}\left(s^{T-2}\right)\right)\Omega_{T-2}\left(s^{T-3}\right)+\\&+W_{T-2}\left(s^{T-2}\right)-p_{T-2}^{C}(s^{T-2})C_{T-2}\left(s^{T-2}\right),\end{aligned} \tag{3.29}$$

из которого аналогично (3.23) выражается $\Omega_{T-2}\left(s^{T-3}\right)$, позволяющее аналогично (3.24) записать соотношение, связывающее $C_{T-2}\left(s^{T-2}\right)$ для всех вариантов s^{T-2}. А соотношение, аналогичное (3.26), позволяет выразить каждое из них через $C_{T-3}\left(s^{T-3}\right)$. Причем благодаря полученному на предыдущем этапе соотношению, которое выражает $\Omega_{T-1}\left(s^{T-2}\right)$ через $C_{T-2}\left(s^{T-2}\right)$, после преобразования (3.29) в нем останется только значение собственного капитала в последний момент времени, значение которого известно из (3.21).

После повторения описанных выше итераций до момента 1 получим соотношение

$$\Omega_1\left(s^0\right)=\left(1+\rho_0\left(s^0\right)\right)\Omega_0+W_0\left(s^0\right)-p_0^{C}\left(s^0\right)C_0\left(s^0\right), \tag{3.30}$$

в котором $\Omega_1\left(s^0\right)$, согласно проведенным на предыдущих этапах преобразованиям, выражается через $C_0\left(s^0\right)$. Полученное из (3.30) итоговое соотношение для $C_0\left(s^0\right)$ будет включать начальное значение собственного капитала Ω_0, параметр γ и траектории $W_t\left(s^t\right)$, $p_t^C\left(s^t\right)$, $r_t^B\left(s^t\right)$ для всех возможных последовательностей состояний $s^0,\ldots,s^{T-1}$.

В итоге решением задачи агента является программа действий агента, которая в каждый момент времени t в зависимости от текущего состояния мира и значения запасов (или собственного капитала Ω_t) определяет уровень потребления $C_t\left(s^t\right)$.

3.3. Исследование решения стохастической задачи домохозяйства

3.3.1. Компактная запись условий оптимальности

Заметим, что умножив записанное для каждой комбинации состояний соотношение (3.26) на соответствующую вероятность и сложив все полученные соотношения, можно записать часто используемое выражение

$$\frac{U'(C_t)}{p_t^C}=\beta\,\mathrm{E}_t\frac{(1+\rho_{t+1})U'(C_{t+1})}{p_{t+1}^C}. \tag{3.31}$$

Аналогичный прием для уравнения (3.20) позволяет переписать через математические ожидания уравнения на динамику собственного капитала агента

$$\mathrm{E}_t\Omega_{t+2}=\Omega_{t+1}\mathrm{E}_t\left(1+\rho_{t+1}\right)+\mathrm{E}_t\left(W_{t+1}-p_{t+1}^C C_{t+1}\right). \tag{3.32}$$

Если к соотношениям (3.31) и (3.32) добавить терминальное условие (3.21), считая, что переменная ρ_t известна из условий оптимальности, то мы получим систему, полностью описывающую динамику потребления. Однако в таком виде исследовать ее оказывается крайне неудобно из-за того, что в (3.31) под математическим ожиданием с учетом (2.3) в знаменателе стоит степенная функция от переменной C_{t+1}, а в (3.32) – линейная функция от той же переменной. Поэтому в DSGE-моделях (см.: [McCandless, 2009; Fernández-Villaverde et al., 2016]), как правило, переходят к линейным приближениям исходных уравнений.

3.3.2. Аналог траектории сбалансированного роста в задаче домохозяйства

Линеаризация, как правило, проводится вокруг так называемой траектории сбалансированного роста, предполагающей, что в модели отсутствуют шоки, а все агенты решают свои задачи с учетом этой информации. То есть в терминах рассматриваемой нами задачи потребителя множество состояний в каждый момент времени t сокращается до одного (будем обозначать его $\overline{s}_t$), а сама задача решается исходя из предположения о том, что последовательность реализованных состояний $\overline{s}^{T-1}$ известна.

Заметим, что на выбор состояний, описывающих сбалансированный рост, часто накладываются дополнительные требования. Например, в случае рассматриваемой задачи утверждение об отсутствии шоков может быть записано как набор условий на математическое ожидание экзогенных переменных:

$$W_t\left(\overline{s}^t\right)=E_0W_t\left(s^t\right), \tag{3.33}$$

$$p_t^C\left(\overline{s}^t\right)=E_0p_t^C\left(s^t\right),\ p_t^I\left(\overline{s}^t\right)=E_0p_t^I\left(s^t\right), \tag{3.34}$$

$$r_t^K\left(\overline{s}^t\right)=E_0r_t^K\left(s^t\right),\ r_t^B\left(\overline{s}^t\right)=E_0r_t^B\left(s^t\right). \tag{3.35}$$

При этом, естественно, предполагается, что в каждый момент времени t среди исходного набора состояний существует последовательность состояний $\overline{s}^t$, удовлетворяющая соотношениям (3.33)–(3.35).

Сопоставим решение детерминированной задачи при последовательности реализованных состояний $\overline{s}^{T-1}$ и решение стохастической задачи. С учетом соотношений (3.25) и (3.27), записанных для произвольно момента времени t, можем записать для стохастической задачи

$$C_{t-1}\left(\overline{s}^{t-1}\right)=\beta^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{s_j^t}\frac{1+\rho_t\left(s_j^t\right)}{1+i_t\left(s_j^t\right)}\pi_t\left(s_j^t\,|\,\overline{s}^{t-1}\right)\left(\begin{array}{l}\dfrac{\left(1+\rho_t\left(s_j^t\right)\right)p_t^C\left(\overline{s}^t\right)}{\left(1+\rho_t\left(\overline{s}^t\right)\right)p_t^C\left(s_j^t\right)}\cdot C_t\left(\overline{s}^t\right)+\\+\dfrac{\rho_t\left(\overline{s}^t\right)-\rho_t\left(s_j^t\right)}{1+\rho_t(\overline{s}^t)}\cdot\dfrac{\gamma\Omega_0}{p_t^C(s_j^t)}+\\+\dfrac{1}{p_t^C\left(s_j^t\right)}\cdot\left(W_t\left(s_j^t\right)-\dfrac{1+\rho_t\left(s_j^t\right)}{1+\rho_t\left(\overline{s}^t\right)}\cdot W_t\left(\overline{s}^t\right)\right)\end{array}\right)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{3.36}$$

Аналогичное соотношение для детерминированной задачи, следующее из (2.31), записывается в виде

$$C_{t-1}\left(\overline{s}^{t-1}\right)=C_t\left(\overline{s}^t\right)\beta^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1+\rho_t\left(\overline{s}^t\right)}{1+i_t^C\left(\overline{s}^t\right)}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{3.37}$$

Выполнение одного из соотношений из пары (3.36) и (3.37) совершенно не означает выполнения второго, поскольку (3.36) содержит большее число произвольных значений экзогенных переменных. Тем не менее можно показать, что существуют такие комбинации этих экзогенных переменных, когда соотношения (3.36) и (3.37) окажутся эквиваленты. Рассмотрим частный случай, предполагающий

(3.38) $$W_t\left(s_j^t\right) = W_t\left(\overline{s}^t\right) = 0,\ \gamma = 0.$$

Тогда (3.36) перепишется в виде соотношения

(3.39) $$C_{t-1}\left(\overline{s}^{t-1}\right) = C_t\left(\overline{s}^t\right)\beta^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{s_j^t}\frac{1+\rho_t\left(s_j^t\right)}{1+i_t\left(s_j^t\right)}\pi_t\left(s_j^t \mid s^{t-1}\right)\left(\frac{\left(1+\rho_t\left(s_j^t\right)\right)p_t^C\left(\overline{s}^t\right)}{\left(1+\rho_t\left(\overline{s}^t\right)\right)p_t^C\left(s_j^t\right)}\right)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

которое с учетом (3.37) позволяет записать

(3.40) $$\left(\frac{1+\rho_t\left(\overline{s}^t\right)}{1+i_t^C\left(\overline{s}^t\right)}\right)^{1-\alpha} = \sum_{s_j^t}\left(\frac{1+\rho_t\left(s_j^t\right)}{1+i_t^C\left(s_j^t\right)}\right)^{1-\alpha}\pi_t\left(s_j^t \mid s^{t-1}\right)$$

или в терминах математического ожидания

(3.41) $$\left(\frac{1+\rho_t\left(\overline{s}^t\right)}{1+i_t^C\left(\overline{s}^t\right)}\right)^{1-\alpha} = E_{t-1}\left(\frac{1+\rho_t\left(s^t\right)}{1+i_t^C\left(s^t\right)}\right)^{1-\alpha}.$$

То есть сбалансированный рост в рамках рассматриваемой постановки может быть реализован в качестве решения исходной стохастической задачи агента только при условии, что совместное распределение экзогенных переменных удовлетворяет определенным соотношениям, частным случаем которых является набор (3.38), (3.41). Во всех остальных случаях оказывается, что при произвольном совместном распределении экзогенных переменных сбалансированный рост не является решением стохастической задачи агента, допускающей реализацию ровно тех же состояний, которые определяют сбалансированный рост. Таким образом, корректность линеаризации, вообще говоря, должна проверяться для каждой конкретной модели и каждого распределения случайных переменных отдельно.

3.3.3. Обсуждение подходов к анализу решения стохастической задачи

Для оценки воздействия отдельных шоков (т.е. реализаций состояния s_t, отличающегося от $\overline{s}_t$) обычно проводится анализ функций импульсного отклика (IRF – подробнее, например, в [Fernández-Villaverde et al., 2016]), т.е. рассчитываются отклонения траекторий, полученных при некотором произвольном наборе состояний, от траекторий сбалансированного роста при одинаковом наборе начальных значений и параметров. Если траектория сбалансированного роста может быть реализована в качестве оптимальной траектории в стохастической задаче, то этот прием позволяет игнорировать терминальное условие (3.21), определяющее начальный уровень потребления $\tilde{C}$ по аналогии с (2.33), и далее работать со стохастической динамической системой, состоящей из соотношений (3.31) и (3.32). Если же траектория сбалансированного роста не может быть реализована подобным образом, то возникнет систематическое расхождение, связанное с несовпадающими начальными значениями по потреблению $\tilde{C}$. Заметим при этом, что при такого рода анализе предполагается, что агент решает свою задачу в начальный момент времени ноль и действует в соответствии с построенной стратегией для всех моментов времени $t = 0,\dots,T-1$.

Выше при рассмотрении детерминированной задачи мы отмечали, что уравнение (2.31), описывающее динамику потребления, верно при $t = 0,\dots,T-1$. Но при выбранном в соответствии с (2.41) и (2.42) параметре граничного условия γ и в предположении, что до начального момента времени ноль поведение агента определялось такой же задачей с параметрами, выбранными аналогичным образом, уравнение (2.31) может быть записано и для $t = 0$. То есть именно в этом случае система, состоящая из уравнения для потребления (2.31), выполненного для $t = 1,\dots,T-1$, уравнения для собственного капитала (2.29), выполненного для $t = 0,\dots,T-1$, и выражения для начального значения потребления (2.36), может быть заменена динамической системой, состоящей из двух уравнений: (2.29) и (2.31), выполненных для всех $t = 0,\dots,T-1$.

Похожий прием может быть использован при записи уравнений для сбалансированного роста на основе (3.31) и (3.32), где распространение соотношения (3.31) на момент времени $t = 0$ осуществляется в предположении, что как минимум в предыдущий момент времени траектории переменных также соответствовали сбалансированному росту. Причем поскольку для остальных состояний эту пару уравнений удобно переписать в терминах отклонений от сбалансированного роста, то и начальные условия у этой динамической системы оказываются известны и равны нулю, поскольку Ω_0 фиксирована, а $\tilde{C}$ зависит только от распределения экзогенных переменных, но не зависит от конкретной реализации. И это полностью соответствует, например, стандартной практике исследования сбалансированного роста и функций импульсного отклика в DSGE-моделях, как, например, в [Fernández-Villaverde et al., 2016], соотношения которых могут быть переписаны в виде VAR-моделей.

Однако предположение о том, что до момента $t = 0$ траектория потребления соответствовала сбалансированному росту, не выглядит естественно, когда речь заходит о повторном решении своей задачи домохозяйством. Если потребление в предыдущий момент времени (выше мы его обозначали $t = -1$) не совпадает со значением на сбалансированном росте (а вероятность этого ненулевая, причем в случае бесконечного множества возможных состояний в этот момент она будет равна единице), то записывать для момента $t = 0$ соотношение (2.31) для сбалансированного роста или (3.31) для стохастической постановки некорректно. Причем, как показано в разделе 2.3, подбор параметров граничного условия может решить эту проблему только если выполнено (2.50), что, вообще говоря, совершенно неочевидно для произвольного распределения шоков, а тем более в постановках, где шоки описываются нормальным распределением и могут принимать произвольные значения от минус до плюс бесконечности.

Еще более сложной становится проблема связи начального модельного и последнего исторического значения потребления в ситуации, когда домохозяйство заново решает свою задачу каждый раз, когда поступает новая информация о реализации случайных экзогенных величин. Из-за того что начальное значение потребления не будет удовлетворять ни уравнению (2.31), ни уравнению (3.31), мы получим, что на фактической реализации эти уравнения не будут выполнены ни для одной точки. Таким образом, переход от системы соотношений, включающей (3.31), (3.32) и начальное условие, получаемое согласно алгоритму из раздела 2.2, к динамической системе, состоящей только из (3.31), распространенного на момент $t = 0$, и (3.32), является удобным приемом для анализа воздействия отдельных шоков на отклонение от сбалансированного роста, но порождает содержательное противоречие при анализе конкретных реализаций переменных модели, что становится особенно важно, например, для решения задач оценки параметров или прогнозирования.

4. Заключение

В статье на примере оптимизационной задачи домохозяйства, которое принимает решение об объемах потребления и инвестирования, показано, какие сложности возникают в детерминированных и стохастических постановках на конечном временном интервале. В задаче для ее разрешимости на конечном временном интервале добавляется специальное терминальное условие на собственный капитал агента, обобщающее стандартные варианты таких условий.

Первая постановка – детерминированный случай, предполагающий, что домохозяйству известны траектории всех экзогенных переменных на всем рассматриваемом временном интервале. Найдено аналитическое решение этой задачи и показано, что за счет выбора параметра терминального ограничения в задаче на конечном временном интервале всегда можно получить траекторию потребления из решения аналогичной задачи, поставленной для бесконечного горизонта планирования. Если же выбирать коэффициент терминального условия так, чтобы оптимальная траектория потребления продолжала историческую траекторию, то при определенном сочетании начальных условий задача домохозяйства может быть либо разрешима только до определенного горизонта планирования, либо быть вообще неразрешима.

Вторая постановка – стохастический случай, когда домохозяйство знает только закон распределения экзогенных переменных. Полное аналитическое решение в этом случае представить не удается, однако предлагается последовательный алгоритм, который дает пошаговое описание расчета такого решения. Показано, что сбалансированный рост в рамках рассматриваемой постановки может быть реализован в качестве решения исходной стохастической задачи агента только при условии, что совместное распределение экзогенных переменных удовлетворяет определенным соотношениям. Во всех остальных случаях оказывается, что при произвольном совместном распределении экзогенных переменных сбалансированный рост может не являться решением стохастической задачи агента, что позволяет сделать вывод, что корректность линеаризации вокруг сбалансированного роста, вообще говоря, должна проверяться для каждой конкретной модели и каждого распределения случайных переменных отдельно.

Еще более сложной становится проблема связи начального модельного и последнего исторического значения потребления в ситуации, когда домохозяйство заново решает свою задачу каждый раз, когда поступает новая информация о реализации случайных экзогенных величин. Показано, что переход от системы уравнений, описывающих решение задачи домохозяйства, к динамической системе, является удобным приемом для анализа воздействия отдельных шоков на отклонение от сбалансированного роста, но порождает содержательное противоречие при анализе конкретных реализаций переменных модели, что становится особенно важно, например, для решения задач оценки параметров или прогнозирования.

Исследование свойств решений обеих оптимизационных задач позволяет поставить вопрос о том, что дает учет стохастики в экономических моделях, использующих принцип оптимальности, если их аналитическое решение оказывается невозможным, а методы приближенного анализа (линеаризации) настолько модифицируют исходную модель, что из нее пропадают нелинейные эффекты, являющиеся главным следствием добавления случайных величин в модель.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Андреев М.Ю., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.Ю. Новая технология моделирования экономики и модель современной экономики России. М.: МИФИ, 2007.

Лобанов С.Г. К теории оптимального экономического роста // Экономический журнал ВШЭ. 1999. Т. 3. № 1. С. 28–41.

Пильник Н.П., Поспелов И.Г. О естественных терминальных условиях в моделях межвременного равновесия // Экономический журнал ВШЭ. 2007. Т. 11. № 1. С. 3–34.

Aseev S.M., Besov K.O., Kryazhimskii A.V. Infinite-Horizon Optimal Control Problems in Economics // Russian Mathematical Surveys. 2012. Vol. 67. № 2. P. 195.

Benveniste L.M., Scheinkman J.A. Duality Theory for Dynamic Optimization Models of Economics: The Continuous Time Case // Journal of Economic Theory. 1982. Vol. 27. № 1. P. 1–19.

Blot J., Hayek N. Infinite-Horizon Optimal Control in the Discrete-Time Framework. New York: Springer, 2014.

Brock W.A. Asset Prices in a Production Economy // The Economics of Information and Uncertainty. University of Chicago Press, 1982. P. 1–46.

Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. Infinite Horizon Optimal Control: Deterministic and Stochastic Systems. Springer Science & Business Media, 2012.

Chang R. Credible Monetary Policy in an Infinite Horizon Model: Recursive Approaches // Journal of Economic Theory. 1998. Vol. 81. № 2. P. 431–461.

Costa C. Understanding dsge Models: Theory and Applications. Vernon Press, 2018.

Da Lio F. On the Bellman Equation for Infinite Horizon Problems with Unbounded Cost Functional // Applied Mathematics and Optimization. 2000. Vol. 41. P. 171–197.

Ekeland I., Scheinkman J.A. Transversality Conditions for Some Infinite Horizon Discrete Time Optimization Problems // Mathematics of Operations Research. 1986. Vol. 11. № 2. P. 216–229.

Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F., Schorfheide F. Solution and Estimation Methods for DSGE Models // Handbook of Macroeconomics. Elsevier, 2016. Vol. 2. P. 527–724.

Kamihigashi T. Necessity of Transversality Conditions for Infinite Horizon Problems // Econometrica. 2001. Vol. 69. № 4. P. 995–1012.

Ljungqvist L., Sargent T.J. Recursive Macroeconomic Theory. MIT Press, 2018.

McCandless G. The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models. Harvard University Press, 2009.

Pospelov I.G. Intensive Quantities in an Economy and Conjugate Variables // Mathematical Notes. 2013. Vol. 94. P. 146–156.

Tkachev I., Abate A. Regularization of Bellman Equations for Infinite-Horizon Probabilistic Properties // Proceedings of the 15th ACM international conference on Hybrid Systems: computation and control. 2012. P. 227–236.

Wiszniewska-Matyszkiel A. On the Terminal Condition for the Bellman Equation for Dynamic Optimization with an Infinite Horizon // Applied Mathematics Letters. 2011. Vol. 24. № 6. P. 943–949.

On the Solution of a Deterministic and Stochastic Household Problem with a Finite Planning Horizon

Nikolay Pilnik

National Research University Higher School of Economics,
11, Pokrovsky Boulevard, Moscow, 109028, Russian Federation.
E-mail: npilnik@hse.ru

The article uses the example of an optimization problem of a household that makes a decision on the volumes of consumption and investment to show what difficulties arise in deterministic and stochastic formulations on a finite time interval. In order to make the problem solvable on a finite time interval, a special terminal condition on the agent's equity capital is added, generalizing the standard versions of such conditions.

The article considers two settings. The first setting is a deterministic case, assuming that the household knows the trajectories of all exogenous variables over the entire time interval under consideration. An analytical solution to this problem is found and it is shown that by choosing the parameter of the terminal constraint in the problem on a finite time interval, it is always possible to obtain a consumption trajectory from the solution of a similar problem set for an infinite planning horizon. If the coefficient of the terminal condition is chosen so that the optimal consumption trajectory continues the previous value, then with a certain combination of initial conditions, the household's problem can either be solvable only up to a certain planning horizon, or be completely unsolvable.

The second statement is a stochastic case, when the household knows only the distribution law of exogenous variables. In this case, it is not possible to provide a complete analytical solution, but a sequential algorithm is proposed that allows one to obtain a step-by-step description of the calculation of such a solution. The study of the properties of the constructed model allows one to show how different the work with stochastic optimization problems for the analysis of deviations from a certain selected trajectory of states (balanced growth) in response to the implementation of other states (shocks) is from the problem of analyzing specific realized trajectories of the agent's variables.

Key words: terminal conditions; household optimization problem; finite planning horizon; optimality conditions in Lagrange form; balanced growth.

JEL Classification: C61.

* *
*

References

Andreev M.Yu., Pospelov I.G., Pospelova I.I., Khokhlov M.Yu. (2007) *New Technology for Modeling the Economy and a Model of the Modern Economy of Russia*. M.: MEPhI.

Aseev S.M., Besov K.O., Kryazhimskii A.V. (2012) Infinite-Horizon Optimal Control Problems in Economics. *Russian Mathematical Surveys*, 67, 2, pp. 195.

Benveniste L.M., Scheinkman J.A. (1982) Duality Theory for Dynamic Optimization Models of Economics: The Continuous Time Case. *Journal of Economic Theory*, 27, 1, pp. 1–19.

Blot J., Hayek N. (2014) *Infinite-Horizon Optimal Control in the Discrete-Time Framework*. New York: Springer.

Brock W.A. (1982) Asset Prices in a Production Economy. *The Economics of Information and Uncertainty*. University of Chicago Press, pp. 1–46.

Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. (2012) *Infinite Horizon Optimal Control: Deterministic and Stochastic Systems*. Springer Science & Business Media.

Chang R. (1998) Credible Monetary Policy in an Infinite Horizon Model: Recursive Approaches. *Journal of Economic Theory*, 81, 2, pp. 431–461.

Costa C. (2018) *Understanding dsge Models: Theory and Applications*. Vernon Press.

Da Lio F. (2000) On the Bellman Equation for Infinite Horizon Problems with Unbounded Cost Functional. *Applied Mathematics and Optimization*, 41, pp. 171–197.

Ekeland I., Scheinkman J.A. (1986) Transversality Conditions for Some Infinite Horizon Discrete Time Optimization Problems. *Mathematics of Operations Research*, 11, 2, pp. 216–229.

Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F., Schorfheide F. (2016) Solution and Estimation Methods for DSGE Models. *Handbook of Macroeconomics*. Elsevier, 2, pp. 527–724.

Kamihigashi T. (2001) Necessity of Transversality Conditions for Infinite Horizon Problems. *Econometrica*, 69, 4, pp. 995–1012.

Ljungqvist L., Sargent T.J. (2018) *Recursive Macroeconomic Theory*. MIT Press.

Lobanov S.G. (1999) On the Theory of Optimal Economic Growth. *HSE Economic Journal*, 3, 1, pp. 28–41.

McCandless G. (2009) *The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*. Harvard University Press.

Pilnik N.P., Pospelov I.G. (2007) On Natural Terminal Conditions in Models of Intertemporal Equilibrium. *HSE Economic Journal*, 11, 1, pp. 3–34.

Pospelov I.G. (2013) Intensive Quantities in an Economy and Conjugate Variables. *Mathematical Notes*, 94, pp. 146–156.

Tkachev I., Abate A. (2012) *Regularization of Bellman Equations for Infinite-Horizon Probabilistic Properties*. Proceedings of the 15th ACM international conference on Hybrid Systems: computation and control, pp. 227–236.

Wiszniewska-Matyszkiel A. (2011) On the Terminal Condition for the Bellman Equation for Dynamic Optimization with an Infinite Horizon. *Applied Mathematics Letters*, 24, 6, pp. 943–949.