

ISSN 1810-3189 (print)  
ISSN 2782-294X (online)  
Подписной индекс 72674

**ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ  
И РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

**PHYSICS OF WAVE PROCESSES  
AND RADIO SYSTEMS**

**2023**

**Том 26 | Vol. 26  
№ 1 | No. 1**

# ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ И РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Периодический теоретический и научно-практический журнал  
2023. Том 26, № 1 (101)

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

Журнал включен в библиографические базы данных ВИНТИ (<http://www.viniti.ru>), ULRICHS Periodical Directory (<http://www.ulrichsweb.com>) и РИНЦ (<http://www.elibrary.ru>).

---

## Учредители и издатели журнала:

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева  
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики

## Главный редактор:

д.ф.-м.н., проф. *Клюев Д.С.*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара, Россия)

## Зам. главного редактора:

д.ф.-м.н., проф. *Ивахник В.В.*

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (г. Самара, Россия)

## Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н., проф. *Бобрешов А.М.*

Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Россия)

д.т.н., проф. *Бузов А.Л.*

АО «Самарское Инновационное Предприятие Радиосистем» (г. Самара, Россия)

проф. *Ван Лил Э.*

Лёвенский католический университет (г. Лёвен, Бельгия)

д.т.н., проф. *Волобуев А.Н.*

Самарский государственный медицинский университет (г. Самара, Россия)

д.т.н., проф. *Воскресенский Д.И.*

Московский авиационный институт (государственный технический университет) (г. Москва, Россия)

д.ф.-м.н., акад. РАН *Гуляев Ю.В.*

Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН (г. Москва, Россия)

д.т.н., проф. *Дмитриков В.Ф.*

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени проф. М.А. Бонч-Бруевича (г. Санкт-Петербург, Россия)

д.ф.-м.н., проф. *Ильинский А.С.*

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Россия)

проф. *Кузаев Г.А.*

Норвежский университет естественных и технических наук (г. Тронхейм, Норвегия)

д.т.н., проф. *Мещанов В.П.*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (г. Саратов, Россия)

д.т.н., проф. *Морозов Г.А.*

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева (г. Казань, Россия)

д.ф.-м.н. *Нещерет А.М.*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара, Россия)

д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН *Никитов С.А.*

Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН (г. Москва, Россия)

д.ф.-м.н., доц. *Осипов О.В.*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара, Россия)

д.т.н., проф. *Пихтелев А.И.*

Нижегородский научно-исследовательский приборостроительный институт «Кварц» (г. Нижний Новгород, Россия)

д.т.н., проф. *Пономарев Л.И.*

Московский авиационный институт (государственный технический университет) (г. Москва, Россия)

д.ф.-м.н., проф. *Потапов А.А.*

Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН (г. Москва, Россия)

д.ф.-м.н., проф. *Просвирнин С.Л.*

Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины (г. Харьков, Украина)

лект. *Сидоров К.А.*

Кардиффский университет (г. Кардифф, Великобритания)

н.с. *Чернокожин Е.В.*

Тель-Авивский университет (г. Тель-Авив, Израиль)

проф. *Черняков М.С.*

Бирмингемский университет (г. Бирмингем, Великобритания)

д.ф.-м.н., проф. *Шевяхов Н.С.*

Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ (г. Саров, Россия)

д.т.н., проф. *Яцышен В.В.*

Волгоградский государственный университет (г. Волгоград, Россия)

д.т.н., проф. *Яшин А.А.*

Медицинский институт Тульского государственного университета (г. Тула, Россия)

**Ответственный секретарь:**

д.ф.-м.н., доц. *Табаков Д.П.*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара, Россия)

**Выпускающий редактор:** *Мурзинова Т.А.*

**Лит. редактирование и корректура:** *Мурзиновой Т.А.*

**Информация на английском языке:** *Стрельникова М.С.*

**Компьютерный набор и верстка:** *Градинарь И.М.*

**Адрес редакции:**

443010, Россия, Самарская обл., г. Самара, ул. Льва Толстого, 23

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, к. 342

Тел. (846) 339-11-21, e-mail: [klyuevd@yandex.ru](mailto:klyuevd@yandex.ru)

URL: <https://journals.ssau.ru/pwp>

**Адрес издателя:**

443086, Россия, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34, корп. 22а, 3126,

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,

Центр периодических изданий Самарского университета.

Тел. (846) 334-54-06, e-mail: [murzinova.tatjana@yandex.ru](mailto:murzinova.tatjana@yandex.ru)

Издается с 1998 г. Выходит 1 раз в квартал.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий

и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии – ПИ № ФС 77-68199 от 27.12.2016

Подписной индекс 72674 в объединенном каталоге «Пресса России»



Все статьи распространяются по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция»)

4.0 Всемирная. Для подробной информации посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

© Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, 2023

© Поволжский государственный университет  
телекоммуникаций и информатики, 2023

Подписано в печать 24.03.2023. Дата выхода в свет 31.03.2023

Формат 60 × 84/8. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 15,5

Цена свободная. 0+. Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано с готового оригинала-макета в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

URL: <https://ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

# PHYSICS OF WAVE PROCESSES AND RADIO SYSTEMS

**Fizika volnovykh processov  
i radiotekhnicheskie sistemy**

**Theoretical and Scientific Journal**

**2023, vol. 26, no. 1 (101)**

The journal is included by the Higher Attestation Commission into the List of leading scientific journals and publications in the Russian Federation, where basic scientific results of doctoral theses should be published (Bulletin of the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science).

The journal is included in bibliographic databases VINITI (<http://www.viniti.ru>), ULRICHS Periodical Directory (<http://www.ulrichsweb.com>), and the Russian Science Citation Index (<http://www.elibrary.ru>).

---

## **Journal Founders and Publishers**

Samara National Research University

and

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics

## **Editor in Chief:**

prof. *D.S. Klyuev*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara, Russia)

## **Deputy Chief Editor:**

prof. *V.V. Ivakhnik*

Samara National Research University (Samara, Russia)

## **Editorial Board:**

prof. *A.M. Bobreshov*

Voronezh State University (Voronezh, Russia)

prof. *A.L. Buzov*

Samara Innovative Radio Systems Enterprise (Samara, Russia)

prof. *M.S. Cherniakov*

University of Birmingham (Birmingham, UK)

researcher *E.V. Chernokozhin*

Tel Aviv University (Tel Aviv, Israel)

prof. *V.F. Dmitrikov*

The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications (Saint Petersburg, Russia)

academician of RAS *Yu.V. Gulyaev*

Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

prof. *A.S. Ilyinsky*

Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)

prof. *G.A. Kouzaev*

Norwegian University of Science and Technology (Trondheim, Norway)

prof. *V.P. Meshchanov*

Saratov State University (Saratov, Russia)

prof. *G.A. Morozov*

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI (Kazan, Russia)

*A.M. Neshcheret*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara, Russia)

corresp. member of RAS *S.A. Nikitov*

Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

asst. prof. *O.V. Osipov*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara, Russia)

prof. *A.I. Pikhtelev*

Nizhny Novgorod Research Instrument Engineering Institute «Quartz» (Nizhny Novgorod, Russia)

prof. *L.I. Ponomarev*

Moscow Aviation Institute (State Technical University) (Moscow, Russia)

prof. *A.A. Potapov*

Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

prof. *S.L. Prosvirnin*

Radio Astronomy Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine (Kharkiv, Ukraine)

prof. *N.S. Shevyakhov*

Sarov Physics and Technology Institute of the National Research Nuclear University MEPhI (Sarov, Russia)

lecturer *K.A. Sidorov*

Cardiff University (Cardiff, UK)

prof. *E. Van Lil*

KU Leuven (Leuven, Belgium)

prof. *A.N. Volobuev*

Samara State Medical University (Samara, Russia)

prof. *D.I. Voskresensky*

Moscow Aviation Institute (State Technical University) (Moscow, Russia)

prof. *A.A. Yashin*

Medical Institute of Tula State University (Tula, Russia)

prof. *V.V. Yatsyshen*

Volgograd State University (Volgograd, Russia)

**Executive Editor:**

asst. prof. *D.P. Tabakov*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara, Russia)

**Commissioning Editor:** *T.A. Murzinova*

**Proofreading:** *T.A. Murzinova*

**Language Editor:** *M.S. Strelnikov*

**Typesetting:** *I.M. Gradinar*

**Editorial Office:** 23, L. Tolstoy St., Rm. 342, Samara, 443010, Samara Region, Russia

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatic.

Tel. (846) 339-11-21, e-mail: [klyuevd@yandex.ru](mailto:klyuevd@yandex.ru)

URL: <https://journals.ssau.ru/index.php/pwp>

**Publisher Office:** 34, bldg. 22a, Moskovskoye shosse, rm. 312b,

Samara, 443086, Samara Region, Russia, Samara National Research University,

Center of Periodical Publications of Samara University.

Tel. (846) 334-54-06, e-mail: [murzinova.tatjana@yandex.ru](mailto:murzinova.tatjana@yandex.ru)

Published since 1998. Frequency 1 time a quarter.

Edition is registered by The Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology, and Mass Media – PI N° FS 77-68199 of 27.12.2016

Subscription index in the united catalog «Press of Russia» 72674



All articles are licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
For more information, see <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

© Samara National Research University, 2023

© Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 2023

## Содержание

<i>В.В. Ивахник, М.В. Савельев</i> Влияние дисперсности наночастиц в прозрачной жидкости на пространственные характеристики четырёхволнового преобразователя излучения.....	9
<i>С.П. Скулкин, Н.А. Лысенко, Г.К. Усков, Н.И. Кащеев, К.В. Смусева</i> Линейно поляризованное поле плоской апертуры .....	18
<i>Д.С. Ключев, А.Н. Волобуев, С.В. Краснов, К.А. Адыширин-Заде, Т.А. Антипова, Н.Н. Александрова</i> Возникновение флуктуаций амплитуды и фазы радиосигнала в турбулентной атмосфере.....	28
<i>Д.П. Табаков, Р.М. Валиуллин</i> Математические модели сфероидальных спирально-рамочных излучателей.....	38
<i>Е.С. Белоногая, Д.С. Ключев</i> Сравнение геометрикооптического и «апертурного» подходов для расчета излучения зарядов, пролетающих вблизи диэлектрических объектов .....	49
<i>Д.П. Табаков, А.Г. Майоров</i> Спектральные характеристики интегрального оператора внутренней задачи электродинамики для эллиптической рамочной структуры.....	58
<i>Д.Я. Суханов, А.Е. Кузцова</i> Акустическая томография повышенного разрешения на основе обратного распространения волн.....	70
<i>И.Ю. Бучнев, Д.С. Кушнир, О.В. Осипов, М.А. Фролова</i> Исследование кирального метаматериала СВЧ-диапазона на основе равномерной совокупности С-образных проводящих элементов .....	79
<i>И.Ю. Бучнев, О.В. Осипов</i> Исследование электромагнитных свойств поперечной вставки на основе планарного слоя кирального метаматериала в прямоугольном волноводе.....	93

А.А. Волков

Поиск оптимальной формы огибающей  
сверхвысокочастотного импульса мощного генератора  
в предельно допустимом режиме излучения..... 106

Д.Л. Мясников, Л.Д. Ложкин, Ю.В. Соколова

Определение влияния помех на изображения  
разных цветов посредством ПО..... 116

К сведению авторов ..... 123

## РЕКЛАМА

Неганов, В.А.

**Современная теория и практические применения антенн:** монография / В.А. Неганов, Д.П. Табаков, Г.П. Яровой; предисл. акад. Ю.В. Гуляева; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радиотехника, 2009. – 720 с.



ISBN 978-5-88070-222-0

УДК 621.396.67

ББК 32.845

Рассмотрены основные разделы теории и техники антенн. Освещены вопросы расчета и построения различных типов антенн (от вибраторных до рупорных и антенных решеток, включая фазированные). Основное внимание уделено антеннам СВЧ и расчетам их электромагнитных полей в ближней зоне, т. е. вопросам электромагнитной совместимости.

Принципиальное отличие книги от известных заключается в последовательном применении метода физической регуляризации (самосогласованного метода) к расчету электромагнитного поля антенн, позволяющего осуществлять непрерывный переход с излучающей поверхности антенны к пространству вне ее. С помощью самосогласованного метода получены новые результаты по теории антенн: установлены связь между поверхностной плотностью тока на вибраторной антенне и напряженностью электромагнитного поля, однонаправленный режим излучения для кольцевой (рамочной антенны), режимы стоячих и бегущих волн в цилиндрической спиральной антенне, входное сопротивление практически для всех типов антенн. Теоретический материал подкреплен примерами применения многолучевых антенн.

*Предназначено для разработчиков антенно-фидерных устройств, аспирантов и докторантов, занимающихся вопросами проектирования антенных систем различного назначения, студентов радиотехнических специальностей высших учебных заведений.*

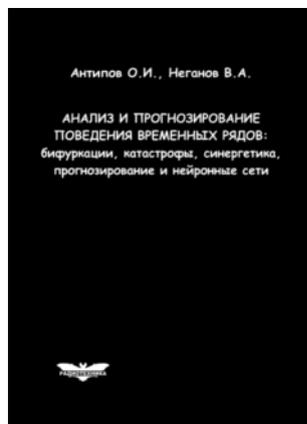
## Contents

<i>Valery V. Ivakhnik, Maxim V. Savelyev</i> Influence of nanoparticle dispersion in a transparent liquid on the spatial characteristics of a four-wave radiation converter .....	9
<i>Sergey P. Skulkin, Nikolai A. Lysenko, Grigoriy K. Uskov, Nikolai I. Kashcheev, Ksenia V. Smuseva</i> Linearly polarized field of a flat aperture .....	18
<i>Dmitriy S. Klyuev, Andrey N. Volobuev, Sergei V. Krasnov, Kaira A. Adyshirin-Zade, Tatyana A. Antipova, Natalia N. Aleksandrova</i> Occurrence of fluctuations in the amplitude and phase of the radio signal in a turbulent atmosphere.....	28
<i>Dmitry P. Tabakov, Ruslan M. Valiullin</i> Mathematical models of spheroidal spiral-frame radiating structures.....	38
<i>Ekaterina S. Belonogaya, Dmitriy S. Klyuev</i> Comparison of geometric optics and «aperture» methods for calculation of the electromagnetic radiation caused by charged particles flying by dielectric objects .....	49
<i>Dmitry P. Tabakov, Andrey G. Mayorov</i> Spectral characteristics of the integral operator of the internal problem of electrodynamics for elliptical frame structure.....	58
<i>Dmitry Ya. Sukhanov, Anzhela E. Kuzovova</i> High resolution acoustic tomography based on backpropagation of waves .....	70
<i>Ivan Yu. Buchnev, Dmitriy S. Kushnir, Oleg V. Osipov, Margarita A. Frolova</i> Investigation of the microwave chiral metamaterial based on a uniform set of C-shaped conductive inclusions.....	79
<i>Ivan Yu. Buchnev, Oleg V. Osipov</i> Investigation of the electromagnetic properties of a transverse insert based on a planar layer of a chiral metamaterial in a rectangular waveguide.....	93

<i>Aleksey A. Volkov</i> Search for the optimal shape of the envelope of a microwave pulse of a powerful generator in the maximum permissible radiation mode .....	106
<i>Danil L. Myasnikov, Leonid D. Lozhkin, Yulia V. Sokolova</i> Determination of the effect of noise on the image using software.....	116
Information for authors .....	123

## РЕКЛАМА

Антипов, О.И.

**Анализ и прогнозирование поведения временных рядов: бифуркации, катастрофы, синергетика, фракталы и нейронные сети** / О.И. Антипов, В.А. Неганов. – М.: Радиотехника, 2011. – 350 с.

ISBN 978-5-88070-294-7

УДК 530.1:621.372+621.396

ББК 32.96

Монография посвящена объединению нескольких направлений в науке: бифуркаций в нелинейных динамических (или детерминированных) системах, причем внимание уделяется бифуркациям-кризисам, которые отождествляются с катастрофами в синергетике – науке о самоорганизации в сложных системах, где велика роль коллективных, кооперативных эффектов, возникновения порядка – фрактальных структур в турбулентности (или хаосе). В синергетике общим является принцип подчинения, который позволяет исключать большое число переменных в сложных системах и описывать в них сложные процессы. Использование в роли одной из основных количественных характеристик катастроф фрактального показателя Херста связывает фракталы с бифуркациями. Объединение этих четырех направлений позволяет упростить проектирование прогнозирующих нейронных сетей, которое в настоящее время отчасти является искусством.

Даны авторские модификации некоторых известных фрактальных методов, позволяющие проводить более глубокий анализ хаотических процессов. Эти результаты, на наш взгляд, должны являться необходимой частью полного алгоритма построения прогностических моделей, описанного в книге. В частности, описан авторский алгоритм определения временного лага, необходимого для реконструкции аттрактора динамической системы, и модификация метода ближайших ложных соседей, которую можно использовать в качестве индикатора приближающейся катастрофы.

Приведены конкретные примеры из таких областей науки, как радиотехника, экономика и медицина.

Монография представляет интерес для научных работников, аспирантов и докторантов, работающих в области прикладных задач анализа, моделирования и прогнозирования хаотических процессов в нелинейных системах из различных отраслей науки и техники.

## Влияние дисперсности наночастиц в прозрачной жидкости на пространственные характеристики четырехволнового преобразователя излучения

В.В. Ивахник, М.В. Савельев 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева  
443086, Российская Федерация, г. Самара,  
Московское шоссе, 34

*Аннотация* – В работе исследованы пространственные характеристики четырехволнового преобразователя излучения в прозрачной гетерогенной полидисперсной среде с учетом потока наночастиц, обусловленного действием силы тяжести, при нормальном распределении частиц по размерам. Выделено три диапазона средних радиусов наночастиц (малые, промежуточные и большие), для которых характерны различные виды пространственных спектров объектной волны. Показано, что в диапазоне малых средних радиусов наночастиц рост среднеквадратичного отклонения приводит к увеличению полуширины полосы пространственных частот, вырезаемых четырехволновым преобразователем излучения из пространственного спектра объектной волны. В диапазоне промежуточных средних радиусов наночастиц рост среднеквадратичного отклонения может приводить как к увеличению, так и к уменьшению ширины вырезаемого четырехволновым преобразователем «кольца». При больших средних радиусах наночастиц изменение среднеквадратичного отклонения не влияет на пространственную селективность четырехволнового преобразователя излучения.

*Ключевые слова* – четырехволновой преобразователь излучения; прозрачная среда; нормальное распределение.

### Введение

Интерес к четырехволновым преобразователям излучения (ЧПИ) связан с возможностью их использования при решении целого ряда фундаментальных и прикладных задач: от передачи информации по оптическим волноводам и обработки изображений в реальном масштабе времени до создания источников одиночных фотонов для квантовых компьютеров и визуализации наноразмерных объектов, включая компоненты живых клеток и частицы благородных металлов [1–8]. Во всех этих задачах немаловажную роль играет точность восстановления ЧПИ волнового фронта падающей на него волны, т. е. соответствие между пространственно-временными структурами падающей (сигнальной) волны и отраженной (объектной) волны.

ЧПИ может быть реализован в различных нелинейных средах, в частности гетерогенных средах (суспензиях, коллоидных растворах), которые обладают нерезонансным механизмом нелинейности за счет создания градиентов концентрации и температуры [9]. В гетерогенных средах достижимы высокие значения нелинейного показателя преломления  $n_2$ , что позволяет использовать при создании ЧПИ лазерное излучение с низкой интенсивностью [10; 11].

Если в качестве нелинейной среды взять коллоидный раствор наночастиц, то в нем энергия частиц в гравитационном поле Земли сопоставима с энергией теплового движения молекул жидкости [12; 13]. Поэтому при рассмотрении ЧПИ, реализуемых в таких средах, наряду с диффузионным и электрострикционным потоками необходимо учитывать дополнительный поток наночастиц, обусловленный действием на них силы тяжести.

В работах [14–19] в приближении малого коэффициента преобразования проведено исследование пространственных и временных характеристик ЧПИ в монодисперсной прозрачной гетерогенной среде. Изучено влияние на пространственную селективность ЧПИ геометрии взаимодействия, углового и частотного сдвигов, расходимости волн накачки, поглощения среды, потока силы тяжести.

В реальных гетерогенных средах всегда присутствует разброс наночастиц по размерам [4; 20–23], что может оказать влияние как на временные [24], так и на пространственные характеристики ЧПИ. В связи с этим в настоящей работе исследуется пространственная селективность ЧПИ в прозрачной полидисперсной гетерогенной среде с учетом потока наночастиц, обусловленного действием на них силы тяжести.

## 1. Пространственный спектр объектной волны с учетом силы тяжести, действующей на наночастицы одного размера в прозрачной жидкости

Рассмотрим стационарный режим работы ЧПИ в прозрачной жидкости с растворенными в ней наночастицами в схеме со встречными волнами накачки [17]. На горизонтальный слой среды, расположенный между плоскостями  $z=0$  и  $z=\ell$ , падают две плоские волны накачки, распространяющиеся параллельно оси  $Z$  навстречу друг другу, с амплитудами  $A_1$  и  $A_2$  и сигнальная волна с амплитудой  $A_3$ . В результате вырожденного четырехволнового взаимодействия возникает объектная волна с амплитудой  $A_4$ , распространяющаяся навстречу сигнальной волне, с волновым фронтом, «обращенным» по отношению к фронту сигнальной волны.

В приближении заданного поля по волнам накачки и малого коэффициента преобразования интенсивность излучения, распространяющегося в нелинейной среде, может быть представлена суммой интенсивностей волн накачки и слагаемых, обусловленных интерференцией первой волны накачки и сигнальной волны. Пространственная неоднородность интенсивности излучения в результате диффузии, электрострикции, действия на наночастицы силы тяжести приводит к пространственному изменению концентрации наночастиц. Вследствие эффекта Дюфура происходит также пространственное изменение температуры среды  $\delta T$ . При концентрациях частиц менее  $10^{12}$  см<sup>-3</sup> [4; 25] изменение показателя преломления определяется в основном изменением температуры:

$$n \approx n_l + \frac{dn}{dT} \delta T, \quad (1)$$

где  $n_l$  – показатель преломления в отсутствие излучения;  $(dn/dT)$  – термооптический коэффициент.

В работе [17] для гетерогенной монодисперсной нелинейной среды, состоящей из прозрачной жидкости и наночастиц, при условии квазиколлинеарного распространения взаимодействующих волн получено аналитическое выражение, описывающее связь пространственных спектров объектной  $\tilde{A}_4(\kappa, m)$  и сигнальной  $\tilde{A}_{30}(\kappa)$  волн на верхней грани нелинейного слоя с учетом силы тяжести, действующей на наночастицы:

$$\tilde{A}_4(\kappa, m) = -i \frac{k}{n_l} \frac{dn}{dT} A_{20} \exp(-iP) \sum_{j=1}^5 G_j(\kappa, m) \times \quad (2)$$

$$\times \frac{\exp\left\{\left[\lambda_j(\kappa, m) - \lambda_3(\kappa, m)\right] \ell\right\} - 1}{\lambda_j(\kappa, m) - \lambda_3(\kappa, m)}.$$

Здесь

$$G_j(\kappa, m) = -\frac{D_{12}}{D_{22}} C_j(\kappa, m), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$G_{4,5}(\kappa, m) = \mp \frac{1}{2} \operatorname{csch}(\kappa \ell) \sum_{j=1}^3 G_j(\kappa, m) \times \\ \times \left\{ \exp\left[\lambda_j(\kappa, m) \ell\right] - \exp\left[\lambda_{5,4}(\kappa, m) \ell\right] \right\},$$

$$C_{1,2}(\kappa, m) \mp C_3(\kappa, m) \left\{ \left[ \lambda_1(\kappa, m) + \lambda_2(\kappa, m) - \lambda_3(\kappa, m) \right] \left\{ \exp\left[\lambda_{2,1}(\kappa, m) \ell\right] - \exp\left[\lambda_3(\kappa, m) \ell\right] \right\} \right\} / \\ / \left( \lambda_{2,1}(\kappa, m) \left\{ \exp\left[\lambda_2(\kappa, m) \ell\right] - \exp\left[\lambda_1(\kappa, m) \ell\right] \right\} \right),$$

$$C_3(\kappa, m) = \left( \gamma A_{10} \tilde{A}_{30}^*(\kappa) \left[ \kappa^2 - \lambda_3^2(\kappa, m) \right] \right) / \\ / \left( D_{22} \left\{ \kappa^2 - \lambda_3^2(\kappa, m) + \lambda_3(\kappa, m) \right\} \times \right. \\ \left. \times \left[ \lambda_1(\kappa, m) + \lambda_2(\kappa, m) \right] \right\},$$

$$\lambda_{1,2}(\kappa, m) = \frac{mg_z}{2k_B T_0} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \left( \frac{2k_B T_0}{mg_z} \kappa^2 \right)^2} \right],$$

$$\lambda_3(\kappa, m) = -i \frac{\kappa^2}{2k}, \quad \lambda_{4,5}(\kappa, m) = \pm \kappa,$$

где  $k$  – волновое число;  $\kappa$  – пространственная частота объектной волны;  $A_{10}$  и  $A_{20}$  – амплитуды первой и второй волн накачки на верхней и нижней гранях нелинейного слоя соответственно;  $P$  – фазовый набег, возникающий при распространении в нелинейной среде волн накачки;  $D_{11}$  и  $D_{22}$  – коэффициенты теплопроводности и диффузии;  $D_{12}$  и  $\gamma$  – коэффициенты, описывающие эффект Дюфура и явление электрострикции;  $m$  – эффективная масса одной наночастицы с поправкой на силу Архимеда;  $g_z$  – проекция ускорения свободного падения на ось  $Z$ , направленную вертикально;  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T_0$  – температура среды в отсутствие излучения.

Выражение (2) получено с применением следующих граничных условий на изменения концентрации и температуры:

1) отсутствие полного потока частиц через грани нелинейного слоя [17; 26; 27],

2) неизменность температуры на гранях [15; 17; 18].

Из анализа выражения (2) следует, что для гетерогенной монодисперсной среды при условии, что сигнальной волной является волна от точечно-

го источника, расположенного на верхней грани нелинейного слоя  $\tilde{A}_{30}(\kappa) = \text{const}$ , без учета силы тяжести, действующей на наночастицы, с ростом пространственной частоты модуль пространственного спектра объектной волны  $\tilde{A}_4(\kappa, m \rightarrow 0)$  возрастает и на высоких пространственных частотах  $\kappa \rightarrow 0, 1k$  выходит на постоянное значение [15; 18].

Учет потока наночастиц, обусловленного действием на них силы тяжести, приводит к возникновению вблизи нулевой пространственной частоты  $\kappa \rightarrow 0$  максимума в модуле пространственного спектра [17]. В пространственном спектре объектной волны наблюдается пространственная частота  $\kappa_{\min}$ , на которой пространственный спектр имеет нулевое значение  $\tilde{A}_4(\kappa_{\min}, m) = 0$ .

## 2. Учет распределения наночастиц по размерам

Рассмотрим четырехволновое взаимодействие в гетерогенной полидисперсной среде, содержащей сферические наночастицы с радиусом  $a$ , доля которых меняется в соответствии с функцией распределения  $f(a)$ . Тогда пространственный спектр объектной волны на верхней грани нелинейного слоя можно представить в виде когерентной «суммы» пространственных спектров, определяемых выражением (2):

$$\tilde{A}'_4(\kappa) = \int_{a_1}^{a_2} \tilde{A}_4(\kappa, a) f(a) da. \quad (3)$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  – наименьший и наибольший радиусы наночастиц, присутствующих в среде.

Выражения для эффективной массы, коэффициентов диффузии, Дюфура и электрострикции можно записать в виде [9; 24; 28]:

$$m = \frac{4}{3} \pi (\rho_p - \rho_l) a^3, \quad D_{22} = \frac{k_B T_0}{6 \pi \eta a}, \quad (4)$$

$$D_{12} = \frac{3 k_B T_0^3 S_T D_{22}}{4 \pi C_0 a^3}, \quad \gamma = \frac{4 \pi C_0 D_{22} n_l (n_p^2 - n_l^2) a^3}{c k_B T_0 (n_p^2 + 2 n_l^2)},$$

где  $n_p$  и  $C_0$  – показатель преломления и концентрация наночастиц в отсутствие излучения;  $S_T$  – коэффициент Соре;  $\eta$  – вязкость жидкости;  $\rho_l$  и  $\rho_p$  – плотности жидкости и частиц;  $c$  – скорость света в вакууме.

Предположим, что распределение наночастиц по размерам описывается нормальным распределением [24; 29]:

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(a-a_0)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (5)$$

где  $a_0$  – средний радиус наночастиц,  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение.

Подставляя формулы (2), (4) и (5) в (3), получим выражение для пространственного спектра объектной волны на верхней грани нелинейного слоя с учетом распределения наночастиц по размерам:

$$\begin{aligned} \tilde{A}'_4(\kappa) = & -i \frac{k}{\sqrt{2\pi\sigma n_l}} \frac{dn}{dT} A_{20} \times \\ & \times \sum_{j=1}^5 \int_{a_1}^{a_2} G_j(\kappa, a) \frac{\exp\left\{\left[\lambda_j(\kappa, a) - \lambda_3(\kappa, a)\right] \ell\right\} - 1}{\lambda_j(\kappa, a) - \lambda_3(\kappa, a)} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{(a-a_0)^2}{2\sigma^2}\right] da. \end{aligned} \quad (6)$$

При выводе выражения (6) считалось, что фазовым набегом, обусловленным распространением волн накачки в нелинейной среде, можно пренебречь ( $P \ll \pi$ ).

При учете распределения наночастиц по размерам значения модулей пространственного спектра объектной волны вблизи нулевой  $|\tilde{A}_{40}| = |\tilde{A}'_4(\kappa \rightarrow 0)|$  и на высоких пространственных частотах  $|\tilde{A}_{4\max}| = |\tilde{A}'_4(\kappa \rightarrow 0, 1k)|$  определяются следующим образом:

$$|\tilde{A}_{40}| = \left| H \int_{a_1}^{a_2} \frac{4\pi(\rho_p - \rho_l) g_z \ell a^2}{3k_B T_0} \times \right. \quad (7)$$

$$\left. \times \left( \frac{1}{2} + \left\{ \exp\left[ \frac{4\pi(\rho_p - \rho_l) g_z \ell a^3}{3k_B T_0} \right] - 1 \right\}^{-1} - \frac{1}{a} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[-\frac{(a-a_0)^2}{2\sigma^2}\right] da \right|,$$

$$|\tilde{A}_{4\max}| = \left| H \int_{a_1}^{a_2} \left[ a - i \frac{2\pi(\rho_p - \rho_l) g_z a^4}{3k k_B T_0} \right]^{-1} \times \right. \quad (8)$$

$$\left. \times \exp\left[-\frac{(a-a_0)^2}{2\sigma^2}\right] da \right|.$$

Здесь

$$H = \frac{k k_B T_0^2 S_T A_{10} A_{20} \tilde{A}_{30}^* \ell (n_p^2 - n_l^2) dn}{(\sqrt{2\pi})^3 \sigma \eta c D_{11} (n_p^2 + 2n_l^2) dT}.$$

Из анализа выражений (6)–(8) с учетом (2) и (4) следует, что интенсивность волн накачки, вяз-

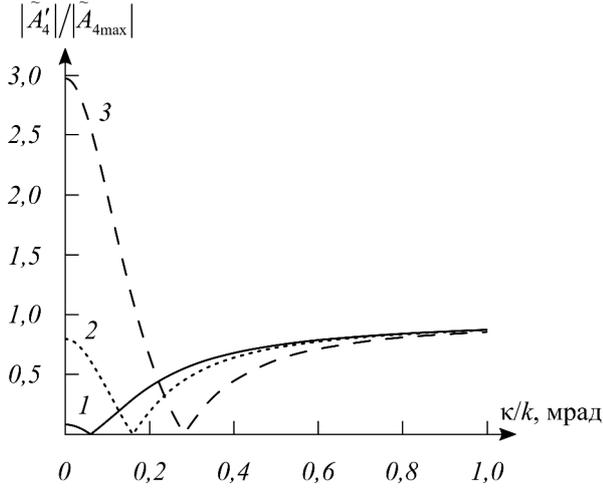


Рис. 1. Модули пространственных спектров объектной волны без учета дисперсии наночастиц по размерам при  $\ell = 1$  мм,  $a_0 = 100$  (1), 150 (2) и 200 нм (3)

Fig. 1. Spatial spectra modules of the object wave without regarding the size dispersion of nanoparticles at  $\ell = 1$  mm,  $a_0 = 100$  (1), 150 (2), 200 nm (3)

кость, коэффициент Соре и термооптический коэффициент жидкости не влияют на пространственную селективность ЧПИ.

### 3. Обсуждение результатов

На рис. 1 представлены нормированные модули пространственных спектров объектной волны при различных средних радиусах наночастиц. Нормировка осуществлялась на постоянное значение модуля пространственного спектра  $|\tilde{A}_{4\max}|$ .

Учет распределения наночастиц по размерам (в этом случае численное интегрирование выражения (3) проводилось от  $a_1 = 1$  нм до  $a_2 = 300$  нм) качественно не меняет вид модулей пространственных спектров объектной волны. Увеличение среднеквадратичного отклонения приводит к изменению значений модулей пространственного спектра объектной волны  $|\tilde{A}_{40}|$  и  $|\tilde{A}_{4\max}|$ , к смещению пространственной частоты  $\kappa_{\min}$  в область больших значений.

Как и в работе [17], введем параметр  $\xi$ , характеризующий соотношение модулей пространственного спектра объектной волны вблизи нулевой и на высоких пространственных частотах:

$$\xi = \frac{|\tilde{A}_{40}|}{|\tilde{A}_{4\max}|}. \quad (9)$$

Воспользуемся параметром  $\xi$  для анализа влияния параметров распределения наночастиц по размерам на пространственную селективность ЧПИ. Введем граничные значения  $\xi_1 = 0,5$  и  $\xi_2 = 2$ . Из анализа пространственных спектров объект-

ной волны можно выделить три вида спектров, соответствующих различным значениям среднего радиуса и среднеквадратичного отклонения.

Если  $\xi < \xi_1$ , ЧПИ осуществляет фильтрацию высоких пространственных частот объектной волны с вырезанием полосы низких частот (рис. 1, кривая 1), как это показано, например, в работах [14; 17]. Пространственная селективность может быть охарактеризована полушириной полосы пространственных частот  $\Delta\kappa$ , вырезаемых ЧПИ из пространственного спектра объектной волны, которая определяется по уровню  $|\tilde{A}_{4\max}|/2$ .

Для нелинейной среды, содержащей наночастицы, для которой выполняется условие  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ , модуль пространственного спектра объектной волны имеет вид вырезанного «кольца» с диаметром  $2\kappa_{\min}$  (рис. 1, кривая 2). В этом случае пространственную селективность ЧПИ можно охарактеризовать радиусом  $\kappa_{\min}$  и шириной «кольца»  $\Delta\kappa_1$ , определяемой выражением вида [16; 17]:

$$\Delta\kappa_1 = \Delta\kappa - \kappa_1, \quad (10)$$

где пространственная частота  $\kappa_1$  находится из условия

$$|\tilde{A}'_4(\kappa = \kappa_1)| = |\tilde{A}_{4\max}|/2, \quad \kappa_1 < \kappa_{\min}.$$

При условии  $\xi > \xi_2$  в пространственном спектре объектной волны вблизи нулевой пространственной частоты наблюдается ярко выраженный максимум (рис. 1, кривая 3). Пространственная селективность в этом случае может быть охарактеризована полушириной максимума, определяемой по уровню  $|\tilde{A}_{40}|/2$ .

Анализ выражения (3) показывает, что при фиксированной толщине нелинейной среды вид пространственного спектра объектной волны в основном определяется средним радиусом наночастиц. Поэтому будем говорить о пространственных спектрах, для которых  $\xi < \xi_1$ ,  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$  и  $\xi > \xi_2$ , как о спектрах, соответствующих малым, промежуточным и большим средним радиусам наночастиц. Так, модули пространственных спектров объектной волны, приведенные на рис. 1, соответствуют диапазонам малых (кривая 1), промежуточных (кривая 2) и больших (кривая 3) средних радиусов наночастиц.

На рис. 2 для различных толщин нелинейной среды представлены области параметров в распределении наночастиц по размерам, соответствующих малым, промежуточным и большим средним радиусам наночастиц. Увеличение толщины слоя приводит к смещению граничных значений  $\xi_1$

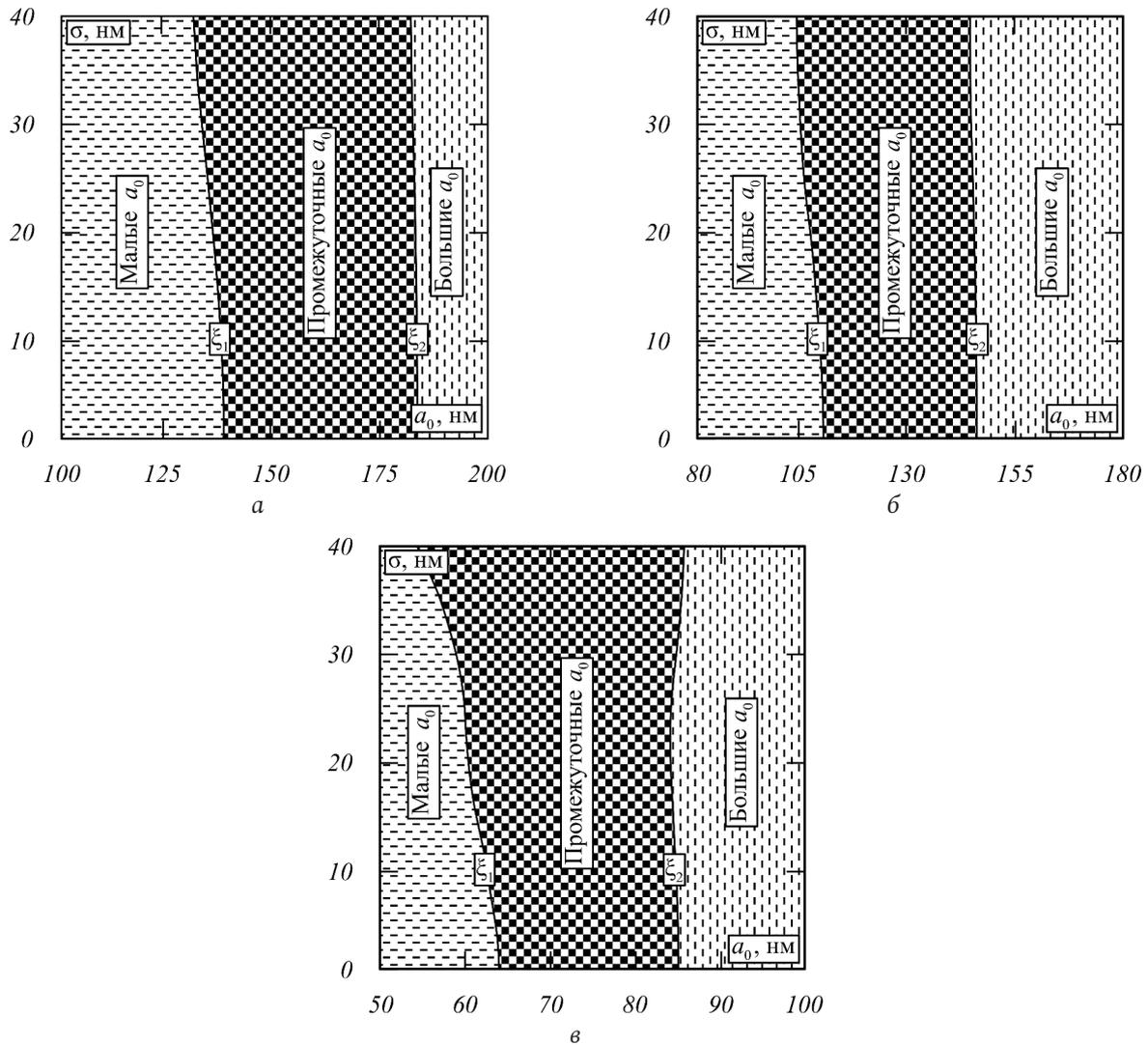


Рис. 2. Области средних радиусов наночастиц в зависимости от их среднего радиуса и среднеквадратичного отклонения при  $\ell = 1$  (а), 2 (б) и 10 мм (в)  
 Fig. 2. Areas of average radii of nanoparticles depending on their average radius and standard deviation at  $\ell = 1$  (a), 2 (b) and 10 mm (c)

и  $\xi_2$  в область меньших средних радиусов наночастиц. При  $\ell \geq 1$  мм изменение среднеквадратичного отклонения в распределении наночастиц по размерам в пределах  $0 \leq \sigma \leq 40$  нм слабо влияет на граничное значение  $\xi_2$ .

Из выражения (2) следует, что для гетерогенной монодисперсной среды отношение модулей пространственных спектров объектной волны вблизи нулевой и на высоких пространственных частотах зависит не только от массы одной наночастицы, но и от толщины слоя:

$$\xi(m, \ell) = \sqrt{1 + \left(\frac{mg_z}{2kk_B T_0}\right)^2} \times \left| \frac{mg_z \ell}{k_B T_0} \left\{ \frac{1}{2} + \left[ \exp\left(\frac{mg_z \ell}{k_B T_0}\right) - 1 \right]^{-1} \right\} - 1 \right|. \quad (11)$$

При фиксированном размере наночастиц увеличение толщины гетерогенной среды приводит к росту параметра  $\xi$  и, как следствие, к уменьшению размеров наночастиц, при которых этот параметр достигает граничных значений. Это объясняет смещение изображенных на рис. 2 граничных значений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в область меньших средних радиусов наночастиц с увеличением толщины нелинейного слоя.

На рис. 3 представлены зависимости полуширины полосы вырезанных пространственных частот от среднеквадратичного отклонения при различных средних радиусах наночастиц. С увеличением как среднего радиуса, так и среднеквадратичного отклонения наблюдается рост полуширины полосы вырезанных пространственных частот.

На рис. 4 для наночастиц, соответствующих промежуточным средним радиусам, приведены зависимости ширины вырезанного «кольца» от сред-

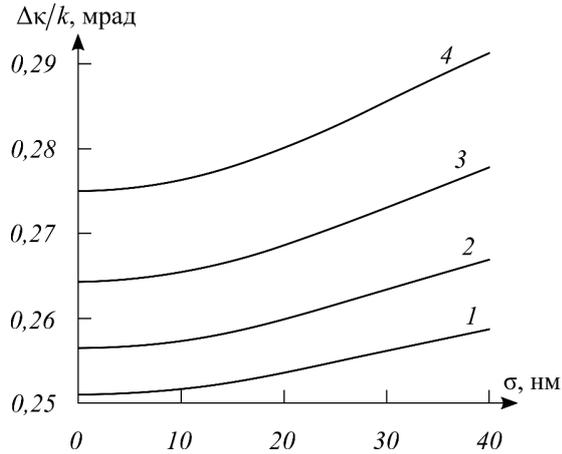


Рис. 3. График зависимости полуширины полосы вырезанных пространственных частот от среднеквадратичного отклонения при  $\ell = 1$  мм,  $a_0 = 100$  (1), 110 (2), 120 (3), 130 нм (4)  
Fig. 3. Graph of the dependence of the half-width of the cut spatial frequency band on the standard deviation at  $\ell = 1$  mm,  $a_0 = 100$  (1), 110 (2), 120 (3), 130 nm (4)

неквадратичного отклонения. В зависимостях  $\Delta\kappa_1$  от  $\sigma$  наблюдается минимальное значение, которое смещается в область меньших величин среднеквадратичного отклонения с увеличением среднего радиуса наночастиц. Отметим, что при любом фиксированном значении  $\sigma \leq 35$  нм значение  $\Delta\kappa_1$  монотонно уменьшается с ростом  $a_0$ , что наблюдалось также в случае гетерогенной монодисперсной среды ( $\sigma \rightarrow 0$ ) [17].

Для наночастиц со средним радиусом, лежащим в диапазоне больших радиусов, полуширина максимума вблизи нулевой пространственной частоты увеличивается с ростом среднего радиуса наночастиц и при  $\sigma \leq 40$  нм не зависит от среднеквадратичного отклонения.

Приведем оценки влияния распределения наночастиц по размерам на пространственную селективность ЧПИ при толщине гетерогенной полидисперсной нелинейной среды 1 мм.

В области параметров, соответствующих малым средним радиусам наночастиц, при среднеквадратичном отклонении 40 нм по сравнению с монодисперсной нелинейной средой полуширина полосы вырезанных пространственных частот для  $a_0 = 100$  и 130 нм увеличивается на 3,1 и 6,0 % соответственно.

В области параметров, соответствующих промежуточным средним радиусам наночастиц, при том же значении  $\sigma = 40$  нм по сравнению с монодисперсной нелинейной средой ширина вырезанного «кольца» при  $a_0 = 180$  нм увеличивается на 6,0 %, а при  $a_0 = 144$  нм уменьшается на 1,9 %. При этом радиус «кольца»  $\kappa_{\min}$  увеличивается на 7,3 и 12,7 % соответственно.

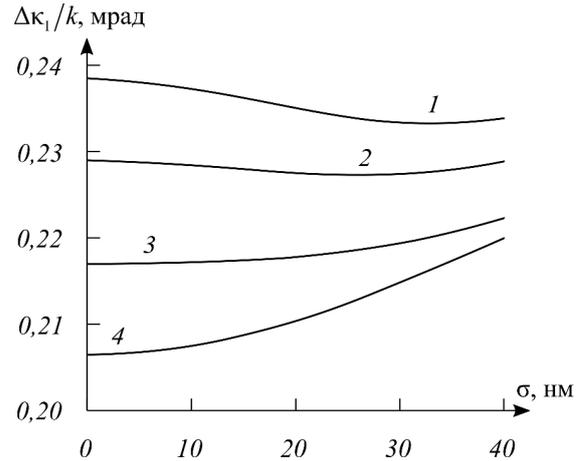


Рис. 4. График зависимости ширины вырезанного «кольца» от среднеквадратичного отклонения при  $\ell = 1$  мм,  $a_0 = 144$  (1), 148 (2), 156 (3), 190 нм (4)  
Fig. 4. Graph of the dependence of the cut "ring" width on the standard deviation at  $\ell = 1$  mm,  $a_0 = 144$  (1), 148 (2), 156 (3), 190 nm (4)

Отметим, что без учета потока наночастиц, обусловленного действием на них силы тяжести, пространственная селективность ЧПИ в гетерогенной полидисперсной среде перестает зависеть от среднеквадратичного отклонения в распределении наночастиц по размерам, изменяется только коэффициент отражения ЧПИ [24].

## Заключение

Получены зависимости параметров, характеризующих пространственную селективность ЧПИ в прозрачной полидисперсной гетерогенной среде с учетом потока наночастиц, обусловленного действием на них силы тяжести, от среднеквадратичного отклонения и среднего радиуса наночастиц.

Показано, что если в диапазоне малых средних радиусов наночастиц полуширина полосы пространственных частот, вырезаемых из модуля пространственного спектра объектной волны, увеличивается с ростом среднеквадратичного отклонения, то в диапазоне промежуточных средних радиусов наночастиц, в котором модуль пространственного спектра объектной волны имеет вид вырезанного «кольца», рост среднеквадратичного отклонения может приводить в зависимости от среднего радиуса наночастиц как к увеличению ширины «кольца», так и к его уменьшению.

При больших средних радиусах наночастиц среднеквадратичное отклонение в распределении наночастиц по размерам не оказывает влияния на полуширину максимума пространственного спектра объектной волны вблизи нулевой пространственной частоты.

## Список литературы

1. Nonlinear four-wave mixing with enhanced diversity and selectivity via spin and orbital angular momentum conservation / X. Liu [et al.] // *APL Photonics*. 2020. Vol. 5. P. 010802. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5130715>
2. Near-ideal spontaneous photon sources in silicon quantum photonics / S. Paesani [et al.] // *Nature Communications*. 2020. Vol. 11. P. 2505. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-020-16187-8>
3. Creation of the maximum coherence via adiabatic passage in the four-wave mixing process of coherent anti-Stokes Raman scattering / N. Pandya [et al.] // *Chemical Physics Letters*. 2020. Vol. 738. P. 136763. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cplett.2019.136763>
4. Four-wave-mixing microscopy reveals non-colocalisation between gold nanoparticles and fluorophore conjugates inside cells / N. Giannakopoulou [et al.] // *Nanoscale*. 2020. Vol. 12. P. 4622–4635. DOI: <https://doi.org/10.1039/c9nr08512b>
5. Stimulated thermal scattering in two-photon absorbing nanocolloids under laser radiation of nanosecond-to-picosecond pulse widths / A.I. Erokhon [et al.] // *Nanomaterials*. 2022. Vol. 12. P. 2567. DOI: <https://doi.org/10.3390/nano12152567>
6. Imaging and tracking single plasmonic nanoparticles in 3D background-free with four-wave mixing interferometry / P. Borri [et al.] // *Proceedings of SPIE*. 2019. Vol. 10894. P. 108940Z. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2507618>
7. Silver nanoparticle-enhanced four-wave mixing (FWM) imaging technique for visualizing sialic acid on cell membrane / Y. Geng [et al.] // *Sensors and Actuators B. Chemical*. 2019. Vol. 301. P. 127074. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.snb.2019.127074>
8. Функция размытия точки четырехволнового преобразователя излучения в многомодовом волноводе с керровской нелинейностью / Е.В. Воробьева [и др.] // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2021. Т. 24, № 1. С. 15–21. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.1.15-21>
9. Ivanov V.I., Ivanova G.D. Non-resonance mechanisms of optical nonlinearities of aerosols // *Proceedings of SPIE*. 2018. Vol. 10833. P. 108331S. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2504378>
10. Spectroscopy of the nonlinear refractive index of colloidal PbSe nanocrystals / I. Moreels [et al.] // *Applied Physics Letters*. 2006. Vol. 89. P. 193106. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2385658>
11. Arandian A., Karimzadeh R., Faizabadi S.Y. The effect of laser wavelength and concentration on thermal nonlinear refractive index of graphene suspensions // *Nano*. 2015. Vol. 10, no. 4. P. 1550053. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1793292015500538>
12. Черепанов И.Н. О перераспределении примеси в коллоидных смесях // *Журнал технической физики*. 2018. Т. 88, № 12. С. 1763–1770. DOI: <https://doi.org/10.21883/JTF.2018.12.46775.2589>
13. Воюцкий С.С. Курс коллоидной химии. М.: Химия, 1975. 512 с.
14. Ивахник В.В., Савельев М.В. Нестационарное четырехволновое взаимодействие в прозрачной двухкомпонентной среде // *Компьютерная оптика*. 2018. Т. 42, № 2. С. 227–235. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2018-42-2-227-235>
15. Ivakhnik V.V. Savel'ev M.V. Degenerate four-wave mixing in transparent two-component medium considering spatial structure of the pump waves // *Journal of Physics. Conference Series*. 2016. Vol. 737. P. 012007. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/737/1/012007>
16. Ивахник В.В., Савельев М.В. Пространственная селективность четырехволнового преобразователя излучения в поглощающей двухкомпонентной среде при больших коэффициентах отражения // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2018. Т. 21, № 2. С. 5–13. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7029/6888>
17. Савельев М.В., Ивахник В.В. Пространственная селективность четырехволнового преобразователя излучения с учетом силы тяжести, действующей на растворенные в прозрачной жидкости наночастицы // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. 2020. Т. 63, № 8. С. 694–703. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44851030>
18. Ремзов А.Д., Савельев М.В. Встречное четырехволновое взаимодействие в прозрачной суспензии наночастиц в поле тяжести Земли // *Известия Российской академии наук. Серия физическая*. 2021. Т. 85, № 12. С. 1770–1775. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0367676521120267>
19. Ивахник В.В., Савельев М.В. Пространственная селективность четырехволнового преобразователя излучения с учетом термодиффузионного и электрострикционного механизмов нелинейности // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2013. Т. 16, № 1. С. 6–11. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20211855>
20. Optodynamic phenomena in aggregates of polydisperse plasmonic nanoparticles / A.E. Ershov [et al.] // *Applied Physics B*. 2014. Vol. 115. P. 547–560. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00340-013-5636-6>
21. Background-free 3D nanometric localization and sub-nm asymmetry detection of single plasmonic nanoparticles by four-wave mixing interferometry with optical vortices / G. Zorinants [et al.] // *Physical Review X*. 2017. Vol. 7. P. 041022. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.041022>
22. Optical nonlinearities of a high concentration of small metal particles dispersed in glass: copper and silver particles / K. Uchida [et al.] // *Journal of the Optical Society of America B*. 1994. Vol. 11, no. 7. P. 1236–1243. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.11.001236>
23. Bloemer M.J., Haus J.W., Ashley P.R. Degenerate four-wave mixing in colloidal gold as a function of particle size // *Journal of the Optical Society of America B*. 1990. Vol. 7, no. 5. P. 790–795. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.7.000790>
24. Альдебенева К.Н., Ивахник В.В., Савельев М.В. Влияние распределения частиц по размерам на характеристики четырехволнового преобразователя излучения в прозрачной двухкомпонентной среде // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2019. Т. 22, № 1. С. 4–9. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.1.4-9>
25. Four-wave-mixing approach to in situ detection of nanoparticles / A. Gerakis [et al.] // *Physical Review Applied*. 2018. Vol. 9. P. 014031. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.9.014031>
26. Larsson C., Kumar S. Nonuniformities in miscible two-layer two-component thin liquid films // *Physical Review Fluids*. 2021. Vol. 6. P. 034004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.6.034004>
27. Sedimentation of particles by the light pressure in nanosuspension / V.K. Khe [et al.] // *Proceedings of SPIE*. 2017. Vol. 10466. P. 104664K. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2288774>

28. Effects of polydispersity on the glass transition dynamics of aqueous suspensions of soft spherical colloidal particles / S.K. Behera [et al.] // *Physical Review Materials*. 2017. Vol. 1. P. 055603. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.1.055603>
29. Иванов В.И., Пячин С.А. Сепарация частиц в полидисперсной наносuspензии в поле лазерного излучения // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. 2021. Вып. 13. С. 146–155. DOI: <https://doi.org/10.26456/pcascnn/2021.13.146>

## References

- Liu X. et al. Nonlinear four-wave mixing with enhanced diversity and selectivity via spin and orbital angular momentum conservation. *APL Photonics*, 2020, vol. 5, p. 010802. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5130715>
- Paesani S. et al. Near-ideal spontaneous photon sources in silicon quantum photonics. *Nature Communications*, 2020, vol. 11, p. 2505. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-020-16187-8>
- Pandya N. et al. Creation of the maximum coherence via adiabatic passage in the four-wave mixing process of coherent anti-stokes Raman scattering. *Chemical Physics Letters*, 2020, vol. 738, p. 136763. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cplett.2019.136763>
- Giannakopoulou N. et al. Four-wave-mixing microscopy reveals non-colocalisation between gold nanoparticles and fluorophore conjugates inside cells. *Nanoscale*, 2020, vol. 12, pp. 4622–4635. DOI: <https://doi.org/10.1039/c9nr08512b>
- Erokhon A.I. et al. Stimulated thermal scattering in two-photon absorbing nanocolloids under laser radiation of nanosecond-to-picosecond pulse widths. *Nanomaterials*, 2022, vol. 12, p. 2567. DOI: <https://doi.org/10.3390/nano12152567>
- Borri P. et al. Imaging and tracking single plasmonic nanoparticles in 3D background-free with four-wave mixing interferometry. *Proceedings of SPIE*, 2019, vol. 10894, p. 108940Z. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2507618>
- Geng Y. et al. Silver nanoparticle-enhanced four-wave mixing (FWM) imaging technique for visualizing sialic acid on cell membrane. *Sensors and Actuators B. Chemical*, 2019, vol. 301, p. 127074. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.snb.2019.127074>
- Vorob'eva E.V. et al. Point smearing function of a four-wave radiation converter in a multimode waveguide with Kerr nonlinearity. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2021, vol. 24, no. 1, pp. 15–21. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.1.15-21> (In Russ.)
- Ivanov V.I., Ivanova G.D. Non-resonance mechanisms of optical nonlinearities of aerosols. *Proceedings of SPIE*, 2018, vol. 10833, p. 108331S. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2504378>
- Moreels I. et al. Spectroscopy of the nonlinear refractive index of colloidal PbSe nanocrystals. *Applied Physics Letters*, 2006, vol. 89, p. 193106. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2385658>
- Arandian A., Karimzadeh R., Faizabadi S.Y. The effect of laser wavelength and concentration on thermal nonlinear refractive index of grapheme suspensions. *Nano*, 2015, vol. 10, no. 4, p. 1550053. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1793292015500538>
- Cherepanov I.N. On the redistribution of impurities in colloidal mixtures. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2018, vol. 88, no. 12, pp. 1763–1770. DOI: <https://doi.org/10.21883/JTF.2018.12.46775.2589> (In Russ.)
- Voyutskiy S.S. *Colloid Chemistry Course*. Moscow: Khimiya, 1975, 512 p. (In Russ.)
- Ivakhnik V.V., Savel'ev M.V. Non-stationary four-wave interaction in a transparent two-component medium. *Komp'yuternaya optika*, 2018, vol. 42, no. 2, pp. 227–235. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2018-42-2-227-235> (In Russ.)
- Ivakhnik V.V., Savel'ev M.V. Degenerate four-wave mixing in transparent two-component medium considering spatial structure of the pump waves. *Journal of Physics. Conference Series*, 2016, vol. 737, pp. 012007. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/737/1/012007>
- Ivakhnik V.V., Savel'ev M.V. Spatial selectivity of a four-wave radiation converter in an absorbing two-component medium at high reflection coefficients. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2018, vol. 21, no. 2, pp. 5–13. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7029/6888> (In Russ.)
- Savel'ev M.V., Ivakhnik V.V. Spatial selectivity of a four-wave radiation converter taking into account the force of gravity acting on nanoparticles dissolved in a transparent liquid. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Radiofizika*, 2020, vol. 63, no. 8, pp. 694–703. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44851030> (In Russ.)
- Remzov A.D., Savel'ev M.V. Counter four-wave interaction in a transparent suspension of nanoparticles in the Earth's gravity field. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya fizicheskaya*, 2021, vol. 85, no. 12, pp. 1770–1775. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0367676521120267> (In Russ.)
- Ivakhnik V.V., Savel'ev M.V. Spatial selectivity of a four-wave radiation converter taking into account the thermal diffusion and electrostrictive mechanisms of nonlinearity. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 6–11. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20211855> (In Russ.)
- Ershov A.E. et al. Optodynamic phenomena in aggregates of polydisperse plasmonic nanoparticles. *Applied Physics B*, 2014, vol. 115, pp. 547–560. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00340-013-5636-6>
- Zorinants G. et al. Background-free 3D nanometric localization and sub-nm asymmetry detection of single plasmonic nanoparticles by four-wave mixing interferometry with optical vortices. *Physical Review X*, 2017, vol. 7, pp. 041022. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.041022>
- Uchida K. et al. Optical nonlinearities of a high concentration of small metal particles dispersed in glass: copper and silver particles. *Journal of the Optical Society of America B*, 1994, vol. 11, no. 7, pp. 1236–1243. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.11.001236>
- Bloemer M.J., Haus J.W., Ashley P.R. Degenerate four-wave mixing in colloidal gold as a function of particle size. *Journal of the Optical Society of America B*, 1990, vol. 7, no. 5, pp. 790–795. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.7.000790>
- Al'debeneva K.N., Ivakhnik V.V., Savel'ev M.V. Effect of particle size distribution on the characteristics of a four-wave radiation converter in a transparent two-component medium. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 4–9. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.1.4-9> (In Russ.)

25. Gerakis A. et al. Four-wave-mixing approach to in situ detection of nanoparticles. *Physical Review Applied*, 2018, vol. 9, p. 014031. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.9.014031>
26. Larsson C., Kumar S. Nonuniformities in miscible two-layer two-component thin liquid films. *Physical Review Fluids*, 2021, vol. 6, p. 034004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.6.034004>
27. Khe V.K. et al. Sedimentation of particles by the light pressure in nanosuspension. *Proceedings of SPIE*, 2017, vol. 10466, p. 104664K. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2288774>
28. Behera S.K. et al. Effects of polydispersity on the glass transition dynamics of aqueous suspensions of soft spherical colloidal particles. *Physical Review Materials*, 2017, vol. 1, p. 055603. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.1.055603>
29. Ivanov V.I., Pyachin S.A. Separation of particles in a polydisperse nanosuspension in the field of laser radiation. *Fiziko-khimicheskie aspekty izucheniya klasterov, nanostruktur i nanomaterialov*, 2021, no. 13, pp. 146–155. DOI: <https://doi.org/10.26456/pcascnn/2021.13.146> (In Russ.)

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2023, vol. 26, no. 1, pp. 9–17

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.9-17

Received 24 November 2022

Accepted 26 December 2022

### Influence of nanoparticle dispersion in a transparent liquid on the spatial characteristics of a four-wave radiation converter

Valery V. Ivakhnik, Maxim V. Savelyev 

Samara National Research University  
34, Moskovskoye shosse,  
Samara, 443086, Russian Federation

*Abstract* – The spatial characteristics of a four-wave radiation converter in a transparent heterogeneous polydisperse medium are studied in this paper considering the nanoparticle flow caused by the gravity action with a normal size distribution of particle. Three ranges of average nanoparticle radii (small, intermediate and large), for which different types of spatial spectra of the object waves are characteristic, are distinguished. Shown that in the range of small average nanoparticle radii an increase in the standard deviation leads to an increase in the half-width of the spatial frequency band cut out by a four-wave radiation converter from the spatial spectrum of the object wave. In the range of intermediate average nanoparticle radii an increase in the standard deviation can lead to both an increase and a decrease in the width of the «ring» cut out by a four-wave radiation converter. At large average nanoparticle radii a change in the standard deviation doesn't affect the spatial selectivity of the four-wave radiation converter.

*Keywords* – four-wave radiation converter; transparent medium; normal distribution.

---

### Информация об авторах

**Ивахник Валерий Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой оптики и спектроскопии Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* нелинейная оптика, динамическая голография.

*E-mail:* [ivakhnik@ssau.ru](mailto:ivakhnik@ssau.ru)

**Савельев Максим Валерьевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры оптики и спектроскопии Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* нелинейная оптика, динамическая голография.

*E-mail:* [belchonokenot@mail.ru](mailto:belchonokenot@mail.ru)

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-7548-0331>

### Information about the Authors

**Valery V. Ivakhnik**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, head of the Department of Optics and Spectroscopy, Samara National Research University, Samara, Russia.

*Research interests:* nonlinear optics, dynamic holography.

*E-mail:* [ivakhnik@ssau.ru](mailto:ivakhnik@ssau.ru)

**Maxim V. Savelyev**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Optics and Spectroscopy, Samara National Research University, Samara, Russia.

*Research interests:* nonlinear optics, dynamic holography.

*E-mail:* [belchonokenot@mail.ru](mailto:belchonokenot@mail.ru)

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-7548-0331>

## Линейно поляризованное поле плоской апертуры

С.П. Скулкин<sup>1</sup> , Н.А. Лысенко<sup>2</sup> , Г.К. Усков<sup>2</sup> , Н.И. Кащеев<sup>1</sup>, К.В. Смушева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Нижегородский филиал Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»  
603155, Россия, г. Нижний Новгород,  
ул. Большая Печерская, 25/12

<sup>2</sup> Воронежский государственный университет  
394018, Россия, г. Воронеж,  
Университетская пл., 1

**Аннотация** – В статье проводится анализ плоской круглой апертуры и предлагается к использованию новое аналитическое выражение, описывающее диаграмму направленности элементарного излучателя апертуры антенны в зависимости от времени и угла интегрирования. Представленная в работе формула может применяться к любому плоскому участку апертуры без учета его формы. Приведено новое уравнение для первообразной функции импульсной характеристики круглой апертуры в виде эллиптического интеграла второго рода. Показано, что теоретически рассчитанные по формулам результаты хорошо согласуются с численным моделированием. При анализе численной модели использовался метод конечного интегрирования во временной области (FIT). Вследствие требования большого вычислительного ресурса численная модель представлялась упрощенной.

**Ключевые слова** – апертура; ЭМ-волна; линейная поляризация; импульсная характеристика.

### Введение

Апертурные антенны широко используются для различных инженерных решений, в первую очередь для спутниковой связи, например параболические излучатели. Основным преимуществом таких антенн является высокий коэффициент усиления, который достигается за счет большого отношения размера антенны к максимальной длине волны используемого сигнала [1].

Хотя поля узкополосных антенн были изучены и описаны 50–70 лет назад, из-за громоздких расчетов с использованием монохроматических сигналов все еще обсуждается большое количество вопросов, например критерий дальнего поля. Также неопределенности существуют в выборе таких параметров измерений диаграммы направленности в ближней зоне, как расстояние апертура – зонд, размер области сканирования и т. д.

ЭМ-поля импульсных сигналов апертурных антенн [2] становятся актуальными для исследований в связи с постоянным расширением полосы рабочих частот систем связи. Для расчета поля апертурной антенны на монохроматическом (узкополосном) сигнале обычно используется либо апертурный, либо токовый метод расчета поля [1–5].

Метод физической оптики во временной области, в котором на поверхности рассеивателя определяется контур интегрирования, используется в [6–18]. Аналогом метода физической оптики во временной области является апертурный метод [19–24].

В апертурном методе элемент Гюйгенса часто используется в качестве элемента апертуры. Нормированная амплитудная диаграмма направленности антенны элемента Гюйгенса определяется выражением

$$\alpha(\vec{r}, \vec{r}_a) = (1 + \cos(\gamma)) / 2.$$

Здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор от точки апертуры  $\vec{r}_a$  до точки наблюдения;  $\gamma$  – угол между нормалью к поверхности и направлением на точку наблюдения. Однако такая диаграмма направленности действительна только для компонентов поля в свободном пространстве. Существуют другие представления диаграммы направленности элементарного излучателя  $\alpha(\vec{r}, \vec{r}_a)$  для разных задач. Иногда этот множитель может быть выражен как  $\cos(\gamma)$  [4].

В теории апертурных антенн [1–6] предполагается, что ток на поверхности металла  $\vec{J}^e$  равен  $\vec{J}_e = 2[\vec{n}, \vec{H}_S]$ , где  $\vec{n}$  – вектор нормали к апертуре, а  $\vec{H}_S$  – магнитное поле на поверхности апертуры. Следует отметить, что это выражение верно, если поверхность апертуры идеально проводящая и имеет бесконечные размеры.

Элемент поверхности апертуры  $S$  можно рассматривать как элементарный электрический излучатель (элементарный диполь), если магнитные силовые линии действуют по касательной к нему, тогда как тангенциальные электрические силовые линии отсутствуют. Таким образом, его можно рассматривать как элемент длинного про-

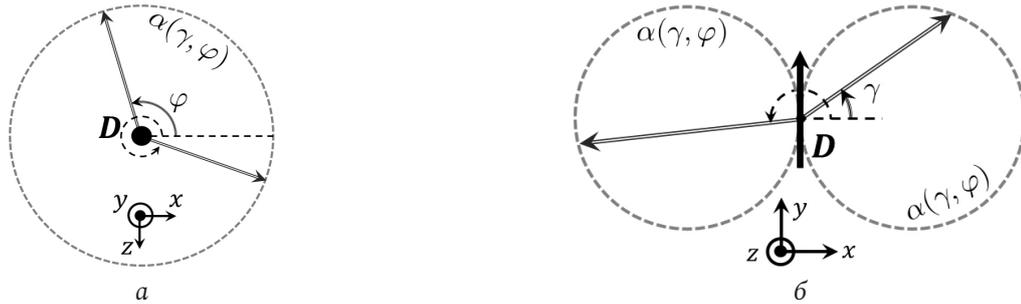


Рис. 1. Диаграмма направленности электрического диполя в горизонтальной (а) и вертикальной (б) плоскостях  
 Fig. 1. Directional pattern of an electric dipole in the horizontal (a) and vertical (b) planes

вода с бесконечной проводимостью. Линейный размер  $l$  элемента должен удовлетворять условию  $l \ll \lambda$ . Согласно граничным условиям при переходе «идеальный проводник (провод) – свободное пространство», тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  будет равна нулю, а тангенциальная составляющая вектора  $\vec{H}$  определяется значением поверхностной плотности тока.

Пространственная нормированная амплитудная диаграмма направленности элементарного электрического диполя, представленная в виде некоторой функциональной поверхности  $F(\gamma, \varphi)$ , представляет собой трехмерную фигуру. На практике обычно используют плоские амплитудные диаграммы направленности, изображающие зависимость значений напряженности поля от направления в одной из двух основных плоскостей (рис. 1).

## 1. Основные уравнения

Из апертурной теории, основанной на физической оптике, известно, что передаточная функция апертюры с равномерным распределением поля может быть найдена с использованием пространственно-частотной зависимости поля излучателя от определенной поляризации [1]:

$$E(\vec{r}, \omega) = \frac{j\omega}{2\pi c} \iint_{S_a} \frac{g(\vec{r}_a) \alpha(\vec{r}, \vec{r}_a) e^{j\omega|\vec{r}-\vec{r}_a|/c}}{|\vec{r}-\vec{r}_a|} dS_a. \quad (1)$$

Здесь  $\omega$  – круговая частота;  $c$  – скорость света;  $S_a$  – поверхность апертюры;  $g(\vec{r}_a)$  – функция освещенности апертюры;  $\alpha(\vec{r}, \vec{r}_a)$  – поляризационный множитель, который определяется диаграммой направленности элементарного излучателя апертюры.

Для сверхширокополосных импульсных сигналов удобнее работать с временным представлением сигнала. Как показано в [6], можно предположить, что каждая точка апертюры излучала  $\delta$ -импульс в момент времени  $t = 0$ . Первообразная

импульсной характеристики (ПИХ)  $\hat{E}(\vec{r}, t)$  в точке  $\vec{r}$  может быть получена в следующем виде [6]:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{S_a} \frac{g(\vec{r}_a) \alpha(\vec{r}, \vec{r}_a) \delta\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_a|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_a|} dS_a. \quad (2)$$

Поэтому если используется принятая нами идеализация, то такая форма является представлением поля, в то время как излучаемый сигнал представляет собой  $\delta$ -импульс. Поскольку в действительности поле апертюры пропорционально частной производной входного тока по времени, во многих случаях удобнее работать с производной от первообразной (импульсной характеристики), так как это проще и нагляднее.

Будем считать, что энергия импульсного сигнала  $S_{in}(t)$  сосредоточена в основном в полосе частот  $\omega_{min} \ll \omega \ll \omega_{max}$  и  $\lambda_{max} \ll D$ , где  $D$  – диаметр круглой апертюры; или  $\lambda_{max} \ll 2R$ , где  $R$  – радиус апертюры. Хотя выражение (2) было бы формально неверно, но в данном случае это позволит нам получить правильный результат для сигнала на входе антенны  $S_{in}(t)$  (подробнее см. [3] и [6]).

Таким образом, это наиболее удобный ход вычисления представления поля излучаемого  $\delta$ -импульса, затем производной ПИХ и, наконец, вычисления свертки ИХ и входного импульса по формуле (3).

В результате, используя (2) и с заданным сигналом на входе антенны  $S_{in}(t)$ , можно получить выражение для поля в любой точке перед апертюрой, учитывая предположение, что вся система линейна [6]:

$$S_{\vec{E}}(\vec{r}, t) = S_{in}(t) \otimes \frac{\partial \hat{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = S_{in}(t) \otimes h(\vec{r}, t). \quad (3)$$

Здесь  $\hat{E}(\vec{r}, t)$  – первообразная импульсной характеристики; функция  $h(\vec{r}, t)$  – ИХ апертюры; символ  $\otimes$  – означает свертку по времени. В [6] было показано, что  $\hat{E}(\vec{r}, t)$  может быть выражено как



Рис. 2. Апертура  $S_a$  и воображаемая сфера с радиусом  $ct$  (а); апертура  $S_a$ , контур интегрирования  $C_a$  и угол  $\varphi$  (б)  
Fig. 2. Aperture  $S_a$  and imaginary sphere with radius  $ct$  (a); aperture  $S_a$ , integration contour  $C_a$  and angle  $\varphi$  (b)

$$E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} g(\vec{r}_a \in C_a) \alpha(\vec{r}, \vec{r}_a \in C_a) d\varphi. \quad (4)$$

Здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор от точки на апертуре  $\vec{r}_a$  до точки наблюдения А (рис. 2, а), контур  $C_a$  представляет собой окружность с радиусом  $r_{ct} = \sqrt{(ct)^2 - z^2}$  (рис. 2, б) с центром в  $\vec{r}_0$ , где  $\vec{r}_0$  – проекция вектора  $\vec{r}$  на плоскость апертуры;  $t$  – время. Интеграл берется по углу  $\varphi$ , который описывает дугу окружности  $C_a$  с центром в  $\vec{r}_0$ . Пределы интегрирования  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  зависят от положения  $\vec{r}$  таким образом, что оба значения могут варьироваться от 0 до  $2\pi$ . Предположим, что распределение амплитуды апертуры является постоянным по всей плоскости апертуры  $g(\vec{r}_a) = 1$ . Перепишем множитель поляризации или зависимость диаграммы направленности апертурного элементарного излучателя  $\alpha(\vec{r}, \vec{r}_a)$  как функцию углов  $\gamma$  и  $\varphi$ :

$$\alpha(\vec{r}, \vec{r}_a) = \alpha(\gamma(\vec{r}, \vec{r}_a), \varphi(\vec{r}_a)). \quad (5)$$

Для первообразной импульсной характеристики следует интеграл:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \alpha(\gamma, \varphi) d\varphi. \quad (6)$$

Простое выражение для  $\gamma$  можно получить из рис. 2:

$$\cos(\gamma) = z/ct. \quad (7)$$

Как было описано выше,  $\cos(\gamma) = \alpha(\gamma, 0)$  представляет собой диаграмму направленности вертикально расположенного элементарного диполя (или диаграмму направленности элементарного излучателя плоской металлической поверхности бесконечной проводимости) в вертикальной плоскости (рис. 1). В горизонтальной плоскости диаграмма такого излучателя постоянна:  $\alpha(0, \varphi) = 1$ .

Следовательно, во временной области должно быть найдено выражение множителя  $\alpha(\gamma(t), \varphi(t))$ , которое позволит описать правильное изменение значения  $\hat{E}(\vec{r}, t)$ . Известно, что диаграмма направленности элементарного электрического диполя в пространственной форме представляет собой круглый тор с центром в середине диполя и равными внутренним и внешним радиусами. На рис. 3 показан диполь и его диаграмма направленности в трех измерениях. Допустим, что напряженность поля  $\vec{E}$  коллинеарна оси  $u$ .

Здесь следует отметить, что при расчете интеграла (6) множитель поляризации  $\alpha$  нельзя вынести из-под интеграла, так как для каждого угла  $\varphi$  в процессе интегрирования фактически необходимо учитывать значение диаграммы направленности антенны на участке тора вдоль определенного направления  $(\gamma, \varphi)$ . Это действие обусловлено тем, что радиус-вектор  $\vec{r}_{ct}$  и, соответственно, поперечное сечение диаграммы направленности каждого вертикального диполя поворачивается относительно вертикальной оси  $u$  при прохождении различных значений угла  $\varphi$ . Следовательно, в каждой точке дуги  $C_a$  множитель поляризации имеет разную величину, поскольку он описывает длину радиуса сечения тора в направлении угла  $\gamma$ . На рис. 3 предполагается, что операция интеграции выполняется в первой четверти плоскости  $YOX$ .

На рис. 4 показаны относительные положения круглой апертуры  $S_a$ , контура интегрирования  $C_a$  и различных диаграмм направленности  $\alpha(\gamma, \varphi)$  в зависимости от угла интегрирования  $\varphi$ .

Следует отметить, что поперечное сечение круглого тора с плоскостью, параллельной его оси вращения, хорошо известно и изучено [8]. Такие сечения представляют собой кривые Персея или овалы Кассини. Каноническое уравнение тора с осью симметрии  $u$  выглядит следующим образом:

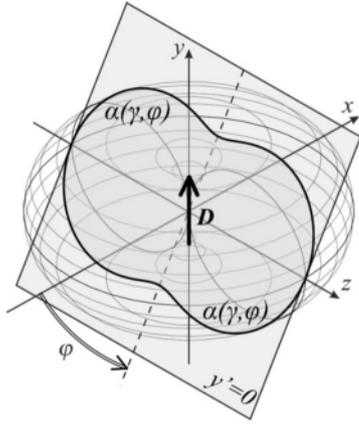


Рис. 3. Диполь  $D$  и его диаграмма направленности в трех измерениях  
 Fig. 3. Dipole  $D$  and its radiation pattern in three dimensions

$$\left(\sqrt{z^2 + x^2} - Q\right)^2 = y^2 + q^2, \quad (8)$$

где  $x, y, z$  – декартовы координаты;  $Q$  – расстояние от оси симметрии на формирование круга (в центре фигуры вращения);  $Q$  – радиус образующего круга (фигуры вращения). Каноническое уравнение секущей плоскости:

$$y = \tan(\varphi)x, z = \forall \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

После некоторых перестановок и преобразований можно получить выражение для радиуса поперечного сечения:

$$r_{cs} = \alpha(\gamma, \varphi) = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi}. \quad (10)$$

Заменяя  $\gamma$  из (7), можно записать как:

$$\alpha(t, \varphi) = \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{z}{ct}\right)^2\right) \sin^2(\varphi)}. \quad (11)$$

Выражение (11) является новым выражением для поляризационного множителя элементарного излучателя металлической плоской поверхности с бесконечной проводимостью во временной области. Отметим, что (11) относится к металлической плоской апертуре независимо от ее формы.

Выражение (6) для первообразной импульсной характеристики с учетом множителя поляризации (11) переписывается следующим образом:

$$E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{z}{ct}\right)^2\right) \sin^2(\varphi)} d\varphi. \quad (12)$$

Если ввести параметр  $\beta = 1 / \left(1 - \left(\frac{z}{ct}\right)^2\right)$ , то интеграл (12) можно преобразовать в

$$E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\beta - \sin^2(\varphi)} d\varphi \times \quad (13)$$

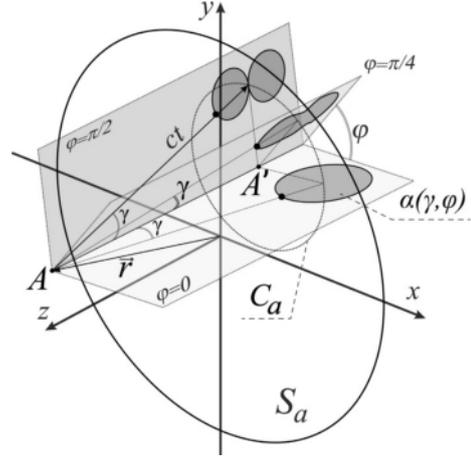


Рис. 4. Круглая апертура  $S_a$ , контур  $C_a$  и различные диаграммы направленности  $\alpha(\gamma, \varphi)$  в зависимости от угла интегрирования  $\varphi$

Fig. 4. Circular aperture  $S_a$ , contour  $C_a$  and different radiation patterns  $\alpha(\gamma, \varphi)$  depending on the angle of integration  $\varphi$

$$\times \left( \frac{\sqrt{2\beta + \cos(2\varphi) - 1}}{\sqrt{2\beta + \cos(2\varphi) - 1/b}} \right) E\left(\varphi \middle| \frac{1}{\beta}\right).$$

Здесь  $E(\varphi | 1/\beta)$  – эллиптический интеграл второго рода с параметром  $1/\beta$ . Этот интеграл является табличным интегралом и не может быть выражен в виде элементарных функций. Такие интегралы были впервые изучены Джулио Фаньяно и Леонардом Эйлером в середине XVIII века [25]. Второй род эллиптического интеграла дает длину дуги эллипса. Эллиптические интегралы как первого, так и второго рода доступны для расчета в Matlab. В общем случае выражение (13) может использоваться для плоской апертуры любой формы. В каждый момент времени  $t$  углы интегрирования  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  вдоль части окружности  $C_a$  определяются точками, в которых этот контур пересекается с границей апертуры  $S_a$ . Отметим, что в некоторых случаях, таких как прямоугольная апертура, на линии интегрирования может быть несколько таких сегментов (см. [10]), тогда интеграл будет состоять из суммы интегралов по этим сегментам.

## 2. Результаты расчетов

Произведем сравнение результатов расчета временных зависимостей поля, полученных с использованием предложенного метода расчета для трех различных множителей поляризации, и результатов численного моделирования с использованием метода конечного интегрирования (Finite Integration Technique, FIT).

Вычисления в модели производились в пределах счетного объема. Расстояние от поверхности

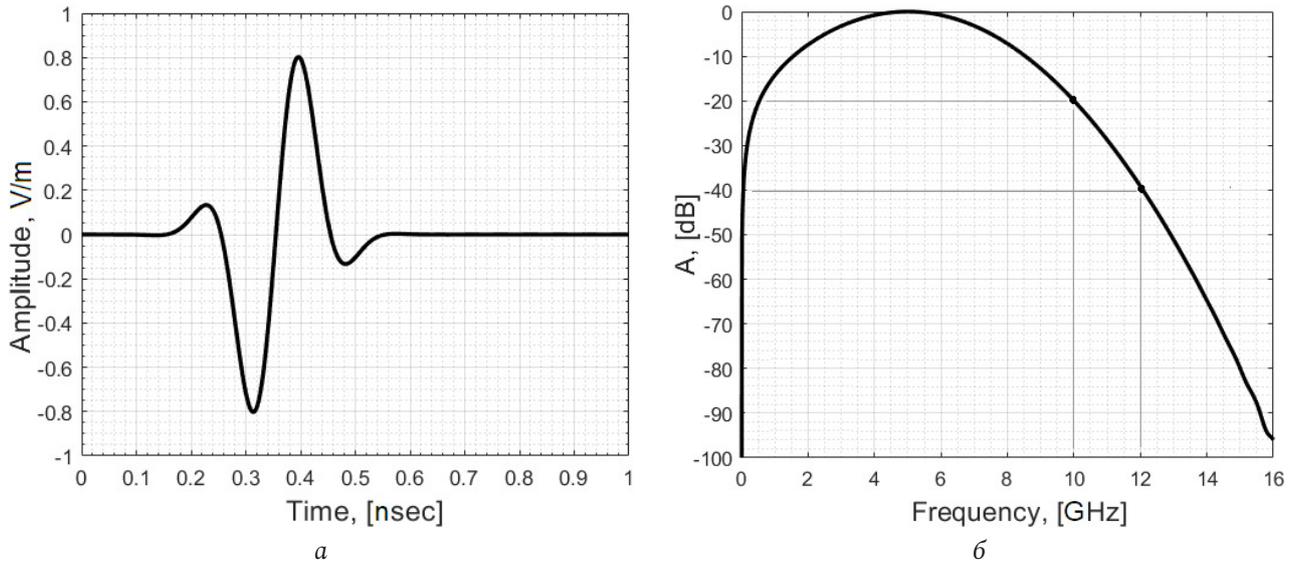


Рис. 5. Биполярный гауссовский UWB-сигнал (а); спектр этого сигнала (б)  
Fig. 5. Bipolar Gaussian UWB signal (a); spectrum of this signal (b)

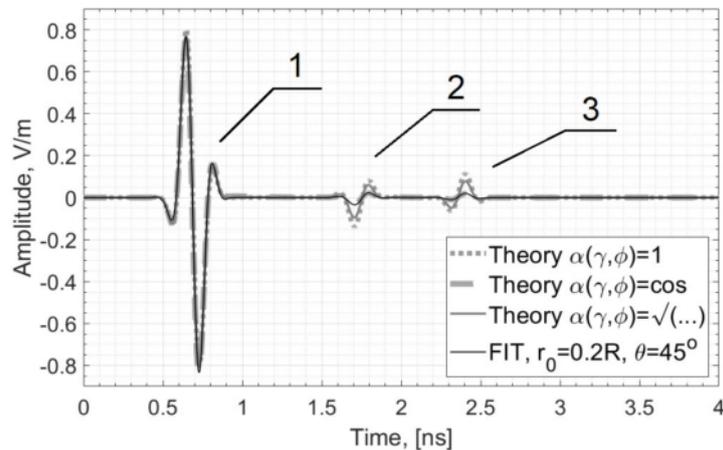


Рис. 6. Сигналы на зондах, полученные численно с помощью FIT (тонкая черная сплошная линия) и свертки с теоретическими IRF для трех различных  $\alpha(\gamma, \phi)$   
Fig. 6. Probe signals obtained numerically with FIT (thin black solid line) and convolution with theoretical IRFs for three different  $\alpha(\gamma, \phi)$

апертуры до границ вдоль оси  $X$  и оси  $Y$  составляло 0,5 метра. Коэффициент отражения согласованных слоев на границах (perfect matched layers) составлял  $10^{-5}$ . Количество ячеек шестигранной сетки, на которые был разделен расчетный объем, было 200 миллионов в четвертой части объема. Использовалось адаптивное формирование сетки: в окрестности неоднородностей структуры создавались более мелкие ячейки.

Линейно поляризованная плоская волна распространялась от границы счетного объема перпендикулярно круглой апертуре. Нулевым моментом времени анализа считался момент отражения от плоской круглой пластины. Перед такой квази-апертурой помещались бесконечно малые линейно поляризованные зонды поля.

В связи с необходимостью ограничения полосы частот в методе FIT для возбуждения плоской волны в моделировании использовался биполярный гауссовский сверхширокополосный (СШП) ультракороткий импульс (рис. 5, а) со спектром от 1 МГц до 10 ГГц по уровню  $-20$  дБ и до 12 ГГц по уровню  $-40$  дБ (рис. 5, б).

Сигнал на зонде, полученный численно (пунктирная линия), и свертки входного сигнала (рис. 5, а) с тремя теоретическими ИХ, производными от выражения (13) для различных множителей поляризации, показаны на рис. 6 и 7.

Зонд расположен в точке  $r_0 = 0,2R, z = 0,2R, \theta = \pi/4$ . Здесь  $r_0, z, \theta$  – цилиндрические координаты;  $r_0$  – расстояние от оси  $z$ ;  $\theta$  – угол от оси  $x$ . Первый импульс на рис. 6 и 7 является основным

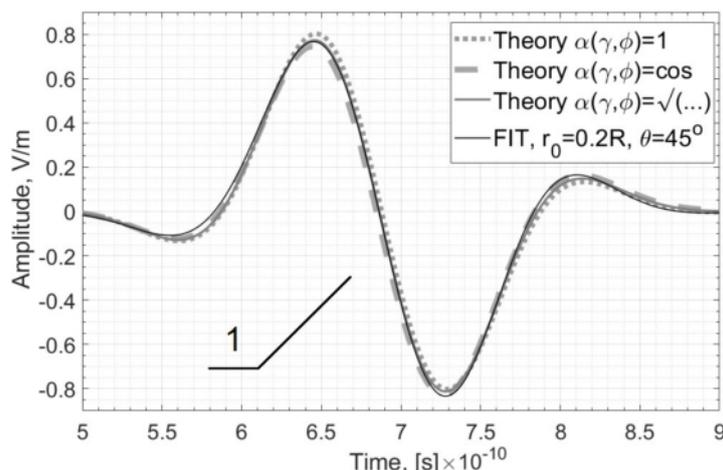


Рис. 7. Сигналы на зондах, полученные численно с помощью FIT (тонкая черная сплошная линия) и свертки с теоретическими IRF для трех различных  $\alpha(\gamma, \phi)$

Fig. 7. Probe signals obtained numerically with FIT (thin black solid line) and convolution with theoretical IRFs for three different  $\alpha(\gamma, \phi)$

импульсом, 2-й и 3-й импульсы на рис. 6 вызваны граничными и краевыми эффектами [6].

На рис. 7 показан увеличенный вид основного импульса, представленного на рис. 6. Здесь видно, что основная форма импульса практически одинакова для всех поляризационных множителей, что говорит об импульсе основной волны. Однако его максимальная амплитуда и время пересечения нуля в середине (приблизительно 6,9 нс) различны. Разница по максимальной амплитуде импульса, полученного методом FIT, и импульса, вычисляемого по формуле (11), составляет около 0,5 %, для «косинусного» поляризационного множителя эта разница будет около 2,5 %, а для изотропного излучателя – около 4 %.

На оси  $z$ , когда  $r_0 = 0$ , можно наблюдать только два импульса: основной импульс и сумму граничных и краевых эффектов, которые одновременно попадают в эту точку из круглой апертуры. В любых других случаях внутри апертурного или прожекторного луча, когда  $r_0 \neq 0$ , сигнал от апертуры будет иметь три импульса. При рассмотрении точки за пределами прожекторного луча будут наблюдаться два граничных импульса с противоположным знаком – от ближайшей границы и от противоположного края.

Сравнение сигналов, рассчитанных методом FIT, и предложенным в работе методом показало, что амплитуды второго и третьего импульсов, соответствующих задней части первообразной ИХ, различны. Самая большая разница наблюдается вблизи оси  $z$ . Эти отклонения определяются и объясняются диаграммой направленности антенны элементарного излучателя и эффектом, связанным с затеканием токов на границе апертуры.

Можно заметить, что амплитуда сигнала на зонде, полученная методом FIT, меньше по сравнению с теоретическими расчетами. Судя по всему, краевые токи на границе компенсируют/уменьшают вторичные импульсы.

## Заключение

В работе представлено новое аналитическое выражение во временной области (11) для диаграммы направленности элементарного излучателя плоской апертуры антенны в зависимости от времени и угла интегрирования. Также получено новое выражение (13) для первообразной импульсной характеристики круглой апертуры в виде эллиптического интеграла второго рода. Последнее выражение может быть применено к плоской апертуре любой формы. Форма плоской апертуры в (13) определялась только сегментом интегрирования или в некоторых случаях несколькими сегментами.

Полученные выражения для поля позволяют более точно рассчитать поле больших плоских металлических апертур, где численные методы вычисления (FIT, метод моментов и т. д.) становятся труднореализуемыми с точки зрения временных и вычислительных затрат. Таким образом, с помощью аналитического метода, основанного на физической оптике и апертурной теории во временной области, повышается точность метода для линейно поляризованного поля.

Предложенный метод позволяет проще и с большей точностью решить задачи, связанные с пространственным распределением линейно поляризованного поля апертурных антенн.

Публикация подготовлена в ходе/в результате проведения исследования/работы (№ проекта 22-00-035 «Особенности импульсных полей апертурных антенн».) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)».

### Список литературы

1. Hansen R.C. Microwave Scanning Antennas. New York: Academic, 1964. 442 p.
2. Baum C.E., Farr E.G. Impulse radiating antennas // Ultra-Wideband/Short-Pulse Electromagnetics / ed. by H.L. Bertoni, C.E. Baum, and L.B. Felsen. New York: Plenum, 1993. P. 139–147.
3. Balanis C.A. Antenna Theory: Analysis and Design; 2nd edition. Hoboken: Wiley, 1997. 956 p.
4. Ключев Д.С. Расчет характеристик зеркальной антенны с плоским зеркалом методом двумерных сингулярных интегральных уравнений // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13, № 1. С. 21–26.
5. Электродинамический анализ зеркальных антенн в приближении барицентрического метода / И.С. Полянский [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 4. С. 36–47. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47>
6. Времяимпульсный метод измерения характеристик антенн в ближней зоне / С.В. Горюнова [и др.] // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 1. С. 73–83.
7. Sun E.-Y., Rusch W.V.T. Time-domain physical-optics // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1994. Vol. 42, no. 1. P. 9–15. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.272295>
8. Sun E.-Y. Transient analysis of large paraboloidal reflector antennas // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1995. Vol. 43, no. 12. P. 1491–1496. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.475944>
9. Chou H.-T., Pathak P.H., Rousseau P.R. Analytical solution for early-time transient radiation from pulse-excited parabolic reflector antennas // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1997. Vol. 45, no. 5. P. 829–836. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.575632>
10. Импульсное поле круглой плоской апертуры / Н.А. Лысенко [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21, № 3. С. 43–49. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7017>
11. Skulkin S.P., Turchin V.I. Transient fields of parabolic reflector antennas // Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics. Vol. 3 / ed. by C.E. Baum, L. Carin, and A.P. Stone. New York: Plenum, 1997. P. 81–87.
12. Skulkin S.P., Turchin V.I. Transient field calculation of aperture antennas // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1999. Vol. 47, no. 5. P. 929–932. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.774158>
13. Skulkin S.P., Turchin V.I. Transient far-fields of offset reflector antenna // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. 2001. P. 546–549. DOI: <https://doi.org/10.1109/APS.2001.958911>
14. Skulkin S.P., Turchin V.I. Transient fields of offset reflector // Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics. Vol. 5 / ed. by P.D. Smith and S.R. Cloude. New York: Springer, 2002. P. 371–375.
15. Chou H.-T., Tuan S.-C. Analytic analysis of transient scattering from a finite second-order surface illuminated by an incident plane wave // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2006. Vol. 54, no. 9. P. 2463–2471. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2006.880672>
16. Chou H.-T., Tuan S.-C., Chou H.-H. Transient analysis of scattering from a perfectly conducting parabolic reflector illuminated by a Gaussian beam electromagnetic field // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2010. Vol. 58, no. 5. P. 1711–1719. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2010.2044347>
17. Transient field calculation of aperture antennas for various field distributions over the aperture / S.P. Skulkin [et al.] // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2017. Vol. 16. P. 2295–2298. DOI: <https://doi.org/10.1109/LAWP.2017.2715323>
18. Transient far fields of aperture antennas / S.P. Skulkin [et al.] // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2019. Vol. 18, no. 5. P. 1036–1040. DOI: <https://doi.org/10.1109/LAWP.2019.2908455>
19. Veruttipong T.W. Time domain version of the uniform GTD // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1990. Vol. 38, no. 11. P. 1757–1764. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.102736>
20. Ianculescu R., Heyman E. Pulsed field diffraction by a perfectly conducting wedge: A spectral theory of transients analysis // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1994. Vol. 42, no. 6. P. 781–789. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.301696>
21. Ianculescu R., Heyman E. Pulsed field diffraction by a perfectly conducting wedge: exact solution // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1994. Vol. 42, no. 10. P. 1377–1385. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.320743>
22. Rousseau P.R., Pathak P.H. Time-domain uniform geometrical theory of diffraction for a curved wedge // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1995. Vol. 43, no. 12. P. 1375–1382. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.475925>
23. Johansen P.M. Time-domain version of the physical theory of diffraction // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1999. Vol. 47, no. 2. P. 261–270. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.761065>
24. Rousseau P.R., Pathak P.H., Chou H.-T. A time domain formulation of the uniform geometrical theory of diffraction for scattering from a smooth convex surface // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2007. Vol. 55, no. 6. P. 1522–1534. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2007.897204>
25. Grattan-Guinness I. The Fontana History of the Mathematical Sciences. New York: Fontana Press, 1997. P. 308.

## References

1. Hansen R.C. *Microwave Scanning Antennas*. New York: Academic, 1964, 442 p.
2. Baum C.E., Farr E.G. Impulse radiating antennas. *Ultra-Wideband/Short-Pulse Electromagnetics*. Ed. by H.L. Bertoni, C.E. Baum, and L.B. Felsen. New York: Plenum, 1993, pp. 139–147.
3. Balanis C.A. *Antenna Theory: Analysis and Design*; 2nd edition. Hoboken: Wiley, 1997, 956 p.
4. Klyuev D.S. Calculation of the characteristics of a reflector antenna with a flat mirror by the method of two-dimensional singular integral equations. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2010, vol. 13, no. 1, pp. 21–26. (In Russ.)
5. Polyanskiy I.S. et al. Electrodynamic analysis of reflector antennas in the approximation of the barycentric method. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2020, vol. 23, no. 4, pp. 36–47. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47> (In Russ.)
6. Gopyunova S.V. et al. Time Pulse method for measuring antenna characteristics in the near field. *Izv. vuzov. Radiofizika*, 1989, vol. 32, no. 1, pp. 73–83. (In Russ.)
7. Sun E.-Y., Rusch W.V.T. Time-domain physical-optics. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1994, vol. 42, no. 1, pp. 9–15. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.272295>
8. Sun E.-Y. Transient analysis of large paraboloidal reflector antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1995, vol. 43, no. 12, pp. 1491–1496. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.475944>
9. Chou H.-T., Pathak P.H., Rousseau P.R. Analytical solution for early-time transient radiation from pulse-excited parabolic reflector antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1997, vol. 45, no. 5, pp. 829–836. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.575632>
10. Lysenko N.A. et al. Pulsed field of a circular flat aperture. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2018, vol. 21, no. 3, pp. 43–49. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7017> (In Russ.)
11. Skulkin S.P., Turchin V.I. Transient fields of parabolic reflector antennas. *Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics. Vol. 3*. Ed. by C.E. Baum, L. Carin, and A.P. Stone. New York: Plenum, 1997, pp. 81–87.
12. Skulkin S.P., Turchin V.I. Transient field calculation of aperture antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1999, vol. 47, no. 5, pp. 929–932. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.774158>
13. Skulkin S.P., Turchin V.I. Transient far-fields of offset reflector antenna. *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 2001, pp. 546–549. DOI: <https://doi.org/10.1109/APS.2001.958911>
14. Skulkin S.P., Turchin V.I. Transient fields of offset reflector. *Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics. Vol. 5*. Ed. by P.D. Smith and S.R. Cloude. New York: Springer, 2002, pp. 371–375.
15. Chou H.-T., Tuan S.-C. Analytic analysis of transient scattering from a finite second-order surface illumin. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2006, vol. 54, no. 9, pp. 2463–2471. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2006.880672>
16. Chou H.-T., Tuan S.-C., Chou H.-H. Transient analysis of scattering from a perfectly conducting parabolic reflector illuminated by a Gaussian beam electromagnetic field. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2010, vol. 58, no. 5, pp. 1711–1719. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2010.2044347>
17. Skulkin S.P. et al. Transient field calculation of aperture antennas for various field distributions over the aperture. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2017, vol. 16, pp. 2295–2298. DOI: <https://doi.org/10.1109/LAWP.2017.2715323>
18. Skulkin S.P. et al. Transient far fields of aperture antennas. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2019, vol. 18, no. 5, pp. 1036–1040. DOI: <https://doi.org/10.1109/LAWP.2019.2908455>
19. Veruttipong T.W. Time domain version of the uniform GTD. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1990, vol. 38, no. 11, pp. 1757–1764. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.102736>
20. Ianconescu R., Heyman E. Pulsed field diffraction by a perfectly conducting wedge: A spectral theory of transients analysis. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1994, vol. 42, no. 6, pp. 781–789. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.301696>
21. Ianconescu R., Heyman E. Pulsed field diffraction by a perfectly conducting wedge: exact solution. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1994, vol. 42, no. 10, pp. 1377–1385. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.320743>
22. Rousseau P.R., Pathak P.H. Time-domain uniform geometrical theory of diffraction for a curved wedge. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1995, vol. 43, no. 12, pp. 1375–1382. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.475925>
23. Johansen P.M. Time-domain version of the physical theory of diffraction. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1999, vol. 47, no. 2, pp. 261–270. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.761065>
24. Rousseau P.R., Pathak P.H., Chou H.-T. A time domain formulation of the uniform geometrical theory of diffraction for scattering from a smooth convex surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2007, vol. 55, no. 6, pp. 1522–1534. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2007.897204>
25. Grattan-Guinness I. *The Fontana History of the Mathematical Sciences*. New York: Fontana Press, 1997, p. 308.

## Linearly polarized field of a flat aperture

Sergey P. Skulkin<sup>1</sup> , Nikolai A. Lysenko<sup>2</sup> , Grigoriy K. Uskov<sup>2</sup> ,  
Nikolai I. Kashcheev<sup>1</sup>, Ksenia V. Smuseva<sup>2</sup>

<sup>1</sup> National Research University «Higher School of Economics» Nizhny Novgorod

25/12, Bolshaya Pecherskaya Street,  
Nizhny Novgorod, 603155, Russia

<sup>2</sup> Voronezh State University

1, Universitetskaya Square,  
Voronezh, 394018, Russia

*Abstract* – The article analyzes a flat circular aperture and proposes to use a new analytical expression that describes the radiation pattern of an elementary radiator of an antenna aperture depending on time and integration angle. The formula presented in the paper can be applied to any flat section of the aperture without taking into account its shape. A new equation for the antiderivative function of the impulse response of a circular aperture is presented in the form of an elliptic integral of the second kind. It is shown that the theoretically calculated results are in good agreement with numerical simulations. In the analysis of the numerical model, the method of finite integration in the time domain (FIT) was used. Due to the requirement of a large computational resource, the numerical model was simplified.

*Keywords* – aperture; EM wave; linear polarization; impulse response.

### Информация об авторах

**Скулкин Сергей Павлович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МЭРА Нижегородского филиала Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород, Россия.

*Область научных интересов:* сети, телекоммуникации, оптимизация, тестирование, безопасность, электронная аппаратура, телекоммуникации.

*E-mail:* sskulkin@hse.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-2915-3225>

**Лысенко Николай Александрович**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры электроники Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

*Область научных интересов:* апертурные антенны, импульсная характеристика, диэлектрические линзы, численные методы, антенные решетки.

*E-mail:* lysenko.hvr@gmail.com

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-3788-4367>

**Усков Григорий Константинович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры электроники Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

*Область научных интересов:* деградации в полупроводниках, СКИ- и СШП-импульсы, апертурные антенны, диэлектрические линзы, рупорные антенны, численные методы, антенные решетки.

*E-mail:* uskov@phys.vsu.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-8250-2511>

**Кашчев Николай Иванович**, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой МЭРА Нижегородского филиала Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород, Россия.

*Область научных интересов:* сетевые и телекоммуникационные технологии, телекоммуникационные технологии.

*E-mail:* nkashcheev@hse.ru

**Смусева Ксения Владимировна**, преподаватель Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

*Область научных интересов:* сверхширокополосные системы радиолокации и связи, антенны и антенные решетки, излучение и рассеяние электромагнитных волн.

*E-mail:* smusevaz@gmail.com

### Information about the Authors

**Sergey P. Skulkin**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of MERA, National Research University «Higher School of Economics» Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia.

*Research interests:* networks, telecommunications, optimization, testing, security, electronic equipment, telecommunications.

*E-mail:* sskulkin@hse.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-2915-3225>

**Nikolai A. Lysenko**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, researcher of the Department of Electronics, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

*Research interests:* aperture antennas, impulse response, dielectric lenses, numerical methods, antenna arrays.

*E-mail:* lysenko.hvr@gmail.com

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-3788-4367>

**Grigoriy K. Uskov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Electronics, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

*Research interests:* degradation in semiconductors, USP and UWB pulses, aperture antennas, dielectric lenses, horn antennas, numerical methods, antenna arrays.

*E-mail:* uskov@phys.vsu.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-8250-2511>

**Nikolai I. Kashcheev**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of MERA, National Research University «Higher School of Economics» Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia.

*Research interests:* network and telecommunication technologies, telecommunication technologies.

*E-mail:* nkashcheev@hse.ru

**Ksenia V. Smuseva**, lecturer, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

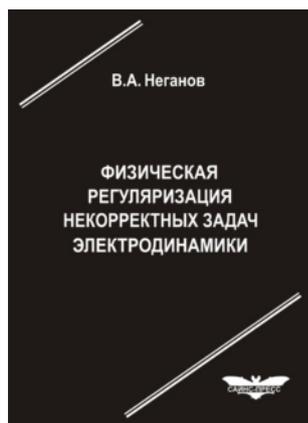
*Research interests:* ultra-wideband radar and communication systems, antennas and antenna arrays, radiation and scattering of electromagnetic waves.

*E-mail:* smusevaz@gmail.com

## РЕКЛАМА

**Неганов, В.А.**

**Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики: линии передачи, антенны, дифракция электромагнитных волн** / В.А. Неганов. – М.: САЙНС-ПРЕСС, 2008. – 432 с., 122 ил.



ISBN 978-5-88070-161-2

УДК 537.87

ББК 32.84

Н 41

Изложены основы физической регуляризации некорректных задач электродинамики, связанной с особенностями физических и математических моделей задач (физические допущения, некорректные математические выкладки, отсутствие предельного перехода). Подход, по мнению автора, обладает большими возможностями, чем метод регуляризации Тихонова А.Н. интегральных уравнений Фредгольма первого рода, названный в книге методом математической регуляризации. Метод физической регуляризации (МФР) применен к анализу волноведущих и излучающих структур, а также задачам дифракции электромагнитных волн на некоторых телах. МФР позволил впервые корректно осуществить анализ полей в ближних зонах некоторых антенн, устранить несамосогласованное приближение Кирхгофа в задачах дифракции, установить связь поверхностной плотности тока проводимости с напряженностями электрического и магнитного полей для диполя Герца и т. п.

*Для специалистов в области радиотехники и радиофизики СВЧ, электромагнитной совместимости РТС, математической теории дифракции и математического моделирования электродинамических структур самого широкого назначения. Может быть полезна преподавателям вузов, докторантам, аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей.*

## Возникновение флуктуаций амплитуды и фазы радиосигнала в турбулентной атмосфере

Д.С. Клюев<sup>1</sup> , А.Н. Волобуев<sup>2</sup> , С.В. Краснов<sup>2</sup> ,  
К.А. Адыширин-Заде<sup>2</sup> , Т.А. Антипова<sup>2</sup> , Н.Н. Александрова<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

<sup>2</sup> Самарский государственный медицинский университет  
443099, Россия, г. Самара,  
ул. Чапаевская, 89

*Аннотация* – Рассмотрено взаимодействие электромагнитной волны, как детерминированного волнового процесса, распространяющегося в атмосфере и атмосферной турбулентности, как стационарного стохастического волнового процесса. Получено дифференциальное уравнение для флуктуаций эйконала электромагнитной волны. На основе этого уравнения исследовано возникновение флуктуаций амплитуды и фазы электромагнитной волны при распространении радиосигнала в турбулентной атмосфере. В частности, получены и решены дифференциальные уравнения для флуктуаций амплитуды и фазы электромагнитной волны, вызванных турбулентными пульсациями показателя преломления атмосферы. Рассмотрены Фурье-спектры двухточечных корреляций показателя преломления атмосферы, амплитуды и фазы электромагнитной волны. Получены и методом введения функции Грина решены дифференциальные уравнения для этих корреляций. На основе анализа различных волновых диапазонов энергетического спектра атмосферной турбулентности найдены зависимости Фурье-спектров амплитуды и фазы радиосигнала от параметров электромагнитной волны и турбулентности атмосферы.

*Ключевые слова* – турбулентность атмосферы; радиоволны; флуктуации амплитуды и фазы; двухточечные турбулентные корреляции; спектр турбулентности.

### Введение

Случайные изменения параметров атмосферы оказывают существенное влияние на работу радиолиний [1]. Свойства радиолиний в тропосфере, стратосфере и ионосфере определяются многими параметрами: солнечной активностью, тепловыми режимами [2; 3], влажностью воздуха [4; 5], плотностью среды и т. д. Качественная передача радиосигнала является главной целью развития сетей связи в Российской Федерации [6]. Не последнюю роль в качественной передаче радиосигнала играют случайные турбулентные флуктуации воздуха.

В настоящей работе на основе модели взаимодействия детерминированного волнового процесса распространения передающей информационной сигнал радиоволны в турбулентной атмосфере и стохастического волнового процесса турбулентности атмосферы [7] рассмотрим флуктуации (или пульсации) амплитуды и фазы электромагнитной волны, влияющие на качество принимаемого радиосигнала. В радиофизике обычно используется термин «флуктуации», в теории турбулентности чаще используют термин «пульсации». В данной работе будем считать, что флуктуации параме-

тров радиоволн возникают за счет турбулентности атмосферы.

### 1. Флуктуации эйконала электромагнитной волны

В [7] было использовано уравнение для электрического поля в электромагнитной волне в виде

$$k^2 \mathbf{D} = \text{rot rot } \mathbf{E}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{D} = (1 + 2n^l) \mathbf{E}$  – индукция электрического поля [7];  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля,  $n^l$  – турбулентные пульсации показателя преломления атмосферы;  $\mathbf{k}$  – волновой вектор электромагнитной волны.

Подставляя в (1) величину  $\mathbf{D} = (1 + 2n^l) \mathbf{E}$  и используя известную формулу векторного анализа, находим  $k^2 \mathbf{E} + 2k^2 n^l \mathbf{E} \approx -\Delta \mathbf{E} + \text{grad div } \mathbf{E}$ . Пренебрегая вторым слагаемым в правой части в соответствии с уравнением  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ , имеем:

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} \approx -2k^2 n^l \mathbf{E}. \quad (2)$$

Для любых декартовых компонент  $E$  вектора  $\mathbf{E}$  уравнение (2) можно записать в скалярном виде:

$$\Delta E + k^2 E \approx -2k^2 n^l E. \quad (3)$$

Аналогично [7] полагаем, что на некоторый условно выделенный объем  $V$ , рис. 1, в котором имеются турбулентные пульсации атмосферы, падает плоская электромагнитная волна с напряженностью электрического поля в волне:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{p}A_0 e^{ik\mathbf{X}}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{X}$  – координата распространения падающей волны;  $\mathbf{p}$  – единичный вектор в плоскости колебаний вектора  $\mathbf{E}_0$ , перпендикулярный направлению распространения волны, т. е. волновому вектору  $\mathbf{k}$ ;  $A_0$  – амплитуда волны;  $k\mathbf{X}$  – фаза волны. Объем  $V$  лежит в области  $\mathbf{X} > 0$ , а плоскость  $\mathbf{X} = 0$  является левой границей этого объема.

В результате воздействия турбулентных пульсаций в объеме  $V$  скалярные компоненты электрического поля в этом объеме можно записать в виде

$$E = A e^{iS} = e^\varphi, \quad (5)$$

где  $A$  – амплитуда электромагнитной волны;  $S$  – ее фаза, а

$$\varphi = \ln A + iS, \quad (6)$$

т. н. эйконал электромагнитной волны, который для падающей волны  $E_0$  имеет вид  $\varphi_0 = \ln A_0 + iS_0$ .

Флуктуации эйконала за счет турбулентных пульсаций можно найти по формуле

$$\varphi' = \varphi - \varphi_0 = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) + i(S - S_0) = \chi' + iS', \quad (7)$$

где параметр  $\chi' = \ln(A/A_0)$  характеризует флуктуации амплитуды, а величина  $S' = S - S_0$  – флуктуации фазы электромагнитной волны за счет турбулентных пульсаций.

Учитывая  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$  и, следовательно,  $E = e^{\varphi_0 + \varphi'}$ , из уравнения (2) получаем:

$$\Delta(\varphi_0 + \varphi') + \nabla^2(\varphi_0 + \varphi') + k^2 = -2k^2 n'. \quad (8)$$

В соответствии с (4) эйконал падающей волны равен  $\varphi_0 = \ln A_0 + ikX$ , следовательно,  $\nabla\varphi_0 = ik$  и  $\Delta\varphi_0 = 0$ , поэтому уравнение (8) преобразуется к виду

$$\Delta\varphi' + (2ik + \nabla\varphi')\nabla\varphi' = -2k^2 n'. \quad (9)$$

Уравнение (9) является нелинейным уравнением, но, учитывая малость турбулентных пульсаций эйконала  $\varphi'$ , можно предположить  $2ik \gg \nabla\varphi'$  и уравнение флуктуаций эйконала (9) записать в линейном виде:

$$\Delta\varphi' + 2ik\nabla\varphi' = -2k^2 n'. \quad (10)$$

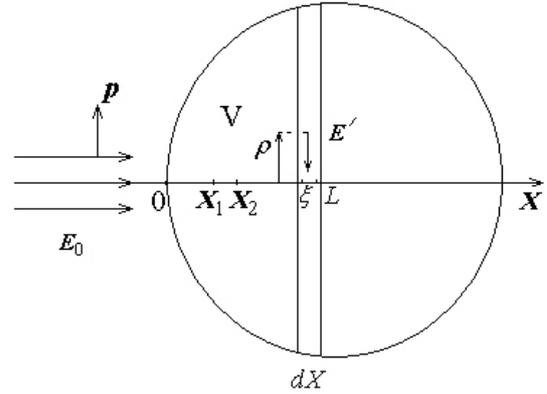


Рис. 1. Взаимодействие плоской электромагнитной волны в объеме  $V$  с флуктуациями волны  $E'$ , возникающими за счет турбулентных пульсаций  
 Fig. 1. Interaction of a plane electromagnetic wave in volume  $V$  with wave fluctuations  $E'$  arising due to turbulent pulsations

Применим уравнение (10) к конкретной геометрии, рис. 1. Направление вдоль координаты  $X$  является выделенным, т. к. вдоль этого направления распространяется электромагнитная волна. Флуктуации эйконала  $\varphi'(X)$  по оси  $X$  можно считать результатом наложения на электромагнитную волну рассеянных волн в слое  $dX$  объема  $V$ , рис. 1. Тогда уравнение (10) можно записать в виде

$$\Delta\varphi' + 2ik \frac{\partial\varphi'}{\partial X} = -2k^2 n', \quad (11)$$

где

$$\Delta\varphi' = \frac{\partial^2\varphi'}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial Z^2}.$$

Отбрасывая  $\partial^2\varphi' / \partial X^2$ , мы предположили, что основное влияние на электромагнитную волну оказывают рассеянные волны  $E'$ , лежащие внутри плоского слоя  $dX$ , рис. 1. На фронте плоской электромагнитной волны происходит частичное рассеяние этой волны на турбулентных флуктуациях. Рассеянные волны тут же складываются с волной, распространяющейся по оси  $X$ . Это сложение происходит в узком слое  $dX$  на фронте волны.

Используя (7) и принимая  $n' = n_1 + in_2$ , получим уравнения для действительной и мнимой частей  $\varphi' = \chi' + iS'$ :

$$\Delta\chi' - 2k \frac{\partial S'}{\partial X} = -2k^2 n_1, \quad (12)$$

$$\Delta S' + 2k \frac{\partial \chi'}{\partial X} = -2k^2 n_2, \quad (13)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}.$$

Исходя из системы уравнений (12) и (13), находя лапласиан  $\Delta$  от левой и правой частей этих уравнений, получим отдельно уравнения для  $\chi'$  и для  $S'$ :

$$\left( \Delta^2 + 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) \chi' = -2k^2 \left( \Delta n_1 + 2k \frac{\partial n_2}{\partial X} \right), \quad (14)$$

$$\left( \Delta^2 + 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) S' = -2k^2 \left( \Delta n_2 - 2k \frac{\partial n_1}{\partial X} \right). \quad (15)$$

Будем считать турбулентные пульсации показателя преломления действительной величиной, так что  $n_2 = 0$ . Поэтому предыдущие уравнения упростятся:

$$\left( \Delta^2 + 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) \chi' = -2k^2 \Delta n_1, \quad (16)$$

$$\left( \Delta^2 + 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) S' = 4k^3 \frac{\partial n_1}{\partial X}. \quad (17)$$

## 2. Двухточечные турбулентные корреляции

Рассмотрим двухточечные корреляционные соотношения амплитудных пульсаций электромагнитной волны и турбулентных пульсаций показателя преломления атмосферы для двух точек  $X_1$  и  $X_2$  по оси  $X$ , рис. 1. Для этого запишем уравнение (16) для точек  $X_1$  и  $X_2$  и перемножим эти уравнения:

$$\left( \Delta^2 + 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) \left( \Delta^2 + 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \times \quad (18)$$

$$\times \langle \chi'(X_1) \chi'(X_2) \rangle = 4k^4 \Delta^2 \langle n_1(X_1) n_1(X_2) \rangle,$$

где угловые скобки, как обычно, означают пространственное осреднение.

Для решения уравнения (18) двухточечные корреляционные функции  $B_{nn} = \langle n_1(X_1) n_1(X_2) \rangle$  и  $B_{\chi\chi} = \langle \chi'(X_1) \chi'(X_2) \rangle$  с помощью Фурье-преобразования запишем через Фурье-спектры турбулентных флуктуаций  $F_{nn}(\zeta, X_1, X_2)$  и флуктуаций амплитуды электромагнитной волны  $F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', X_1, X_2)$ :

$$B_{nn} = \int e^{-i\zeta\rho} F_{nn}(\zeta, X_1, X_2) d\zeta, \quad (19)$$

$$B_{\chi\chi} = \int e^{-i\mathbf{k}'\rho} F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', X_1, X_2) d\mathbf{k}', \quad (20)$$

где  $\mathbf{k}'$  – волновой вектор электромагнитных флуктуаций;  $\zeta$  – волновой вектор турбулентных пульсаций;  $\rho$  – радиусы-векторы с началом в точ-

ках на оси  $X$  в плоскостях  $(Y, Z)$ , модули которых вычисляются по формулам  $\rho = \sqrt{Y^2 + Z^2}$ , рис. 1.

Подставив (19) и (20) в уравнение (18), имеем:

$$\int \left( \Delta^2 + 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) \left( \Delta^2 + 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \times \quad (21)$$

$$\times e^{-i\mathbf{k}'\rho} F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', X_1, X_2) d\mathbf{k}' =$$

$$= \int 4k^4 \Delta^2 e^{-i\zeta\rho} F_{nn}(\zeta, X_1, X_2) d\zeta.$$

Операторы, не зависящие от параметров интегрирования  $\mathbf{k}'$  и  $\zeta$ , вносим под знак интегрирования.

Используя  $\Delta^2 e^{-i\zeta\rho} = \zeta^4 e^{-i\zeta\rho}$  в правой части (21) и  $\Delta^2 e^{-i\mathbf{k}'\rho} = k'^4 e^{-i\mathbf{k}'\rho}$  в левой части, найдем:

$$\int \left( k'^4 + 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) \left( k'^4 + 4k^2 \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \times \quad (22)$$

$$\times e^{-i\mathbf{k}'\rho} F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', X_1, X_2) d\mathbf{k}' =$$

$$= \int 4k^4 \zeta^4 e^{-i\zeta\rho} F_{nn}(\zeta, X_1, X_2) d\zeta.$$

На данном этапе анализа необходимо задать физический закон влияния турбулентных пульсаций на электромагнитную волну. При дальнейших преобразованиях будем считать, что корреляции турбулентных пульсаций подобны корреляциям пульсаций параметров электромагнитной волны, которые возникают за счет турбулентных пульсаций. В частности:

$$B_{nn} = \mu B_{\chi\chi}, \quad (23)$$

т. е.

$$\int e^{-i\zeta\rho} F_{nn}(\zeta, X_1, X_2) d\zeta =$$

$$= \mu \int e^{-i\mathbf{k}'\rho} F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', X_1, X_2) d\mathbf{k}',$$

где  $\mu$  – постоянный масштабный коэффициент пропорциональности.

Используя (23), равенство (22) можно записать в виде

$$\int \left( \left( \frac{k/2}{2k} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) \left( \left( \frac{k/2}{2k} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \times \quad (24)$$

$$\times e^{-i\mathbf{k}'\rho} F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', X_1, X_2) d\mathbf{k}' =$$

$$= \frac{\mu}{4} \int \zeta^4 e^{-i\mathbf{k}'\rho} F_{nn}(\mathbf{k}', X_1, X_2) d\mathbf{k}'.$$

Приравнивая подынтегральные выражения, имеем:

$$\left( \left( \frac{k'^2}{2k} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) \left( \left( \frac{k'^2}{2k} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \times \quad (25)$$

$$\times F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', X_1, X_2) = \frac{\mu}{4} \zeta^4 F_{nn}(\mathbf{k}', X_1, X_2).$$

Решение уравнения (25) с начальным условием  $F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', 0, 0) = 0$ , рис. 1, найдем методом функции Грина  $G$ :

$$F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', X_1, X_2) = \quad (26)$$

$$= \frac{\mu}{4} \zeta^4 \int_0^{X_1} \int_0^{X_2} G(\mathbf{k}, \mathbf{k}', X_1, X_2, \nu, \xi) F_{nn}(\mathbf{k}', \nu, \xi) d\nu d\xi,$$

где  $X_1$  и  $X_2$  – координаты наблюдения двухточечных корреляций на оси  $X$ , а  $\nu$  и  $\xi$  – координаты источника воздействия турбулентности на электромагнитную волну, рис. 1, с помощью т. н. функции влияния  $G(\mathbf{k}, \mathbf{k}', X_1, X_2, \nu, \xi)$ .

Воспользуемся свойством  $\delta$ -функции Дирака:

$$F_{nn}(\mathbf{k}', X_1, X_2) = \quad (27)$$

$$= \int_0^{X_1} \int_0^{X_2} \delta(X_1 - \nu) \delta(X_2 - \xi) F_{nn}(\mathbf{k}', \nu, \xi) d\nu d\xi.$$

Подставив (26) и (27) в уравнение (25), найдем:

$$\int_0^{X_1} \int_0^{X_2} \left( \left( \frac{k'^2}{2k} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) \left( \left( \frac{k'^2}{2k} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \times \quad (28)$$

$$\times G(\mathbf{k}, \mathbf{k}', X_1, X_2, \nu, \xi) F_{nn}(\mathbf{k}', \nu, \xi) d\nu d\xi =$$

$$= \int_0^{X_1} \int_0^{X_2} \delta(X_1 - \nu) \delta(X_2 - \xi) F_{nn}(\mathbf{k}', \nu, \xi) d\nu d\xi.$$

Из (28) получим вспомогательное уравнение

$$\left( \left( \frac{k'^2}{2k} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) \left( \left( \frac{k'^2}{2k} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \times \quad (29)$$

$$\times G(\mathbf{k}, \mathbf{k}', X_1, X_2, \nu, \xi) = \delta(X_1 - \nu) \delta(X_2 - \xi).$$

Если  $X_1 \neq \nu$  и  $X_2 \neq \xi$ , т. е. вне точек воздействия и, следовательно,  $\delta(X_1 - \nu) \delta(X_2 - \xi) = 0$ , то частное решение уравнения (29) можно записать в виде

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}', X_1, X_2, \nu, \xi) = \quad (30)$$

$$= B \sin \frac{k'^2 (X_1 - \nu)}{2k} \sin \frac{k'^2 (X_2 - \xi)}{2k},$$

где  $B$  – постоянная интегрирования.

Таким образом, решение уравнения (25), согласно формуле (26), имеет вид

$$F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', X_1, X_2) = \frac{\mu}{4} B \zeta^4 \int_0^{X_1} \int_0^{X_2} \sin \frac{k'^2 (X_1 - \nu)}{2k} \times \quad (31)$$

$$\times \sin \frac{k'^2 (X_2 - \xi)}{2k} F_{nn}(\mathbf{k}', \nu, \xi) d\nu d\xi,$$

Учитывая, что  $\chi$  и  $n$  – величины безразмерные, а  $F_{\chi\chi}$  и  $F_{nn}$  имеют одинаковую размерность, можно выбрать постоянную интегрирования  $B$  из условия  $B = 4$ .

Если на фронте волны  $X_1 = X_2 = L$ , рис. 1, то решение (31) приобретает вид

$$F_{\chi\chi}(\mathbf{k}') = \mu \zeta^4 \int_0^L \int_0^L \sin \frac{k'^2 (X_1 - \nu)}{2k} \times \quad (32)$$

$$\times \sin \frac{k'^2 (X_2 - \xi)}{2k} F_{nn}(\mathbf{k}', \nu, \xi) d\nu d\xi,$$

где обозначено  $F_{\chi\chi}(\mathbf{k}', L, L) = F_{\chi\chi}(\mathbf{k}')$ . Фактически рассматривается единая точка по оси  $X$  наблюдения воздействия турбулентных пульсаций на электромагнитную волну.

Для двухточечной корреляции  $B_{SS} = \langle S'(X_1) \times S'(X_2) \rangle$ , характеризующей флуктуации фазы электромагнитной волны, в правой части уравнения (17) имеется производная  $\partial n_1 / \partial X$ . Поэтому в формуле (30) в точке  $X_1 = X_2 = L$  синусы для Фурье-спектра флуктуаций фазы заменяются на косинусы:

$$F_{SS}(\mathbf{k}') = \mu \zeta^4 \int_0^L \int_0^L \cos \frac{k'^2 (L - \nu)}{2k} \times \quad (33)$$

$$\times \cos \frac{k'^2 (L - \xi)}{2k} F_{nn}(\mathbf{k}', \nu, \xi) d\nu d\xi,$$

где также обозначено  $F_{SS}(\mathbf{k}', L, L) = F_{SS}(\mathbf{k}')$ .

Кроме того, т. к. предположили  $X_1 = X_2 = L$ , логично также предположить единую координату источника воздействия турбулентности на электромагнитную волну с помощью функции влияния  $G$ , т. е.  $\nu = \xi$ . Следовательно,  $F_{nn}(\mathbf{k}', \nu, \xi) = F_{nn}(\mathbf{k}', \xi)$ .

Формулы (32) и (33) характеризуют связь турбулентных пульсаций показателя преломления атмосферы и флуктуаций амплитуды и фазы электромагнитной волны.

Проведем в (32) некоторые преобразования. Найдем интеграл по  $\nu$ :

$$F_{\chi\chi}(\mathbf{k}') = -\mu \zeta^4 \frac{2k}{k'^2} \int_0^L \int_0^L \sin \frac{k'^2 (L - \xi)}{2k} d \frac{k'^2 (L - \xi)}{2k} \times \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \times \sin \frac{k^{1/2}(L-\xi)}{2k} F_{nn}(\mathbf{k}', \xi) d\xi = \\ & = 2\mu \frac{\zeta^4 k}{k^{1/2}} \int_0^L \left( \sin \frac{k^{1/2}(L-\xi)}{2k} - \cos \frac{k^{1/2}L}{2k} \sin \frac{k^{1/2}(L-\xi)}{2k} \right) \times \\ & \times F_{nn}(\mathbf{k}', \xi) d\xi = 2\mu \frac{\zeta^4 k}{k^{1/2}} \int_0^L \left( \sin \frac{k^{1/2}(L-\xi)}{2k} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left( -\sin \frac{k^{1/2}\xi}{2k} + \sin \frac{k^{1/2}(2L-\xi)}{2k} \right) \right) F_{nn}(\mathbf{k}', \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $L$  близко к  $\xi$ , но не равно  $\xi$ , можно заменить

$$\sin \frac{k^{1/2}(L-\xi)}{2k} \approx \frac{k^{1/2}(L-\xi)}{2k}.$$

Полагаем, что основное воздействие на электромагнитную волну осуществляется сразу после ее поступления в турбулентную область объема  $V$ , рис. 1. Поэтому используем условие  $\xi \rightarrow 0$ , следовательно,

$$\sin \frac{k^{1/2}\xi}{2k} \approx \frac{k^{1/2}\xi}{2k} \text{ и } \cos \frac{k^{1/2}\xi}{2k} \approx 1.$$

Таким образом, формула (34) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} F_{\chi\chi}(\mathbf{k}') &= 2\mu \frac{\zeta^4 k}{k^{1/2}} \int_0^L \left( \frac{k^{1/2}(L-\xi)}{2k} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left( -\frac{k^{1/2}\xi}{2k} + \sin \frac{k^{1/2}(2L-\xi)}{2k} \right) \right) F_{nn}(\mathbf{k}', \xi) d\xi = \\ & = \mu \frac{\zeta^4 k}{k^{1/2}} \int_0^L \left( \frac{k^{1/2}}{k}(L-\xi) + \frac{k^{1/2}\xi}{2k} - \sin \frac{k^{1/2}}{k}L + \right. \\ & \left. + \frac{k^{1/2}\xi}{2k} \cos \frac{k^{1/2}}{k}L \right) F_{nn}(\mathbf{k}', \xi) d\xi = \\ & = \mu \zeta^4 L \int_0^L \left( 1 - \frac{\sin \frac{k^{1/2}}{k}L}{\frac{k^{1/2}}{k}L} - \frac{\xi}{2L} \left( 1 - \cos \frac{k^{1/2}}{k}L \right) \right) \times \\ & \times F_{nn}(\mathbf{k}', \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогично для для Фурье-спектра флуктуаций фазы из (33) найдем:

$$\begin{aligned} F_{SS}(\mathbf{k}') &= \\ & = \mu \zeta^4 L \int_0^L \left( 1 + \frac{\sin \frac{k^{1/2}}{k}L}{\frac{k^{1/2}}{k}L} - \frac{\xi}{2L} \left( 3 + \cos \frac{k^{1/2}}{k}L \right) \right) \times \end{aligned} \quad (36)$$

$$\times F_{nn}(\mathbf{k}', \xi) d\xi.$$

Условие  $\xi \rightarrow 0$  позволяет упростить формулы (35) и (36) далее:

$$F_{\chi\chi}(\mathbf{k}') = \mu \zeta^4 L \left( 1 - \frac{\sin \frac{k^{1/2}}{k}L}{\frac{k^{1/2}}{k}L} \right) \int_0^L F_{nn}(\mathbf{k}', \xi) d\xi, \quad (37)$$

$$F_{SS}(\mathbf{k}') = \mu \zeta^4 L \left( 1 + \frac{\sin \frac{k^{1/2}}{k}L}{\frac{k^{1/2}}{k}L} \right) \int_0^L F_{nn}(\mathbf{k}', \xi) d\xi. \quad (38)$$

Анализ, проведенный в [8], дает возможность сделать вывод, что

$$\int_0^L F_{nn}(\mathbf{k}', \xi) d\xi = \pi F_{nn}(\mathbf{k}').$$

Следовательно:

$$F_{\chi\chi}(\mathbf{k}') = \pi \mu \zeta^4 L \left( 1 - \frac{\sin \frac{k^{1/2}}{k}L}{\frac{k^{1/2}}{k}L} \right) F_{nn}(\mathbf{k}'), \quad (39)$$

$$F_{SS}(\mathbf{k}') = \pi \mu \zeta^4 L \left( 1 + \frac{\sin \frac{k^{1/2}}{k}L}{\frac{k^{1/2}}{k}L} \right) F_{nn}(\mathbf{k}'). \quad (40)$$

Если  $\frac{k^{1/2}}{k}L \ll 1$ , то, разлагая в ряд Тейлора

$$\sin \frac{k^{1/2}}{k}L \approx \frac{k^{1/2}}{k}L - \left( \frac{k^{1/2}}{k} \right)^3 \frac{L^3}{6},$$

получим:

$$F_{\chi\chi}(\mathbf{k}') = \pi \mu \zeta^4 L \left( 1 - \frac{1}{\frac{k^{1/2}}{k}L} \left( \frac{k^{1/2}}{k}L - \left( \frac{k^{1/2}}{k} \right)^3 \frac{L^3}{6} \right) \right) \times \quad (41)$$

$$\times F_{nn}(\mathbf{k}') = \frac{1}{6} \pi \mu L^3 \left( \frac{k^{1/2}}{k} \right)^2 \zeta^4 F_{nn}(\mathbf{k}'),$$

$$F_{SS}(\mathbf{k}') = \pi \mu \zeta^4 L \left( 1 + \frac{1}{\frac{k^{1/2}}{k}L} \left( \frac{k^{1/2}}{k}L - \left( \frac{k^{1/2}}{k} \right)^3 \frac{L^3}{6} \right) \right) \times \quad (42)$$

$$\times F_{nn}(\mathbf{k}') = 2\pi \mu L \zeta^4 F_{nn}(\mathbf{k}').$$

Таким образом, Фурье-спектр флуктуаций амплитуды электромагнитной волны пропорциона-

лен кубу расстояния, пройденного волной в турбулентной среде, четвертой степени волнового числа флуктуаций волны и обратно пропорционален квадрату волнового числа волны. Фурье-спектр флуктуаций фазы электромагнитной волны пропорционален первой степени пройденного волной расстояния. Зависимость флуктуационных параметров электромагнитной волны от волнового числа турбулентности будет уточнена ниже.

### 3. Влияние энергетического спектра турбулентности на радиосигнал

Чем более короткие электромагнитные волны используются для радиосигнала, тем большее влияние на них оказывает турбулентность. Это логично, т. к. при более коротких волнах их размер приближается к размеру турбулентных флуктуаций, что искажает сигнал.

В формулы (41) и (42) входит спектральная функция пульсаций волнового числа электромагнитной волны:  $F_{nn}(\mathbf{k}^l) \sim F(\zeta)$ . Заметим, что первоначально, формула (19), в спектральной функции  $F_{nn}$  использовалась зависимость от волнового числа турбулентности. Предполагаем, что волновые числа турбулентных пульсаций подобны флуктуациям волнового числа электромагнитной волны  $\zeta \sim \mathbf{k}^l$ , которые возникают за счет турбулентных пульсаций.

Определение спектральной функции турбулентных пульсаций представляет довольно сложную и неоднозначную задачу. Прежде всего заметим, что пульсации показателя преломления  $n^l$  определяются пульсациями давления воздуха  $p^l = \rho u^l/2$  [9], где  $\rho$  – средняя плотность воздуха,  $u^l/2 \sim E$  – квадрат пульсаций продольной скорости воздуха, пропорциональный энергии турбулентности [9]. Следовательно,  $B_{nn} = \langle n_1(X_1)n_1(X_2) \rangle \sim E(\zeta)$ . Связь между функцией  $F(\zeta)$  и  $E(\zeta)$  исследовалась многими известными учеными: Гейзенбергом [10], Карманом [11], Коважным [12], Обуховым [9]. Эти ученые предлагали различные формулы связи. Стюарт и Таунсенд [13] показали, что функция  $\int_0^\zeta F(\zeta)d\zeta$  представляет собой произведение двух сомножителей, первый – интеграл от  $\zeta$  до  $\infty$ , второй – интеграл от 0 до  $\zeta$ , безотносительно точной формулы этих сомножителей.

Для изотропной турбулентности мы ограничимся относительно простой формулой Коважного:

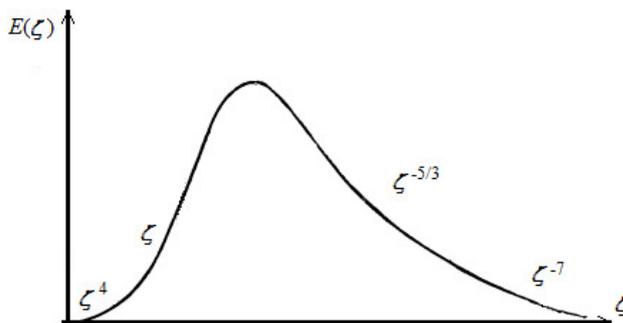


Рис. 2. Спектр турбулентности. Зависимость энергии турбулентности от волнового числа турбулентных пульсаций  
 Fig. 2. Spectrum of turbulence. Dependence of the turbulence energy on the wave number of turbulent pulsations

$$\int_0^\zeta F(\zeta)d\zeta = -2\alpha \left( \int_\zeta^\infty E^2(\zeta)d\zeta \right)^{\frac{2}{3}} \zeta^{\frac{3}{2}}, \quad (43)$$

где  $\alpha$  – постоянная величина.

В спектре турбулентности, рис. 2, при увеличении волнового числа турбулентности  $\zeta$  размер турбулентных вихрей уменьшается. На максимуме спектра турбулентности находится область т. н. энергосодержащих турбулентных вихрей. Далее по спектру турбулентных волновых чисел  $\zeta$ , т. е. более мелких вихрей, находится т. н. инерционная область спектра. Для энергии турбулентности в инерционной области спектра турбулентности, рис. 2, примем формулу, полученную независимо друг от друга Колмогоровым [14], Онзагером [15], Вейцзекером [16]:

$$E(\zeta) = C\zeta^{\frac{5}{3}}, \quad (44)$$

где  $C$  – величина, не зависящая от волнового числа турбулентности  $\zeta$ .

Инерционная область волновых чисел характеризуется тем, что турбулентность в этой области находится в статистическом равновесии: поток энергии от более крупных турбулентных вихрей к более мелким определяется вязкой диссипацией самых мелких вихрей. Эти самые мелкие вихри лежат уже за пределами инерционной области – в области, описываемой законом Гейзенберга  $\sim \zeta^{-7}$ . Вязкая диссипация турбулентных вихрей в самой инерционной области незначительна. Турбулентность в инерционной области не зависит от внешних условий.

Если подставить (44) в (43), то получаем  $\int_0^\zeta F(\zeta)d\zeta = \text{const}$ , и, следовательно,  $F(\zeta) = 0$ , что, естественно, не отражает общих свойств спектра для любых волновых чисел турбулентности.

В качестве более полного описания спектральной функции турбулентности по сравнению с (44) используем результат, полученный Коважным:

$$E(\zeta) = C_1 \zeta^{-\frac{5}{3}} \left( 1 - \eta_1 \zeta^{\frac{4}{3}} \right)^2, \quad (45)$$

где  $C_1$  и  $\eta$  – величины, не зависящие от волнового числа турбулентных пульсаций.

Подставляя (45) в (43), найдем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\zeta} F(\zeta) d\zeta &= -2\alpha \left( \int_{\zeta}^{\infty} E^2(\zeta) d\zeta \right) \frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} = \\ &= -2\alpha \left( \int_{\zeta}^{\infty} C_1 \zeta^{-\frac{5}{2}} \left( 1 - 2\eta_1 \zeta^{\frac{4}{3}} \right)^3 d\zeta \right) \frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} \approx \\ &\approx -2\alpha \left( \int_{\zeta}^{\infty} C_1 \zeta^{-\frac{5}{2}} \left( 1 - 6\eta_1 \zeta^{\frac{4}{3}} \right) d\zeta \right) \frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} = \\ &= -2\alpha C_1 \left( \left( \frac{2}{3} \right) \zeta^{-\frac{3}{2}} - 36\eta_1 \zeta^{-\frac{1}{6}} \right) \frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} = \\ &= -\frac{8}{9} \alpha C_1 + 48\alpha C_1 \eta_1 \zeta^{\frac{4}{3}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Следовательно:

$$F(\zeta) \approx 64\alpha C_1 \eta_1 \zeta^{\frac{4}{3}}. \quad (47)$$

Делаем вывод, что в (41) и (42) зависимость от волнового числа турбулентности имеет вид  $\zeta^{4+\frac{1}{3}} = \zeta^{\frac{13}{3}}$ . Детальное сравнение четырех различных спектральных формул для энергии турбулентности проведено в книге [17]. Обращает на себя внимание достаточно сильное влияние на электромагнитную волну турбулентной атмосферы, до более чем четвертой степени волнового числа турбулентности.

### Заключение

На основе модели взаимодействия детерминированного волнового процесса распространения электромагнитных волн в атмосфере и случайного волнового процесса турбулентных пульсаций атмосферы исследовано возникновение флуктуаций эйконала электромагнитной волны, зависящего от амплитуды и фазы волны и влияющего на качество передаваемого радиосигнала. Влияние

турбулентных пульсаций давления в атмосфере приводит к пульсациям показателя преломления, которые в свою очередь приводят к пульсациям параметров электромагнитной волны, в частности к пульсациям эйконала.

Полученное дифференциальное уравнение для флуктуаций эйконала распадается на два взаимосвязанных уравнения. Первое уравнение – для флуктуаций амплитуды, второе уравнение – для флуктуаций фазы.

Найдены дифференциальные уравнения для двухточечных турбулентных корреляций показателя преломления, параметров, зависящих от флуктуаций амплитуды и флуктуаций фазы.

С использованием Фурье-преобразования методом функции Грина показано подробное решение дифференциального уравнения для параметра, связанного с двухточечной корреляцией турбулентных флуктуаций амплитуды электромагнитной волны. Представлено также решение уравнения для параметра, связанного с двухточечной корреляцией турбулентных флуктуаций фазы электромагнитной волны. При этом использовалось физическое предположение о подобии двухточечных корреляций турбулентных пульсаций и двухточечных корреляций флуктуаций параметров электромагнитной волны, которые возникают за счет турбулентных пульсаций.

Показано, что Фурье-спектр двухточечной корреляции пульсаций амплитуды электромагнитной волны пропорционален кубу расстояния, пройденного волной в турбулентной среде, четвертой степени волнового числа флуктуаций волны и обратно пропорционален квадрату волнового числа волны. Фурье-спектр двухточечной корреляции флуктуаций фазы электромагнитной волны пропорционален первой степени пройденного волной расстояния.

На основе проведенного анализа, а также использования спектра энергии турбулентности найдено, что зависимость Фурье-спектров двухточечных корреляций турбулентных пульсаций амплитуды и фазы электромагнитной волны пропорциональна волновому числу турбулентности в степени тринадцать третьих.

Сделан вывод о достаточно сильном влиянии турбулентной атмосферы на качество передающих сигнал радиоволн.

## Список литературы

1. Электродинамика и распространение радиоволн / В.А. Неганов [и др.]. М.: Радиотехника, 2007. 476 с.
2. Нестеров В.И. Сравнительный анализ данных о внезапных ионосферных возмущениях // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21, № 1. С. 17–22. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7061>
3. Нестеров В.И. Влияние солнечной активности на фазу принимаемого сигнала ОНЧ-диапазона // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2019. Т. 22, № 3. С. 21–26. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.21-26>
4. Панин Д.Н., Осипов О.В., Безлюдников К.О. Расчет отражений плоской электромагнитной волны линейной поляризации от границы раздела «воздух – влажная почва» на основе гетерогенных моделей Максвелла Гарнетта и Бруггемана // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, № 2. С. 22–27. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.22-27>
5. Потапов А.А. Анализ и синтез топологических радиолокационных обнаружителей малоконтрастных целей на фоне интенсивных помех от земли, моря и осадков как новая ветвь теории статистических решений // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2016. Т. 19, № 4. С. 20–29. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7126>
6. Концепция глокально-интегрированной инфраструктуры пространственно-территориального развития как основа Генеральной схемы развития сетей связи Российской Федерации в рамках плана мероприятий по направлению «Информационная инфраструктура» программы «Цифровая экономика Российской Федерации» / С.А. Попов [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2019. Т. 22, № 1. С. 67–79. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.1.67-79>
7. Некоторые особенности взаимодействия радиосигнала с турбулентной атмосферой / Д.С. Ключев [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, № 4. С. 122–128. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.4.122-128>
8. Татарский В.И. Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере. М.: АН СССР, 1959. 548 с.
9. Хинце И.О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М.: Изд-во физмат. литературы, 1963. С. 195, 228, 287.
10. Heisenberg W. Zur statistischen Theorie der Turbulenz // Zeitschrift für Physik. 1948. Vol. 124, no. 7. P. 628–657. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01668899>
11. Karman T.v. Progress in the statistical theory of turbulence // The Proceedings of the National Academy of Sciences. 1948. Vol. 34, no. 11. P. 530–539. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.34.11.530>
12. Kovasznay L.S.G. Spectrum of locally isotropic turbulence // Journal of the Aeronautical Sciences. 1948. Vol. 15, no. 12. P. 745–753. DOI: <https://doi.org/10.2514/8.11707>
13. Stewart R.W., Townsend A.A. Similarity and self-preservation in isotropic turbulence // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1951. Vol. 243, no. 867. P. 359–386. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1951.0007>
14. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.
15. Onsager L. The distribution of energy in turbulence // Phys. Rev. 1945. Vol. 68, no. 11–12. P. 286.
16. Weizsäcker C.F.v. Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen // Zeitschrift für Physik. 1948. Vol. 124, no. 7. P. 614–627. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01668898>
17. Мониин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. С. 205.

## References

1. Neganov V.A. et al. *Electrodynamics and Propagation of Radio Waves*. Moscow: Radiotekhnika, 2007, 476 p. (In Russ.)
2. Nesterov V.I. Comparative analysis of data on sudden ionospheric disturbances. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2018, vol. 21, no. 1, pp. 17–22. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7061> (In Russ.)
3. Nesterov V.I. Influence of solar activity on the phase of the received VLF signal. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2019, vol. 22, no. 3, pp. 21–26. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.21-26> (In Russ.)
4. Panin D.N., Osipov O.V., Bezlyudnikov K.O. Calculation of reflections of a plane electromagnetic wave of linear polarization from the «air-moist soil» interface based on heterogeneous models by Maxwell Garnett and Bruggeman. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2022, vol. 25, no. 2, pp. 22–27. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.22-27> (In Russ.)
5. Potapov A.A. Analysis and synthesis of topological radar detectors of low-contrast targets against the background of intense interference from land, sea and precipitation as a new branch of the theory of statistical solutions. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 20–29. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7126> (In Russ.)
6. Popov S.A. et al. The concept of a globally integrated infrastructure of spatial and territorial development as the basis of the General Scheme for the Development of Communication Networks of the Russian Federation as part of the Action Plan for the «Information Infrastructure» Direction of the «Digital Economy of the Russian Federation» Program. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 67–79. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.1.67-79> (In Russ.)
7. Klyuev D.S. et al. Some features of the interaction of a radio signal with a turbulent atmosphere. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2022, vol. 25, no. 4, pp. 122–128. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.4.122-128> (In Russ.)
8. Tatarskiy V.I. *Theory of Fluctuation Phenomena During Wave Propagation in a Turbulent Atmosphere*. Moscow: AN SSSR, 1959, 548 p. (In Russ.)
9. Khintse I.O. *Turbulence. Its Mechanism and Theory*. Moscow: Izd-vo fizmat. literatury, 1963, pp. 195, 228, 287. (In Russ.)

10. Heisenberg W. Zur statistischen Theorie der Turbulenz. *Zeitschrift für Physik*, 1948, vol. 124, no. 7, pp. 628–657. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01668899>
11. Karman T.v. Progress in the statistical theory of turbulence. *The Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1948, vol. 34, no. 11, pp. 530–539. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.34.11.530>
12. Kovasznay L.S.G. Spectrum of locally isotropic turbulence. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1948, vol. 15, no. 12, pp. 745–753. DOI: <https://doi.org/10.2514/8.11707>
13. Stewart R.W., Townsend A.A. Similarity and self-preservation in isotropic turbulence. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1951, vol. 243, no. 867, pp. 359–386. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1951.0007>
14. Kolmogorov A.N. Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers. *DAN SSSR*, 1941, vol. 30, no. 4, pp. 299–303. (In Russ.)
15. Onsager L. The distribution of energy in turbulence. *Phys. Rev.*, 1945, vol. 68, no. 11, pp. 286.
16. Weizsäcker C.F.v. Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen. *Zeitschrift für Physik*, 1948, vol. 124, no. 7, pp. 614–627. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01668898>
17. Monin A.S., Yaglom A.M. *Statistical Hydromechanics. P. 2*. Moscow: Nauka, 1967, 205 p. (In Russ.)

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2023, vol. 26, no. 1, pp. 28–37

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.28-37

Received 13 December 2022

Accepted 11 January 2023

### Occurrence of fluctuations in the amplitude and phase of the radio signal in a turbulent atmosphere

Dmitriy S. Klyuev<sup>1</sup> , Andrey N. Volobuev<sup>2</sup> , Sergei V. Krasnov<sup>2</sup> ,  
Kaira A. Adyshirin-Zade<sup>2</sup> , Tatyana A. Antipova<sup>2</sup> , Natalia N. Aleksandrova<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics

23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

<sup>2</sup> Samara State Medical University

89, Chapayevskaya Street,  
Samara, 443099, Russia

*Abstract* – Interaction of an electromagnetic wave, as the determined wave process spreading in an atmosphere and atmospheric turbulence, as stationary stochastic wave process is considered. The differential equation for eikonal fluctuations of an electromagnetic wave is received. On basis of this equation the occurrence of amplitude and a phase fluctuations of an electromagnetic wave at distribution of a radio signal into a turbulent atmosphere is investigated. In particular the differential equations for fluctuations of amplitude and a phase of the electromagnetic wave caused by turbulent pulsations of a parameter of an atmosphere refraction are received and solved. Fourier-spectra of two-point correlations of a parameter of an atmosphere refraction, amplitude and a phase of an electromagnetic wave are considered. Are received also by a method of introduction of Green's function the differential equations for these correlations are solved. On basis of the analysis of various wave ranges of an atmospheric power spectrum of turbulence the dependences of amplitude and a phase Fourier-spectra of a radio signal on parameters of an electromagnetic wave and turbulence of an atmosphere are found.

*Keywords* – atmospheric turbulence; radio wave; amplitude and phase fluctuations; two-point turbulent correlations; turbulence spectrum.

### Информация об авторах

**Клюев Дмитрий Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия. Автор более 250 научных работ.

*Область научных интересов:* электродинамика, устройства СВЧ, антенны, метаматериалы.

*E-mail:* [klyuevd@yandex.ru](mailto:klyuevd@yandex.ru)

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-9125-7076>

**Волобуев Андрей Николаевич**, доктор технических наук, профессор кафедры медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия. Автор более 400 научных работ.

*Область научных интересов:* биофизика, радиофизика.

*E-mail:* [volobuev47@yandex.ru](mailto:volobuev47@yandex.ru)

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-8624-6981>

**Краснов Сергей Викторович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия. Автор более 100 научных работ.  
*Область научных интересов:* биофизика, информационные технологии в медицине, теория искусственного интеллекта.  
*E-mail:* s.v.krasnov@samsmu.ru  
*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-5437-3062>

**Адыширин-Заде Каира Алимовна**, кандидат педагогических наук, доцент кафедры медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия. Автор более 50 научных работ.  
*Область научных интересов:* биофизика, радиофизика.  
*E-mail:* adysirinzade67@gmail.com  
*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-3641-3678>

**Антипова Татьяна Александровна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия. Автор более 50 научных работ.  
*Область научных интересов:* биофизика, радиофизика.  
*E-mail:* antipovata81@gmail.com  
*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-5499-2170>

**Александрова Наталья Николаевна**, старший преподаватель кафедры медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия. Автор более 15 научных работ.  
*Область научных интересов:* биофизика, радиофизика.  
*E-mail:* grecova71@mail.ru  
*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-5958-3851>

### Information about the Authors

**Dmitriy S. Klyuev**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, head of the Department of Radioelectronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia. Author of over 250 scientific papers.  
*Research interests:* electrodynamics, microwave devices, antennas, metamaterials.  
*E-mail:* klyuevd@yandex.ru  
*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-9125-7076>

**Andrey N. Volobuev**, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia. Author of over 400 scientific papers.  
*Research interests:* biophysics, radiophysics.  
*E-mail:* volobuev47@yandex.ru  
*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-8624-6981>

**Sergei V. Krasnov**, Doctor of Technical Sciences, professor, chief of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia. Author of over 100 scientific papers.  
*Research interests:* biophysics, information technologies in medicine, theory of artificial intellect.  
*E-mail:* s.v.krasnov@samsmu.ru  
*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-5437-3062>

**Kaira A. Adyshirin-Zade**, Candidate of Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia. Author of over 50 scientific papers.  
*Research interests:* biophysics, radiophysics.  
*E-mail:* adysirinzade67@gmail.com  
*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-3641-3678>

**Tatyana A. Antipova**, Candidate of Physics and Mathematics Sciences, associate professor of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia. Author of over 50 scientific papers.  
*Research interests:* physics, radiophysics.  
*E-mail:* antipovata81@gmail.com  
*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-5499-2170>

**Natalia N. Aleksandrova**, senior lecturer of the Department of Medical Physics Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia. Author of over 15 scientific papers.  
*Research interests:* biophysics, radiophysics.  
*E-mail:* grecova71@mail.ru  
*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0001-5958-3851>

## Математические модели сфероидальных спирально-рамочных излучателей

Д.П. Табаков, Р.М. Валиуллин

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – В статье рассмотрены математические модели двух сфероидальных спирально-рамочных излучателей, построенные на основе общего подхода, предполагающего использование интегрального представления электромагнитного поля. Построение моделей осуществлялось в тонкопроволочном приближении. Внутренняя задача электродинамики сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Решение полученной системы осуществлялось методом моментов с кусочно-постоянными базисными функциями и дельта-функциями в качестве тестовых функций. При этом осуществлялась локальная линеаризация образующих проводников рассматриваемых структур. Проведены исследования зависимостей распределений токов, входного сопротивления и характеристик излучения структур от частоты. Показано, что в рассматриваемых структурах возможно существование стоячих, бегущих и смешанных волн тока. Режим тока определяется волновыми размерами и геометрией структур и определяет характер поведения волнового сопротивления в диапазоне частот. Несмотря на схожую геометрию, характеристики рассмотренных структур имеют определенные отличия.

*Ключевые слова* – спиральные антенны; рамочные антенны; интегральное представление электромагнитного поля; тонкопроволочное приближение; диаграмма направленности; входное сопротивление.

### Введение

Спиральные антенны (СА) на сегодняшний день представляют собой обширный класс излучающих структур, геометрия и характеристики которых соответствуют заранее заданным и довольно разнообразным требованиям. Основными достоинствами СА можно считать возможность достижения широкой полосы рабочих частот, хороших характеристик направленности излучения, возможность электрического управления поляризационными характеристиками излучения, а также разнообразие форм излучающих элементов. При соблюдении принципа углов и принципа взаимодополняемости реализуются частотно-независимые варианты СА, коэффициент перекрытия для которых достигает нескольких десятков единиц [1]. СА применяют в антенной технике в качестве самодостаточных излучающих структур, в качестве облучателей зеркальных антенн, в фазированных антенных решетках, при построении замедляющих систем и в других элементах устройств СВЧ [2].

В текущий момент интерес к спиральным элементам также связан с развитием теории метаматериалов [3], частным случаем которых можно считать киральные структуры [4]. Внедрение проводящих частиц различной конфигурации (в данном случае спиральных частиц) в исходный материал ведет к изменению его электродинами-

ческих свойств. Подобные структуры могут быть использованы в качестве частотно-селективных элементов, в преобразователях поляризации, в качестве малоотражающих покрытий и концентраторов СВЧ-энергии. Естественно, что построение упомянутых выше структур требует наличия математических моделей (ММ) их базовых элементов, в качестве которых в данном случае выступают спиральные элементы, в общем случае описываемые достаточно большим числом параметров. В настоящий момент для исследования киральных структур используют феноменологические уравнения, оперирующие параметром киральности  $\chi$  [4–6]. Значение и знак данного параметра зависят от длины волны и типа базовых элементов. Определение параметра киральности осуществляется приближенными методами. При этом использование феноменологических уравнений имеет существенные ограничения, связанные с взаимным расположением и волновыми размерами элементов, образующих структуру. В целом для метаматериалов вполне приемлемой считают практику описания на основе эффективных диэлектрической и магнитной проницаемостей, в общем случае имеющих тензорный вид. Для анализа спиральных структур используют как приближенные, так и строгие подходы. В рамках приближенных подходов производится замена исходного излучателя упрощенным эквивалентом (решеткой

кольцевых элементов, одиночным кольцевым элементом, анизотропно-проводящей моделью и т. д. [2; 7]). При этом наиболее адекватными данные подходы можно считать применительно к регулярным спиральным структурам. При исследовании нерегулярных структур используют принцип локальной эквивалентности, дополнительно снижающий соответствие приближенного решения точному решению поставленной задачи.

Проблемой существующих в настоящий момент точных методов, используемых в системах автоматизированного проектирования (CST MWS, FEKO, HFSS), являются высокие требования к вычислительным ресурсам, являющиеся следствием их универсальности, а также численный характер получаемых результатов, которые не всегда можно корректно интерпретировать. Поэтому построение строгих и эффективных с вычислительной точки зрения математических моделей спиральных элементов и структур, использующих эти элементы в своей основе, представляет собой на сегодняшний день актуальную задачу.

Наиболее точными являются ММ, построенные на основе интегральных уравнений (ИУ) различного типа [8–11]. Наибольшее распространение получили ММ в виде систем ИУ Фредгольма первого рода, получаемых с использованием тонкопроволочного приближения [12]. Здесь можно отметить, что полная ММ рассматриваемой структуры должна содержать в себе решение как внешней (определение ЭМП в любой точке пространства), так и внутренней (определение токовых функций из граничных условий на элементах структуры) электродинамической задачи. Система ИУ представляет собой решение только внутренней задачи. Поэтому построение ММ целесообразно осуществлять на основе соответствующего интегрального представления ЭМП (ИП ЭМП), сохраняющего непрерывную взаимосвязь между токовыми функциями и порождаемыми этими токовыми функциями ЭМП в любой точке пространства.

В [13] на основе тонкопроволочного ИП ЭМП осуществлено построение ММ цилиндрических спиральных элементов двух типов (обычного и со-вмещенного). Решена задача дифракции на этих элементах. Показано, что внутренняя структура элемента оказывает существенное влияние на характеристики рассеянного поля. Так, на со-вмещенном спиральном элементе в достаточно широком диапазоне частот возникает эффект ортогонального рассеяния, когда угол между

волновыми векторами первичной и рассеянных электромагнитных волн составляет величину, близкую к  $90^\circ$ .

В [14] рассмотрена эллипсоидальная спиральная частица, ММ которой также построена на основе ТП ИП ЭМП, но при этом проведен подробный анализ решения спектральной задачи, заключающийся в определении поведения собственных функций и собственных чисел интегрального оператора в полосе частот. Показано, что решение внутренней задачи в целом определяется собственными функциями, имеющими наименьшее по модулю значение связанных с ними собственных чисел.

В настоящей статье предлагаются ММ двух типов спирально-рамочных излучателей, для которых в диапазоне частот исследуется численное решение внутренней задачи, а затем определяются характеристики излучения и входное сопротивление. Данные излучатели могут быть использованы в качестве самодостаточных антенн либо в составе более сложных антенных систем.

## 1. Физические модели и геометрия излучающих структур

Геометрия излучателей представлена на рис. 1. Обе структуры включают в себя прямолинейный осевой проводник  $A'A$ , расположенный вдоль оси  $Oz$ , и пару спиральных проводников  $AP$  и  $A'P$ , соединенных друг с другом в точке  $P$  и с соответствующими концами  $A$  и  $A'$  осевого проводника. Структура, показанная на рис. 1, а, содержит обычную эллипсоидальную спираль (далее эту структуру мы будем называть  $A$ -спиралью). Структура на рис. 1, б содержит спираль с изломом: ее нижняя часть является зеркальным отображением верхней части относительно плоскости  $HOY$ .

Проводники структуры имеют одинаковый радиус, равный  $\varepsilon \ll \lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны излучения. В точке  $G$  осевой проводник имеет разрыв длиной  $2b \ll \lambda$ , в который помещен источник стороннего поля (генератор ЭДС). Касательная компонента стороннего поля на проводниках  $E^{(in)}$  равна нулю всюду, за исключением области разрыва, в которой она равна  $U/(2b)$ , где  $U$  – напряжение генератора ЭДС. Под действием стороннего поля в проводниках возникает распределение электрического тока  $I(l)$ , вид которого необходимо определить при решении внутренней электродинамической задачи. Так как  $2b \ll \lambda$ , то функция  $I(l)$

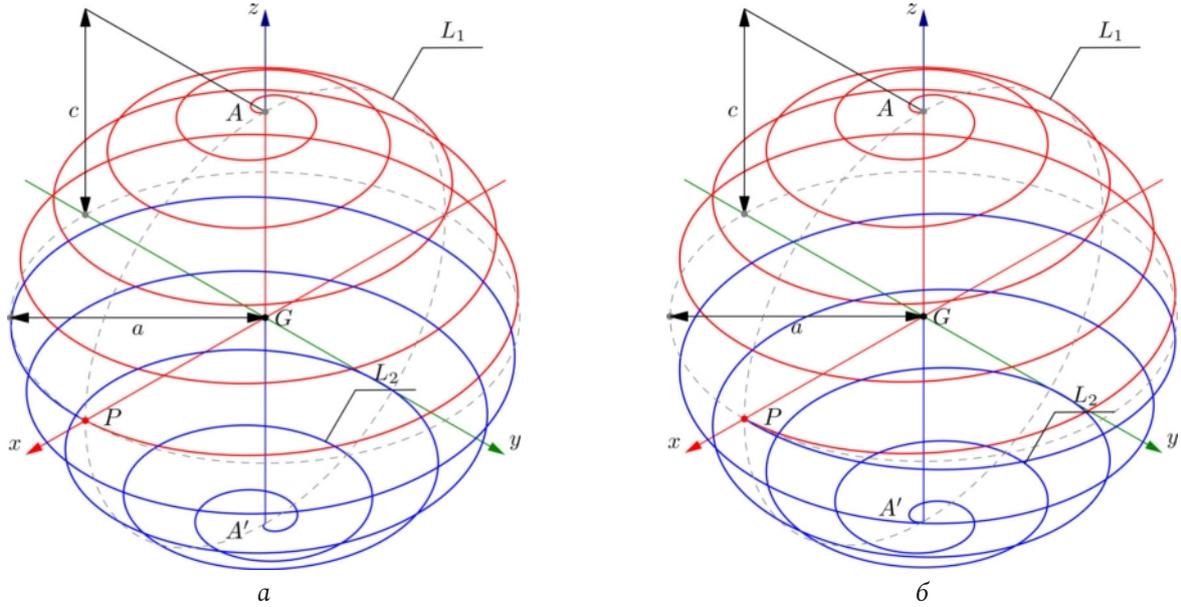


Рис. 1. Геометрия исследуемых структур: без излома (а) и с изломом (б)  
Fig. 1. Geometry of the structures under study: without a break (a) and with a break (b)

является непрерывной в области разрыва. Также при построении ММ будем считать, что проводники имеют бесконечно большую проводимость.

Обобщенное параметрическое уравнение образующей  $L_s$  спирали имеет вид

$$L_s : \mathbf{r}_l(\varphi) = a \cos(\zeta\varphi) \cos\varphi \hat{\mathbf{x}} + a f(\varphi) \cos(\zeta\varphi) \sin\varphi \hat{\mathbf{y}} + c \sin(\zeta\varphi) \hat{\mathbf{z}}, \quad (1)$$

$$\zeta = 1/(2N_l), \varphi \in [-1; 1] \cdot \pi N_l.$$

Здесь  $a$  – радиус сфероиды,  $c$  – его полуось,  $\varphi$  – параметр на образующей (по сути, азимут цилиндрической системы координат),  $N_l$  – число витков спирали. Для А-спирали  $f(\varphi) = 1$ , для Б-спирали  $f(\varphi) = \text{sgn}(\varphi)$ , где  $\text{sgn}(\varphi)$  – функция знака. Для перехода в (1) от параметра  $\varphi$  к естественному параметру  $l$  необходимо определить функцию  $\varphi = \varphi(l)$ , обратную функции

$$l(\varphi) = \int_0^\varphi \left| \frac{\partial \mathbf{r}_l(\varphi')}{\partial \varphi'} \right| d\varphi', \quad (2)$$

и подставить ее в (1). Отметим, что эта задача в данном случае может быть решена только численно методом обратной интерполяции [15]. Уравнение осевого проводника  $L_v$  записывается непосредственно в естественном параметре  $l$ :

$$L_v : \mathbf{r}_v(l) = l \hat{\mathbf{z}}, \quad l \in [-c; c]. \quad (3)$$

## 2. Математические модели излучающих структур

Для построения математических моделей излучателей в рассмотренной ранее постановке используется ИП ЭМП [13]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_j \mathbf{F}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_j, I_j); \quad F \equiv E, H, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_j, I_j) = \int_{L_j} I_j(l') \mathbf{K}_a^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(l')) dl', \quad F \equiv E, H \quad (5)$$

– ИП ЭМП от тока  $I_j(l)$ , локализованного на образующей  $L_j$  ТПС,

$$\mathbf{K}_a^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(l')) = \frac{W_m}{ik} \left( \hat{\mathbf{i}}_j(l') k^2 G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(l')) + \frac{\partial}{\partial l'} \left( (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(l')) B_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(l')) \right) \right);$$

$$\mathbf{K}_a^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(l')) = \left( (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(l')) \times \hat{\mathbf{i}}_j(l') \right) B_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(l')),$$

– ядра ИП ЭМП;  $\hat{\mathbf{i}}_j(l) = d\mathbf{r}_j(l)/dl$  – касательный орт на образующей  $L_j$ ,  $W_m$  является волновым сопротивлением среды, а  $k$  – ее волновым числом;

$$B = -\frac{ikR+1}{R^2} G, \quad G = \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R},$$

$G(R)$  – функция Грина, определенная для свободного пространства;  $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  – расстояние между точкой источника и точкой наблюдения;

$$F_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(l')) = F(R_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(l'))), \quad F \equiv G, B$$

– компоненты ядер,

$$R_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j(l')) = \sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(l')|^2 + \varepsilon^2}$$

– расстояние между точкой источника и точкой наблюдения, регуляризованное малым параметром  $\varepsilon$ , роль которого играет радиус проводников. В нашем случае в (4) будет фигурировать пара проводников  $L_1 = L_v$  и  $L_2 = L_s$ .

Интегральное представление ЭМП (4) содержит токовые функции  $I_j(l)$ , подлежащие определению. Это можно сделать, применив граничное условие на поверхности проводников. Учитывая, что  $\varepsilon \ll \lambda$ , граничное условие можно ослабить, перейдя с поверхности проводников на их образующие. В итоге имеем:

$$\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}(l)) \cdot (\mathbf{E}^{(in)}(\mathbf{r}(l)) + \mathbf{E}(\mathbf{r}(l))) = 0. \quad (6)$$

Результатом применения представленного ГУ к ИП ЭМП является система ИУ вида

$$-\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{E}^{(in)}(\mathbf{r}_i) = \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}_i) \cdot \sum_j \mathbf{E}(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}_j, I_j); \quad (7)$$

$i, j = 1, \dots, N$ .

Приведенная система ИУ классифицируется как система ИУ Фредгольма 1-го рода [16]. Осуществив дискретизацию (4), заменив образующие ломаными:

$$L_j \rightarrow L_j^{\{N_j\}} : \mathbf{r}_{j,1}, \mathbf{r}_{j,2}, \dots, \mathbf{r}_{j,N_j+1}, \quad (8)$$

здесь  $N_j + 1$  – число узлов ломаной;  $j$  – индекс проводника. Для каждой ломаной можно определить уравнение  $(j, k_j)$ -сегмента:

$$\mathbf{r}_{j,k_j} = \mathbf{r}_{j,k_j}^* + \hat{\mathbf{I}}_{j,k_j}^* l, \quad l \in [-\Delta_j/2; \Delta_j/2], \quad (9)$$

здесь:

$$\mathbf{r}_{j,k_j}^* = \frac{\mathbf{r}_{j,k_j+1} + \mathbf{r}_{j,k_j}}{2}, \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_{j,k_j}^* = \frac{\mathbf{r}_{j,k_j+1} - \mathbf{r}_{j,k_j}}{\Delta_j}, \quad \Delta_j = |\mathbf{r}_{j,k_j+1} - \mathbf{r}_{j,k_j}|$$

– центр сегмента, единичный вектор касательной на сегменте и его длина соответственно,  $k_j = 1, \dots, N_j + 1$ . Пусть  $I_{j,k_j}$  – комплексная амплитуда тока  $(j, k_j)$ -сегмента. Тогда для дискретизированных образующих на основе (4) получаем ИП ЭМП совокупности  $N$  излучателей, имеющих сегментированные образующие:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \sum_{k_j=1}^{N_j} I_{j,k_j} \int_{-\Delta_j/2}^{\Delta_j/2} \mathbf{K}_a^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{j,k_j}(l')) dl', \quad F \equiv E, H. \quad (11)$$

Использование (11) предполагает знание неизвестных амплитуд токов  $I_{j,k_j}$ . В рамках выбранного метода решения системы ИУ необходимо потребовать выполнения граничного условия типа (6) в центрах сегментов. В результате имеем СЛАУ вида

$$-\hat{\mathbf{I}}_{i,k_i}^* \mathbf{E}^{(in)}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \sum_{k_j=1}^{N_j} I_{j,k_j} \int_{-\Delta_j/2}^{\Delta_j/2} \hat{\mathbf{I}}_{i,k_i}^* \cdot \mathbf{K}_a^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{j,k_j}(l')) dl', \quad (12)$$

$i = 1, \dots, N, \quad k_i = 1, \dots, N_i$ .

При соблюдении условия

$$2\varepsilon \leq \Delta_j \leq 12\varepsilon \quad (13)$$

для всех  $j$  достигается устойчивое решение СЛАУ [12]. Достоверность результатов, получаемых на основе (11) и (12), подтверждается в работе [17].

### 3. Результаты численного моделирования

При численном моделировании исследовались А- и Б-спирали, геометрия которых определялась следующими параметрами  $a/c = 1/4, 1/2, 3/4$  и 1; число сегментов спирального элемента в указанных случаях было равно 200, 400, 600 и 800 соответственно, число сегментов осевого проводника составляло 80 для всех  $a/c$ . Число витков спирального элемента было равно пяти, отношение радиуса проводника  $\varepsilon$  к полуоси  $c$  было равно  $\varepsilon/c = 3/1000$ . Указанный выбор геометрических параметров удовлетворяет условию (13), выполнение которого обеспечивает корректное решение внутренней задачи. В качестве главного параметра, нормируемого к длине волны  $\lambda$ , была выбрана удвоенная полуось  $c$  структур, определяющая их высоту.

На рис. 2 представлены результаты расчета амплитудных распределений тока на проводнике АР обеих структур для различных соотношений  $2c/\lambda$  при  $a/c = 1/2$ . Значение  $2c/\lambda$  указано непосредственно на рисунках. Из рисунка видно, что при  $2c/\lambda < 0,5$  в спиральных проводниках устанавливается режим стоячей волны тока, а сами распределения для А- и Б-спиралей имеют довольно мало отличий. Возникновение данного режима связано с тем, что потери на излучение при расстояниях, соизмеримых с длиной волны, довольно малы, в результате чего в спиральном проводнике имеется пара встречно распространяющихся бегущих волн с практически не меняющейся амплитудой. Их сумма представляет собой стоячую волну, которую мы можем наблюдать на данном рисунке при  $2c/\lambda = 0,05, 0,25, 0,5$ . При  $2c/\lambda = 0,6$  в спирали устанавливается режим смешанной волны тока, наибольшую разность амплитуд на спирали встречно бегущие волны имеют вблизи точек А и А', а наименьшую – в точке Р. Поэтому в окрестности точки Р сохраняется режим стоячих волн тока. Вполне справедливым будет утверждение о том, что для указанного соотношения  $2c/\lambda = 0,6$  бегущие и стоячие волны тока вносят соизмеримый вклад в общее поле, создава-

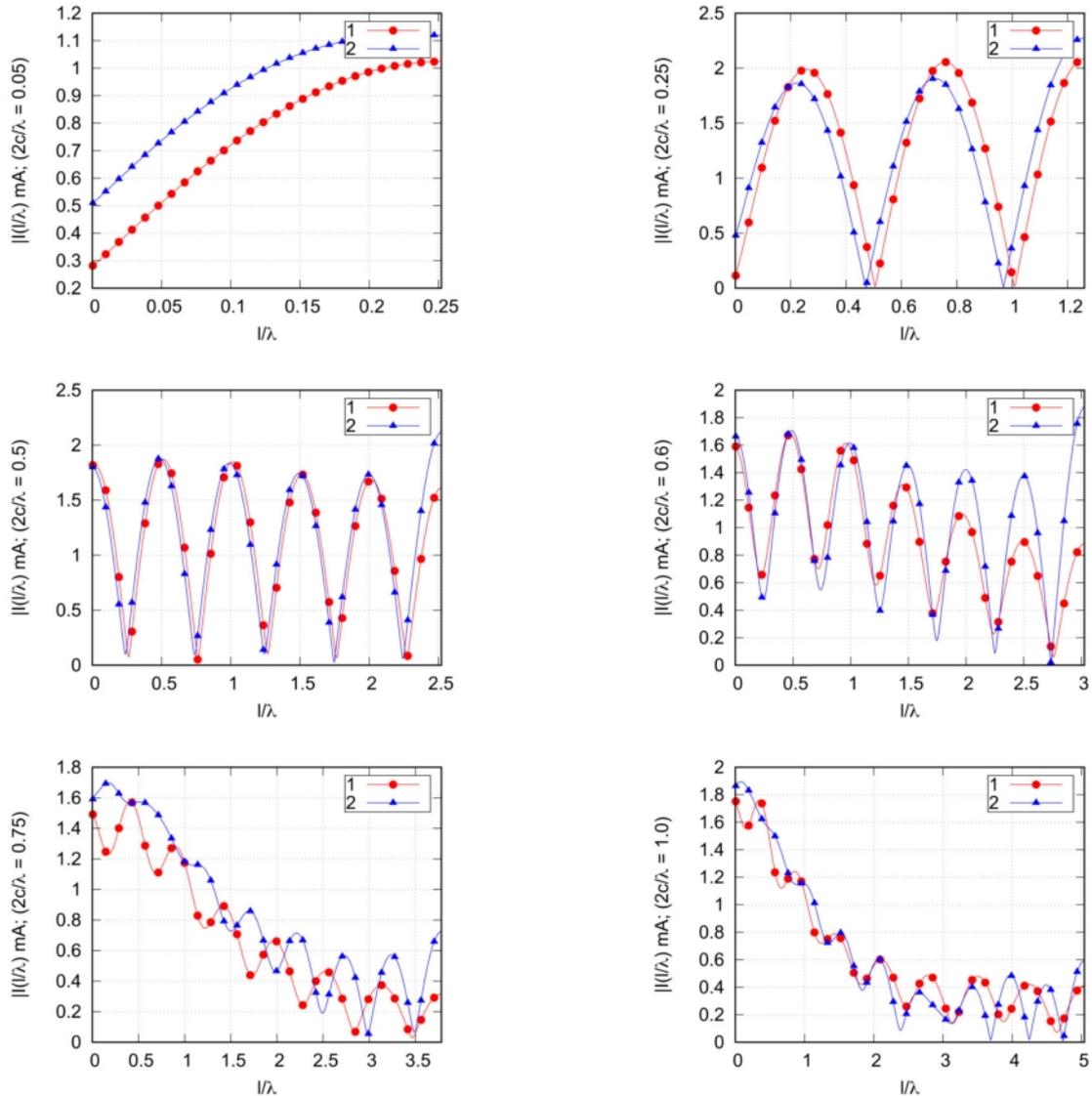


Рис. 2. Сравнение амплитудных распределений тока на проводнике  $AP$  А-спирали (кривая 1) и Б-спирали (кривая 2) при различных значениях  $2c/\lambda$ ;  $a/c=1/2$   
 Fig. 2. Comparison of the amplitude distributions of the current on the conductor  $AP$  of the A-helix (curve 1) and B-helix (curve 2) at different values  $2c/\lambda$ ;  $a/c=1/2$

емое рассматриваемыми структурами, но бегущие волны в А-спирали теряют энергию интенсивнее, чем в Б-спирали, отличия в результатах расчета для рассматриваемых структур становятся более заметными. При  $2c/\lambda = 0,75, 1,0$  излучение создается преимущественно бегущими волнами, амплитуда которых значительно падает с приближением к точке  $P$ . Здесь можно увидеть, что амплитуда стоячих волн в А-спирали вблизи точек  $A$  и  $A'$  заметно выше, но в целом распределения токов примерно совпадают.

На рис. 3–6 приведены результаты расчета входного сопротивления рассматриваемых структур при четырех различных соотношениях  $a/c$ . С точки зрения входного сопротивления для этих структур можно условно выделить две области –

низкочастотную (НЧ) и высокочастотную (ВЧ). В НЧ-области (рис. 3, 4) в распределении тока по проводникам преобладают стоячие волны, что формирует резонансный характер зависимости входного сопротивления от частоты. Добротность резонансов здесь имеет прямую зависимость от степени преобладания стоячих волн. Также, как видно из рис. 3, 4, она имеет обратную зависимость от отношения  $a/c$ . В целом зависимости входного сопротивления от частоты для А- и Б-спиралей в НЧ-области очень похожи.

В ВЧ-области зависимость входного сопротивления от частоты при  $a/c > 5$  имеет более плавный характер (рис. 5, 6). Здесь можно отметить, что для Б-спирали равномерность входного сопротивления заметно выше, чем для А-спирали.

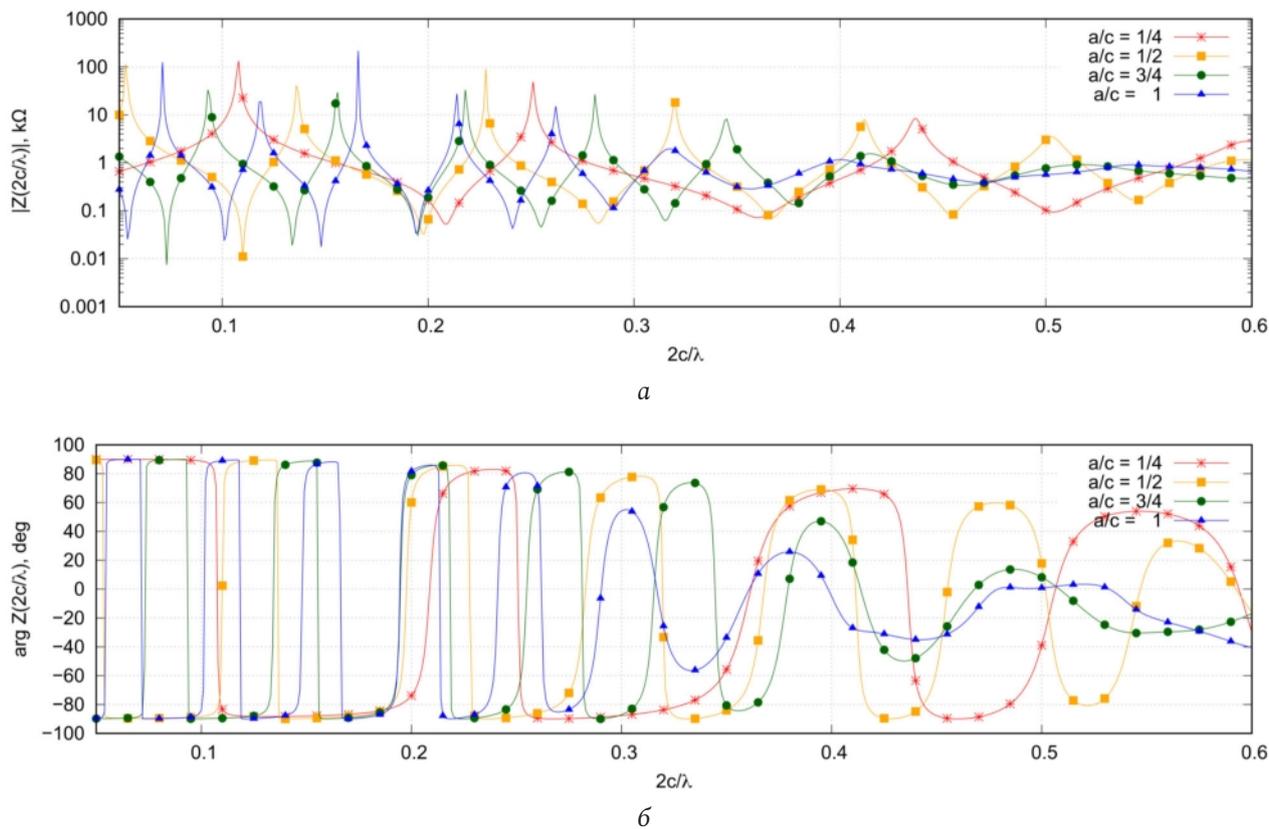


Рис. 3. Зависимость амплитуды (а) и фазы (б) входного сопротивления от отношения  $2c/\lambda$  для А-спирали;  $2c/\lambda \in [0,05;0,6]$   
Fig. 3. Dependence of the amplitude (a) and phase (b) of the input resistance on the ratio  $2c/\lambda$  for the A-helix;  $2c/\lambda \in [0,05;0,6]$

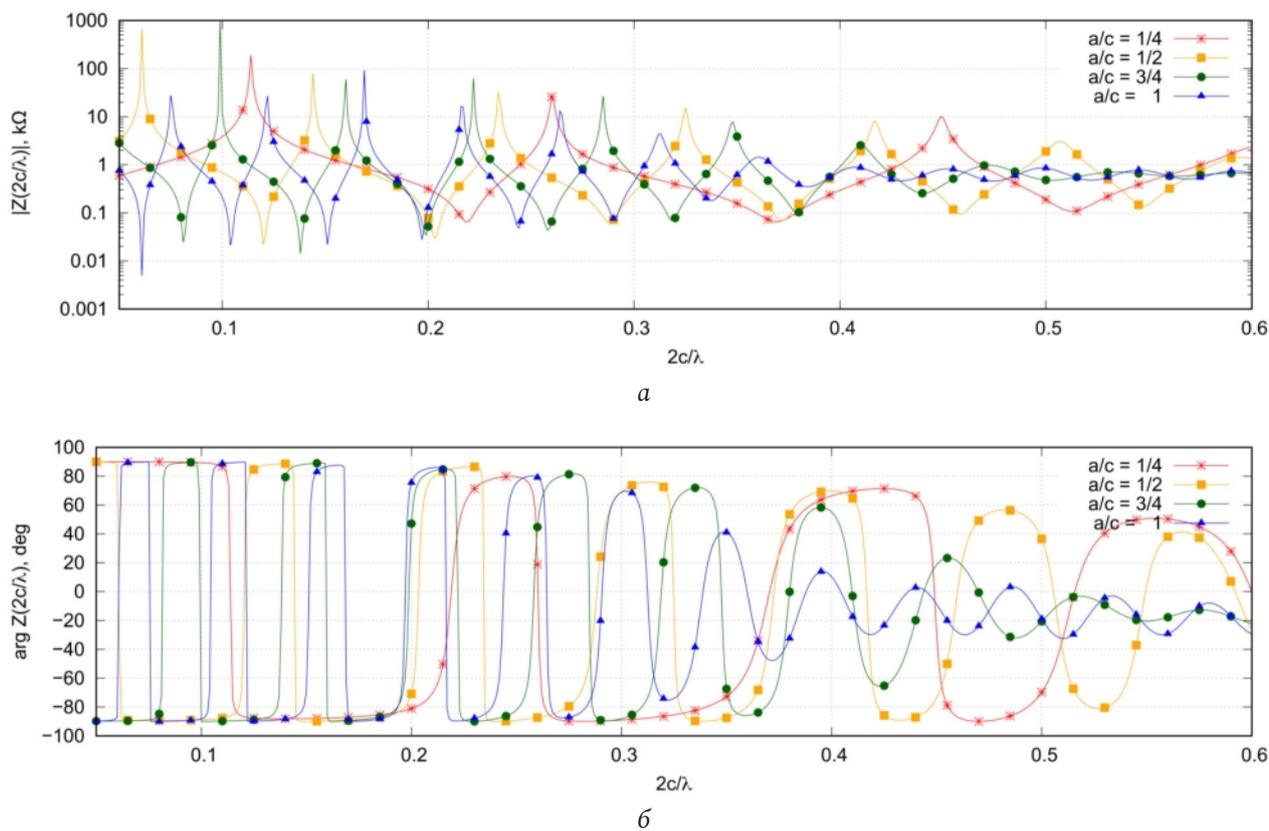


Рис. 4. Зависимость амплитуды (а) и фазы (б) входного сопротивления от отношения  $2c/\lambda$  для Б-спирали;  $2c/\lambda \in [0,05;0,6]$   
Fig. 4. Dependence of the amplitude (a) and phase (b) of the input resistance on the ratio  $2c/\lambda$  for the B-helix;  $2c/\lambda \in [0,05;0,6]$

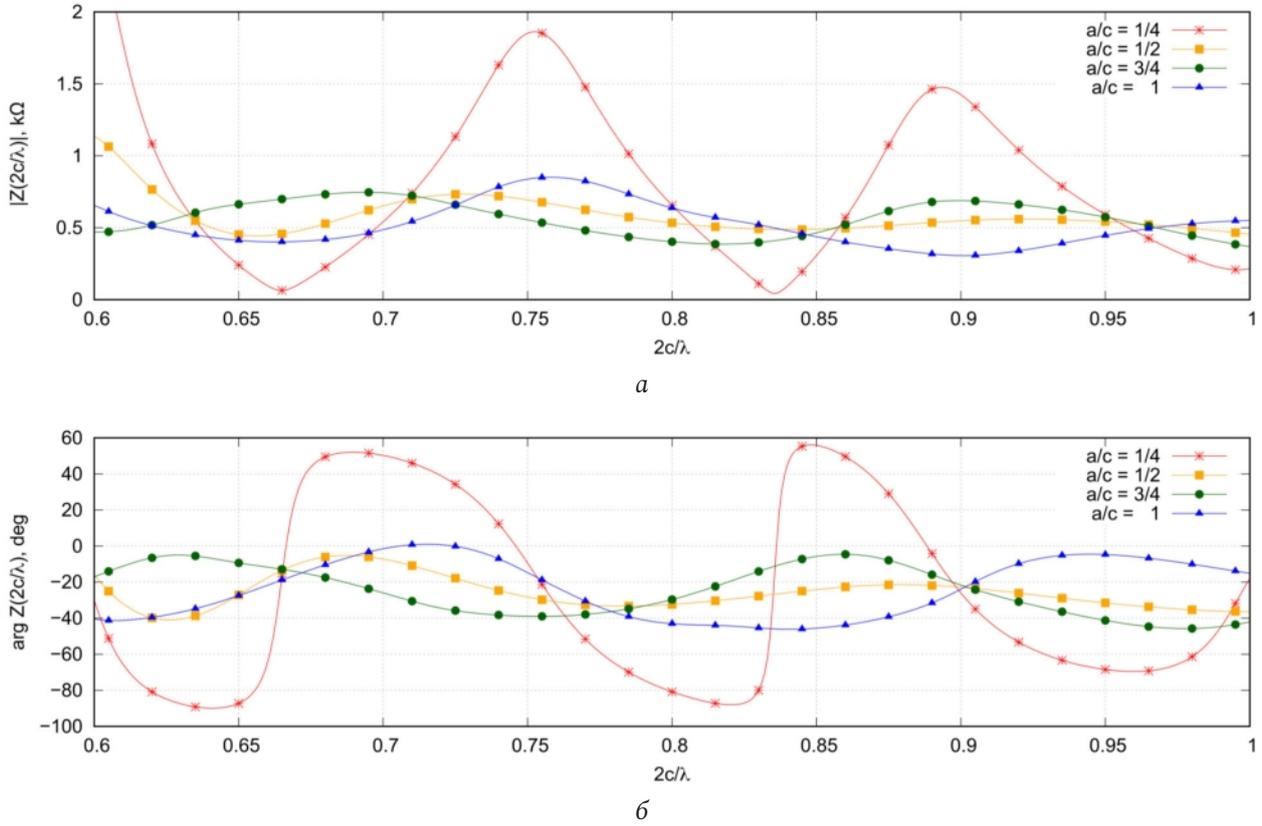


Рис. 5. Зависимость амплитуды (а) и фазы (б) входного сопротивления от отношения  $2c/\lambda$  для А-спирали;  $2c/\lambda \in [0,6;1,0]$   
 Fig. 5. Dependence of the amplitude (a) and phase (b) of the input resistance on the ratio  $2c/\lambda$  for the A-helix;  $2c/\lambda \in [0,6;1,0]$

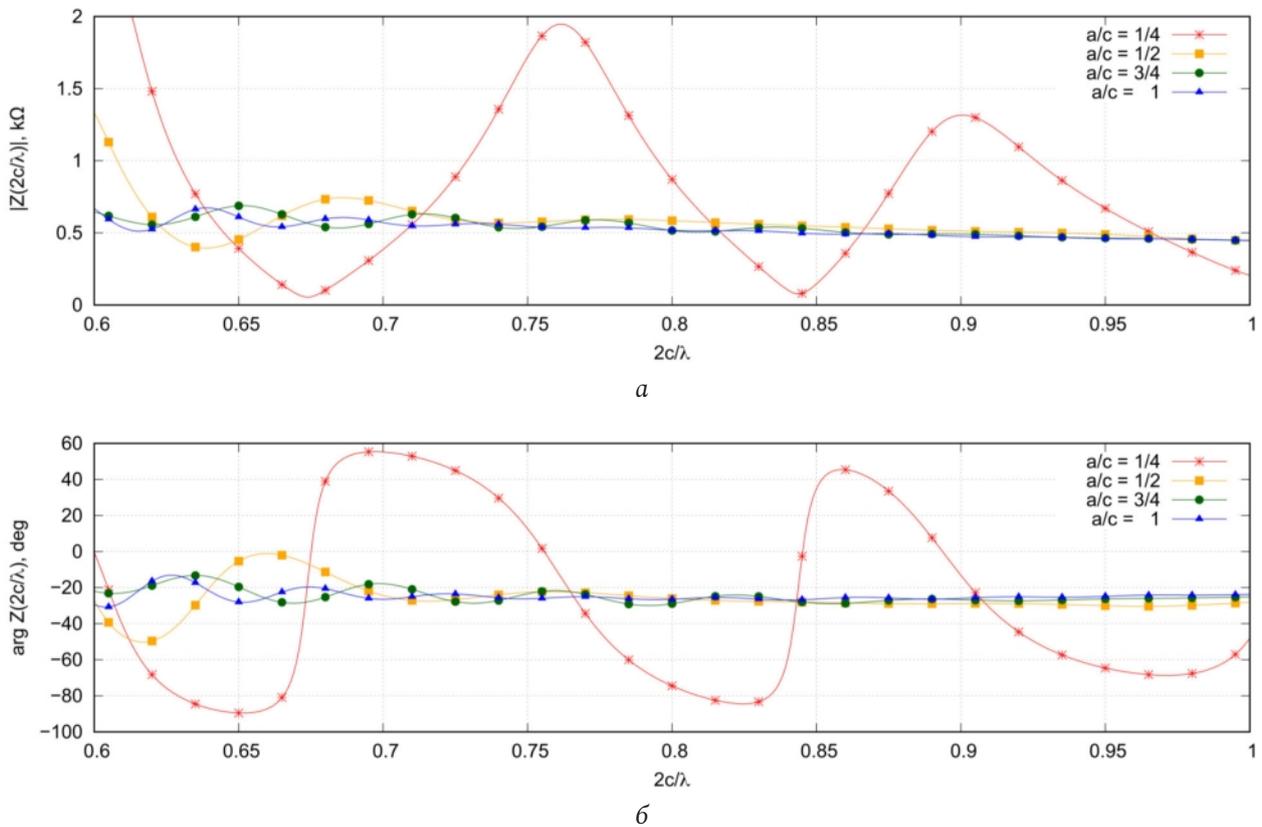


Рис. 6. Зависимость амплитуды (а) и фазы (б) входного сопротивления от отношения  $2c/\lambda$  для Б-спирали;  $2c/\lambda \in [0,6;1,0]$   
 Fig. 6. Dependence of the amplitude (a) and phase (b) of the input resistance on the ratio  $2c/\lambda$  for the B-helix;  $2c/\lambda \in [0,6;1,0]$

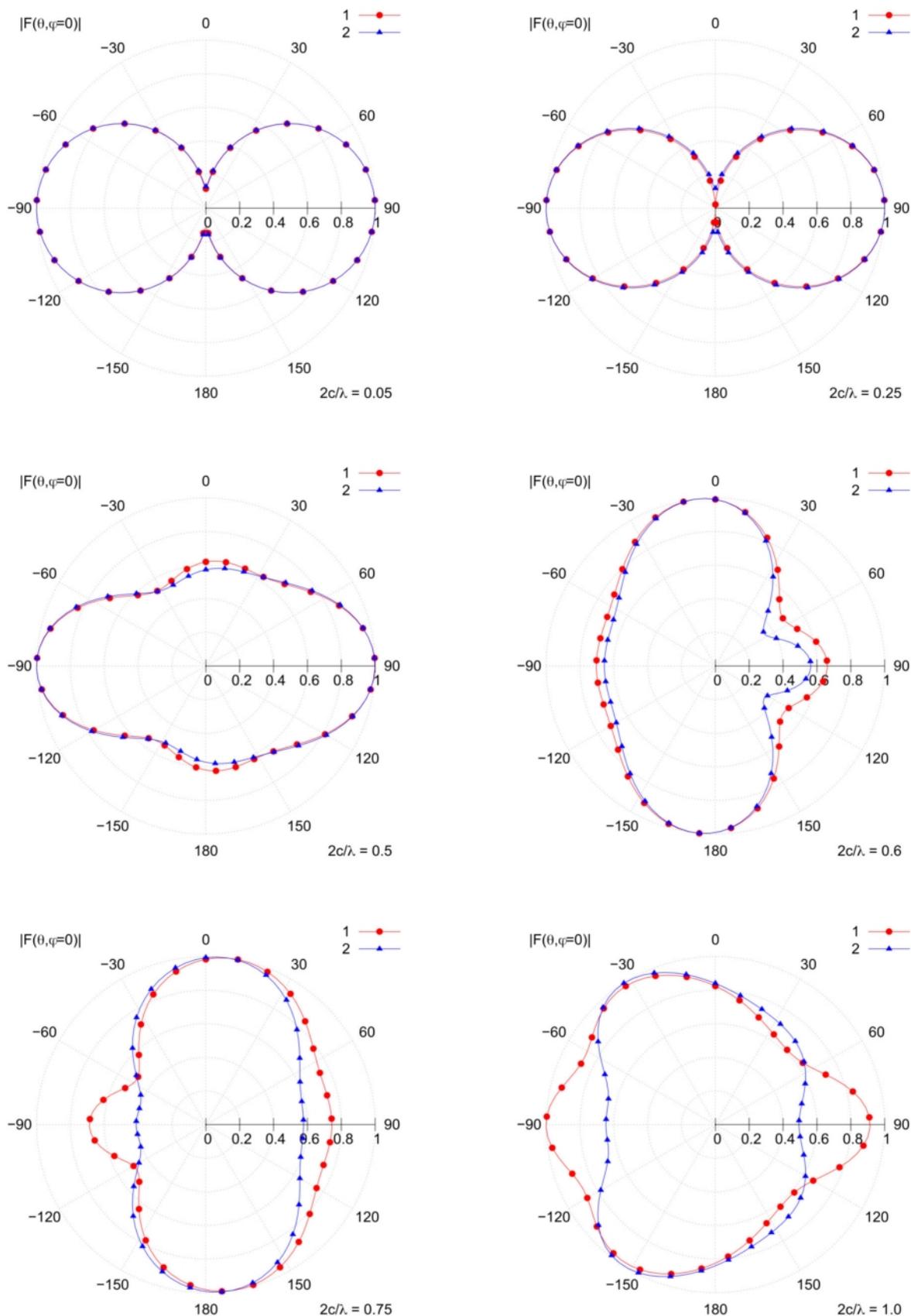


Рис. 7. Сравнение нормированных амплитудных диаграмм направленности А-спирали (кривая 1) и Б-спирали (кривая 2) при различных значениях  $2c/\lambda$

Fig. 7. Comparison of the normalized amplitude radiation patterns of the A-helix (curve 1) and B-helix (curve 2) at different values  $2c/\lambda$

Из рис. 5 видно, что для А-спирали с рассматриваемым числом витков имеется оптимальное значение  $a/c$  (в данном случае  $a/c = 0,5$ ), при котором отклонение входного сопротивления от среднего значения будет минимальным. В ВЧ-диапазоне во входном сопротивлении рассматриваемых структур имеется емкостная составляющая входного сопротивления. При наименьшем рассматриваемом значении  $a/c$ , равном  $1/4$ , частотная зависимость входного сопротивления во многом напоминает аналогичную зависимость для симметричного электрического вибратора.

На рис. 7 представлено сравнение нормированных амплитудных диаграмм направленности (ДН) рассматриваемых излучателей в меридианной плоскости, вычисленных при различных отношениях  $2c/\lambda$  и фиксированном значении  $a/c = 1/2$ . При отношениях  $2c/\lambda < 0,25$  ДН имеет тороидальную форму, повторяющую аналогичную ДН симметричного вибратора. Это связано с тем, что поперечный размер излучателей гораздо меньше длины волны излучения. Здесь также можно наблюдать, что структура спирального проводника не оказывает существенного влияния на характеристики излучения и ДН А- и Б-спиралей совпадают с графической точностью. Дальнейшее увеличение  $2c/\lambda$  до  $0,5$  приводит к исчезновению нулей излучения в направлении оси  $A'A$ . При  $2c/\lambda > 0,6$  ДН приобретает форму, приближенную к сфероидальной. В этом случае также растут отличия в ДН А- и Б-спиралей.

### Заключение

В работе рассмотрены два варианта сфероидальных спирально-рамочных излучателей (А-спираль и Б-спираль). Излучатели отличаются внутренней структурой спиральных элементов. Следует отметить, что спиральные антенны, обладающие геометрией, близкой к геометрии рассмотренных излучателей, широко применяются на практике. Предложены математические модели излучателей, построенные на основе интегрального представления электромагнитного поля, записанного в тонкопроволочном приближении. Данные

математические модели позволяют произвести количественную оценку электродинамических параметров рассматриваемых структур. Внутренняя задача сформулирована в виде системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Приведен метод ее сведения к системе линейных алгебраических уравнений, записанной относительно неизвестных значений комплексных амплитуд тока на сегментах, а также приведено условие для корректного осуществления указанной процедуры.

На основе представленных моделей были получены численные решения для внутренней и внешней электродинамических задач. Для ряда отношений  $a/c$  в диапазоне значений  $2c/\lambda$  произведен расчет распределений тока, входного сопротивления и нормированных диаграмм направленности. Полученным результатам дана физическая интерпретация. Показано, что в рассмотренных структурах в зависимости от отношения  $2c/\lambda$  может быть реализован режим стоячей, бегущей или смешанной волны тока. Режим стоячей волны возникает при малых  $2c/\lambda$ , режим бегущей волны характерен для  $2c/\lambda > 3/4$ . Анализ зависимости входного сопротивления от  $2c/\lambda$  показал тесную взаимосвязь между токовым режимом и характером поведения входного сопротивления. Также в процессе анализа результатов по входному сопротивлению установлено, что большей равномерностью входного сопротивления при  $2c/\lambda > 0,6$  обладает Б-спираль, а для А-спирали имеется оптимальное отношение  $a/c$ , при котором достигается его минимальная неравномерность. Анализ характеристик излучения показал, что при малых отношениях  $2c/\lambda$  нормированные ДН совпадают по форме с ДН симметричного электрического вибратора, при увеличении  $2c/\lambda$  ДН приобретает форму, близкую к эллипсоидальной. В дальнейшем авторы планируют повысить вычислительную эффективность предложенных моделей с помощью применения оптимальных систем проекционных функций и провести более детальный анализ численных результатов при различных отношениях геометрических параметров структур.

### Список литературы

1. Рамсей В. Частотно-независимые антенны. М.: Мир, 1968. 176 с.
2. Драбкин А.Л., Зуенко В.Л., Кислов А.Г. Антенно-фидерные устройства. Изд. 2-е, доп. и перераб. М.: Сов. радио, 1974. 536 с.
3. Физический энциклопедический словарь / под ред. А.М. Прохорова. М.: Большая российская энциклопедия, 1995. 928 с.
4. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и связь, 2006. 280 с.

5. Аралкин М.В., Дементьев А.Н., Осипов О.В. Математические модели киральных метаматериалов на основе многозаходных проводящих элементов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 1. С. 8–19. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.1.8-19>
6. Осипов О.В., Почепцов А.О., Антипова Т.А. Электродинамика планарных отражающих структур с киральными слоями на основе тонкопроволочных спиральных элементов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21, № 3. С. 59–65. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7019>
7. Юрцев О.А., Рунов А.В., Казарин А.Н. Спиральные антенны. М.: Сов. радио, 1974. 223 с.
8. Mei K. On the integral equations of thin wire antennas // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1965. Vol. 13, no. 3. P. 374–378. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.1965.1138432>
9. Adekola S., Mowete A., Ayorinde A. Compact theory of the broadband elliptical helical antenna // European Journal of Scientific Research. 2009. Vol. 31, № 3. P. 446–490.
10. Чебышев В.В. Микрополосковые антенны в многослойных средах. М.: Радиотехника, 2007. 160 с.
11. Неганов В.А., Табаков Д.П. Математические модели цилиндрической спиральной антенны // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2013. Т. 16, № 4. С. 79–86.
12. Стрижков В.А. Математическое моделирование электродинамических процессов в проволочных антенных системах // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 8. С. 127–138. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mm/v1/i8/p127>
13. Неганов В.А. Интегральное представление электромагнитного поля геометрически киральной структуры // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15, № 4. С. 6–13.
14. Табаков Д.П. Об описании излучения и дифракции электромагнитных волн методом собственных функций // Известия вузов. Радиофизика. 2021. Т. 64, № 3. С. 179–191. URL: <https://radiophysics.unn.ru/issues/2021/3/179>
15. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бинум; Лаборатория знаний, 2008. 686 с.
16. Неганов В.А., Неведов Е.И., Яровой Г.П. Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн / под ред. В.А. Неганова. М.: Радио и связь, 2002. 416 с.
17. Табаков Д.П., Морозов С.В., Ключев Д.С. Применение тонкопроволочного интегрального представления электромагнитного поля к решению задачи дифракции электромагнитных волн на проводящих телах // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, № 2. С. 7–14. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14>

## References

1. Ramsey V. *Frequency Independent Antennas*. Moscow: Mir, 1968, 176 p. (In Russ.)
2. Drabkin A.L., Zuzenko V.L., Kislov A.G. *Antenna-Feeder Devices*. 2nd ed., add. and reworked. Moscow: Sov. radio, 1974, 536 p. (In Russ.)
3. *Physical Encyclopedic Dictionary*. Ed. by A.M. Prokhorov. Moscow: Bol'shaya rossiyskaya entsiklopediya, 1995, 928 p. (In Russ.)
4. Neganov V.A., Osipov O.V. *Reflective, Waveguide and Radiating Structures with Chiral Elements*. Moscow: Radio i svyaz', 2006, 280 p. (In Russ.)
5. Aralkin M.V., Dement'ev A.N., Osipov O.V. Mathematical models of chiral metamaterials based on multi-pass conducting elements. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2020, vol. 23, no. 1, pp. 8–19. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.1.8-19> (In Russ.)
6. Osipov O.V., Pocheptsov A.O., Antipova T.A. Electrodynamics of planar reflective structures with chiral layers based on thin-wire spiral elements. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2018, vol. 21, no. 3, pp. 59–65. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7019> (In Russ.)
7. Yurtsev O.A., Runov A.V., Kazarin A.N. *Spiral Antennas*. Moscow: Sov. radio, 1974, 223 p. (In Russ.)
8. Mei K. On the integral equations of thin wire antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1965, vol. 13, no. 3, pp. 374–378. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.1965.1138432>
9. Adekola S., Mowete A., Ayorinde A. Compact theory of the broadband elliptical helical antenna. *European Journal of Scientific Research*, 2009, vol. 31, no. 3, pp. 446–490.
10. Chebyshev V.V. *Microstrip Antennas in Multilayer Environments*. Moscow: Radiotekhnika, 2007, 160 p. (In Russ.)
11. Neganov V.A., Tabakov D.P. Mathematical models of a cylindrical helical antenna. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2013, vol. 16, no. 4, pp. 79–86. (In Russ.)
12. Strizhkov V.A. Mathematical modeling of electrodynamic processes in wire antenna systems. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1989, vol. 1, no. 8, pp. 127–138. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mm/v1/i8/p127> (In Russ.)
13. Neganov V.A. Integral representation of the electromagnetic field of a geometrically chiral structure. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2012, vol. 15, no. 4, pp. 6–13. (In Russ.)
14. Tabakov D.P. On the description of radiation and diffraction of electromagnetic waves by the method of eigenfunctions. *Izvestiya vuzov. Radiofizika*, 2021, vol. 64, no. 3, pp. 179–191. URL: <https://radiophysics.unn.ru/issues/2021/3/179> (In Russ.)
15. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Numerical Methods*. Moscow: Binom; Laboratoriya znaniy, 2008, 686 p. (In Russ.)
16. Neganov V.A., Nefedov E.I., Yarovoy G.P. *Electrodynamic Methods for Designing Microwave Devices and Antennas*. Ed. by V.A. Neganov. Moscow: Radio i svyaz', 2002, 416 p. (In Russ.)
17. Tabakov D.P., Morozov S.V., Klyuev D.S. Application of the thin-wire integral representation of the electromagnetic field to the solution of the problem of diffraction of electromagnetic waves by conducting bodies. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2022, vol. 25, no. 2, pp. 7–14. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14> (In Russ.)

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2023, vol. 26, no. 1, pp. 38–48

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.38-48

Received 29 November 2022

Accepted 30 December 2022

### Mathematical models of spheroidal spiral-frame radiating structures

*Dmitry P. Tabakov, Ruslan M. Valiullin*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – The article considers mathematical models of two spheroidal spiral-frame emitters, built on the basis of a general approach involving the use of an integral representation electromagnetic field. The internal problem of electrodynamics is reduced to a system of Fredholm integral equations of the 1st kind. The resulting system was solved by the method of moments with piecewise constant basis functions and delta functions as test functions. In this case, the local linearization of the generating conductors of the structures under consideration was carried out. The dependences of current distributions, input resistance, and radiation characteristics of structures on frequency have been studied. It is shown that standing, traveling, and mixed current waves can exist in the structures under consideration. The current regime is determined by the wave sizes and the geometry of the structures and determines the behavior of the wave resistance in the frequency range. Despite the similar geometry, the characteristics of the considered structures have certain differences.

*Keywords* – helical antennas; loop antennas; integral representation electromagnetic field; thin-wire approximation; radiation pattern; input impedance.

### Информация об авторах

**Табакон Дмитрий Петрович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика, устройства СВЧ и антенны, оптика, численные методы математического моделирования.

*E-mail:* illuminator84@yandex.ru

**Валиуллин Руслан Миндарович**, аспирант кафедры физики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика, устройства СВЧ и антенны.

*E-mail:* ruslanvaliullin1998@yandex.ru

### Information about the Authors

**Dmitry P. Tabakov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Physics, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics, microwave devices and antennas, optics, numerical methods of mathematical modeling.

*E-mail:* illuminator84@yandex.ru

**Ruslan M. Valiullin**, post-graduate student of the Department of Physics, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics, microwave devices and antennas.

*E-mail:* ruslanvaliullin1998@yandex.ru

## Сравнение геометрикооптического и «апертурного» подходов для расчета излучения зарядов, пролетающих вблизи диэлектрических объектов

Е.С. Белоногая<sup>1</sup> , Д.С. Ключев<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет  
199034, Россия, г. Санкт-Петербург,  
Университетская наб., 7–9

<sup>2</sup> Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – Нахождение электромагнитного поля, возбуждаемого зарядом, пролетающим вблизи диэлектрического объекта, является одной из важных задач теории излучения заряженных частиц. Нередко необходимо знать главным образом поле излучения в геометрикооптической области. В настоящей статье на примере диэлектрической призмы большого (в масштабе рассматриваемой длины волны) размера сравниваются два подхода к решению подобной задачи. Один из них основан на применении геометрической оптики, а другой – на асимптотическом расчете «апертурных интегралов». Показано, что в геометрикооптической области первый способ обладает рядом преимуществ. Например, выражение для сечения лучевой трубки, получаемое при использовании геометрической оптики, позволяет вычислять каустики или показывать их отсутствие, что и продемонстрировано в статье на примере трех объектов различной формы.

*Ключевые слова* – излучение Вавилова – Черенкова; геометрическая оптика; метод стационарной фазы; лучевая трубка; каустики.

### Введение

Одной из задач физики волновых процессов является нахождение электромагнитного поля, возбуждаемого заряженной частицей или сгустком частиц, пролетающих мимо некоторого диэлектрического объекта либо сквозь него. Точных решений подобных задач, как правило, построить не удается, или же они являются громоздкими, плохо интерпретируемыми и требующими трудоемкого расчета. При этом численные расчеты предполагают наличие больших компьютерных ресурсов. По этой причине большинство задач решается в некотором приближении.

В статье подробно рассматривается применение метода стационарной фазы к апертурным интегралам, дающим решение в случае больших (в масштабе длины волны) объектов, в том числе и в геометрикооптической области. У этого подхода есть сложности: системы уравнений для нахождения точки перевала нередко возможно решить только численно, вторые производные подынтегральных функций для вычисления определителя оказываются слишком громоздкими и т. д. Однако, когда точка перевала находится для однократного интеграла, метод стационарной фазы, напротив, позволяет сильно упростить задачи [1].

Альтернативой данному подходу является геометрикооптический расчет [2] на основе метода,

описанного, в частности, В.А. Фоком для отраженных лучей [3]. Суть метода можно обозначить несколькими шагами: сначала вычисляется поле, возбужденное внутри объекта без внешних границ, затем с помощью коэффициентов Френеля определяется поле на внешней границе объекта, на последнем шаге учитываются ход лучей и расширение лучевых трубок в области вне объекта.

Встречаются и обратные задачи: свойства среды определяются на основе изменения поля после отражения или прохождения [4–6].

В этой работе проведено сравнение двух подходов для нахождения поля в геометрикооптической области на примере задачи с диэлектрической призмой, описание которой приведено в разделе 1, а также произведен расчет каустик в разделе 2 для некоторых наиболее распространенных диэлектрических объектов на основе использования выражений для расширения лучевой трубки. Все исследования проводятся для Фурье-образа электрического поля (вычисление самого поля, сводящееся к расчету соответствующего обратного интеграла Фурье, выходит за рамки данной работы).

### 1. Преимущество геометрооптического метода

Рассмотрим преимущества геометрикооптического метода на примере следующей задачи. Вдоль

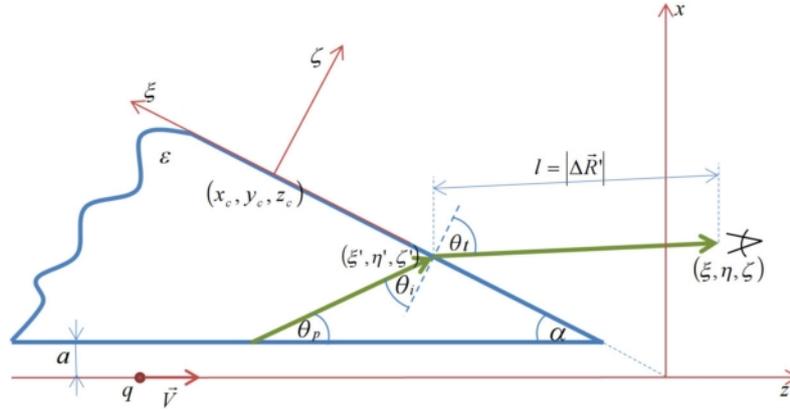


Рис. 1. Центральное сечение призмы с основными обозначениями  
Fig. 1. Central cross-section of the prism with main notations

границы диэлектрической призмы с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu = 1$  пролетает заряженная частица с зарядом  $q$  и скоростью  $\vec{V} = \beta\vec{c}$  (где  $c$  – скорость света) на расстоянии  $a$  от ее нижней границы. Размер призмы считается большим по сравнению с рассматриваемой длиной волны. Призма находится в среде, отличия которой от вакуума несущественны (рис. 1). Считаем, что излучение выходит только из прямоугольной области с центром в точке  $(x_c, y_c, z_c)$  со сторонами  $d$  и  $b$ , параллельными осям  $\xi$  и  $\eta$  соответственно, остальная часть призмы закрыта для излучения.

Для этой задачи известно геометрическое решение [7]. Рассмотрим далее особенности решения данной задачи «апертурным» методом (т. е. методом, основанным на формулах Стрэттона – Чу). Данное решение является значительно более общим, так как позволяет находить поле в тех областях, в которых геометрическая оптика несправедлива. Однако этот метод имеет и определенные недостатки, если задача заключается в анализе поля только в той области, где геометрическая оптика справедлива.

Компоненты поля, полученные апертурным методом, можно найти в статье [8]. Они имеют вид

$$\begin{cases} E_{\xi}^{(h)}(R) \\ E_{\eta}^{(h)}(R) \\ E_{\zeta}^{(h)}(R) \end{cases} = \frac{ik}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} d\xi' \int_{-b/2}^{b/2} d\eta' \frac{G(|\Delta\vec{R}'|)}{(|\Delta\vec{R}'|)^2} \times \begin{cases} -[(\Delta\eta')^2 + \zeta^2] H_{\eta}(\vec{R}') - \Delta\xi' \Delta\eta' H_{\xi}(\vec{R}') \\ [(\Delta\xi')^2 + \zeta^2] H_{\xi}(\vec{R}') + \Delta\xi' \Delta\eta' H_{\eta}(\vec{R}') \\ -\zeta \Delta\eta' H_{\xi}(\vec{R}') + \zeta \Delta\xi' H_{\eta}(\vec{R}') \end{cases}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} E_{\xi}^{(e)}(R) \\ E_{\eta}^{(e)}(R) \\ E_{\zeta}^{(e)}(R) \end{cases} = \frac{ik}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} d\xi' \int_{-b/2}^{b/2} d\eta' \frac{G(|\Delta\vec{R}'|)}{|\Delta\vec{R}'|} \times \begin{cases} -\zeta E_{\xi}(\vec{R}') \\ -\zeta E_{\eta}(\vec{R}') \\ \Delta\xi' E_{\xi}(\vec{R}') + \Delta\eta' E_{\eta}(\vec{R}') \end{cases}. \quad (2)$$

Штрихом здесь отмечены координаты поверхности призмы (переменные интегрирования). Для наглядности напряженность электрического поля разделена на две составляющие, на что указывают верхние индексы  $(e)$  и  $(h)$ : подынтегральные функции зависят от напряженности электрического и магнитного поля на поверхности призмы соответственно. Проекции  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитного поля в подынтегральных функциях обозначают поле на верхней внешней поверхности призмы (они приведены в [8]). В (1) и (2) использованы обозначения:  $k = \omega/c$  – волновое число,  $i$  – мнимая единица,  $\Delta\xi' = \xi - \xi'$ ,  $\Delta\eta' = \eta - \eta'$ ,  $\vec{R}' = (\xi', \eta', 0)$ , а  $G(|\Delta\vec{R}'|)$  – функция Грина:

$$G(|\Delta\vec{R}'|) = \frac{e^{ik|\Delta\vec{R}'|}}{|\Delta\vec{R}'|} = \frac{e^{ik\sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + \zeta^2}}. \quad (3)$$

Для расчета интегралов (1), (2) можно применить метод стационарной фазы. Известно [9; 10], что  $n$ -кратные интегралы с большим положительным параметром  $\Omega$  вида

$$\hat{I}_n(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\Omega q(x)} dx_1 \dots dx_n, \quad \Omega > 0 \quad (4)$$

равны

$$\hat{I}_n(\Omega) = \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{n/2} \times \quad (5)$$

$$\times \exp \left[ i\Omega q(x_s) + \frac{i\pi}{4} \sigma \right] \frac{f(x_s) + O(\Omega^{-1})}{\left| \det \frac{\partial^2 q}{\partial x_{is} \partial x_{js}} \right|^{1/2}}.$$

Здесь

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(d_i),$$

где  $d_i$  – собственные значения матрицы

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_{is} \partial x_{js}}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

а  $x_{js}$  – координаты стационарной точки. Для нахождения этих координат нужно найти точки одновременного обнуления производных фазы подынтегральной функции по  $\xi'$ ,  $\eta'$ .

В формулах (1), (2) с учетом поля на поверхности призмы, выражения для которого можно найти в [8], выделяется одинаковая для всех компонент фазы, которую можно разделить на шесть компонент:

$$\begin{cases} \Phi_1 = ik\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + \zeta^2}, \\ \Phi_2 = -a\sqrt{\kappa^2 + k_y^2}, \\ \Phi_3 = i(x - a)g_m, \\ \Phi_4 = ik_y y, \\ \Phi_5 = ik\beta^{-1}z, \\ \Phi_6 = -i\pi/4, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\kappa = \frac{k}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad k_y = \frac{k\sqrt{\varepsilon\beta^2 - 1}\eta'}{\beta\sqrt{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2}},$$

$$g_m = \sqrt{\frac{k^2(\varepsilon\beta^2 - 1)}{\beta^2} - k_y^2}, \quad x = x_c + \xi' \sin \alpha,$$

$$y = \eta', \quad z = z_c - \xi' \cos \alpha.$$

Ниже приведены результаты дифференцирования мнимой части фазы  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} &= g_m \sin \alpha \left[ 1 + \frac{k_y^2}{g_m^2} \frac{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2}{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2} \right] - \\ &- \frac{k_y \eta' (x_c + \xi' \sin \alpha - a) \sin \alpha}{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2} - \frac{k \cos \alpha}{\beta} - \\ &- \frac{k(\xi - \xi')}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + \zeta^2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta'} &= k_y \left[ 1 + \frac{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2}{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2} \right] - \\ &- \frac{k_y^2}{g_m \eta'} \frac{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^3}{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2} \end{aligned}$$

Стационарная точка есть решение следующей системы уравнений относительно  $(\xi', \eta')$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} = f_1 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta'} = f_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Решить подобную нелинейную систему уравнений можно численно. Для рассматриваемой задачи был выбран метод Ньютона как наиболее удобный.

Метод Ньютона заключается в поиске решения за некоторое количество итераций до тех пор, пока абсолютная разница между новым и предыдущим значением не окажется менее некоторого заранее заданного значения.

Для решения системы  $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0$  используем следующую рекурсию:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \xi'}(\xi'_n, \eta'_n) \delta \xi'_n + \frac{\partial f_1}{\partial \eta'}(\xi'_n, \eta'_n) \delta \eta'_n = -f_1(\xi'_n, \eta'_n), \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi'}(\xi'_n, \eta'_n) \delta \xi'_n + \frac{\partial f_2}{\partial \eta'}(\xi'_n, \eta'_n) \delta \eta'_n = -f_2(\xi'_n, \eta'_n), \end{cases} \quad (9)$$

где  $\delta \xi'_n = \xi'_{n+1} - \xi'_n$  и  $\delta \eta'_n = \eta'_{n+1} - \eta'_n$  – приращения значений искомых точек на  $n$ -м шаге. Их легко вычислить методом Крамера, а затем сравнить результат с заранее заданным значением. Для остановки рекурсии оба приращения в абсолютном значении должны быть меньше заранее заданного числа. Необходимо также задать начальную точку отсчета  $(\xi'_0, \eta'_0)$ , например, в начале координат с небольшим смещением.

Результат дифференцирования  $f_1$ ,  $f_2$  приведен ниже

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \xi'} &= \frac{\partial g_m}{\partial \xi'} \sin \alpha \left[ 1 - \frac{\Xi^2}{\Sigma^2} \right] + \frac{\partial k_y}{\partial \xi'} \sin \alpha \frac{X}{\Sigma^2} [2\Xi - \eta'] + \\ &+ \frac{k_y \sin^2 \alpha}{\Sigma^4} [2\Xi \eta'^2 - \eta'(\eta'^2 - X^2)] + \\ &+ \frac{k(\eta - \eta')^2 + k\zeta^2}{|\Delta \bar{R}|^3}, \end{aligned} \quad (10)$$

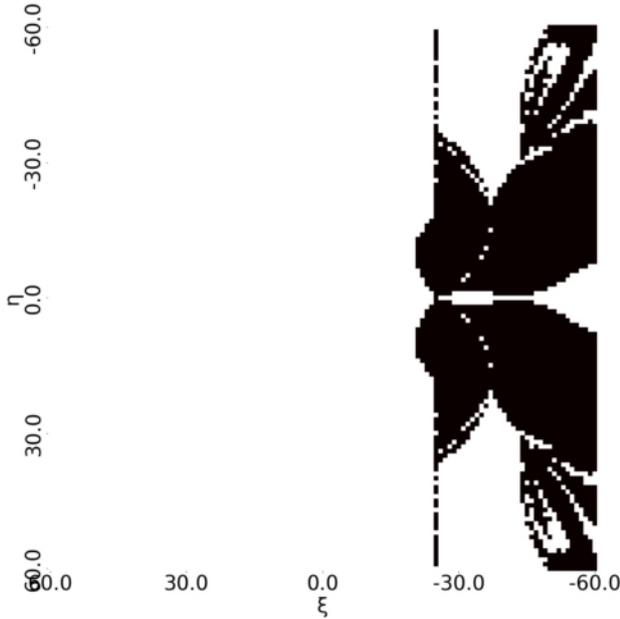


Рис. 2. Пример «слепой зоны» точек для вычисления стационарной фазы. Черным обозначены области, в которых не вычисляется точка стационарной фазы. Для наглядности расстояния измеряются в единицах  $c/\omega$ . При этом использованы следующие параметры:  $\varepsilon=2$ ,  $a=1$ ,  $\alpha=\pi/6$ ,  $\beta=0,9$ ,  $\zeta=30$ ,  $b=d=50$

Fig. 2. Example of «blind spot» for stationary phase points calculations. Areas of undefined stationary points are shown in black. All the distances are in  $c/\omega$ . Parameters for calculations:  $\varepsilon=2$ ,  $a=1$ ,  $\alpha=\pi/6$ ,  $\beta=0,9$ ,  $\zeta=30$ ,  $b=d=50$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \eta'} &= \frac{\partial g_m}{\partial \eta'} \sin \alpha \left[ 1 - \frac{\Xi^2}{\Sigma^2} \right] + \frac{\partial k_y}{\partial \eta'} \sin \alpha \frac{X}{\Sigma^2} [2\Xi - \eta'] + \\ &+ \frac{k_y \sin \alpha X}{\Sigma^2} \left[ \frac{2\eta'^2 - 2\Xi\eta'}{\Sigma^2} - 1 \right] - \frac{k(\xi - \xi')(\eta - \eta')}{|\Delta \bar{R}|^3}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \eta'} &= \frac{\partial g_m}{\partial \eta'} \frac{1}{\eta'} \frac{\Xi^2 X}{\Sigma^2} + \frac{\partial k_y}{\partial \eta'} \left[ 1 + \frac{X^2}{\Sigma^2} - \frac{2\Xi X^2}{\eta' \Sigma^2} \right] + \\ &+ \frac{k_y X^2}{\Sigma^2} \left[ \frac{\Xi}{\eta'^2} - \frac{2\eta'}{\Sigma^2} + \frac{2\Xi}{\Sigma^2} \right] + \frac{k(\xi - \xi')^2 + k\zeta^2}{|\Delta \bar{R}|^3}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi'} &= \frac{\partial f_1}{\partial \eta'}. \end{aligned}$$

Здесь:

$$X = x_c + \xi' \sin \alpha - a,$$

$$\Sigma = \sqrt{(x_c + \xi' \sin \alpha - a)^2 + \eta'^2},$$

$$\Xi = \frac{k_y}{g_m} (x_c + \xi' \sin \alpha - a).$$

Все полученные результаты были запрограммированы и сравнены с описанными в [7]. Однако, во-первых, стационарная точка в рамках данной задачи не может быть вычислена аналитически,

что приводит к тому, что точность вычислений снижается. Во-вторых, при поиске стационарных точек появляются «слепые зоны» для вычислений, т. е. те точки наблюдения, для которых, используя описанные методы, невозможно найти точку стационарной фазы. Например, в плоскости  $\zeta_{obs} = \text{const}$ , где  $\zeta_{obs}$  – расстояние от верхней поверхности призмы (рис. 1), можно наблюдать области (с пиковым значением поля), в которых стационарная точка не находится. Чем дальше плоскость расположена от поверхности призмы, тем больше эта область. Такая слепая зона изображена на рис. 2.

Приведем сравнение электрического поля, полученного при помощи метода стационарной фазы и при помощи учета лучевой трубки, для линий  $\zeta = \text{const}$  и  $\xi = \text{const}$ . Рисунок распределения амплитуды поля в пространстве совпадает, величина поля имеет одинаковый порядок, но при увеличении расстояния от призмы в рамках приближения геометрической оптики и увеличении диэлектрической проницаемости в пиковых значениях расхождение величины поля может составлять до 15 %.

Оба подхода верно отражают структуру и направленность поля, но метод стационарной фазы дает более сглаженное решение.

На рис. 3 приведено сравнение поля при различных скоростях заряженной частицы и расстояниях от поверхности призмы.

## 2. Вычисление каустик

Согласно [11], каустики можно вычислить (либо показать их отсутствие), используя выражения для сечения лучевой трубки  $D(l)$ . Для этого нужно решить уравнение  $D(l) = 0$  совместно с системой уравнений хода лучей. Рассмотрим три диэлектрических объекта: конус, призму и шар (рис. 4). Источником излучения, как и ранее, является точечный движущийся заряд. Геометрооптические решения этих задач, а также формулы для сечения лучевой трубки приведены, соответственно, в работах [2; 7; 12].

Вычисление каустик для конуса с каналом (рис.4, слева) не представляет сложностей. Так как  $D(l) = \frac{\rho}{\rho'} \cos \theta_t$  [2], то решение выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \theta_t = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \rho = 0. \end{cases} \quad (11)$$

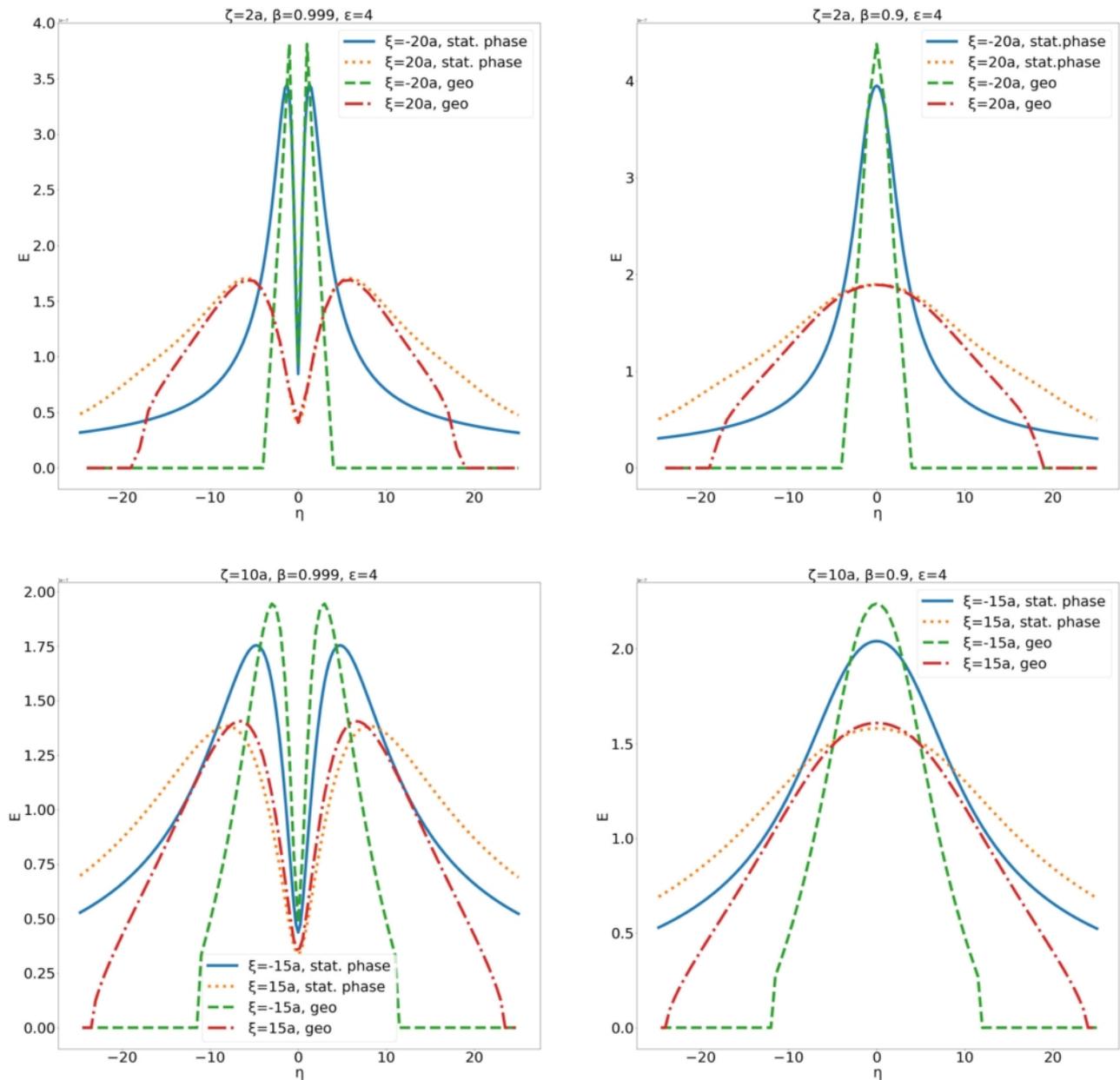


Рис. 3. Сравнение результатов, полученных методом стационарной фазы и методом геометрической оптики, для Фурье-образа электрического поля в В·с/м для призмы с параметрами:  $q=1$  нКл,  $\epsilon=4$ ,  $a=c/\omega$ ,  $\alpha=\pi/6$ ,  $b=d=50a$   
 Fig. 3. Comparison of two methods for Fourier transform electric field magnitude measured in V·s/m for prism where:  $q=1$  nC,  $\epsilon=4$ ,  $a=c/\omega$ ,  $\alpha=\pi/6$ ,  $b=d=50a$

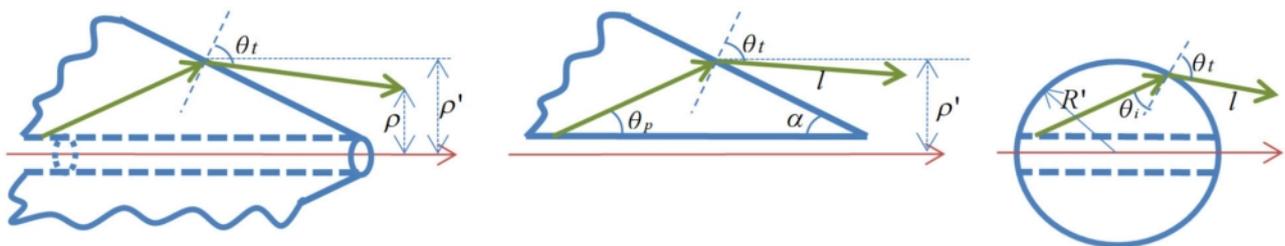


Рис. 4. Центральное сечение рассматриваемых диэлектрических объектов  
 Fig. 4. Considered dielectric objects in central plane cross section with main notations

То есть каустики могут образовываться либо на поверхности конуса при предельном угле полного внутреннего отражения, либо на оси конуса. Обе ситуации не представляют практического интереса.

Для призмы (рис. 4, в центре) ситуация также довольно простая. Выражение для сечения лучевой трубки выглядит следующим образом [7]:

$$D(l) = \cos\theta_t + \frac{l}{\rho'} \sqrt{\varepsilon} \sin\theta_p \left[ \cos\theta_t + \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi' (\varepsilon - 1)}{\cos\theta_t} \right]. \quad (12)$$

Уравнение  $D(l) = 0$  можно привести к виду

$$\cos^2 \theta_t \left( 1 + \frac{l}{\rho'} \sqrt{\varepsilon} \sin\theta_p \right) = -\frac{l}{\rho'} \sqrt{\varepsilon} \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi' \sin\theta_p (\varepsilon - 1). \quad (13)$$

Так как при генерации черенковского излучения  $\sin\theta_p$  принимает вещественные положительные значения, то (13) не может быть удовлетворено, что означает отсутствие каустик.

Для шара (рис. 4, справа) выражение для сечения лучевой трубки принимает вид [12]:

$$D(l) = \cos\theta_t + \frac{l}{R'} \left[ \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin\theta_i \cos\theta_t} - \frac{\sin(\theta' - \theta_t) \cos\theta_t}{\sin\theta'} \right] + \left( \frac{l}{R'} \right)^2 \frac{\sin(\theta_t - \theta') \sin(\theta_t - \theta_i)}{\cos\theta_t \sin\theta_i \sin\theta'}. \quad (14)$$

Квадратное уравнение  $D(l) = 0$  имеет два решения:

$$\left[ \begin{aligned} \frac{l}{R'} &= \frac{\sin\theta'}{\sin(\theta_t - \theta')} \\ \frac{l}{R'} &= \frac{\cos^2 \theta_t \sin\theta_i}{\sin(\theta_t - \theta_i)} \end{aligned} \right. \quad (15)$$

где  $(R, \theta, \varphi)$  и  $(R', \theta', \varphi')$  – сферические координаты в точке наблюдения и в точке поверхности шара соответственно.

Для нахождения связи между координатами точек каустик воспользуемся выражением для длины луча:

$$l = \sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\theta - \theta')}. \quad (16)$$

Благодаря цилиндрической симметрии задачи достаточно рассмотреть одно из сечений через ось канала, при этом можно, не теряя общности, перейти от поверхностей каустик к линиям, которые

они образуют в рассматриваемом сечении. Здесь и далее такие линии будут называться линиями каустик. Определим для начала, есть ли такие линии, расположенные на лучах. Для этого воспользуемся начальным условием: в точке выхода луча из шара имеем  $l = 0$ ,  $R = R'$ ,  $\theta = \theta'$ . В таком случае получим два решения (15): 1) нефизическое решение  $\theta' = \pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 2) решение, подсказанное геометрией задачи, а именно условием  $\theta' = \theta_i + \theta_p$ , где знак  $\theta_i$  определяется положением относительно нормали (слева положительное, а справа отрицательное, если смотреть на шар на рис. 4). С учетом закона Снеллиуса  $\sin\theta_t = \sqrt{\varepsilon} \sin\theta_i$  получаем итоговое уравнение для точек выхода луча из шара:

$$\theta' = \theta_p \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17)$$

Лучи, выходящие из полученных точек, отсекают области с пересечениями лучей со стороны шара, что можно увидеть на рис. 5. Теперь необходимо найти кривые линии каустик, которые, очевидно, четко просматриваются на рис. 5 со смоделированными лучами.

В случае если каустики не лежат на лучах, применить начальные условия для их нахождения не удастся, требуется другой подход. Свяжем для начала  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $R$  из трех уравнений выше (15)–(16), содержащих  $l$ :

$$R = R' \left[ \cos(\theta - \theta') \pm \sqrt{\frac{\cos^4 \theta_t \sin^2 \theta_i}{\sin^2(\theta_t - \theta_i)} - \sin^2(\theta - \theta')} \right], \quad (18)$$

$$R = R' \left[ \cos(\theta - \theta') \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \theta'}{\sin^2(\theta_t - \theta_i)} - \sin^2(\theta - \theta')} \right].$$

Однако для построения линий каустик нужна связь  $R$  и  $\theta$ , а углы  $\theta_t$ ,  $\theta_i$  выражаются через  $\theta'$  и константы задачи, поэтому в качестве дополнительного уравнения воспользуемся уравнением луча:

$$\frac{x - x'}{\kappa_x^*} = \frac{z - z'}{\kappa_z^*}, \quad (19)$$

где [12]:

$$\vec{\kappa}^* = \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} \vec{\kappa} - \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin\theta_i} \vec{N}, \quad (20)$$

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi' \sin\theta' \\ \sin\varphi' \sin\theta' \\ \cos\theta' \end{pmatrix}, \quad (21)$$

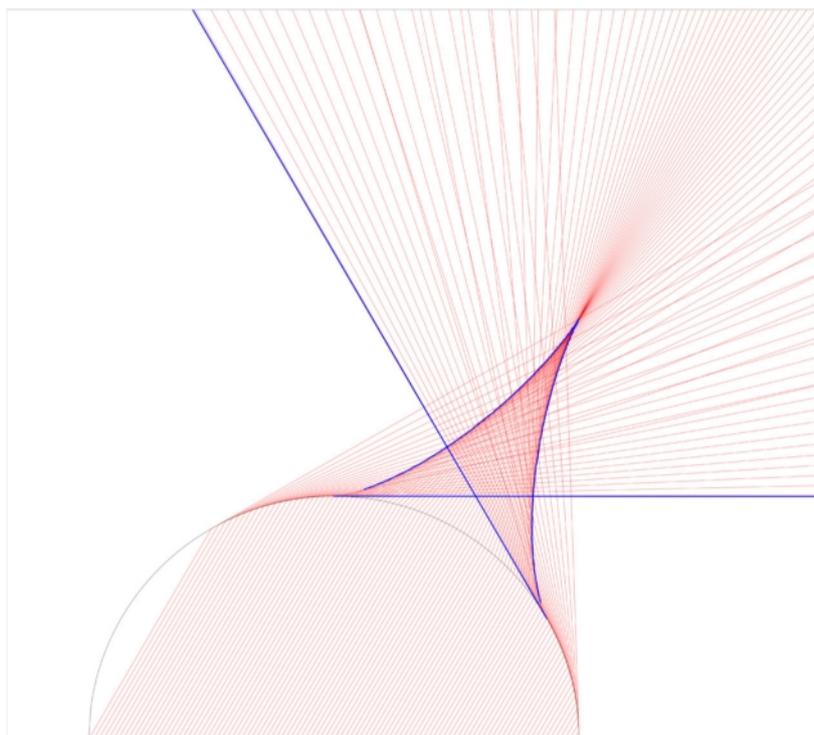


Рис. 5. Каустики шара. Для примера рассмотрен случай с  $\epsilon = 4$ ,  $\beta = 0,999$ . Тонкими (красными в онлайн-версии статьи) линиями изображены лучи, жирными (синими в онлайн-версии статьи) – вычисленные линии каустик  
 Fig. 5. Dielectric ball caustics for case of  $\epsilon = 4$ ,  $\beta = 0,999$ . Thin (red in online version of the article) lines are rays and thick (blue in online version of the article) lines show caustics

$$\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi' \sin \theta_p \\ \sin \varphi' \sin \theta_p \\ \cos \theta_p \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Здесь  $\vec{\kappa}$ ,  $\vec{\kappa}^*$ ,  $\vec{N}$  – это векторы, направленные вдоль падающего и преломленного лучей, а также нормаль, восстановленная в точке падения.

В результате преобразований, а также с учетом цилиндрической симметрии задачи получим уравнение

$$R = \frac{R' \sin \theta_t}{\sin(\theta_t + \theta - \theta')}. \quad (23)$$

Уравнение для связи точек является сложным трансцендентным уравнением, поэтому задача нахождения точек на линии каустик была решена численно: выбирались только те точки, которые подчинялись одновременно уравнениям (18) и (23). На рис. 5 толстыми (синими в онлайн-версии статьи) линиями показаны каустики (как лежащие на лучах, так и кривые), а тонкими (красными в он-

лайн-версии статьи) линиями – лучи, выходящие из шара для наглядности.

## Заключение

Использование геометрической оптики, предполагающее определение хода лучей и расширения лучевых трубок, позволяет улучшить визуализацию поля для сложных случаев по сравнению с методом стационарной фазы. Кроме того, после получения сечения лучевой трубки можно дополнительно исследовать волновое поле на наличие каустик, анализ которых позволяет определить слабые места геометрического подхода. Также стоит отметить, что применение геометрической оптики зачастую оказывается менее трудоемкими по сравнению с расчетом апертурных интегралов методом стационарной фазы.

Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 18-72-10137.

Автор выражает благодарность А.В. Тюхтину за полезные обсуждения.

## Список литературы

1. Tyukhtin A.V., Galyamin S.N., Vorobev V.V. Cherenkov radiation from a dielectric ball with a channel // Journal of the Optical Society of America B. 2021. Vol. 38, no. 3. P. 711–718. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.409461>
2. Belonogaya E.S., Tyukhtin A.V., Galyamin S.N. Approximate method for calculating the radiation from a moving charge in the presence of a complex object // Physical Review E. 2013. Vol. 87, no. 4. P. 043201. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.043201>

3. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1970. 520 с.
4. Панин Д.Н., Осипов О.В., Безлюдников К.О. Расчет отражений плоской электромагнитной волны линейной поляризации от границы раздела «воздух – влажная почва» на основе гетерогенных моделей Максвелла Гарнетта и Бруггемана // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, № 2. С. 22–27. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.22-27>
5. Янушкевич В.Ф. Особенности распространения радиоимпульсных сигналов в анизотропной среде над углеводородными залежами // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, № 4. С. 35–39. URL: <https://journals.ssau.ru/rwp/article/view/7071>
6. Численный анализ отражений электромагнитной волны Е-поляризации от неоднородного слоя диэлектрика / Д.Н. Панин [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2019. Т. 22, № 1. С. 10–15. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.1.10-15>
7. Belonogaya E.S., Galyamin S.N., Tyukhtin A.V. Short-wavelength radiation of a charge moving in the presence of a dielectric prism // *Journal of the Optical Society of America B*. 2015. Vol. 32, no. 4. P. 649–654. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.32.000649>
8. Radiation of a charge moving along the boundary of dielectric prism / A.V. Tyukhtin [et al.] // *Physical Review Accelerators and Beams*. 2019. Vol. 22, no. 1. P. 012802. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.22.012802>
9. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1 / пер. с англ. под ред. М.Л. Левина. М.: Мир, 1978. 547 с.
10. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
11. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
12. Radiation of charge moving through a dielectric spherical target: ray optics and aperture methods / A.V. Tyukhtin [et al.] // *Journal of Instrumentation*. 2020. Vol. 15, no. 5. P. C05043. DOI: <https://doi.org/10.1088/1748-0221/15/05/C05043>

## References

1. Tyukhtin A.V., Galyamin S.N., Vorobev V.V. Cherenkov radiation from a dielectric ball with a channel. *Journal of the Optical Society of America B*, 2021, vol. 38, no. 3, pp. 711–718. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.409461>
2. Belonogaya E.S., Tyukhtin A.V., Galyamin S.N. Approximate method for calculating the radiation from a moving charge in the presence of a complex object. *Physical Review E*, 2013, vol. 87, no. 4, p. 043201. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.043201>
3. Fok V.A. *Problems of Diffraction and Propagation of Electromagnetic Waves*. Moscow: Sovetskoe radio, 1970, 520 p. (In Russ.)
4. Panin D.N., Osipov O.V., Bezlyudnikov K.O. Calculation of reflections of a plane electromagnetic wave of linear polarization from the «air-moist soil» interface based on heterogeneous models by Maxwell Garnett and Bruggeman. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2022, vol. 25, no. 2, pp. 22–27. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.22-27> (In Russ.)
5. Yanushkevich V.F. Peculiarities of propagation of radio pulse signals in an anisotropic medium over hydrocarbon deposits. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2017, vol. 20, no. 4, pp. 35–39. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7071> (In Russ.)
6. Panin D.N. et al. Numerical analysis of e-polarization electromagnetic wave reflections from an inhomogeneous dielectric layer. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 10–15. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.1.10-15> (In Russ.)
7. Belonogaya E.S., Galyamin S.N., Tyukhtin A.V. Short-wavelength radiation of a charge moving in the presence of a dielectric prism. *Journal of the Optical Society of America B*, 2015, vol. 32, no. 4, pp. 649–654. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.32.000649>
8. Tyukhtin A.V. et al. Radiation of a charge moving along the boundary of dielectric prism. *Physical Review Accelerators and Beams*, 2019, vol. 22, no. 1, p. 012802. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.22.012802>
9. Felsen L., Markuvits N. *Radiation and Scattering of Waves*. Vol. 1. Trans. from English. Ed. by M.L. Levin. Moscow: Mir, 1978, 547 p. (In Russ.)
10. Fedoryuk M.V. *Pass Method*. Moscow: Nauka, 1977, 368 p. (In Russ.)
11. Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. *Geometric Optics of Inhomogeneous Media*. Moscow: Nauka, 1980, 304 p. (In Russ.)
12. Tyukhtin A.V. et al. Radiation of charge moving through a dielectric spherical target: ray optics and aperture methods. *Journal of Instrumentation*, 2020, vol. 15, no. 5, p. C05043. DOI: <https://doi.org/10.1088/1748-0221/15/05/C05043>

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2023, vol. 26, no. 1, pp. 49–57

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.49-57

Received 16 December 2022  
Accepted 17 January 2023

### **Comparison of geometric optics and «aperture» methods for calculation of the electromagnetic radiation caused by charged particles flying by dielectric objects**

Ekaterina S. Belonogaya<sup>1</sup> , Dmitriy S. Klyuev<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Saint Petersburg University  
7-9, Universitetskaya Embankment,  
Saint Petersburg, 199034, Russia

<sup>2</sup> Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – Calculation of the electromagnetic field exited by a charged particle flying close to dielectric object is one of the important problems of charged particle radiation theory. In some cases, geometric optics area is preferable for calculations. In the article, two methods of solution of such problem with dielectric prism possessing large size (in comparison with the wavelength under consideration) are considered. One of them is based on geometric optics method, another one is based on asymptotics of «aperture» integrals. It is shown that, in geometric optics area, the first method has a series of advantages. For example, ray tube cross-section expression obtained within geometric optics method allows one to find caustics or to show their absence, which is demonstrated in the article for three objects of various shapes.

*Keywords* – Cherenkov radiation; geometric optics; stationary phase method; ray tube; caustics.

---

## Информация об авторах

**Белоногая Екатерина Сергеевна**, магистр физики, инженер-исследователь кафедры радиофизики физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, г. Санкт-Петербург, Россия.

*Область научных интересов:* излучение Вавилова – Черенкова, геометрическая оптика неоднородных сред, волновые процессы.

*E-mail:* ekaterinabelonogaya@yandex.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-0557-1710>

**Клюев Дмитрий Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия. Автор более 250 научных работ.

*Область научных интересов:* электродинамика, устройства СВЧ, антенны, метаматериалы.

*E-mail:* klyuevd@yandex.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-9125-7076>

## Information about the Authors

**Ekaterina S. Belonogaya**, master of physics, research engineer of the Department of Radiophysics of Faculty of Physics, Saint Petersburg University, Saint Petersburg, Russia.

*Research interests:* Cherenkov radiation, geometric optics of heterogeneous media, wave processes.

*E-mail:* ekaterinabelonogaya@yandex.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-0557-1710>

**Dmitriy S. Klyuev**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, head of the Department of Radioelectronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia. Author of over 250 scientific papers.

*Research interests:* electrodynamics, microwave devices, antennas, metamaterials.

*E-mail:* klyuevd@yandex.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-9125-7076>

## Спектральные характеристики интегрального оператора внутренней задачи электродинамики для эллиптической рамочной структуры

Д.П. Табаков, А.Г. Майоров

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – Статья посвящена анализу электродинамических свойств эллиптической рамочной структуры. С учетом двойной симметрии внутренняя задача для рассматриваемой структуры в рамках тонкопроволочного приближения сведена к четырем интегральным уравнениям Фредгольма первого рода, записанным относительно независимых токовых функций. Проведено исследование спектральных характеристик интегральных операторов соответствующих интегральных уравнений для различных значений электрической длины и коэффициента эллиптичности рамки. Показано, что собственные функции интегральных операторов при близких значениях указанных параметров имеют высокую степень корреляции и по форме близки к тригонометрическим функциям. Выявлены особенности частотной зависимости собственных значений интегральных операторов. Сделан вывод о резонансном характере этих зависимостей, что делает эллиптическую рамочную структуру во многом схожей с рассмотренными авторами ранее трубчатым вибратором и сферической спиральной частицей. Результаты, представленные в статье, способствуют формированию углубленного понимания процессов, протекающих в рассматриваемой структуре, а также служат ориентиром при построении аппроксимационных моделей решения внутренней задачи.

*Ключевые слова* – эллиптическая рамочная структура; рамочная антенна; интегральное представление электромагнитного поля; распределение тока; интегральное уравнение; собственные функции; собственные значения.

### Введение

Рамочные антенны являются одним из наиболее распространенных типов антенн. Они имеют широкую сферу применения (телевидение, сотовая связь, радиосвязь и т. д.). Их теоретическое исследование осуществлялось в течение довольно длительного времени, поэтому сейчас имеется довольно большое количество научных работ по данной тематике. В настоящий момент расчет характеристик подобных структур можно осуществлять с высокой степенью точности, привлекая системы автоматизированного проектирования (САПР), с помощью инженерных формул, а также предлагаемых в различных работах моделей, имеющих различную степень сложности. В [1] анализ рамочной антенны осуществляется в приближении равномерного распределения тока. В [2] для расчетов используется теория длинных линий. В [3; 4] в поперечном сечении проводника, имеющего малые волновые размеры, для распределения тока вводится квазистатическое приближение. В [5] рассмотрена кольцевая полосковая антенна, для которой сформулирован бесконечный набор систем СИУ относительно Фурье-гармоник компонент вектора поверхностной плотности тока на полоске. Приведенные результаты позволяют оценить

соотношение между амплитудами продольной и поперечной компонент тока.

Следует отметить, что строгие математические модели разработаны по большей части только для кольцевых рамок, имеющих наиболее простую геометрию. Присутствующая в этом случае осевая симметрия структуры существенно упрощает решения внутренней задачи. Строгие модели рамок более сложной конфигурации (эллиптические, многоугольные и т. д.) не так широко распространены, поэтому создание подобных математических моделей представляет собой актуальную задачу. Даже в случае строгих моделей, формулируемых в виде ИУ (в том числе сингулярных), авторы, как правило, ограничиваются анализом количественных характеристик распределений тока, не углубляясь в причины, приводящие к формированию этих распределений. Указанный момент является ключевым при создании адекватной картины внутренних физических процессов в рассматриваемых структурах. Решение этой задачи можно осуществить на основе метода собственных функций (МСФ), предложенного в [6]. Ранее этот метод был применен авторами к анализу и построению аппроксимации решения внутренней задачи для трубчатого электрического вибратора [7; 8]. Альтернативой МСФ является метод характеристиче-

ских мод [9–11]. Среди его достоинств в сравнении МСФ можно отметить простоту численной реализации, но существенным недостатком этого метода является низкая устойчивость вычислительной процедуры.

В данной статье рассмотрена математическая модель эллиптической рамочной структуры (ЭР), сформулированная в виде четырех независимых ИУ. Решение внутренней электродинамической задачи сформулировано на основе МСФ. Способ возбуждения ЭР не конкретизировался в целях повышения общности представляемых результатов, т. е. предложенную модель можно использовать для решения как антенных, так и дифракционных задач. В заданном диапазоне частот для различных вариантов геометрии ЭР проведен анализ спектральных характеристик интегральных операторов (ИО) соответствующих ИУ.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим решение внутренней задачи электродинамики на эллиптической рамочной структуре (ЭР) методом собственных функций. Геометрия структуры показана на рис. 1. Проводник ЭР, обладающий бесконечно большой проводимостью, имеет круглое сечение диаметра  $2\epsilon$ , которое много меньше длины волны  $\lambda$  и полной длины  $L$  образующей проводника. Таким образом, для ЭР целесообразно использовать тонкопроволочное приближение, в рамках которого объемная плотность тока сводится к азимутально независимому полному току, протекающему по образующей проводника. Символ  $L$  далее будет использоваться также и для обозначения образующей.

Параметрическое уравнение образующей  $L$  ЭР имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = r_x \cos t \hat{\mathbf{x}} + r_y \sin t \hat{\mathbf{y}}, \quad t \in [0; 2\pi]. \quad (1)$$

Здесь  $t$  – параметр, являющийся по сути азимутальным углом цилиндрической либо сферической системы координат;  $r_x$  и  $r_y$  – большая и малая полуоси эллипса соответственно. Натуральный параметр на спиралях определяется выражением

$$l(t) = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} \right| dt' = r_x \int_0^t \sqrt{\sin^2 t' + \kappa \cos^2 t'} dt', \quad (2)$$

здесь  $\kappa = r_y / r_x \leq 1$  – коэффициент эллиптичности. В натуральном параметре уравнение образующей спирали будет определяться выражением (1) после замены  $t = t(l)$ . Функция  $t(l)$  определяется численно из (2) методом обратной интерполяции. Длина образующей ЭР определяется как  $L = l(2\pi) =$

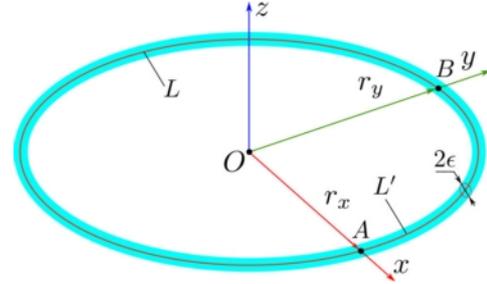


Рис. 1. Тонкопроволочная модель эллиптической рамочной антенны  
 Fig. 1. Thin-wire model of an elliptic frame antenna

$= 4r_x E(\sqrt{1-\kappa^2})$ , в котором  $E(x)$  – полный эллиптический интеграл второго рода [12]. Минимальное значение радиуса кривизны  $\rho_{\min}$  образующей  $L$  ЭР имеет в точках, соответствующих  $t = 0$  и  $t = \pi$ :  $\rho_{\min} = r_x \kappa$ . Данное равенство требует наложения дополнительного условия на радиус проводника:  $\epsilon \ll r_x \kappa$ .

В рамках принятой модели ЭМП структуры будет описываться интегральным представлением (ИП), подробно представленным в [13]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_L I(l') \mathbf{K}^{(F)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l')) dl', \quad F \equiv E, H; \quad (3)$$

здесь:  $\mathbf{K}^{(F)}$  – ядра интегрального представления;  $I(l)$  – распределение полного тока на образующей проводника;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения. Корректность и достоверность результатов, получаемых с помощью ИП ЭМП (4), подтверждается в [14; 15].

Рассматриваемая структура при  $\kappa < 1$  обладает двойной зеркальной симметрией относительно плоскостей  $XOZ$  и  $YOZ$ , поэтому ее можно разбить на четыре идентичные части, образующие  $L_n \equiv L'$  которых описываются общим выражением вида:

$$\mathbf{r}_n(t) = s_n^{(x)} r_x \cos t \hat{\mathbf{x}} + s_n^{(y)} r_y \sin t \hat{\mathbf{y}},$$

$$t \in [0; \pi/2], \quad n = 1 \dots 4.$$

$$\{s_1^{(x)}, s_1^{(y)}\} = \{1, 1\}; \quad \{s_2^{(x)}, s_2^{(y)}\} = \{-1, 1\};$$

$$\{s_3^{(x)}, s_3^{(y)}\} = \{-1, -1\}; \quad \{s_4^{(x)}, s_4^{(y)}\} = \{1, -1\};$$

В этом случае

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_n \int_{L'} I_n(l') \mathbf{K}^{(F)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n(l')) dl', \quad (4)$$

$$F \equiv E, H; \quad n = 1 \dots 4.$$

Здесь  $I_n(l)$  – распределение тока на соответствующей образующей. Поставим граничное условие вида

$$(E^{(in)}(\mathbf{r}(l)) + E(\mathbf{r}(l))) \cdot \hat{\mathbf{n}}(l) = 0$$

на каждой образующей и в результате получим систему ИУ следующего вида:

$$\sum_{n=1}^4 \int_{L'} I_n(l') K_{m,n}(l, l') dl' = E_m(l),$$

$$m = 1 \dots 4, \quad l \in L' = L/4.$$

Здесь

$$E_m(l) = -\hat{\mathbf{I}}_m(l) \cdot E^{(\text{in})}(\mathbf{r}_m(l)),$$

$$K_{m,n}(l, l') = \hat{\mathbf{I}}_m(l) \cdot \mathbf{K}^{(E)}(\mathbf{r}_m(l), \mathbf{r}_n(l'))$$

– касательные составляющие стороннего электрического поля на образующих и ядра системы ИУ соответственно. В силу симметрии структуры имеют место равенства:

$$K_{m,m} = K_1, \quad K_{m,5-m} = K_4, \quad m = 1 \dots 4;$$

$$K_{1,2} = K_{2,1} = K_{3,4} = K_{4,3} = K_2;$$

$$K_{1,3} = K_{3,1} = K_{2,4} = K_{4,2} = K_3.$$

Для функций  $E_m$ ,  $I_m$  и  $K_m$  справедливы преобразования вида

$$F_m = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 w_{m,n} \dot{F}_n,$$

$$\dot{F}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 w_{m,n} F_n, \quad F \equiv E, I, K,$$

в которых  $w_{m,n}$  – элементы матрицы Уолша:

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Относительно функций  $\dot{E}_m$  и  $\dot{I}_m$  исходная система ИУ распадается на 4 независимые подсистемы:

$$\dot{E}_m(l) = \int_{L'} \dot{I}_m(l') (2\dot{K}_m(l, l')) dl', \quad m = 1 \dots 4, \quad l \in L'. \quad (7)$$

Физически плоскости  $XOZ$  и  $YOZ$  представляют для рассматриваемой структуры электрическую либо магнитную стенку, поэтому для функций  $\dot{I}_i$  и их производных  $\dot{I}'_i$  справедливы следующие граничные условия:

$$\dot{I}'_1(0) = \dot{I}'_1(L') = 0; \quad \dot{I}'_2(0) = \dot{I}'_2(L') = 0;$$

$$\dot{I}'_3(0) = \dot{I}'_3(L') = 0; \quad \dot{I}'_4(0) = \dot{I}'_4(L') = 0. \quad (8)$$

Аппроксимируем образующие  $L_i$  ломаными  $L_i^{(N)}$ , имеющими  $N$  сегментов равной длины  $\Delta$ . В рамках метода моментов в качестве базисных используем постоянные в пределах сегмента функции, а в качестве тестовых – дельта-функции, локализованные в центре сегмента. В результате получим 4 независимые СЛАУ, имеющие общий вид

$$\hat{\mathbf{Z}} \mathbf{I} = \mathbf{E}. \quad (9)$$

В которых  $\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{Z}}^{(m)}$  – матрицы моментов с элементами  $z_{i,j}^{(m)}$ ;  $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{(m)}$  – векторы комплексных амплитуд токов  $I_j^{(m)}$  на сегментах;  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(m)}$  – векторы, содержащие значения функций стороннего поля  $E_j^{(m)}$  в центрах сегментов:

$$z_{i,j}^{(m)} = 2 \int_{l_i^* - \Delta/2}^{l_i^* + \Delta/2} \dot{K}_m^{(N)}(l_i^*, l') dl',$$

$$I_j^{(m)} = I_m(l_j^*), \quad E_j^{(m)} = E_m(l_j^*);$$

здесь  $l_i^* = (l_{i+1} + l_i)/2$  – значения натурального параметра в центрах сегментов;  $l_i$  – значения натурального параметра на границах сегментов; верхний индекс « $N$ » в ядрах  $\dot{K}_m$  указывает, что в  $K_{m,n}$ , описываемых вторым выражением (5), вместо исходных образующих  $\mathbf{r}_m(l)$  используются их линейризованные аппроксимации  $\mathbf{r}_m^{(N)}(l)$ . Далее при отсутствии необходимости индекс  $m$  для матриц и векторов будем опускать.

Полная проблема собственных значений (СЗ) для матрицы  $\hat{\mathbf{Z}}$  формулируется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{J}}. \quad (10)$$

В данном выражении  $\hat{\mathbf{J}}$  – матрица, столбцы  $\mathbf{J}_i$  которой являются собственными векторами (СВ)  $\hat{\mathbf{Z}}$ , при этом все СВ имеют единичную норму:  $|\mathbf{J}_n| = 1$ ;  $\hat{\mathbf{X}}$  – диагональная матрица, диагональные элементы которой  $\xi_{i,i} = \xi_i \in \mathbf{X}$  являются собственными значениями  $\hat{\mathbf{Z}}$ . Здесь следует отметить, что СЛАУ (9) эквивалентна ИУ (7) с вырожденным ядром, вычисляемым для сегментированных образующих, а СВ  $\mathbf{J}_n$  аппроксимируют собственные функции (СФ)  $J_n(l)$  интегрального оператора задачи (7). Решение полной проблемы собственных значений для комплексных матриц представляет собой стандартную задачу линейной алгебры, решаемой на основе QR-алгоритма [16]. Решение СЛАУ при известных  $\hat{\mathbf{J}}$  и  $\hat{\mathbf{X}}$  будет иметь вид

$$\mathbf{I} = (\hat{\mathbf{J}} \hat{\mathbf{X}}^{-1} \hat{\mathbf{J}}^T) \mathbf{E}.$$

Индекс « $T$ » соответствует операции транспонирования. Матрица  $\hat{\mathbf{X}}$  является диагональной, поэтому вычисление обратной матрицы не представляет особых проблем. С физической точки зрения исследование зависимостей СВ и СЗ от частоты и параметров структуры представляет собой особый интерес, т. к. они в большей части определяют характер решения внутренней задачи. Также эти исследования служат основой для построения аппроксимационных моделей решений [8].

В нашем случае в качестве главного параметра, нормируемого к длине волны, следует выбрать длину образующей  $L$  ЭР:  $x = L/\lambda$ . В качестве второго параметра будем использовать коэффициент эллиптичности  $k$ . Третий нормированный параметр – отношение радиуса провода  $\varepsilon$  к длине образующей  $L$  ЭР – в силу перечисленных ранее условий не оказывает существенного влияния на решение внутренней задачи, поэтому будем полагать, что  $\varepsilon/L = \text{const}$ .

Здесь также следует отметить, что при  $k=1$  ЭР обладает осевой симметрией, а собственные функции интегрального оператора могут быть выражены через пару соответствующих тригонометрических функций. При этом форма собственных функций не зависит от  $L/\lambda$ .

## 2. Численное моделирование и анализ результатов

Решение задачи (10) осуществлялось в прямоугольной области:

$$\mathcal{S}: x \in \underline{x} : [x_{\min}; x_{\max}], \quad k \in \underline{k} : [k_{\min}; k_{\max}].$$

На интервалах  $\underline{x}$  и  $\underline{k}$  вводились равномерно  $N_f$  узлов  $x_f$  и  $N_r$  узлов  $k_r$  соответственно, в паре образующие множество точек  $\{x_f, k_r\} \in \mathcal{S}$ . В расчетах полагалось, что  $x_{\min} = 0,01$ ,  $x_{\max} = 5$ ,  $k_{\min} = 0,5$ ,  $k_{\max} = 1$ ,  $N_f = 500$ ,  $N_r = 11$ .

Число сегментов  $N$  при линеаризации образующей полагалось равным 100, отношение  $\varepsilon/L'$  при этом было выбрано равным  $3/250$  с целью выполнения условия  $2\varepsilon \leq \Delta \leq 12\varepsilon$  [17], необходимого для обеспечения устойчивого решения СЛАУ в рамках выбранной системы проекционных функций. При этом  $\rho_{\min}/L'$  при  $k=0,5$  составляет примерно 0,4, что соответствует ранее обозначенному условию  $\varepsilon \ll \rho_{\min}$ .

Вычисление СЗ  $\mathbf{X}$  и СВ  $\hat{\mathbf{J}}$  осуществлялось с помощью процедуры ZGEEV [18], входящей в библиотеку с открытым исходным кодом LAPACK [19]. Важным моментом при проведении диапазонных вычислений в области  $\mathcal{S}$  является отслеживание номеров СВ и СЗ [20; 21], так как при разных значениях  $x$  и  $k$  процедура ZGEEV располагает СВ и СЗ в возвращаемых массивах различным образом. Поэтому непосредственное вычисление СВ и СЗ на практике необходимо дополнять алгоритмом их отслеживания и сортировки, а также алгоритмом корректировки знака СВ. При получении результатов для данной статьи использовался корреляционный алгоритм. Ранее он также применялся в [6], но, к сожалению, не был описан под-

робно вследствие ограниченного объема статьи. В данной статье мы восполним этот пробел.

Пусть  $\hat{\mathbf{J}}(x_{f^*}, k_{r^*})$  – матрица СВ, которую мы принимаем за образец;  $\hat{\mathbf{J}}(x_f, k_r)$  – матрица, нуждающаяся в сортировке СВ и корректировке из знаков. Существенным моментом здесь являются условия:

$$\begin{aligned} 2|x_f - x_{f^*}|/|x_f + x_{f^*}| &\ll 1; \\ 2|k_f - k_{f^*}|/|k_f + k_{f^*}| &\ll 1, \end{aligned} \quad (11)$$

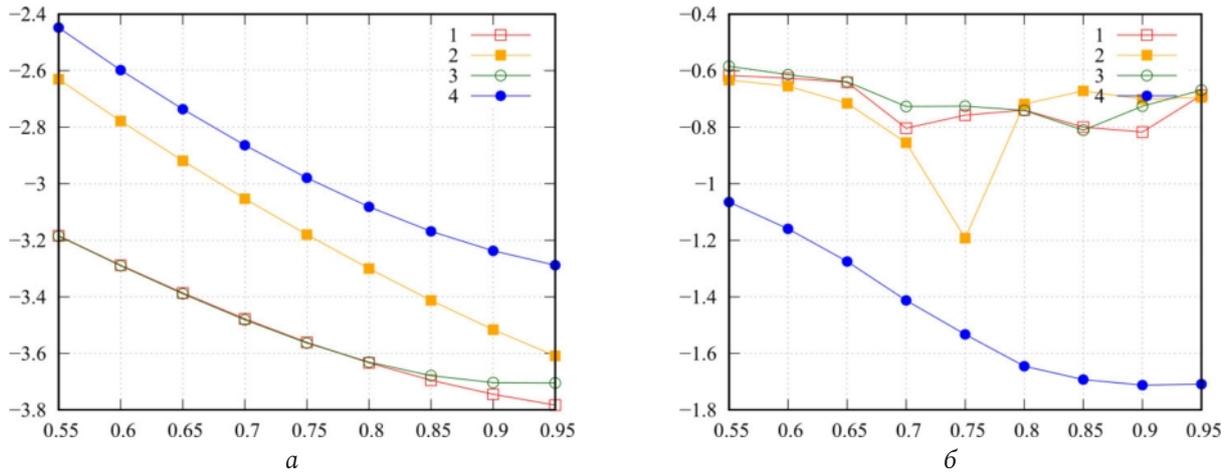
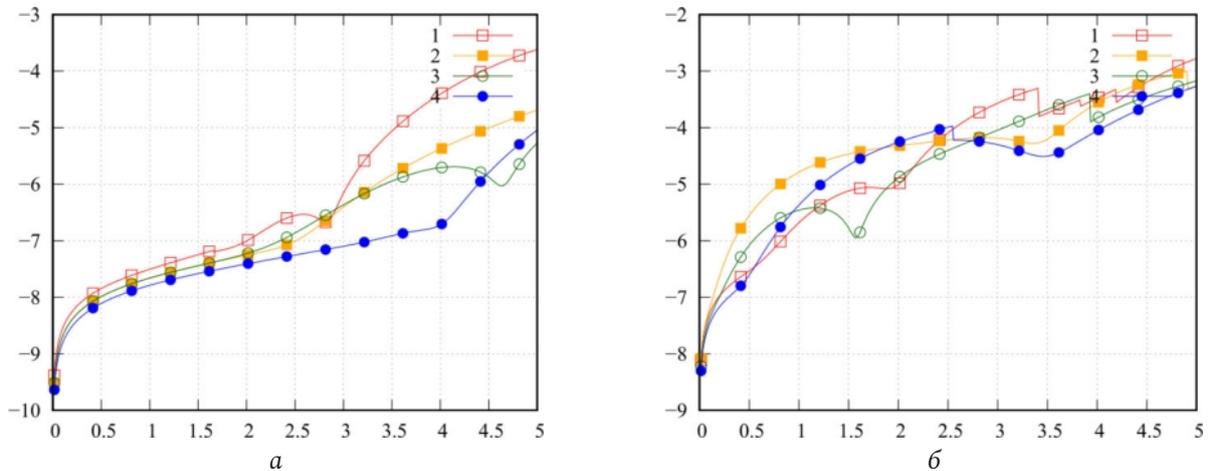
то есть вычисления необходимо проводить для матриц, расположенных в близких точках области  $\mathcal{S}$ , что обеспечивает высокую степень корреляции СВ. В случае удаленных точек СВ с одними и теми же индексами могут иметь низкую степень корреляции и сильно отличающуюся форму. Для коррекции номеров и знаков СВ необходимо вычислить корреляционную матрицу:

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{J}}^T(x_{f^*}, k_{r^*})\hat{\mathbf{J}}(x_f, k_r).$$

Далее осуществляется нормирование каждой строки  $\hat{\mathbf{K}}$  к элементу соответствующей строки, имеющему максимальное по модулю значение. После этой процедуры в каждой строке  $\hat{\mathbf{K}}$  будет содержаться один элемент  $k_{i,j}$ , имеющий значение 1 или  $-1$ , значения остальных элементов при условии (11) будут по модулю существенно меньше единицы. Столбцу с индексом  $i$  откорректированной матрицы  $\hat{\mathbf{J}}(x_f, k_r)$  будет соответствовать  $j$ -й столбец исходной матрицы  $\hat{\mathbf{J}}(x_f, k_r)$ , умноженный на скаляр  $k_{i,j}$  (корректировка знака). Позиция элемента  $k_{i,j}$  также используется для корректировки номеров СЗ вектора  $\mathbf{X}(x_f, k_r)$  (без корректировки знака): здесь  $i$  – позиция в скорректированном векторе СЗ;  $j$  – позиция в исходном векторе СЗ. После корректировки матрицу  $\hat{\mathbf{J}}(x_f, k_r)$  можно принять за образцовую ( $x_f \rightarrow x_{f^*}$ ;  $k_r \rightarrow k_{r^*}$ ) и повторить процедуру для матрицы  $\hat{\mathbf{J}}$ , вычисленной в новой точке области  $\mathcal{S}$ , удовлетворяющей условию (11).

В нашем случае в качестве образцовой была принята матрица  $\hat{\mathbf{J}}(x_1, k_1)$ . На первом этапе были скорректированы матрицы  $\hat{\mathbf{J}}(x_1, k_r)$  и векторы  $\mathbf{X}(x_1, k_r)$  для  $r = 2 \dots N_r$ . На втором этапе скорректированные матрицы использовались для коррекции матриц  $\hat{\mathbf{J}}(x_f, k_r)$  и векторов  $\mathbf{X}(x_f, k_r)$  для соответствующего индекса  $r$  ( $r = 2 \dots N_f$ ).

Численные расчеты преследовали две цели. Первая цель, имеющая преимущественно прикладное значение, связана с определением возможностей построения аппроксимационной модели решения внутренней задачи на основе МСФ.

Рис. 2. Зависимость  $\rho_r$  от  $\kappa_r^*$ ; а -  $\chi=0,01$ ; б -  $\chi=5$ , номер кривой соответствует номеру СЛАУFig. 2. Dependence  $\rho_r$  on  $\kappa_r^*$ ; а -  $\chi=0,01$ ; б -  $\chi=5$ , the number of the curve corresponds to the number of SLEРис. 3. Зависимость  $\rho_f$  от  $x_f^*$ ; а -  $\kappa=0,95$ ; б -  $\kappa=0,5$ , номер кривой соответствует номеру СЛАУFig. 3. dependence  $\rho_f$  on  $x_f^*$ ; а -  $\kappa=0,95$ ; б -  $\kappa=0,5$ , the number of the curve corresponds to the number of SLE

Для достижения указанной цели возникает необходимость решения ряда задач. Первая задача заключается в анализе степени корреляции СВ, вычисленных в различных точках области  $\mathcal{S}$ . Эта информация необходима для определения возможности построения аппроксимации матриц СВ в указанной области. Вторая задача связана с анализом форм СФ  $J_n(l)$ , определяющихся результатом интерполяции соответствующих столбцов матриц  $\hat{\mathbf{J}}$ , при этом в качестве узлов интерполяции выступают точки коллокации  $l_i^*$ ,  $i=1..N$ . По результатам данного анализа можно определить системы функций, наиболее подходящих для аппроксимации собственных функций в виде соответствующих рядов. Третья задача связана с анализом поведения СЗ в области  $\mathcal{S}$ . Данный анализ, как и в случае СВ, позволяет определить системы функций, наиболее подходящих для аппроксимации СЗ для различных точек  $\mathcal{S}$ .

Вторая цель имеет преимущественно теоретическое значение и связана с определением характера частотной зависимости СЗ. Ранее в [6; 7] для других структур уже было показано, что эта зависимость имеет резонансный характер, поэтому основной вклад в формирование решения внутренней задачи вносит лишь небольшая часть СФ. В данном случае нам необходимо подтверждение этого факта с некоторыми дополнительными деталями для рассматриваемой структуры. Для оценки невязки векторных либо матричных массивов  $\mathbf{V}$ , вычисленных в паре точек области  $\mathcal{S}$ , будем использовать общую формулу:

$$\text{res}(\mathbf{V}; x^*, \kappa^*; x, \kappa) = \lg \left( 2 \frac{|\mathbf{V}(x^*, \kappa^*) - \mathbf{V}(x, \kappa)|}{|\mathbf{V}(x^*, \kappa^*) + \mathbf{V}(x, \kappa)|} \right).$$

На рис. 2 приведены графики значений  $\rho_r = \text{res}(\hat{\mathbf{J}}; x, \kappa_{r+1}; x, \kappa_r)$  для случая  $\chi=0,01$  (а) и случая  $\chi=5$  (б). Вдоль оси абсцисс отложена величина

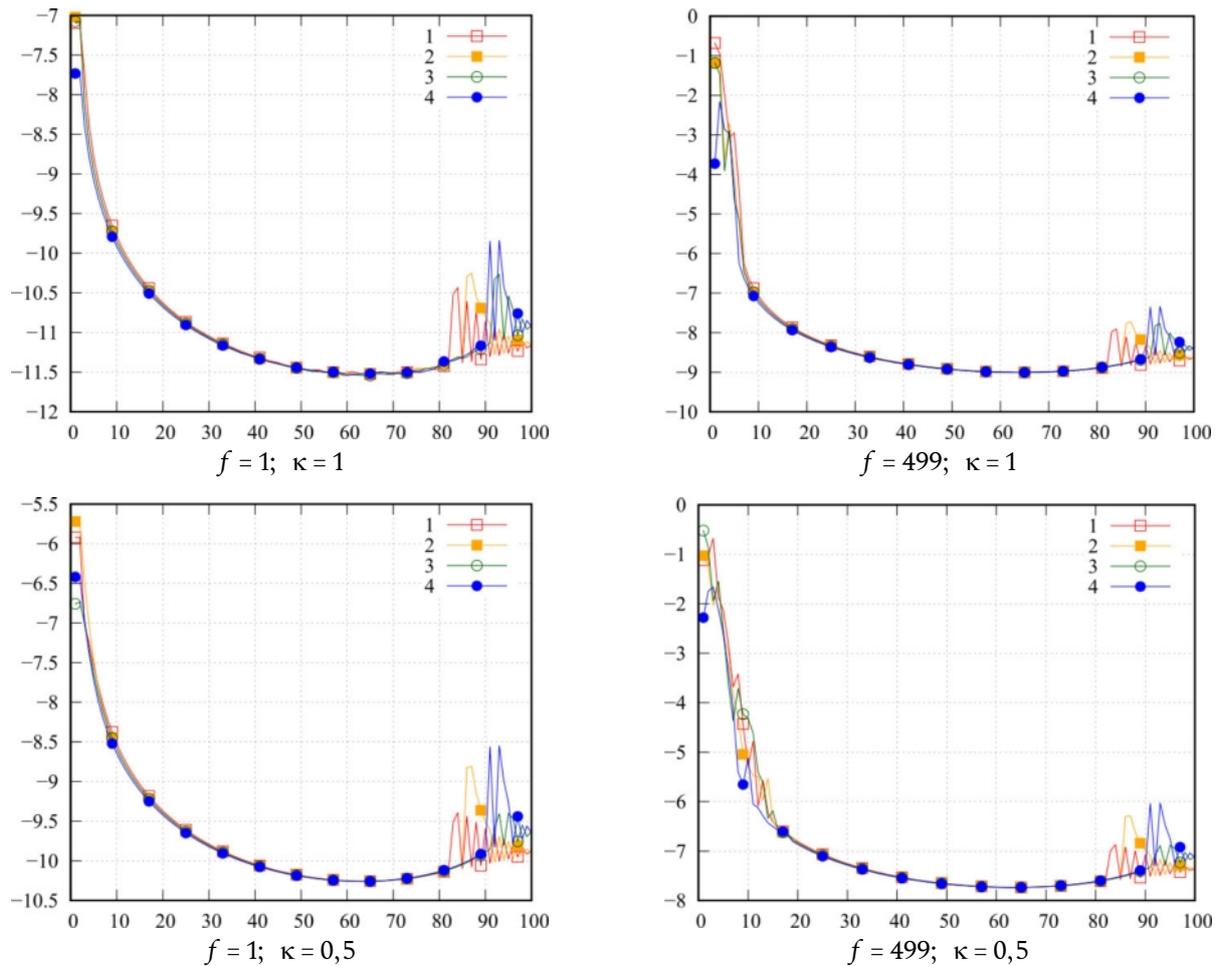


Рис. 4. Зависимость  $\rho_n$  от  $n$ , номер кривой соответствует номеру СЛАУ  
 Fig. 4. Dependence  $\rho_n$  on  $n$ , the number of the curve corresponds to the number of SLE

$\kappa_r^* = (\kappa_{r+1} + \kappa_r)/2$ . Видно, что значения невязки для разных  $t$  заметно отличаются, при этом невязка возрастает с уменьшением  $\kappa$  и с увеличением  $\chi$ , но в целом для довольно малого значения  $N_r$  результаты можно считать довольно хорошими. Уменьшить невязку можно путем уменьшения расстояния между узлами вблизи  $\kappa_{\min}$ . При  $\chi$ , находящихся вблизи  $\chi_{\max}$ , этого будет недостаточно. Здесь необходимо также увеличение  $N_r$ .

На рис. 3 приведены графики значений  $\rho_r = \text{res}(\hat{J}; x_{f+1}, \kappa; x_f, \kappa)$  для случая  $\kappa = 0,95$  (а) и случая  $\kappa = 0,5$  (б). Вдоль оси абсцисс отложена величина  $\chi_f^* = (x_{f+1} + x_f)/2$ . Здесь можно отметить, что значения невязки существенно меньше, чем в рассмотренном ранее случае, но при этом существенно выше и ее разброс: минимального значения она достигает при  $\chi = \chi_{\min}$ , максимального – при  $\chi = \chi_{\max}$ . Для уменьшения разброса невязки следует использовать неравномерное расположение узлов  $x_f$ , расстояние между которыми должно уменьшаться с ростом  $\chi$ . В целом следует сказать, что определение расположения опорных

точек при заданном значении невязки представляет собой самостоятельную и довольно интересную вычислительную задачу, имеющую важное прикладное значение.

На рис. 4 приведены графики значений  $\rho_n = \text{res}(J_n; x_{f+1}, \kappa; x_f, \kappa)$ , детализирующие невязку по  $\chi$  для различных номеров  $n$  СВ в угловых точках области  $\mathcal{S}$ . Вдоль оси абсцисс отложен номер СВ. Из представленных графиков видно, что наибольший вклад в ранее рассмотренные значения невязки вносят СВ с небольшими значениями номеров  $n$ , что является хорошим ориентиром при построении аппроксимаций СВ в области  $\mathcal{S}$ .

На рис. 5 приведены графики действительной и мнимой части первых четырех собственных функций, вычисленных при  $\chi = 5$ ,  $\kappa = 0,5$ . Видно, что они соответствуют условиям (8). Очевидно, что СФ могут быть достаточно просто аппроксимированы быстро сходящимися рядами тригонометрических функций. Также можно отметить, что в случае  $\kappa = 1$  функция  $J_1(l)$  имеет равномерное распределение, а при  $\kappa = 0,5$  равномерность на-

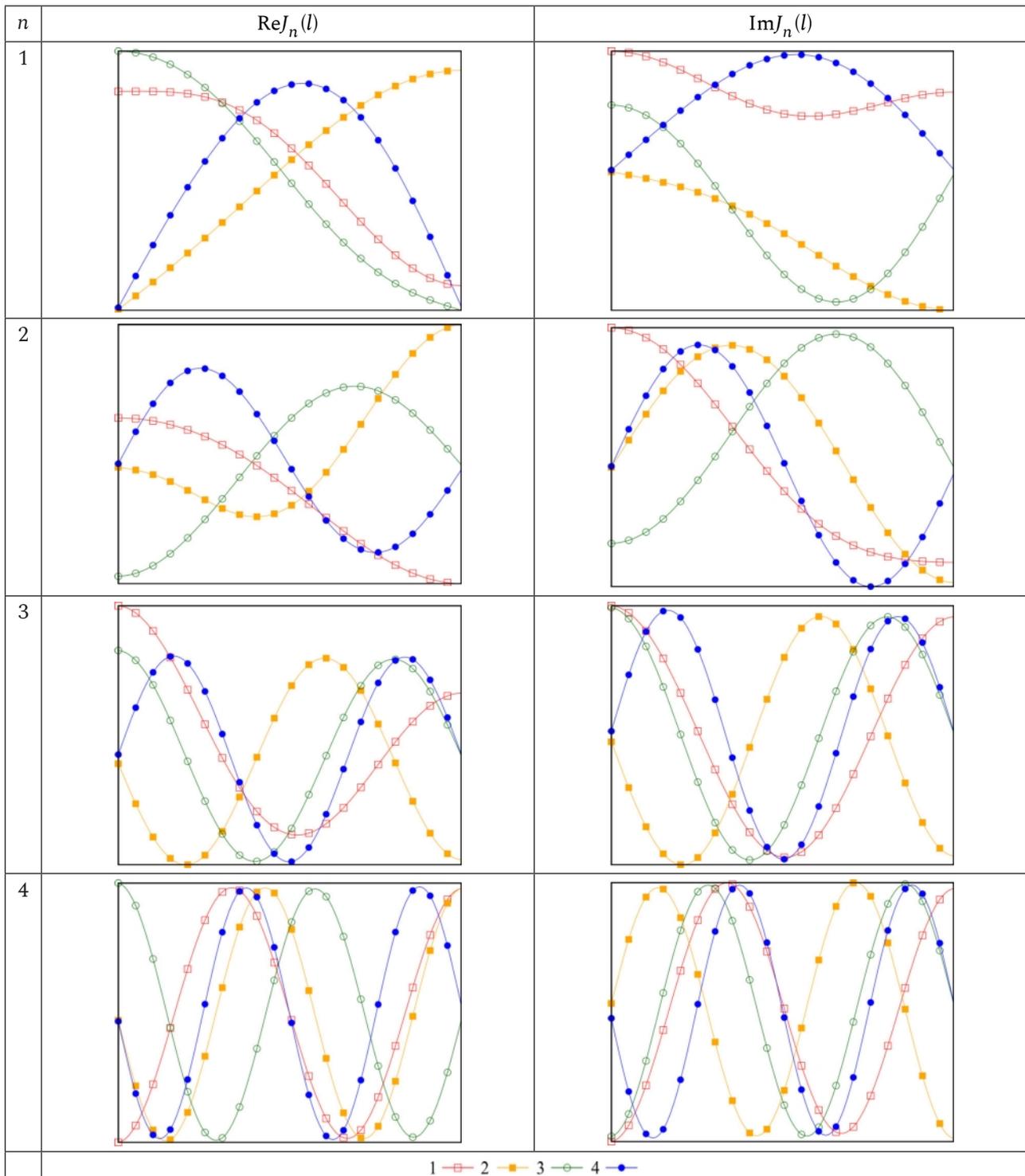


Рис. 5. Вид первых четырех собственных функций  $J_n(l)$ ;  $\chi = 5$ ,  $\kappa = 0,5$ , номер кривой соответствует номеру СЛАУ  
Fig. 5. View of the first four of its own functions  $J_n(l)$ ;  $\chi = 5$ ,  $\kappa = 0,5$ , the curve number corresponds to the number of SLE

рушается, а ее максимум смещается к точке, имеющей меньший радиус кривизны.

Соотношение интенсивностей действительной и мнимой части собственных функций позволяет оценить величина  $\zeta_n(x) = |\text{Im}J_n(x)| / |\text{Re}J_n(x)|$ , графики которой приведены на рис. 6. Во всех случаях наблюдается общая тенденция: при малых значе-

ниях  $x$  интенсивность мнимой части собственных функций мала, поэтому колебания точки СФ происходят практически синфазно. С ростом  $x$  интенсивность действительной и мнимой части становятся соизмеримыми, что ведет к нарушению синфазности колебаний. Также при больших значениях  $x$  есть точки, в которых интенсивность

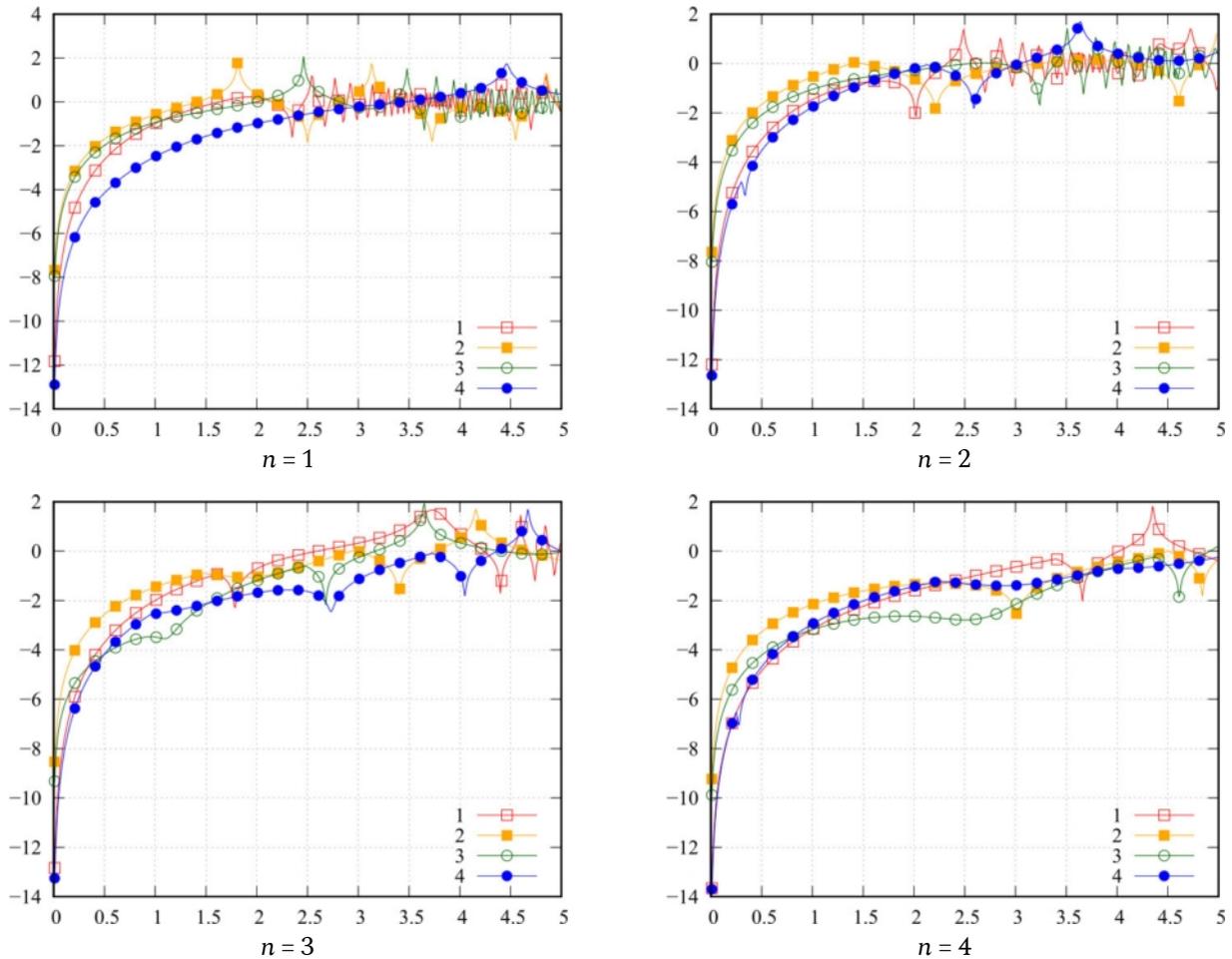


Рис. 6. Зависимость  $\zeta_n$  от  $x$ ;  $\kappa = 0,5$ , номер кривой соответствует номеру СЛАУ  
 Fig. 6. Dependence  $\zeta_n$  on  $x$ ;  $\kappa = 0,5$ , the number of the curve corresponds to the number of SLE

мнимой части СФ в десятки раз превышает интенсивность действительной части.

На рис. 7 приведены графики величин

$$v'_n(x) = \lg |\xi_n(x)|; \quad v''_n(x) = \arg \xi_n(x)$$

при  $\kappa = 0,5$ . Представленные графики подтверждают резонансный характер поведения собственных чисел, при этом точки резонансов можно определить из условия  $v''_n(x) = 0$ . Резонансы СЧ в случае  $m = 1, 4$  наблюдаются в окрестности четных значений  $x$ , при этом для разных  $m$  одним и тем же резонансам соответствуют СВ, индексы которых отличаются на единицу. Отдельно следует отметить нерезонансный максимум  $v'_1$  в окрестности  $x = 0$  для  $m = 1$ . Также здесь можно видеть, что добротность резонансов при  $m = 1$  немного выше, чем при  $m = 4$ , вследствие того, что  $\kappa < 1$ .

Важным моментом анализа оказался учет симметрии, так как в рассматриваемой структуре прослеживается эффект вырождения, заключающийся в совпадении резонансных точек для СЗ матриц различных СЛАУ. Этот эффект наблюда-

ется для  $m = 2, 3$ . При этом видно, что соответствующие резонансы при  $m = 3$  имеют большую добротность, так как  $\kappa < 1$ .

В целом можно сделать вывод, что исследуемая структура в плане поведения собственных значений и формы собственных функций во многом схожа с рассмотренными ранее трубчатым вибратором [7; 8] и сферической спиральной частицей [6], вследствие чего предлагаемые ранее подходы, касающиеся построения аппроксимационной модели решения внутренней электродинамической задачи, в полной мере применимы и к рассматриваемой структуре.

## Заключение

В статье рассмотрен вариант математической модели решения внутренней электродинамической задачи для эллиптической спиральной структуры, построенной с использованием тонкопроволочного приближения. Структура обладает двойной зеркальной симметрией, что позволяет сформировать математическую модель в виде че-

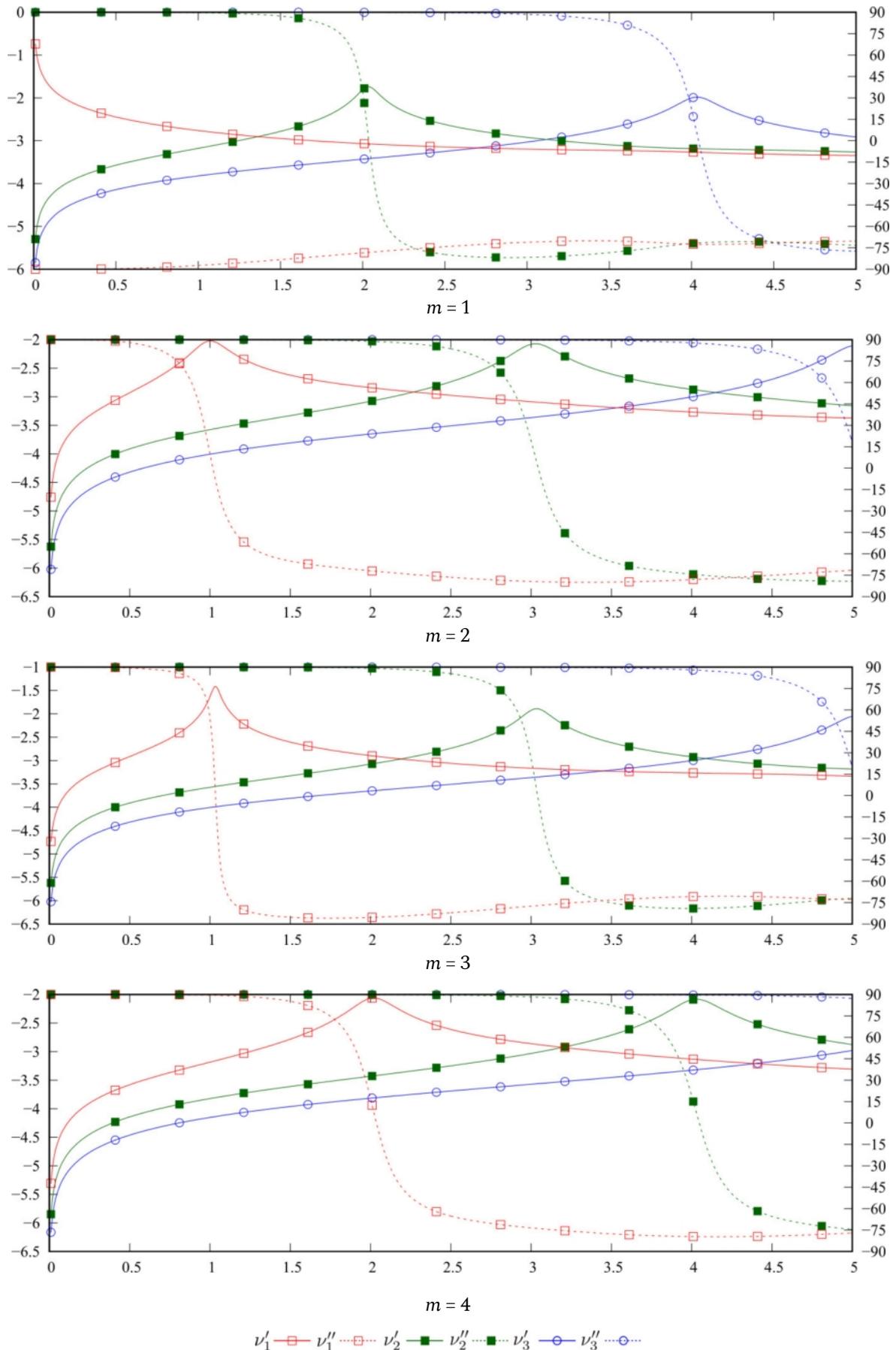


Рис. 7. Зависимости  $\nu'$  и  $\nu''$  от  $x$  при различных значениях  $m$ ;  $\kappa = 0,5$   
 Fig. 7. Dependencies  $\nu'$  and  $\nu''$  on  $x$  various values  $m$ ;  $\kappa = 0,5$

тырех независимых ИУ Фредгольма первого рода, записанных относительно соответствующих токовых функций, удовлетворяющих граничным условиям для электрической или магнитной стенки в точках пересечения образующей структуры с плоскостями симметрии. В рамках метода моментов полученные ИУ были сведены к СЛАУ относительно значений токовых функций на сегментах линеаризованной образующей. Решения СЛАУ сформулированы через собственные векторы и собственные значения матрицы СЛАУ. Собственные векторы СЛАУ аппроксимируют собственные функции интегрального оператора соответствующего ИУ. Для каждого ИУ проведен анализ поведения собственных функций и собственных значений интегрального оператора в зависимости от электрической длины образующей структуры и коэффициента эллиптичности при фиксированном электрически малом радиусе проводника.

Дана оценка невязки между собственными функциями, вычисленными при различных значениях указанных параметров. Показано, что невязка увеличивается с ростом электрической длины образующей структуры и с уменьшением коэффициента эллиптичности, но при выбранном шаге изменения параметров имеет довольно малые значения. Более детальный анализ позволил сделать вывод, что наиболее существенный вклад в значение невязки вносят собственные функции низших типов. Эти сведения формируют первичный ориентир при построении аппроксимационной модели решения внутренней задачи для рассматриваемой структуры.

Анализ форм собственных функций показал их близость к тригонометрическим функциям. Таким образом, они могут быть аппроксимированы соответствующими рядами, обладающими в данном случае быстрой сходимостью. В предельном случае при вырождении эллипса в окружность

каждая собственная функция может быть аналитически точно определена парой тригонометрических функций.

Анализ зависимостей собственных значений от электрической длины образующей подтвердил их резонансный характер. В результате рассмотренная структура с этой точки зрения во многом аналогична рассмотренным авторами ранее электрическому вибратору и сферической спиральной частице. То есть можно утверждать, что существенный вклад в решение внутренней задачи вносит довольно ограниченный набор собственных функций. Также здесь стоит отметить, что учет симметрии структуры существенно упрощает проведение численного анализа при возникновении эффекта вырождения, когда одному собственному значению может соответствовать более одной собственной функции, что наблюдается в данном случае при значениях коэффициента эллиптичности, стремящихся к единице. При меньших значениях коэффициента эллиптичности наблюдается только эффект вырождения резонансных частот.

По мнению авторов, представленные в статье результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Теоретическое значение связано с развитием методов электродинамического анализа рамочных излучающих и переизлучающих структур. Предложенный подход дает углубленное понимание поведения рассматриваемых структур с точки зрения электродинамики и существенно упрощает интерпретацию получаемых численных результатов по сравнению со случаем непосредственного решения интегральных уравнений и их систем. Прикладное значение связано с тем, что представленные результаты могут послужить хорошим ориентиром при построении аппроксимационных моделей решения внутренней задачи для рассматриваемой структуры, а также для структур со схожей геометрией.

### Список литературы

1. Wang T., Bell T. VLF/ELF input impedance of an arbitrarily oriented loop antenna in a cold collisionless multicomponent magnetoplasma // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1972. Vol. 20, no. 3. P. 394–398. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.1972.1140212>
2. Ohnuki S., Sawaya K., Adachi S. Impedance of a large circular loop antenna in a magnetoplasma // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1986. Vol. 34, no. 8. P. 1024–1029. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143927>
3. Андронов А.А., Чугунов Ю.В. Квазистационарные электрические поля источников в разреженной плазме // *УФН*. 1975. Т. 116, № 5. С. 79–113. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0116.197505c.0079>
4. Мареев Е.А., Чугунов Ю.В. Антенны в плазме. Нижний Новгород: ИПД АН СССР, 1991. 231 с.
5. Неганов В.А., Табаков Д.П., Задача о распределении поверхностной плотности тока по кольцевой полосковой антенне // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2007. Т. 10, № 4. С. 8–19.
6. Табаков Д.П. Об описании излучения и дифракции электромагнитных волн методом собственных функций // *Известия вузов. Радиофизика*. 2021. Т. 64, № 3. С. 179–191. URL: <https://radiophysics.unn.ru/issues/2021/3/179>

7. Табаков Д.П., Майоров А.Г. О собственных значениях интегрального оператора сингулярного интегрального уравнения тонкого трубчатого вибратора // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2019. Т. 22, № 1. С. 26–31. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.1.26-31>
8. Табаков Д.П., Майоров А.Г. Аппроксимация решения внутренней электродинамической задачи для тонкого трубчатого вибратора методом собственных функций // *Труды учебных заведений связи*. 2019. Т. 5, № 4. С. 36–42. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41664174>
9. Garbacz R.J. Modal expansions for resonance scattering phenomena // *Proceedings of the IEEE*. 1965. Vol. 53, no. 8. P. 856–864. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1965.4064>
10. Harrington R., Mautz J. Theory of characteristic modes for conducting bodies // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1971. Vol. 19, no. 5. P. 622–628. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.1971.1139999>
11. Harrington R., Mautz J. Computation of characteristic modes for conducting bodies // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1971. Vol. 19, no. 5. P. 629–639. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.1971.1139990>
12. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука; Физматлит, 1979. 832 с.
13. Интегральное представление электромагнитного поля геометрически киральной структуры / В.А. Капитонов [и др.] // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2012. Т. 15, № 4. С. 6–13.
14. Табаков Д.П. Тонкопроволочная модель фрактального симметричного вибратора на основе салфетки Серпинского // *Радиотехника*. 2015. № 2. С. 16–22.
15. Табаков Д.П., Морозов С.В., Ключев Д.С. Применение тонкопроволочного интегрального представления электромагнитного поля к решению задачи дифракции электромагнитных волн на проводящих телах // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2022. Т. 25, № 2. С. 7–14. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14>
16. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления / пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.
17. Стрижков В.А. Математическое моделирование электродинамических процессов в сложных антенных системах // *Математическое моделирование*. 1989. Т. 1, № 8. С. 127–138. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mm/v1/i8/p127>
18. Интерактивная система просмотра системных руководств (ман-ов) // OpenNET. URL: <https://www.opennet.ru/man.shtml?topic=zgeev&category=3&russian=4>
19. LAPACK // Википедия. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/LAPACK>
20. Ludick D.J., Jakobus U., Vogel M. A tracking algorithm for the eigenvectors calculated with characteristic mode analysis // *The 8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2014)*. 2014. P. 569–572. DOI: <https://doi.org/10.1109/EuCAP.2014.6901820>
21. Kalaba R., Spingarn K., Tesfatsion L. Individual tracking of an eigenvalue and eigenvector of a parameterized matrix // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1981. Vol. 5, no. 4. P. 337–340. DOI: [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(81\)90018-3](https://doi.org/10.1016/0362-546X(81)90018-3)

## References

1. Wang T., Bell T. VLF/ELF input impedance of an arbitrarily oriented loop antenna in a cold collisionless multicomponent magnetoplasma. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1972, vol. 20, no. 3, pp. 394–398. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.1972.1140212>
2. Ohnuki S., Sawaya K., Adachi S. Impedance of a large circular loop antenna in a magnetoplasma. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, vol. 34, no. 8, pp. 1024–1029. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143927>
3. Andronov A.A., Chugunov Yu.V. Quasi-stationary electric fields of sources in a rarefied plasma. *UFN*, 1975, vol. 116, no. 5, pp. 79–113. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.0116.197505c.0079> (In Russ.)
4. Mareev E.A., Chugunov Yu.V. *Plasma Antennas*. Nizhniy Novgorod: IPD AN SSSR, 1991, 231 p. (In Russ.)
5. Neganov V.A., Tabakov D.P. The problem of the distribution of the surface current density over a ring strip antenna. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2007, vol. 10, no. 4, pp. 8–19. (In Russ.)
6. Tabakov D.P. On the description of radiation and diffraction of electromagnetic waves by the method of eigenfunctions. *Izvestiya vuzov. Radiofizika*, 2021, vol. 64, no. 3, pp. 179–191. URL: <https://radiophysics.unn.ru/issues/2021/3/179> (In Russ.)
7. Tabakov D.P., Mayorov A.G. On the eigenvalues of the integral operator of the singular integral equation of a thin tubular vibrator. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 26–31. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.1.26-31> (In Russ.)
8. Tabakov D.P., Mayorov A.G. Approximation of the solution of an internal electrodynamic problem for a thin tubular vibrator by the method of eigenfunctions. *Trudy uchebnykh zavedeniy svyazi*, 2019, vol. 5, no. 4, pp. 36–42. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41664174> (In Russ.)
9. Garbacz R.J. Modal expansions for resonance scattering phenomena. *Proceedings of the IEEE*, 1965, vol. 53, no. 8, pp. 856–864. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1965.4064>
10. Harrington R., Mautz J. Theory of characteristic modes for conducting bodies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1971, vol. 19, no. 5, pp. 622–628. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.1971.1139999>
11. Harrington R., Mautz J. Computation of characteristic modes for conducting bodies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1971, vol. 19, no. 5, pp. 629–639. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.1971.1139990>
12. *Special Functions Reference*. Ed. by M. Abramovitsa, I. Stigana. Moscow: Nauka; Fizmatlit, 1979, 832 p. (In Russ.)
13. Kapitonov V.A. et al. Integral representation of the electromagnetic field of a geometrically chiral structure. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2012, vol. 15, no. 4, pp. 6–13. (In Russ.)
14. Tabakov D.P. Thin-wire model of a fractal symmetric vibrator based on Sierpinski's napkin. *Radiotekhnika*, 2015, no. 2, pp. 16–22. (In Russ.)
15. Tabakov D.P., Morozov S.V., Klyuev D.S. Application of the thin-wire integral representation of the electromagnetic field to the solution of the problem of diffraction of electromagnetic waves by conducting bodies. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2022, vol. 25, no. 2, pp. 7–14. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14> (In Russ.)

16. Golub Dzh., Loun Ch. *Matrix Calculations*. Trans. from English. Moscow: Mir, 1999, 548 p. (In Russ.)
17. Strizhkov V.A. Mathematical modeling of electrodynamic processes in complex antenna systems. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1989, vol. 1, no. 8, pp. 127–138. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mm/v1/i8/p127> (In Russ.)
18. Интерактивная система просмотра системных руководств (man-ов) // OpenNET. URL: <https://www.opennet.ru/man.shtml?topic=zgeev&category=3&russian=4>
19. LAPACK // Wikipedia. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/LAPACK> (In Russ.)
20. Ludick D.J., Jakobus U., Vogel M. A tracking algorithm for the eigenvectors calculated with characteristic mode analysis. *The 8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2014)*, 2014, pp. 569–572. DOI: <https://doi.org/10.1109/EuCAP.2014.6901820>
21. Kalaba R., Spingarn K., Tesfatsion L. Individual tracking of an eigenvalue and eigenvector of a parameterized matrix. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1981, vol. 5, no. 4, pp. 337–340. DOI: [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(81\)90018-3](https://doi.org/10.1016/0362-546X(81)90018-3)

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2023, vol. 26, no. 1, pp. 58–69

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.58-69

Received 27 January 2023  
Accepted 27 February 2023

### Spectral characteristics of the integral operator of the internal problem of electrodynamics for elliptical frame structure

*Dmitry P. Tabakov, Andrey G. Mayorov*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – The article is devoted to the analysis of electrodynamic properties elliptical frame structure. Taking into account double symmetry internal problem of electrodynamics for the structure under consideration in the framework of the thin-wire approximation is reduced to four integral Fredholm equations of the first kind, written with respect to independent current functions. A study of spectral characteristics of the integral operators of the corresponding integral equations for various values of the electrical length and ellipticity of the frame. It is shown that the eigenfunctions of integral operators for close values of these parameters have a high degree of correlation, with In this case, the eigenfunctions are close in form to trigonometric functions. Features of the frequency dependence of the eigenvalues integral operators. The conclusion is made about the resonant nature of these dependences, what makes an elliptical frame structure in many respects similar to the previously considered tubular vibrator and spherical spiral particle. The results presented in the article form an in-depth understanding of the processes occurring in the structure under consideration, and also serve as a guideline in the construction of approximation models for solving the internal tasks.

*Keywords* – elliptical loop structure; loop antenna; integral representation of the electromagnetic field; current distribution; integral equation; eigenfunctions; eigenvalues.

---

### Информация об авторах

**Табакوف Дмитрий Петрович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика, устройства СВЧ и антенны, оптика, численные методы математического моделирования.

*E-mail:* illuminator84@yandex.ru

**Майоров Андрей Геннадьевич**, инженер кафедры радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика, устройства СВЧ и антенны, численные методы математического моделирования.

*E-mail:* andrey.mayorov.92@yandex.ru

### Information about the Authors

**Dmitry P. Tabakov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Physics, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics, microwave devices and antennas, optics, numerical methods of mathematical modeling.

*E-mail:* illuminator84@yandex.ru

**Andrey G. Mayorov**, engineer of the Department of Radioelectronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics, microwave devices and antennas, numerical methods of mathematical modeling.

*E-mail:* andrey.mayorov.92@yandex.ru

## Акустическая томография повышенного разрешения на основе обратного распространения волн

Д.Я. Суханов , А.Е. Кузорова

Национальный исследовательский Томский государственный университет  
634050, Россия, г. Томск,  
пр. Ленина, 36

**Аннотация** – Предлагается метод акустической томографии рассеивающих неоднородностей повышенного разрешения на основе метода обратной временной миграции. Рассматривается неоднородная фоновая среда с известным распределением преломляющих неоднородностей, где необходимо обнаружить рассеивающие неоднородности. Зондирование осуществляется широкополосными сигналами произвольной формы. Метод обратной временной миграции дополнен линейной фильтрацией поля прямого распространения, позволяющей повысить разрешение восстанавливаемых изображений. Представлены результаты численного моделирования и эксперимента. Зондирование осуществлялось в воде на частотах от 20 до 350 кГц сигналом с линейной частотной модуляцией. Источник ультразвукового сигнала располагался неподвижно и облучал исследуемые объекты в воде. Рассеянный сигнал измерялся в плоскости у поверхности в воде на прямоугольной области с шагом менее 2 мм. Обработка сигналов предложенным методом позволила восстановить трехмерное изображение рассеивающих неоднородностей с разрешением порядка 7 мм. Сравнение предложенного метода и метода обратной временной миграции, показало, что предложенный метод позволяет получить более высокое разрешение.

**Ключевые слова** – волновое уравнение; акустическая томография; численное моделирование; метод конечных разностей; обратная временная миграция.

### Введение

Акустическая томография используется в медицине для диагностики и визуализации биологических органов [1–2], в неразрушающем контроле для обнаружения дефектов различных сплавов и структур [3–5], при изучении океана [6–7]. Методы акустической томографии также широко применяются в дефектоскопии при решении обратных задач – по измеренному сигналу, рассеянному неоднородностью, для определения ее формы и характеристик [8–11]. Обратные задачи не всегда имеют однозначное решение и крайне чувствительны к шумам измерений и несоответствиям математической модели и условий зондирования.

Метод обратного распространения волн в настоящее время все чаще используется при решении задач мониторинга неоднородных сред и в активной локации [12–13]. Этот метод позволяет учитывать фоновые неоднородности среды для визуализации источника. Также этот метод в литературе носит название The Time Reversal technique (TR). Метод TR можно использовать для обнаружения рассеивателей. Для достаточно малых рассеивателей можно использовать тот факт, что рассеиватели ведут себя как вторичные источники. В статье [14] в контексте неразрушающего контроля конструкций обсуждается вычислительное

использование TR для визуализации точечных рассеивателей на основе обратного распространения поля из области измерений. Поскольку анализ зависит от времени, необходимо применять критерии остановки, чтобы остановить обратное моделирование, когда волны оптимально сфокусированы в месте расположения рассеивателя. Рассмотрены два критерия остановки, оба взяты из области обработки изображений: один основан на энтропии Шеннона, а другой – на норме ограниченной вариации. К аналогичному выводу пришли авторы работы [15], имеющие дело только с точечными рассеивателями, а предложенные ими алгоритмы остановки вообще не способны идентифицировать рассеиватели конечных размеров. В работе [16] авторы показали, что визуализация TR успешна только для эффективных точечных источников (или рассеивателей, которые являются вторичными источниками). Чтобы идентифицировать и охарактеризовать более крупные рассеиватели, в сочетании с TR используются дополнительные вычислительные инструменты.

Большинство методов томографии обратного рассеяния не учитывают фоновые препятствия и неоднородности среды [17–18]. Методы, учитывающие неоднородность среды, работают для частных случаев, например для плоскостойких сред [19]. Для произвольных препятствий могут при-

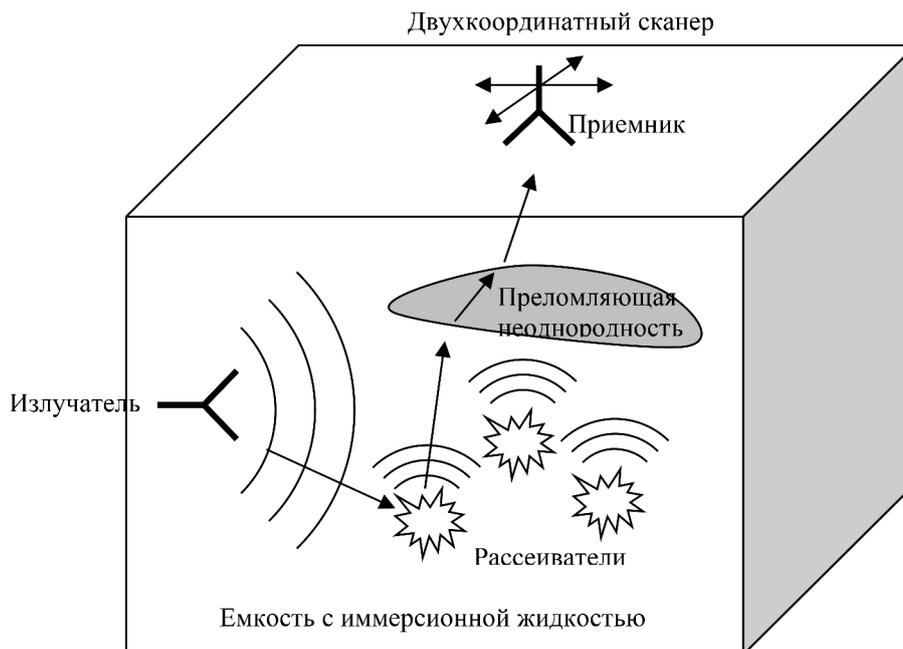


Рис. 1. Схема измерений  
Fig. 1. Scheme of measurements

меняться приближенные методы расчета фазовых сдвигов волнового поля в неоднородных средах [20].

Наиболее перспективно развитие метода обратной временной миграции (Reverse Time Migration, RTM) [21–22]. Этот метод широко используется в сейсмологии и позволяет учитывать заранее известные фоновые преломляющие препятствия. Существующие методы RTM основаны на использовании короткоимпульсного зондирования при условии высокой локализации зондирующей волны в пространстве.

В данной работе предлагается развитие метода RTM для исследования сигналов произвольной широкополосной формы. Этот метод позволяет получать более высокое разрешение восстановленных изображений по сравнению с классическим методом RTM. Путем численного моделирования и экспериментальных исследований с зондированием сигналами с линейной частотной модуляцией показана возможность получения изображений высокого разрешения.

## 1. Схема измерений

Предлагается рассмотреть следующую схему измерений (рис. 1). Исследуемый объект погружается в емкость с водой на определенную глубину. На боковой стенке емкости с водой размещен ультразвуковой излучатель, который облучает исследуемый объект ультразвуковыми волнами. Волновое поле, рассеянное на объекте, регистрируется при-

емником в воде, размещенным на двухкоординатном сканере, перемещающемся над объектом контроля. Будем считать, что зондирующий сигнал является широкополосным. Сигнал может быть короткоимпульсным, шумоподобным, или любой другой формы, но иметь широкую полосу частот.

## 2. Метод решения обратной задачи

Задача состоит в том, чтобы визуализировать рассеивающий объект в среде по измеренному полю, прошедшему через фоновые преломляющие неоднородности. Предлагается применить метод обратной временной миграции (Reverse Time Migration – RTM), включающий обратное распространение волн (метод обратного времени) в сочетании с дополнительной фильтрацией поля прямой волны от излучателя. Для зондирования короткими импульсами метод RTM предполагает, что произведение акустического давления поля волны обратного распространения на поле прямой волны позволит визуализировать рассеиватели в среде. Для случая произвольного зондирующего сигнала предлагается включить в алгоритм RTM дополнительную фильтрацию во временной области.

Рассмотрим известное решение для поля дифракции на экране с отверстием в приближении Кирхгофа. В частотной области для дальней зоны поле за отверстием приближенно можно записать в виде

$$\tilde{P}(\mathbf{r}) = \int \int_{x_m y_m} \tilde{U}(x_m, y_m, \omega) \times \quad (1)$$

$$\times \frac{z}{2\pi r^2} ik_0 \exp(ik_0 r) dx_m dy_m,$$

где  $r = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + z^2}$ ;  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  – точка наблюдения дифракционного поля;  $(x_m, y_m)$  – эквивалентный точечный источник в плоскости  $z = 0$ .

По формуле (1) можно восстановить дифракционное поле за экраном с отверстием, если измерить поле в отверстии  $\tilde{U}(x_m, y_m, \omega)$ . В методе RTM необходимо изменить фронт волны на экране (зоне измерения), обратив время в обратную сторону. Рассмотрим обратное распространение поля от отверстия в экране (зона измерения) для восстановления поля источников в среде на основе формулы (1). Для этого предлагается инвертировать время, что эквивалентно замене мнимой единицы в (1) с  $+i$  на  $-i$ . В результате после перехода во временную область получаем поле обратных волн:

$$P(\mathbf{r}, t) = \int \int_{-\infty x_m y_m} \int \tilde{U}(x_m, y_m, \omega) \frac{z}{2\pi r^2} (-ik_0) \times \quad (2)$$

$$\times \exp(-ik_0 r) dx_m dy_m e^{-i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{z}{2\pi} \int \int_{x_m y_m} \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial}{\partial t} U\left(x_m, y_m, \frac{r}{c} + t\right) dx_m dy_m.$$

Предлагается метод RTM высокого разрешения на основе дополнительной фильтрации поля прямого распространения. Для случая произвольного зондирующего сигнала  $S(t)$  линейную фильтрацию можно осуществлять следующим образом:

$$B(\mathbf{r}) = \int_{t=0}^T P(\mathbf{r}, t) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cdot W\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}\right) dt, \quad (3)$$

где умножение на  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  вводится для компенсации убывания поля зондирующего излучателя;  $W(t)$  – импульсная реакция линейного фильтра, вычисляемая на основе обратной свертки с регуляризацией из зондирующего сигнала:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}^*(\omega)}{\tilde{S}(\omega)\tilde{S}^*(\omega) + \alpha} \exp(i\omega t) d\omega, \quad (4)$$

где  $\tilde{S}(\omega)$  – спектр зондирующего сигнала;  $\tilde{S}^*(\omega)$  – комплексно сопряженное значение  $\tilde{S}(\omega)$ ;  $\alpha$  – параметр регуляризации, значение которого подбирается для каждого типа зондирующих сигналов и определенного уровня шума. Желательно выбирать  $\alpha > 0$  в зависимости от дисперсии шума

$\alpha = \sigma^2 / \Delta\omega$ , где  $\sigma^2$  – дисперсия шума в измеряемом сигнале,  $\Delta\omega$  – ширина полосы частот. Если  $\sigma^2 = 0$ , то в любом случае  $\alpha$  следует выбирать больше 0, чтобы избежать деления на 0 в (4).

Функция  $B(\mathbf{r})$  является решением обратной задачи в приближении однократного рассеяния. По сути, (3) и (4) реализуют обратную свертку с регуляризацией сигнала и обеспечивают преобразование зондирующего сигнала в эквивалентный короткий дельта-подобный импульс. Классическая реализация RTM по существу выполняет согласованную фильтрацию сигнала, которая максимизирует уровень интенсивности восстановленного изображения, но не обеспечивает наилучшего разрешения. В предлагаемом методе спектр зондирующего сигнала выравнивается по всем частотам, что позволяет значительно повысить разрешающую способность восстанавливаемого изображения. Таким образом, предлагаемый метод дает возможность повысить разрешающую способность по сравнению с классическим методом RTM.

### 3. Решение обратной задачи в неоднородной фоновой среде

Наличие фоновых преломляющих неоднородностей в среде приводит к искажению волнового поля, рассеянного объектами. Предполагается, что форма и свойства препятствий известны, но неизвестны рассеивающие объекты, скрытые за препятствиями. Скорость распространения волн в препятствиях отличается от скорости фоновой среды, что приводит к преломлению волн и изменению времени прихода рассеянных импульсов. Необходимо учитывать влияние преломляющих неоднородностей на задержку распространения волны для восстановления корректных изображений рассеивающих объектов.

Рассмотрим метод численного моделирования акустических процессов (решение прямой задачи), основанный на волновом уравнении для жидкой неоднородной среды:

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = S, \quad (5)$$

где  $p(x, y, z, t)$  – давление в среде;  $c(x, y, z)$  – пространственное распределение скорости звука в среде;  $S(x, y, z, t)$  – функция, описывающая источники. Численное решение этого уравнения осуществляется методом конечных разностей во временной области.

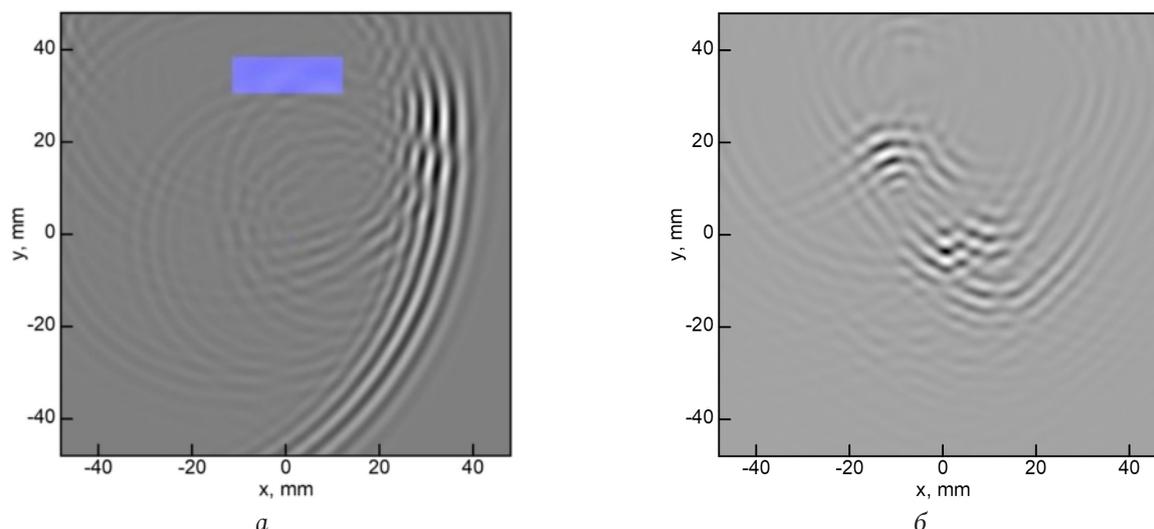


Рис. 2. Численное моделирование зондирования объектов через прямоугольную неоднородность (*a* – прямое распространение волны от источника и рассеянное на исследуемых объектах; *b* – обратное распространение поля от рассеивателей)  
Fig. 2. Numerical modeling of object probing through a rectangular inhomogeneity (*a* – direct wave propagation from the source and scattered on the objects under study; *b* – back propagation of the field from scatterers)

Предлагается восстанавливать волновое поле в среде (для решения обратной задачи) методом обратного распространения волн (техникой обращения времени). Этот метод инвариантен относительно замены времени,  $t$  на  $-t$ , что позволяет сфокусировать волновое поле в окрестности локализованного источника колебаний, «переизлучая» принятые сигналы в обратном направлении. Согласно методу обратного распространения волн, в численной модели в области измерения задается множество источников, каждый из которых излучает сигнал, принятый в данной точке, но в обратном направлении. При распространении волн от таких источников они складываются в фазе в тех точках среды, где в определенный момент времени находятся рассеиватели. В области расположения источника сигнала волна обратного распространения сходится, что позволяет визуализировать изотопный источник в среде. Для проверки возможности восстановления поля обратного распространения было проведено численное моделирование. В качестве фоновой среды исследовалась вода (скорость звука 1440 м/с, плотность 1000 кг/м<sup>3</sup>). В качестве рассеивающих объектов рассматривались 4 точечных источника расположенных на разном расстоянии и высоте друг от друга (скорость звука 5500 м/с, плотность 4000 кг/м<sup>3</sup>). На верхней границе расчетной области располагались приемники, которые регистрировали дошедший до них сигнал. Рассеивающие объекты зондировались сферическим волновым пучком. Источник волнового пучка располагался сбоку и излучал волну в виде короткого импульса. При численном моделировании пространствен-

ный шаг составлял 0,25 мм, шаг по времени – 10 нс. В градациях серого на рис. 2, *a* показано смоделированное акустическое давление волны прямого распространения в момент времени после того, как произошло рассеяние. Прямоугольником обозначено препятствие плотностью 500 кг/м<sup>3</sup> и скоростью звука 2880 м/с. Препятствие было введено для демонстрации возможности учета его влияния предлагаемым методом. На рис. 2, *b* показано поле обратных волн с учетом прямоугольного препятствия в момент прохождения волнами места расположения рассеивателей.

Трудность возникает при выборе момента времени, когда максимум поля обратного распространения будет точно сходиться в точке, где находятся рассеивающие объекты. Выбор этого момента времени связан с задержкой распространения прямого сигнала от зондирующего излучателя. Для восстановления томографического изображения рассеивающих объектов предлагается учитывать преобразованное по формуле (4) поле прямой волны от зондирующего излучателя. Первоначально считаем, что среда не содержит рассеивателей, и моделируем в ней распространение волны от источника. Далее проводится моделирование обратного распространения волн от приемников с обращением времени. Поле от обратной волны умножается на модифицированную прямую волну и интегрируется по времени, как в (3), для получения изображения рассеивателей. В области расположения рассеивателей прямая и обратная волны перекрываются, что при их наложении (путем умножения) позволяет визуализировать рассеивающий объект. На рис. 3, *a* показано восста-

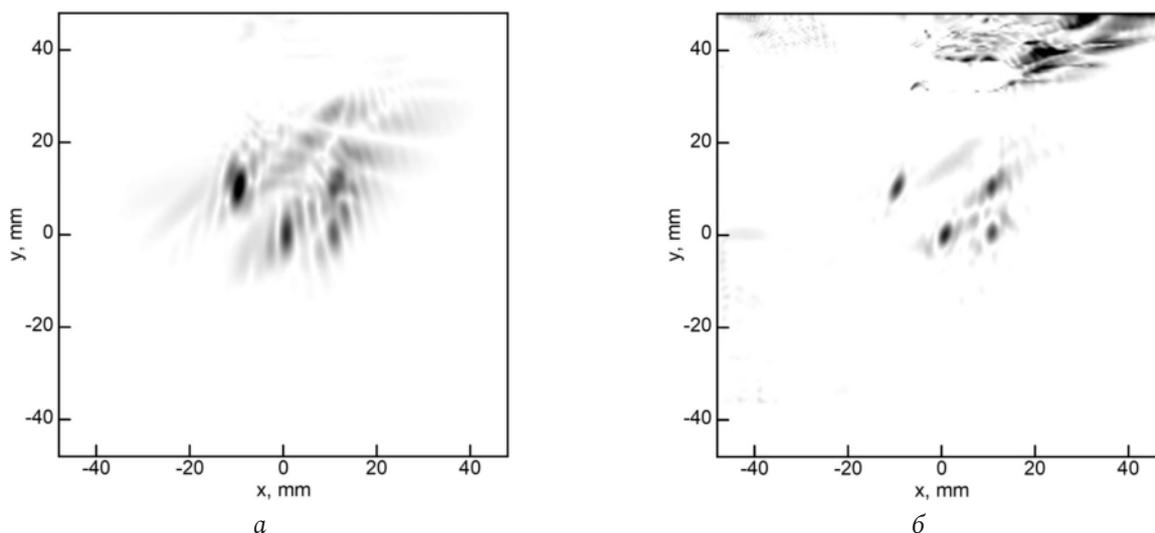
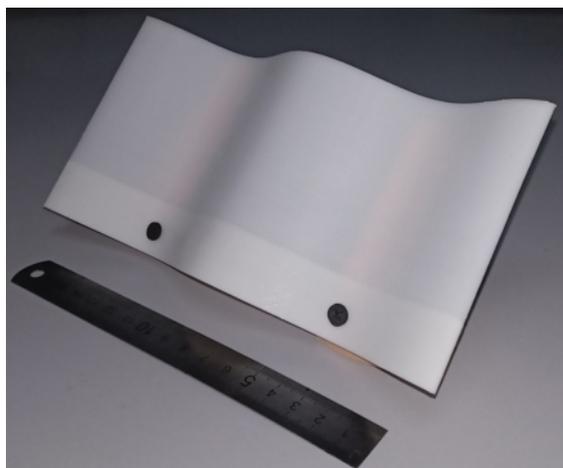
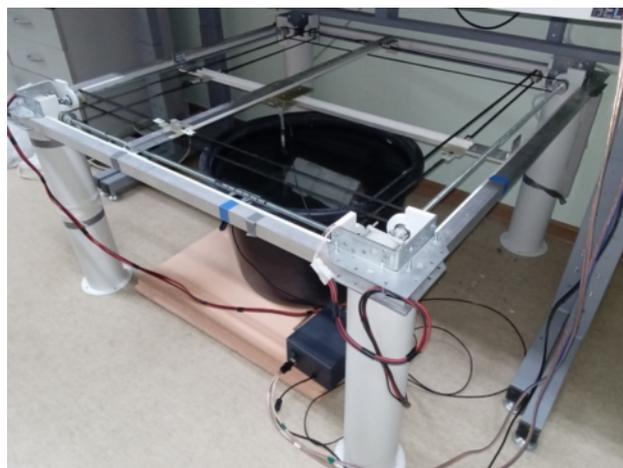


Рис. 3. Восстановленное томографическое изображение рассеивающих объектов (а – результат, полученный методом RTM; б – результат, полученный предложенным методом высокого разрешения)  
Fig. 3. Reconstructed tomographic image of scattering objects (a – result obtained by the RTM method; b – result obtained by the proposed high-resolution method)



а



б

Рис. 4. Фотография тестового объекта (а) и экспериментальной установки (б)  
Fig. 4. Photograph of the test object (a) and experimental setup (b)

новленное изображение рассеивающего объекта в виде точечных объектов по результатам численного моделирования методом RTM. На рис. 3, б отражен результат восстановления изображения предложенным методом высокого разрешения.

Видно, что рассеивающие объекты визуализируются как методом RTM, так и предложенным методом высокого разрешения. Однако визуализированное изображение рассеивающих объектов предлагаемым методом имеет более высокое разрешение (рис. 3, б).

#### 4. Экспериментальная проверка метода

Для экспериментальной проверки предложенного метода восстановления томографического изображения рассеивающего объекта в воде была

собрана экспериментальная установка, состоящая из двухкоординатного сканера с установленным на нем ультразвуковым приемным датчиком. В емкость с водой помещались излучатель ультразвуковых сигналов с центральной частотой 200 кГц и рассеивающий объект в виде изогнутой синусоидальной поверхности из PLA пластика. Ультразвуковой приемник погружался в воду и перемещался по плоскости сканирования посредством сканера. В каждой точке пространственного сканирования с шагом 1,875 мм сигнал в приемном датчике измерялся в течение 10 мс. Сканирование осуществлялось сигналами с линейной частотной модуляцией в диапазоне частот от 20 до 350 кГц. Фотография исследуемого объекта представле-

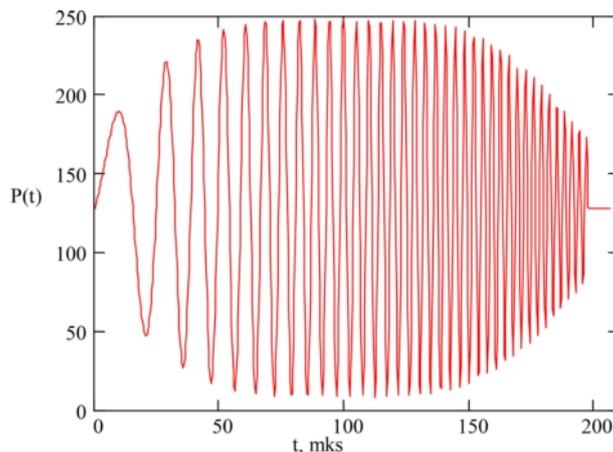


Рис. 5. Форма зондирующего сигнала (широкополосный сигнал в диапазоне частот от 20–350 кГц)  
Fig. 5. Probing signal shape (broadband signal in the frequency range from 20–350 kHz)

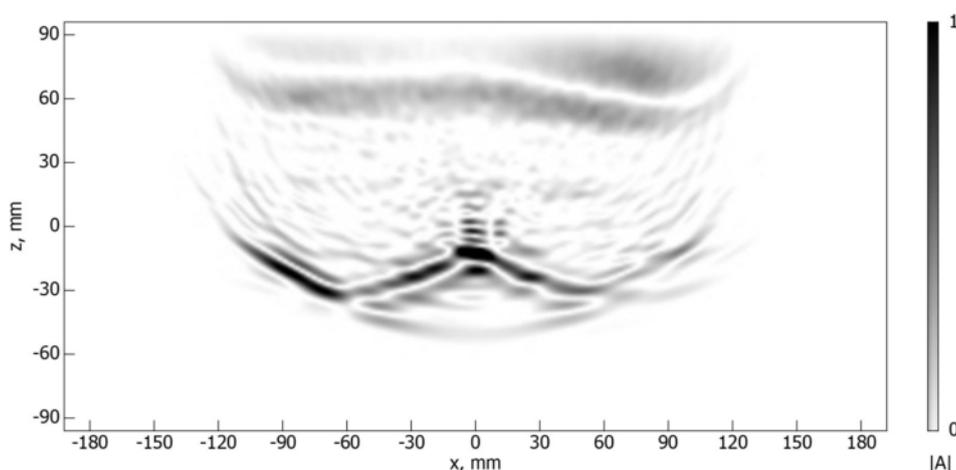


Рис. 6. Восстановленное томографическое изображение рассеивающего объекта в виде криволинейной синусоидальной поверхности  
Fig. 6. Reconstructed tomographic image of a scattering object in the form of a curvilinear sinusoidal surface

на на рис. 4, а, а фотография экспериментальной установки – на рис. 4, б.

В качестве источника ультразвуковых сигналов в воду был помещен пьезокерамический излучатель диаметром 10 мм. Форма зондирующего сигнала показана на рис. 5.

Приемник, перемещаясь в области  $240 \times 240$  мм, регистрировал рассеянное от исследуемого объекта поле. Измеренные данные вносились в разработанную численную модель. При комбинировании решения с положительным и отрицательным ходом времени (3) было восстановлено томографическое изображение рассеивающей неоднородности. На рис. 6 показан результат восстановления томографического изображения рассеивающего объекта по экспериментальным данным.

На изображении визуализируется криволинейная синусоидальная поверхность. Искажение изображения вызвано неточным согласованием

зондирующего сигнала с математически смоделированным. Тем не менее экспериментальные результаты подтверждают принципиальную применимость предложенного метода.

### Заключение

Предложен метод акустической томографии высокого разрешения на основе обратной временной миграции, дополненной специальной предварительной фильтрацией сигнала поля прямого распространения. Метод учитывает влияние фоновых преломляющих неоднородностей среды. Поскольку рассматривается зондирование среды широкополосными сигналами, возможно получение трехмерных изображений рассеивающих объектов. Преимуществом предлагаемого метода является повышение разрешающей способности относительно метода RTM. Проведены экспериментальные исследования по визуализации

объекта, помещенного в воду, показавшие применимость предлагаемого метода. Зондирование проводилось в диапазоне частот от 20 до 350 кГц. Предложенный метод улучшает разрешение томо-

графических изображений и позволяет учитывать влияние препятствий.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 20-32-90074.*

### Список литературы

- Recent advances in optical coherence tomography for the diagnoses of lung disorders / R. Hou [et al.] // *Expert Review of Respiratory Medicine*. 2011. Vol. 5, no. 5. P. 711–724. DOI: <https://doi.org/10.1586/ers.11.59>
- Detection of noncalcified and mixed plaque by multirow detector computed tomography / G. Foster [et al.] // *Expert Review of Cardiovascular Therapy*. 2009. Vol. 7, no. 1. P. 57–64. DOI: <https://doi.org/10.1586/14779072.7.1.57>
- Яцышен В.В., Слюсарев М.В. Ультразвуковая диагностика дефектов зоны сплавления в слоистых композиционных материалах // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2011. Т. 14, № 4. С. 103–105.
- Maev R.G., Green R.E., Siddiolo A.M. Review of advanced acoustical imaging techniques for nondestructive evaluation of art objects // *Research in Nondestructive Evaluation*. 2006. Vol. 17, no. 4. P. 191–204. DOI: <https://doi.org/10.1080/09349840600981088>
- Methodology of nondestructive identification of defective concrete zones in unilaterally accessible massive members / T. Gorzelańczyk [et al.] // *Journal of Civil Engineering and Management*. 2013. Vol. 19, no. 6. P. 775–786. DOI: <https://doi.org/10.3846/13923730.2013.812577>
- Passive ocean acoustic tomography in shallow water / F. Li [et al.] // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2019. Vol. 145, no. 5. P. 2823–2830. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.5099350>
- Andreeva T., Durgin W. Experimental investigation of the travel-time variance of an acoustic wave propagating through the grid-generated turbulence // *Waves in Random and Complex Media*. 2005. Vol. 15, no. 3. P. 365–374. DOI: <https://doi.org/10.1080/17455030500284170>
- Kozlov V.N., Samokrutov A. A., Shevaldykin V.G. Thickness measurements and flaw detection in concrete using ultrasonic echo method // *Nondestructive Testing and Evaluation*. 1997. Vol. 13, no. 2. P. 73–84. DOI: <https://doi.org/10.1080/02780899708953020>
- Костин М.С. Моделирование системы радиолокационной виброметрии // *Т-Comm – Телекоммуникации и транспорт*. 2013. № 3. С. 97–101.
- Виноградов В.Ю., Анфиногентов В.И. Восстановление параметров акустических полей, измеренных волоконной многосенсорной системой, на срезе сопла турбомшины // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2019. Т. 22, № 4-2. С. 145–150. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.4.145-150>
- Антипенский Р.В., Любавский А.П., Разиньков С.Н. Применение вейвлет-преобразований для анализа рассеяния сверхширокополосных сигналов объектами сложной формы // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2018. Т. 21, № 2. С. 39–43. URL: <https://journals.ssau.ru/pwpp/article/view/7034>
- Зверев В.А. Принцип распространения акустических волн и голография // *Акустический журнал*. 2004. Т. 50, № 6. С. 792–801. URL: [http://www.akzh.ru/pdf/2004\\_6\\_792-801.pdf](http://www.akzh.ru/pdf/2004_6_792-801.pdf)
- Артельный П.В., Коротин П.И. Фокусировка колебательного поля в упругих системах конечных размеров методом обращения времени // *Акустический журнал*. 2010. Т. 56, № 1. С. 3–9. URL: [http://www.akzh.ru/pdf/2010\\_1\\_3-9.pdf](http://www.akzh.ru/pdf/2010_1_3-9.pdf)
- Derveaux G., Papanicolaou G., Tsogka C. Time reversal imaging for sensor networks with optimal compensation in time // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2007. Vol. 121, no. 4. P. 2071–2085. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.2536888>
- Time-reversal refocusing for point source in randomly layered media / J.-P. Fouque [et al.] // *Wave Motion*. 2005. Vol. 42, no. 3. P. 238–260. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2005.03.001>
- Exploring the potentials and limitations of the time-reversal imaging of finite seismic sources / S. Kremers [et al.] // *Solid Earth*. 2011. Vol. 2, no. 1. P. 95–105. DOI: <https://doi.org/10.5194/se-2-95-2011>
- Stolt R.H. Migration by Fourier transform // *Geophysics*. 1978. Vol. 43, no. 1. P. 23–48. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.1440826>
- Andrade P.N., Pestana R.C., Revelo D.E. Reverse time migration in the frequency domain by the rapid expansion method // *Revista Brasileira de Geofísica*. 2017. Vol. 35, no. 4. P. 287–306. DOI: <https://doi.org/10.22564/rbgf.v35i4.916>
- Суханов Д.Я., Завьялова К.В. Сверхширокополосная трехмерная радиоголография в стратифицированной среде // *Техническая физика*. 2014. Т. 59, № 12. С. 1854–1858.
- Суханов Д.Я., Завьялова К.В. 3D-радиотомография объектов, скрытых за диэлектрически неоднородными экранами // *Техническая физика*. 2015. Т. 60, № 10. С. 1529–1534.
- Baysal E., Kosloff D.D., Sherwood J.W.C. Reverse time migration // *Geophysics*. 1983. Vol. 48, no. 11. P. 1421–1560. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.1441434>
- Depth imaging enhancement using reverse time migration / S.Y. Moussavi Alashloo [et al.] // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2017. Vol. 88, no. 1. P. 012017. DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/88/1/012017>

### References

- Hou R. et al. Recent advances in optical coherence tomography for the diagnoses of lung disorders. *Expert Review of Respiratory Medicine*, 2011, vol. 5, no. 5, pp. 711–724. DOI: <https://doi.org/10.1586/ers.11.59>
- Foster G. et al. Detection of noncalcified and mixed plaque by multirow detector computed tomography. *Expert Review of Cardiovascular Therapy*, 2009, vol. 7, no. 1, pp. 57–64. DOI: <https://doi.org/10.1586/14779072.7.1.57>

3. Yatsyshen V.V., Slyusarev M.V. Ultrasonic diagnostics of fusion zone defects in laminated composite materials. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2011, vol. 14, no. 4, pp. 103–105. (In Russ.)
4. Maev R.G., Green R.E., Siddiolo A.M. Review of advanced acoustical imaging techniques for nondestructive evaluation of art objects. *Research in Nondestructive Evaluation*, 2006, vol. 17, no. 4, pp. 191–204. DOI: <https://doi.org/10.1080/09349840600981088>
5. Gorzelańczyk T. et al. Methodology of nondestructive identification of defective concrete zones in unilaterally accessible massive members. *Journal of Civil Engineering and Management*, 2013, vol. 19, no. 6, pp. 775–786. DOI: <https://doi.org/10.3846/13923730.2013.812577>
6. Li F. et al. Passive ocean acoustic tomography in shallow water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2019, vol. 145, no. 5, pp. 2823–2830. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.5099350>
7. Andreeva T., Durgin W. Experimental investigation of the travel-time variance of an acoustic wave propagating through the grid-generated turbulence. *Waves in Random and Complex Media*, 2005, vol. 15, no. 3, pp. 365–374. DOI: <https://doi.org/10.1080/17455030500284170>
8. Kozlov V.N., Samokrutov A., Shevaldykin V.G. Thickness measurements and flaw detection in concrete using ultrasonic echo method. *Nondestructive Testing and Evaluation*, 1997, vol. 13, no. 2, pp. 73–84. DOI: <https://doi.org/10.1080/02780899708953020>
9. Kostin M.S. Simulation of a radar vibrometry system. *T-Comm – Telekommunikatsii i transport*, 2013, no. 3, pp. 97–101. (In Russ.)
10. Vinogradov V.Yu., Anfingentov V.I. Reconstruction of the parameters of acoustic fields measured by a fiber multisensor system at the exit of a turbomachine nozzle. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2019, vol. 22, no. 4-2, pp. 145–150. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.4.145-150> (In Russ.)
11. Antipenskiy R.V., Lyubavskiy A.P., Razin'kov S.N. Application of wavelet transforms to analyze the scattering of ultrawideband signals by objects of complex shape. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2018, vol. 21, no. 2, pp. 39–43. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7034> (In Russ.)
12. Zverev V.A. Principle of propagation of acoustic waves and holography. *Akusticheskiy zhurnal*, 2004, vol. 50, no. 6, pp. 792–801. URL: [http://www.akzh.ru/pdf/2004\\_6\\_792-801.pdf](http://www.akzh.ru/pdf/2004_6_792-801.pdf) (In Russ.)
13. Artel'nyy P.V., Korotin P.I. Focusing of an oscillatory field in elastic systems of finite dimensions by the time reversal method. *Akusticheskiy zhurnal*, 2010, vol. 56, no. 1, pp. 3–9. URL: [http://www.akzh.ru/pdf/2010\\_1\\_3-9.pdf](http://www.akzh.ru/pdf/2010_1_3-9.pdf) (In Russ.)
14. Derveaux G., Papanicolaou G., Tsogka C. Time reversal imaging for sensor networks with optimal compensation in time. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, vol. 121, no. 4, pp. 2071–2085. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.2536888>
15. Fouque J.-P. et al. Time-reversal refocusing for point source in randomly layered media. *Wave Motion*, 2005, vol. 42, no. 3, pp. 238–260. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2005.03.001>
16. Kremers S. et al. Exploring the potentials and limitations of the time-reversal imaging of finite seismic sources. *Solid Earth*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 95–105. DOI: <https://doi.org/10.5194/se-2-95-2011>
17. Stolt R.H. Migration by Fourier transform. *Geophysics*, 1978, vol. 43, no. 1, pp. 23–48. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.1440826>
18. Andrade P.N., Pestana R.C., Revelo D.E. Reverse time migration in the frequency domain by the rapid expansion method. *Revista Brasileira de Geofísica*, 2017, vol. 35, no. 4, pp. 287–306. DOI: <https://doi.org/10.22564/rbgf.v35i4.916>
19. Sukhanov D.Ya., Zav'yalova K.V. Ultra-wideband three-dimensional radioholography in a stratified environment. *Tekhnicheskaya fizika*, 2014, vol. 59, no. 12, pp. 1854–1858. (In Russ.)
20. Sukhanov D.Ya., Zav'yalova K.V. 3D radio tomography of objects hidden behind dielectrically inhomogeneous screens. *Tekhnicheskaya fizika*, 2015, vol. 60, no. 10, pp. 1529–1534. (In Russ.)
21. Baysal E., Kosloff D.D., Sherwood J.W.C. Reverse time migration. *Geophysics*, 1983, vol. 48, no. 11, pp. 1421–1560. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.1441434>
22. Moussavi Alashloo S.Y. et al. Depth imaging enhancement using reverse time migration. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2017, vol. 88, no. 1, p. 012017. DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/88/1/012017>

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2023, vol. 26, no. 1, pp. 70–78

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.70-78

Received 24 November 2022  
Accepted 26 December 2022

### High resolution acoustic tomography based on backpropagation of waves

Dmitry Ya. Sukhanov , Anzhela E. Kuzovova

National Research Tomsk State University  
36, Lenin Ave.,  
Tomsk, 634050, Russia

*Abstract* – A method of high-resolution acoustic tomography of scattering inhomogeneities based on the method of reverse time migration is proposed. An inhomogeneous background medium with a known distribution of refractive inhomogeneities is

considered, where it is necessary to detect scattering inhomogeneities. Probing is carried out by broadband arbitrary waveforms. The method of reverse time migration is supplemented with linear filtering of the direct propagation field, which makes it possible to increase the resolution of reconstructed images. The results of numerical modeling and experiment are presented. Sounding was carried out in water at frequencies from 20 to 350 kHz using a signal with linear frequency modulation. The source of the ultrasonic signal was fixed and irradiated the objects under study in the water. The scattered signal was measured in a plane near the surface in water on a rectangular area with a step of less than 2 mm. Signal processing by the proposed method made it possible to reconstruct a three-dimensional image of scattering inhomogeneities with a resolution of about 7 mm. Comparison of the proposed method and the reverse time migration method showed that the proposed method allows obtaining a higher resolution.

*Keywords* – wave equations; acoustic tomography; numerical simulation; finite difference time methods; reverse time migration.

## Информация об авторах

**Суханов Дмитрий Яковлевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики Национального исследовательского Томского государственного университета, г. Томск, Россия.

*Область научных интересов:* волновая томография, акустика, цифровая обработка сигналов.

*E-mail:* sdy@mail.tsu.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-0805-4543>

**Кузובה Анжела Евгеньевна**, аспирант кафедры радиофизики Национального исследовательского Томского государственного университета, г. Томск, Россия.

*Область научных интересов:* акустическая томография, акустика, восстановление изображений.

*E-mail:* ang\_kuz93@mail.ru

## Information about the Authors

**Dmitry Ya. Sukhanov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Radiophysics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia.

*Research interests:* wave tomography, acoustics, digital signal processing.

*E-mail:* sdy@mail.tsu.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-0805-4543>

**Anzhela E. Kuzovova**, postgraduate student of the Department of Radiophysics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia.

*Research interests:* acoustic tomography, acoustics, image restoration.

*E-mail:* ang\_kuz93@mail.ru

## РЕКЛАМА

**Неганов, В.А.**

**Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов / В.А. Неганов, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова.** – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.



ISBN 5-256-01812-4

УДК 621.396.67

ББК 32.840

Н 41

В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенюаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧ-устройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей, переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

*Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.*

## Исследование кирального метаматериала СВЧ-диапазона на основе равномерной совокупности С-образных проводящих элементов

И.Ю. Бучнев, Д.С. Кушнир, О.В. Осипов, М.А. Фролова

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – В работе рассмотрен искусственный киральный метаматериал, созданный на основе однородного контейнера из вспененного диэлектрика, в котором равномерно размещены и произвольно ориентированы плоские проводящие микроэлементы S-образной формы. Для описания исследуемого метаматериала построена частная математическая модель, учитывающая киральность, дисперсию и гетерогенность структуры. Для учета гетерогенности использовалась модель Максвелла Гарнетта. Для учета дисперсии параметра киральности была использована модель Кондона, известная из теории оптически активных сред. Методом частичных областей была решена задача о падении плоской электромагнитной волны линейной поляризации на планарный слой, созданный на основе исследуемого кирального метаматериала. Решение задачи было сведено к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов отражения и прохождения с учетом кросс-поляризации электромагнитного поля. Анализ численных результатов показал, что структура обладает ярко выраженными частотно селективными свойствами, в частности, как и в случае кирального метаматериала на основе трехмерных проводящих элементов, были определены дискретные частоты, на которых структура концентрирует падающее СВЧ-излучение внутри себя, в то время как на других частотах она является прозрачной для СВЧ-излучения. Киральный метаматериал на основе С-образных микроэлементов может быть использован для создания узкополосных частотно селективных концентраторов СВЧ-энергии планарного типа.

*Ключевые слова* – киральная среда; киральный метаматериал; метаматериал; метаструктура; С-элемент; пространственная дисперсия; частотная селективность; модель Максвелла Гарнетта; модель Кондона; СВЧ-энергия.

### Введение

Интерес к метаматериалам с каждым годом все более возрастает, что связано в первую очередь с получением все новых свойств взаимодействия электромагнитного поля с искусственным веществом. Известно большое количество научных публикаций по электродинамике метаматериалов [1–5], в которых рассмотрены различные структуры и их электромагнитные свойства. Любой метаматериал состоит из электромагнитных резонансных частиц (включений), которые размещаются различным образом в веществе другого типа (среды-контейнера). Включения образуют некоторую двух- или трехмерную матрицу, которая изменяет значения диэлектрической и (или) магнитной проницаемости метаматериала в целом. В результате появляется возможность на этапе разработки метаматериала для получения заданных электромагнитных свойств широкого варьирования геометрических и материальных параметров включений и среды-контейнера. В научных работах большое внимание уделяется разработке метаматериалов для получения свойств отрицательного преломления (среды Веселаго) [6–8]; частотно селективной

«невидимости» объектов, покрытых метаматериалом [9]; частотно селективной концентрации энергии СВЧ [10–12]; преобразованию поляризации и т. п. В настоящее время синтезированы метаматериалы в диапазоне от 1 до 100 ГГц. Применение метаматериалов в СВЧ-технике также весьма разнообразно: СВЧ-фильтры, фазовращатели, поляризацияльные устройства, ответвители, линии передачи и т. п. [13–15]. Значительное число работ посвящено исследованию метаматериалов в антенной технике, в т. ч. в ММО-устройствах [16–18].

Особым типом метаматериалов являются киральные среды [19–23], особенность которых заключается в том, что используемые в них проводящие композиты обладают зеркально асимметричной формой. Примерами киральных (зеркально асимметричных) включений являются элементы Телледжена, тонкопроволочные трехмерные и плоские спирали, S-элементы, гаммадионы, многозаходные спиральные элементы, одиночные и двойные разомкнутые кольца и т. п. В таких структурах нормальными волнами являются волны с право- и левокруговыми поляризациями, обладающими различными фазовыми скоростями. Другим свойством киральных метаматериалом стала

кросс-поляризация отраженного и прошедшего полей.

Для описания электромагнитных свойств киральных метаматериалов и учета свойств киральности вводится третий материальный параметр, называемый параметром киральности, который имеет смысл некоторого коэффициента связи между электрическими и магнитными процессами в искусственной среде. Это связано с тем, что любой зеркально асимметричный элемент в силу его своеобразной формы представляется неразрывной композицией элементарного электрического (тонкопроволочный и полосковый проводник с током) и магнитного (разомкнутый виток с током) диполей.

В связи с вышесказанным для описания КММ в большинстве случаев применяются материальные уравнения следующего вида (формализм Линделла – Сиволы) [19]:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \mp i\chi \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \pm i\chi \vec{E}, \quad (1)$$

где  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  – комплексные амплитуды векторов напряженностей и индукций электрического и магнитного полей;  $i$  – мнимая единица. В соотношениях (1) верхние знаки соответствуют КММ на основе зеркально асимметричных компонентов с правой закруткой (правых форм компонентов), а нижние знаки – КММ на основе зеркально асимметричных компонентов с левой закруткой (левых форм компонентов). Соотношения (1) записаны в Гауссовой системе единиц. Уравнения (1) – в предположении гармонической зависимости векторов электромагнитного поля от времени.

Заметим, что для описания взаимодействия электромагнитного поля с киральной средой наряду с относительной диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями вводится безразмерный параметр киральности  $\chi$ . Для реальных случаев все функции являются частотно зависимыми, то есть  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ ;  $\mu = \mu(\omega)$ ;  $\chi = \chi(\omega)$ .

В работах [12; 24] показана возможность использования киральных метаматериалов на основе тонкопроволочных проводящих одиночных и многозаходных спиралей для частотно-селективной концентрации СВЧ-энергии. В [10; 11] аналогичные эффекты были теоретически предсказаны для планарного слоя киральной среды на основе составных тонкопроволочных спиральных элементов и гаммадионов. Некоторые математические модели КММ описаны в [32–34].

В данной работе предлагается вариант построения математической модели кирального метаматериала на основе С-элементов, которые размещены в объемном контейнере из вспененного

диэлектрика. При построении математической модели исследуемого КММ будут учтены основные свойства материала – киральность, дисперсия материальных параметров и гетерогенность. В качестве примера использования построенной математической модели рассмотрено решение задачи об отражении плоской электромагнитной модели линейной поляризации от планарного слоя КММ на основе проводящих С-образных включений, равномерно размещенных и произвольно ориентированных в диэлектрическом контейнере.

## 1. Разработка частной математической модели КММ

Используемые в настоящее время математические модели КММ в большинстве случаев являются недостаточно общими, так как не учитывают всех основных свойств метаматериалов. В частности, известно достаточно мало публикаций, в которых учитывается гетерогенность метаматериала в целом. Здесь речь идет о том, что в большинстве случаев метаматериал описывается некоторой частотно-зависимой эффективной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(\omega)$ .

Рассмотрим обобщенную структуру произвольного метаматериала, показанную на рис. 1. КММ состоит из диэлектрического контейнера (А) с относительными проницаемостями  $\epsilon_c$ ,  $\mu_c$ , в котором размещены киральные металлические включения (Б). Области, в которых расположены зеркально асимметричные элементы, обладают относительными проницаемостями  $\epsilon_s$ ,  $\mu_s$ . Линейные размеры областей –  $d$ , расстояние между соседними элементами –  $l$ .

Очевидно, что эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости КММ в общем случае будут зависеть от соответствующих параметров контейнера и областей, в которых размещены проводящие зеркально асимметричные микроэлементы, то есть  $\epsilon = \epsilon(\epsilon_c, \epsilon_s)$ ;  $\mu = \mu(\mu_c, \mu_s)$ . В дальнейшем в работе в качестве среды-контейнера будет использоваться вспененный диэлектрик, у которого  $\mu = 1$ .

Для описания гетерогенных свойств в физике используется достаточно много различных моделей (модель Максвелла Гарнетта, модель Бруггемана, модель Одоевского и т. п.) [25–27]. В данной работе рассмотрим модель Максвелла Гарнетта, которая приводит к следующему соотношению для эффективной диэлектрической проницаемости КММ:

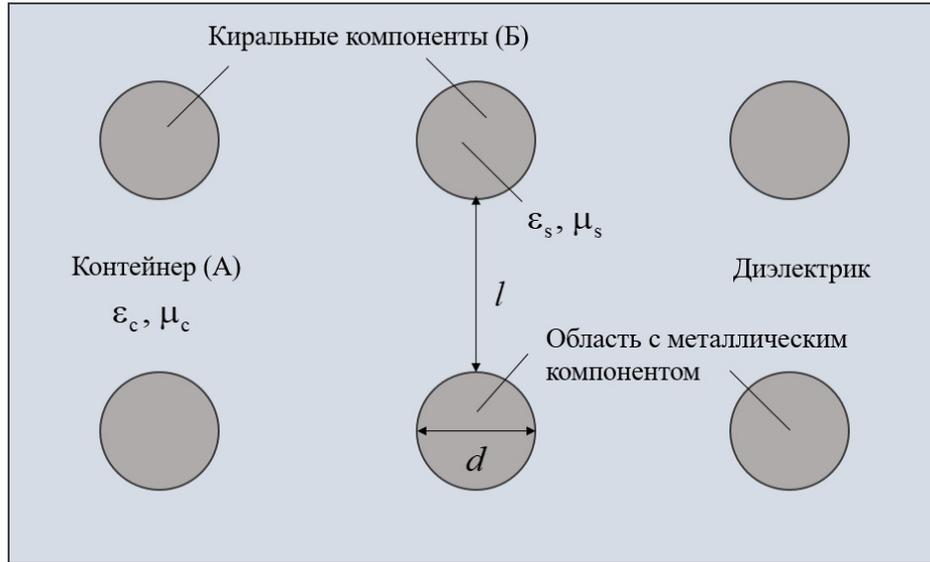


Рис. 1. Обобщенная структура произвольного КММ  
 Fig. 1. Generalized structure of an arbitrary CMM

$$\varepsilon = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_x}{1 - \alpha\varepsilon_x}; \quad \varepsilon_x = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_c}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – относительная эффективная диэлектрическая проницаемость КММ;  $\varepsilon_c$  – относительная диэлектрическая проницаемость контейнера А;  $\varepsilon_s$  – относительная диэлектрическая проницаемость областей, занятых киральными включениями (Б);  $\alpha$  – их объемная концентрация.

Как показали исследования других авторов [28], использование моделей Максвелла Гарнетта и Бруггемана эквивалентно при малых концентрациях включений.

Для учета дисперсии диэлектрической проницаемости областей Б воспользуемся моделью Друде – Лоренца:

$$\varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty)\omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i\delta_e\omega - \omega^2}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_\infty$  – асимптотическое значение диэлектрической проницаемости при  $\omega \rightarrow \infty$ ;  $\delta_e$  – коэффициент демпфирования;  $\omega_p^2$  – резонансная частота поглощения;  $\omega_0^2$  – резонансная частота микроэлемента, которая затем вычисляется для конкретного кирального микроэлемента в квазистационарном приближении.

Для описания частотной зависимости параметра киральности в работе используется модель Кондона, которая изначально нашла применение в теории оптически активных сред [29; 30]:

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_0^2\beta_0\omega}{\omega_0^2 + 2i\delta_x\omega_0\omega - \omega^2}, \quad (4)$$

где  $\beta_0$  – постоянная, имеющая обратную времени размерность и описывающая степень зеркальной асимметрии микроэлемента;  $\delta_x$  – коэффициент демпфирования параметра киральности.

Подставляя соотношение (3) в формулу (2), находим выражение для частотно зависимой эффективной диэлектрической проницаемости в модели Максвелла Гарнетта:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_x(\omega)}{1 - \alpha\varepsilon_x(\omega)}; \quad (5)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty)\omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i\delta_e\omega - \omega^2} - \varepsilon_c}{\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty)\omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i\delta_e\omega - \omega^2} + 2\varepsilon_c}.$$

При записи (5) учтено, что относительная диэлектрическая проницаемость среды-контейнера является частотно-независимой.

Таким образом, обобщенная математическая модель кирального метаматериала в рассматриваемом формализме с учетом (1), (5) и (6) имеет следующий вид:

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E} \mp i\chi(\omega)\vec{H}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \pm i\chi(\omega)\vec{E}; \quad (6)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_x(\omega)}{1 - \alpha\varepsilon_x(\omega)}; \quad \chi(\omega) = \frac{\omega_0^2\beta_0\omega}{\omega_0^2 + 2i\delta_x\omega_0\omega - \omega^2};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_s(\omega) - \varepsilon_c}{\varepsilon_s(\omega) + 2\varepsilon_c}; \quad \varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty)\omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i\delta_e\omega - \omega^2}.$$

Математическая модель (6) справедлива для случая, когда все киральные микроэлементы име-

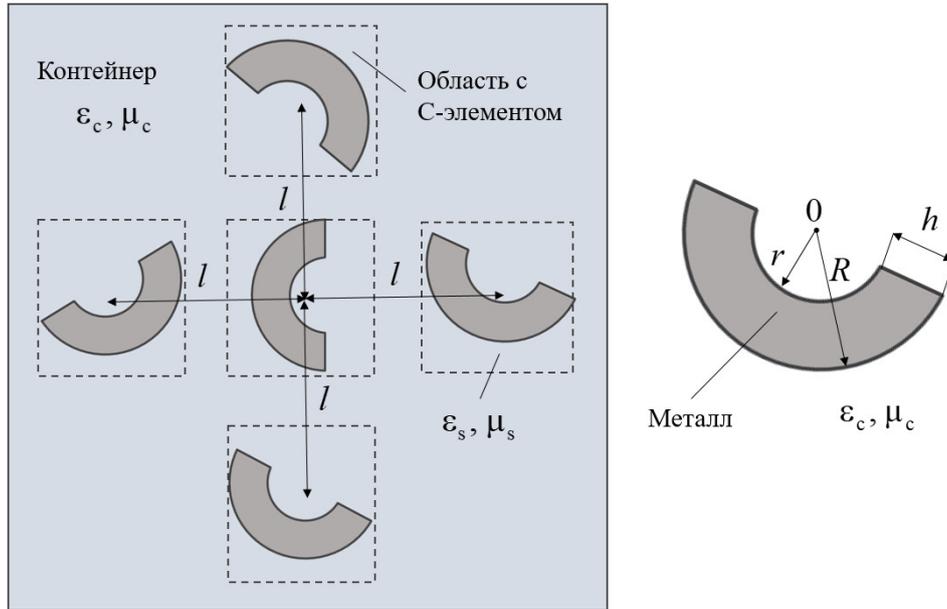


Рис. 2. Структура ячейки КММ на основе С-образного элемента  
Fig. 2. Structure of a CMM cell based on a C-shaped element

ют тождественную форму и линейные размеры; расположены эквидистантно и хаотически ориентированы; магнитная проницаемость КММ является частотно-независимой.

На базе соотношений (6) строится частная математическая модель для КММ на основе конкретного типа зеркально асимметричного элемента.

Рассмотрим расчет резонансной частоты С-образного элемента в квазистационарном приближении.

Структура ячейки КММ на основе С-образного элемента показана на рис. 2. С-элемент описывается внешним радиусом  $R$  и внутренним радиусом  $r$  проводящей полоски. Все элементы расположены на одинаковых расстояниях  $l$  друг от друга. При этом С-элементы могут быть повернуты относительно своих геометрических центров как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях.

В квазистатическом приближении киральный элемент заменяется индуктивно-емкостной схемой. Для расчета резонансной частоты воспользуемся в этом случае формулой Томсона:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (7)$$

где  $L$  – общая индуктивность кирального компонента;  $C$  – емкость кирального компонента.

Емкость С-образного элемента с учетом его связи с четырьмя соседними включениями определяется следующим образом:

$$C = C_3 + C_{мэ}, \quad (8)$$

то есть в виде суперпозиции емкостей самого элемента  $C_3$  и межэлементной емкости  $C_{мэ}$ .

Собственная емкость С-элемента определяется как

$$C_3 = \epsilon_c \frac{\pi(R^2 - r^2)}{2h}, \quad (9)$$

где  $h$  – толщина контейнера метаматериала. При записи считалось, что базовой линией С-элемента является средняя линия с радиусом полуокружности  $R' = (R+r)/2$  и ширина полоски  $h = R - r$ .

Межэлементная емкость определяется по формуле

$$C_{мэ} = \epsilon_c \frac{\pi(R^2 - r^2)}{8l}, \quad (10)$$

где  $l$  – расстояние между центрами соседних областей, в которые вписаны С-образные элементы.

В результате выражение для общей емкости N-заходного гаммадиона имеет вид

$$C = \frac{\epsilon_c \pi(R^2 - r^2)}{2h} \left[ 1 + \frac{h}{4l} \right]. \quad (11)$$

Индуктивность С-образного элемента определяется следующим соотношением:

$$L = \mu_c \frac{\sqrt{2} \left( \frac{R+r}{2} \right)^2}{R-r} = \mu_c \frac{\sqrt{2} (R+r)^2}{4(R-r)}. \quad (12)$$

Выражение с использованием формулы Томсона (7) для резонансной частоты С-образного элемента находится с учетом соотношений (11) и (12):

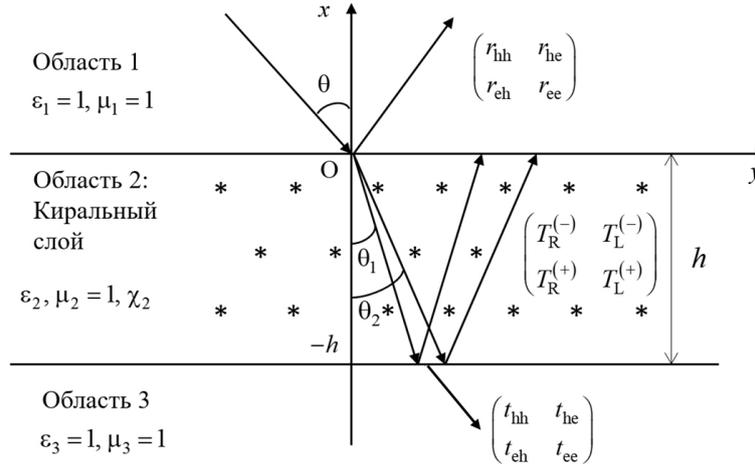


Рис. 3. Геометрия задачи  
 Fig. 3. Geometry of the problem

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{2\pi}}{8h} \left[ 1 + \frac{h}{4l} \right] (R+r)^3}}. \quad (13)$$

Формула (13) получена в квазистатическом приближении, и ее использование возможно только в диапазоне  $\omega \in (0; \omega_{\max})$ , где  $\omega_{\max}$  – максимальная частота, при которой элементы можно считать квазистационарными:  $cT \gg 1$  (где  $c$  – скорость света;  $T$  – период колебаний электромагнитного поля).

Таким образом, частная математическая модель кирального метаматериала на основе равномерной совокупности С-образных элементов с учетом (1), (6) и (13) имеет следующий вид:

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E} \mp i\chi(\omega) \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \pm i\chi(\omega) \vec{E}; \quad (14)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_x(\omega)}{1 - \alpha\varepsilon_x(\omega)}; \quad \chi(\omega) = \frac{\omega_0^2 \beta_0 \omega}{\omega_0^2 + 2i\delta_x \omega_0 \omega - \omega^2};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_s(\omega) - \varepsilon_c}{\varepsilon_s(\omega) + 2\varepsilon_c}; \quad \varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i\delta_e \omega - \omega^2};$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{2\pi}}{8h} \left[ 1 + \frac{h}{4l} \right] (R+r)^3}}.$$

## 2. Задача о падении плоской электромагнитной волны на планарный слой КММ на основе равномерной совокупности С-образных элементов

Рассмотрим задачу о падении плоской электромагнитной волны линейной (Е- или Н-поляризации) на планарный слой из КММ на основе

равномерной совокупности С-образных элементов. Геометрия задачи показана на рис. 3.

Плоская электромагнитная волна падает на слой метаматериала под углом  $\theta$ . Область 1 является диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$ . Киральный слой (область 2) описывается материальными параметрами:  $\varepsilon_2$ ,  $\mu_2$  и  $\chi_2$  в рамках предложенной математической модели (14). Концентрация киральных включений в области 2 равна  $\alpha_2$ . Толщина слоя метаматериала  $h$ . Область 3 является диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon_3$  и  $\mu_3$ . При решении будем полагать, что планарный слой является неограниченно протяженным вдоль оси Oz. При решении задачи будем учитывать явление кросс-поляризации, возникающее при отражении (прохождении) электромагнитной волны от слоя из кирального метаматериала, а именно при падении волны с Е-поляризацией будут возникать компоненты отраженного и прошедшего электромагнитного поля с Н-поляризацией и наоборот.

Коэффициенты отражения от планарного слоя метаматериала можно записать в виде матрицы размерности  $2 \times 2$ :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} r_{hh} & r_{he} \\ r_{eh} & r_{ee} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $r_{hh}$  – коэффициент отражения поля волны с Н-поляризацией при падении волны с Н-поляризацией;  $r_{he}$  – коэффициент отражения поля волны с Н-поляризацией при падении с Е-поляризацией;  $r_{ee}$  – коэффициент отражения поля волны с Е-поляризацией при падении волны с Е-поляризацией;  $r_{eh}$  – коэффициент отражения поля волны с Е-поляризацией при падении волны с Н-поляризацией.

Аналогично коэффициенты прохождения в области 3 описываются следующей матрицей:

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} t_{hh} & t_{he} \\ t_{eh} & t_{ee} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $t_{hh}$  – коэффициент прохождения поля волны с Н-поляризацией при падении волны с Н-поляризацией;  $t_{he}$  – коэффициент прохождения поля волны с Н-поляризацией при падении с Е-поляризацией;  $t_{eh}$  – коэффициент прохождения поля волны с Е-поляризацией при падении волны с Е-поляризацией;  $t_{ee}$  – коэффициент прохождения поля волны с Е-поляризацией при падении волны с Н-поляризацией.

Внутри области 2, согласно общим свойствам киральной среды, распространяются электромагнитные волны с право (ПКП) и левокруговыми (ЛКП) поляризациями – две преломленные из области 1 и 2, отраженные от границы раздела с областью 3.

Коэффициенты отражения и прохождения ПКП- и ЛКП-волн в области 2 описываются следующей матрицей:

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} T_R^{(-)} & T_L^{(-)} \\ T_R^{(+)} & T_L^{(+)} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Таким образом, требуется определить матрицы коэффициентов отражения и прохождения основной и кросс-поляризованной компонент поля (15)–(17).

При решении задачи воспользуемся методом частичных областей.

Слой из кирального метаматериала на основе С-образных элементов описывается материальными уравнениями (1) [19]:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{D}}^{(2)} &= \varepsilon_2(\omega) \vec{\mathbf{E}}^{(2)} \mp i\chi_2(\omega) \vec{\mathbf{H}}^{(2)}; \\ \vec{\mathbf{B}}^{(2)} &= \mu_2 \vec{\mathbf{H}}^{(2)} \pm i\chi_2(\omega) \vec{\mathbf{E}}^{(2)}, \end{aligned} \quad (18)$$

где верхние и нижние знаки определяют правую или левую форму зеркально асимметричных компонентов. Соотношения (18) записаны в Гауссовой системе единиц.

Для описания электромагнитных свойств исследуемого метаматериала используется частная математическая модель (14).

Векторы напряженностей электрического и магнитного полей в киральной среде определяются из системы дифференциальных уравнений 2-го порядка следующего вида [19]:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}}^{(2)} + k_0^2 \left[ \varepsilon_2(\omega) \mu_2 + \chi_2^2(\omega) \right] \vec{\mathbf{E}}^{(2)} -$$

$$\begin{aligned} -2ik_0^2 \mu_2 \chi_2(\omega) \vec{\mathbf{H}}^{(2)} &= 0; \\ \nabla^2 \vec{\mathbf{H}}^{(2)} + k_0^2 \left[ \varepsilon_2(\omega) \mu_2 + \chi_2^2(\omega) \right] \vec{\mathbf{H}}^{(2)} + \\ + 2ik_0^2 \varepsilon_2(\omega) \chi_2(\omega) \vec{\mathbf{E}}^{(2)} &= 0, \end{aligned}$$

где  $k_0$  – волновое число для плоской однородной волны в свободном пространстве.

Векторы напряженностей электрического и магнитного полей в киральной среде записываются в виде суперпозиции полей волн с круговыми поляризациями [19]:

$$\vec{\mathbf{E}}^{(2)} = \vec{\mathbf{E}}_R + \vec{\mathbf{E}}_L; \quad \vec{\mathbf{H}}^{(2)} = i\sqrt{\frac{\varepsilon_2(\omega)}{\mu_2}} (\vec{\mathbf{E}}_R - \vec{\mathbf{E}}_L), \quad (20)$$

в результате чего относительно  $\vec{\mathbf{E}}_R$ ,  $\vec{\mathbf{E}}_L$  можно записать однородные уравнения Гельмгольца [19]:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}}_{R,L} \pm k_{R,L}^2 \vec{\mathbf{E}}_{R,L} = 0, \quad (21)$$

где  $\vec{\mathbf{E}}_R$  – напряженность электрического поля волны с правой круговой поляризацией;  $\vec{\mathbf{E}}_L$  – напряженность электрического поля волны с левой круговой поляризацией;

$$k_{R,L} = k_0 \left[ \sqrt{\varepsilon_2(\omega) \mu_2} \pm \chi_2(\omega) \right]$$

– волновые числа для волн ПКП и ЛКП в неограниченной киральной среде.

Решения уравнений (21) имеют следующий вид и определяют поля 4 волн с ПКП и ЛКП, распространяющихся в области 2 [31]:

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} &= T_R^{(-)} e^{-ik_R(\vec{s}_R^-, \vec{r})} + T_R^{(+)} e^{-ik_R(\vec{s}_R^+, \vec{r})} + \\ &+ T_L^{(-)} e^{-ik_L(\vec{s}_L^-, \vec{r})} + T_L^{(+)} e^{-ik_L(\vec{s}_L^+, \vec{r})}; \\ H_z^{(2)} &= \frac{i}{\eta_2} \left[ T_R^{(-)} e^{-ik_R(\vec{s}_R^-, \vec{r})} + T_R^{(+)} e^{-ik_R(\vec{s}_R^+, \vec{r})} - \right. \\ &\left. - T_L^{(-)} e^{-ik_L(\vec{s}_L^-, \vec{r})} - T_L^{(+)} e^{-ik_L(\vec{s}_L^+, \vec{r})} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\vec{s}_{R,L}^- = \{-\cos\theta_{R,L}, \sin\theta_{R,L}\}$  – орты, вдоль которых распространяются волны, прошедшие в область 2 из области 1;  $\vec{s}_{R,L}^+ = \{\cos\theta_{R,L}, \sin\theta_{R,L}\}$  – орты, вдоль которых распространяются волны, отраженные от области 3 в область 2;  $\theta_{R,L}$  – углы преломления волн ПКП и ЛКП соответственно;  $\eta_2 = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$  – импеданс слоя КММ;  $k_{R,L} = k_0(n_2 \pm \chi_2)$  – постоянные распространения волн ПКП и ЛКП в киральной области 2;  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$  – относительный показатель преломления для области 2.

В работе были рассмотрены случаи падения плоской электромагнитной волны с Е-поляризацией [31]:

$$E_z^{(1)} = e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ind}}, \bar{r})} + r_{\text{ee}} e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ref}}, \bar{r})}, \quad (23)$$

$$H_y^{(1)} = \frac{\cos \theta}{\eta_1} e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ind}}, \bar{r})} - r_{\text{ee}} \frac{\cos \theta}{\eta_1} e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ref}}, \bar{r})},$$

$$H_z^{(1)} = r_{\text{eh}} e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ref}}, \bar{r})},$$

$$E_y^{(1)} = r_{\text{eh}} \eta_1 \cos \theta e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ref}}, \bar{r})},$$

и плоской электромагнитной волны с Н-поляризацией:

$$H_z^{(1)} = e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ind}}, \bar{r})} + r_{\text{hh}} e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ref}}, \bar{r})}, \quad (24)$$

$$E_y^{(1)} = -\eta_1 \cos \theta e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ind}}, \bar{r})} + r_{\text{hh}} \cos \theta e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ref}}, \bar{r})},$$

$$E_z^{(1)} = r_{\text{he}} e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ref}}, \bar{r})},$$

$$H_y^{(1)} = -r_{\text{he}} \frac{\cos \theta}{\eta_1} e^{-ik_1(\bar{s}_{\text{ref}}, \bar{r})}.$$

В формулах (16) и (17) введены следующие обозначения:  $k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$  – волновое число для плоской однородной волны в области 1;  $\bar{s}_{\text{ref}} = \{\cos \theta, \sin \theta\}$  – орт, определяющий направление распространения падающей волны;  $\eta_1 = \sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1}$  – импеданс области 3;  $\bar{s}_{\text{ind}} = \{-\cos \theta, \sin \theta\}$  – орт, определяющий направление распространения падающей волны.

Электромагнитное поле в области 3 имеет следующий вид для случая падения волны с Е-поляризацией [31]:

$$E_z^{(3)} = t_{\text{ee}} e^{-ik_3(\bar{s}_{\text{tr}}, \bar{r})}, \quad (25)$$

$$H_y^{(3)} = -t_{\text{ee}} \frac{\cos \theta_3}{\eta_3} e^{-ik_3(\bar{s}_{\text{tr}}, \bar{r})},$$

$$H_z^{(3)} = t_{\text{eh}} e^{-ik_3(\bar{s}_{\text{tr}}, \bar{r})},$$

$$E_y^{(3)} = t_{\text{eh}} \eta_3 \cos \theta_3 e^{-ik_3(\bar{s}_{\text{tr}}, \bar{r})}$$

и для случая падения плоской электромагнитной волны с Н-поляризацией:

$$H_z^{(3)} = r_{\text{hh}} e^{-ik_3(\bar{s}_{\text{tr}}, \bar{r})}, \quad (26)$$

$$E_y^{(3)} = r_{\text{hh}} \cos \theta_3 e^{-ik_3(\bar{s}_{\text{tr}}, \bar{r})},$$

$$E_z^{(3)} = r_{\text{he}} e^{-ik_3(\bar{s}_{\text{tr}}, \bar{r})},$$

$$H_y^{(3)} = -r_{\text{he}} \frac{\cos \theta_3}{\eta_3} e^{-ik_3(\bar{s}_{\text{tr}}, \bar{r})}.$$

В формулах (18) и (19) введены следующие обозначения:  $k_3 = k_0 \sqrt{\varepsilon_3 \mu_3}$  – волновое число для плоской однородной волны в области 3;  $\bar{s}_{\text{tr}} = \{-\cos \theta_3, \sin \theta_3\}$  – орт, определяющий направ-

ление распространения прошедшей волны;  $\eta_3 = \sqrt{\mu_3 / \varepsilon_3}$  – импеданс области 3;  $\theta_3$  – угол прохождения волны в область 3.

На границах раздела выполняются следующие граничные условия для тангенциальных составляющих векторов:

$$\bar{\mathbf{E}}_{\tau}^{(1)}(y=0) = \bar{\mathbf{E}}_{\tau}^{(2)}(y=0); \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{\tau}^{(1)}(y=0) = \bar{\mathbf{H}}_{\tau}^{(1)}(y=0);$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{\tau}^{(2)}(y=-h) = \bar{\mathbf{E}}_{\tau}^{(3)}(y=-h);$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{\tau}^{(2)}(y=-h) = \bar{\mathbf{H}}_{\tau}^{(3)}(y=-h).$$

После подстановки формул (22)–(26) в граничные условия (27) решение задачи сводится к неоднородным системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для случаев Е- и Н-поляризаций падающей волны:

$$\mathbf{B}_{\text{H,E}} \bar{\mathbf{R}}_{\text{H,E}} = \bar{\mathbf{A}}_{\text{H,E}}; \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{\text{E}} = [T_{\text{R}}^{(-)}, T_{\text{R}}^{(+)}, T_{\text{L}}^{(-)}, T_{\text{L}}^{(+)}, r_{\text{ee}}, r_{\text{eh}}, t_{\text{ee}}, t_{\text{eh}}]^T;$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{\text{E}} = [1, 0, 0, \frac{\cos \theta}{\eta_1}, 0, 0, 0, 0]^T;$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{\text{H}} = [T_{\text{R}}^{(-)}, T_{\text{R}}^{(+)}, T_{\text{L}}^{(-)}, T_{\text{L}}^{(+)}, r_{\text{hh}}, r_{\text{he}}, t_{\text{hh}}, t_{\text{he}}]^T;$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{\text{H}} = [0, 1, -\eta_1 \cos \theta, 0, 0, 0, 0, 0]^T,$$

где

$$\varepsilon_2(\omega) = \varepsilon_{c2} \frac{1 + 2\alpha_2 \varepsilon_{x2}(\omega)}{1 - \alpha_2 \varepsilon_{x2}(\omega)};$$

$$\chi_2(\omega) = \frac{\omega_0^2 \beta_0 \omega}{\omega_0^2 + 2i \delta_x \omega_0 \omega - \omega^2};$$

$$\varepsilon_{x2} = \frac{\varepsilon_{s2}(\omega) - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{s2}(\omega) + 2\varepsilon_{c2}};$$

$$\varepsilon_{s2}(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{(\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{\infty}) \omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i \delta_e \omega - \omega^2};$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{c2} \mu_{c2}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{8h} \left[ 1 + \frac{h}{4l} \right] (R+r)^3}};$$

$$\eta_2(\omega) = \sqrt{\varepsilon_2(\omega) / \mu_2};$$

$$\alpha_{\text{R,L}}(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta}{(\sqrt{\varepsilon_2(\omega) \mu_2} \pm \chi_2(\omega))^2}};$$

$$\eta_1 = \sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1};$$

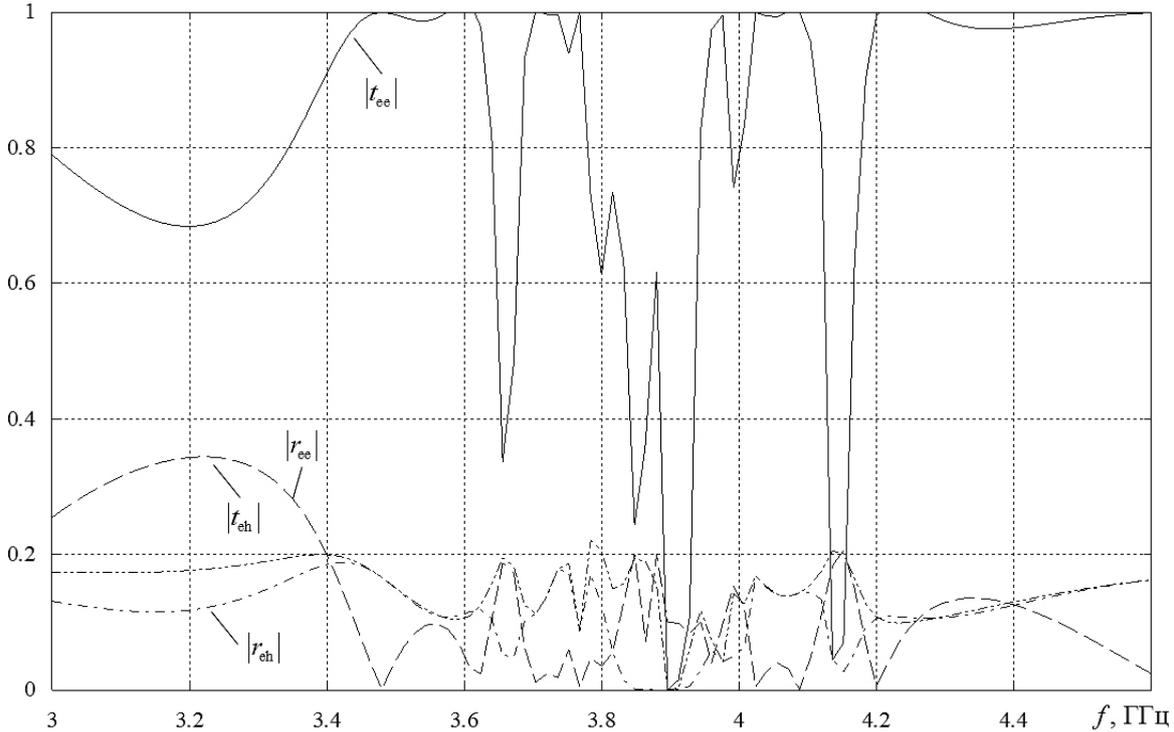


Рис. 4. Частотные зависимости модулей коэффициентов прохождения и отражения основной и кросс-поляризованной компонент поля

Fig. 4. Frequency dependences of the factors of transmission and reflection coefficients of the main and cross-polarized component components

$$k_{R,L}(\omega) = k_0 \left( \sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \mu_2 \pm \chi_2(\omega) \right);$$

$$k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon^{(1)} \mu^{(1)}}; \quad k_3 = k_0 \sqrt{\varepsilon^{(3)} \mu^{(3)}};$$

$$\eta_3 = \sqrt{\mu_3 / \varepsilon_3}; \quad \beta_{R,L}(\omega) = k_{R,L}(\omega) h \cos \theta_{R,L};$$

$$\beta_3 = k_3 h \cos \theta_3;$$

$$\varepsilon_{s2}(\omega) = \varepsilon_{s2} + \frac{\beta_{02}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \chi_2(\omega) = \frac{A_2 k_0 \beta_{02}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Явный вид матриц  $\mathbf{B}_{H,E}$  не приводится в статье, в связи с их значительным объемом.

Из численного решения СЛАУ (28) находятся неизвестные элементы матриц коэффициентов отражения и прохождения (15)–(17).

### 3. Численные результаты

При численном моделировании путем решения СЛАУ (28) для случая падения плоской электромагнитной волны E-поляризации были рассчитаны частотные зависимости модулей коэффициентов прохождения и отражения основной и кросс-поляризованной компонент поля.

В качестве примера была рассмотрена структура на основе совокупности полосковых C-образных элементов с шириной полоска 2 см. Все элементы

были произвольно ориентированы и равномерно размещены на расстоянии 10 см. Толщина слоя метаматериала 10 см. Материал контейнера имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_{c2} = 1,5$ ;  $\mu_{c2} = 1$  (пенополистирол). Параметры элемента:  $R = 0,02$  м,  $R - r = 0,02$  м,  $H = 0,1$  м. Области 1 и 3 представляли собой вакуум с  $\varepsilon_{1,3} = \mu_{1,3} = 1$ . Падение волны на метаструктуру происходило по нормали:  $\theta = 0$ .

На рис. 4–6 представлены частотные зависимости модулей коэффициентов отражения основной ( $|r_{ee}|$  – пунктирная линия) и кросс-поляризованной компонент ( $|r_{eh}|$  – штрихпунктирная линия), а также коэффициентов прохождения основной ( $|t_{ee}|$  – сплошная линия) и кросс-поляризованной компонент ( $|t_{eh}|$  – штрихпунктирная линия с двумя точками) для метаматериала на основе C-образных элементов с указанными значениями геометрических размеров.

Как видно из рис. 4, структура проявляет ярко выраженные частотно-селективные свойства. В диапазоне частот от 3,6 до 4,2 ГГц наблюдается ряд резонансных минимумов модуля коэффициента прохождения. В этом же диапазоне частот модули коэффициента отражения основной и кросс-поляризованной компонент поля, а также модуль коэффициента прохождения кросс-

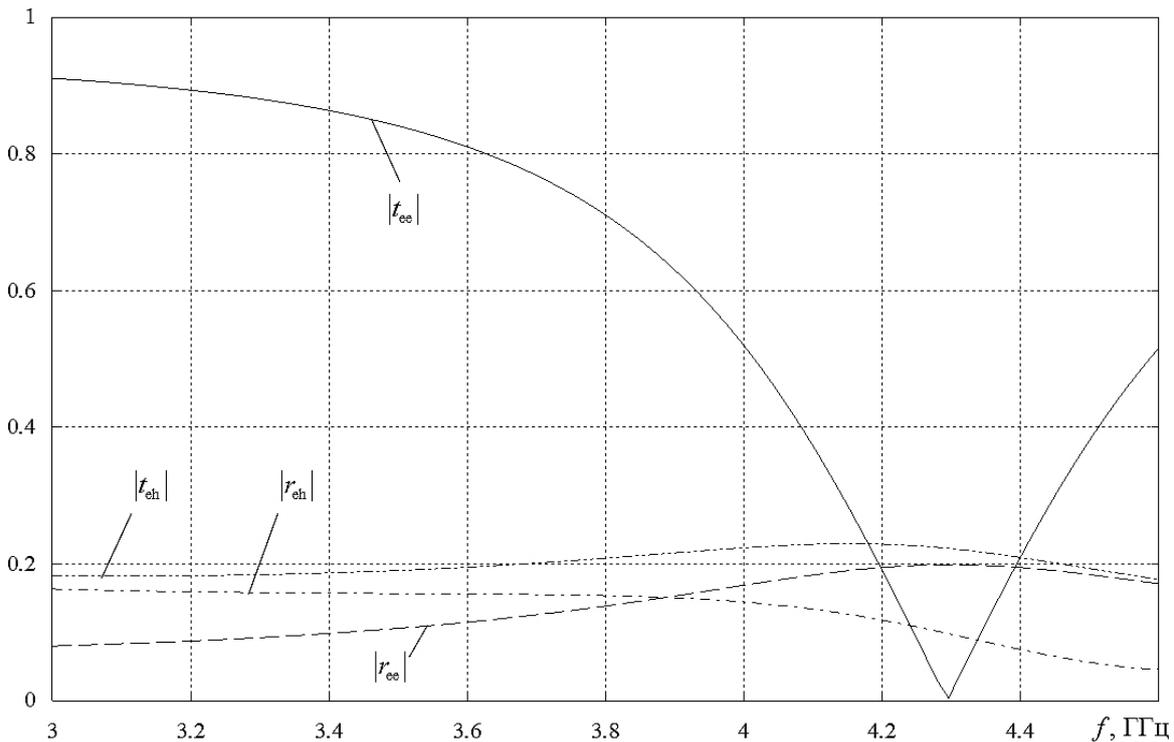


Рис. 5. Частотные зависимости модулей коэффициентов прохождения и отражения основной и кросс-поляризованной компонент поля  
 Fig. 5. Frequency dependences of the moduli of the transmission and reflection coefficients of the main and cross-polarized field components

поляризованной компоненты не превосходят 0,2. Самые глубокие резонансные минимумы наблюдаются на частотах 3,9 и 4,17 ГГц. Вблизи этих частот электромагнитное поле концентрируется в слое из КММ на основе совокупности С-образных элементов и структура выполняет роль частотно-селективного концентратора СВЧ-энергии. Как уже отмечалось, подобные эффекты были обнаружены в киральных метаматериалах на основе совокупностей одиночных, многозаходных, составных тонкопроволочных спиральных элементов и полосковых гаммадионов с произвольным числом заходов. Также следует заметить, что даже при нормальном падении плоской электромагнитной волны на слой КММ наблюдается достаточно сильная кросс-поляризация поля как в структуре отраженной, так и в структуре прошедшей волны.

Далее в работе был рассмотрен метаматериал на основе равномерной совокупности хаотически ориентированных С-элементов с увеличенным в два раза радиусом по сравнению с предыдущим случаем. Параметры элемента:  $R=0,04$  м,  $R-r=0,02$  м,  $H=0,1$  м.

Как видно из рис. 5, в исследуемом диапазоне частот наблюдается один резонансный минимум на частоте 4,3 ГГц, на которой модуль коэффициента прохождения основной компоненты

поля стремится к нулю. Вблизи этой же частоты модули коэффициента отражения основной и кросс-поляризованной компонент поля, а также модуль коэффициента прохождения кросс-поляризованной компоненты не превосходят 0,2, что соответствует режиму концентрации СВЧ-энергии в слое КММ. Заметим, что по сравнению с предыдущим случаем резонансный минимум вблизи частоты 4,3 ГГц не является очень узким, поэтому концентрация энергии происходит в некотором диапазоне от 4,2 до 4,4 ГГц.

В качестве следующего примера была рассмотрена структура на основе совокупности полосковых С-образных элементов с шириной полоска 2 см. Все элементы были произвольно ориентированы и равномерно размещены на расстоянии 20 см. Толщина слоя метаматериала 10 см. Материал контейнера имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_{c2} = 1,5$ ;  $\mu_{c2} = 1$  (пенополистирол). Параметры элемента:  $R=0,02$  м,  $R-r=0,02$  м,  $H=0,1$  м. Как следует из приведенных значений, в этом метаматериале расстояние между соседними киральными включениями увеличено вдвое по сравнению с первым рассмотренным метаматериалом.

Как видно из рис. 6, структура проявляет ярко выраженные частотно-селективные свойства.

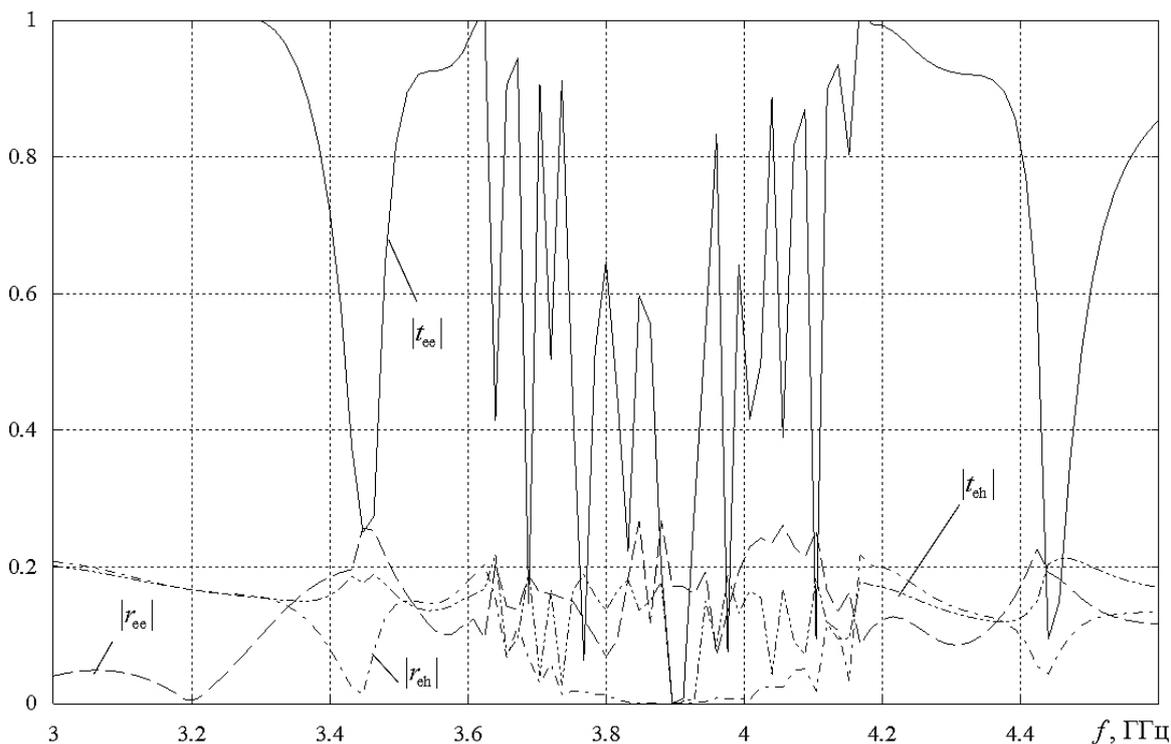


Рис. 6. Частотные зависимости модулей коэффициентов прохождения и отражения основной и кросс-поляризованной компонент поля

Fig. 6. Frequency dependences of the moduli of the transmission and reflection coefficients of the main and cross-polarized field components

В диапазоне частот от 3,45 до 4,15 ГГц наблюдается значительный ряд резонансных минимумов модуля коэффициента прохождения. В этом же диапазоне частот модули коэффициента отражения основной и кросс-поляризованной компонент поля, а также модуль коэффициента прохождения кросс-поляризованной компоненты не превосходят 0,2. Самые глубокие резонансные минимумы наблюдаются на частотах 3,78 и 3,9 ГГц. Вблизи этих частот электромагнитное поле концентрируется в слое из КММ на основе совокупности С-образных элементов и структура выполняет роль частотно селективного концентратора СВЧ-энергии.

### Заключение

В работе рассмотрен пример построения частной математической модели кирального метаматериала на основе равномерной совокупности С-образных элементов, которая учитывает основные свойства: киральность, гетерогенность и дисперсию диэлектрической проницаемости и киральности. В качестве примера использования разработанной модели было проведено решение задачи о падении плоской электромагнит-

ной волны линейной поляризации на планарный слой из исследуемого метаматериала. Показано, что киральный метаматериал на основе совокупности С-образных элементов обладает частотно-селективными свойствами. Доказано, что вблизи ряда дискретных частот метаструктура является непрозрачной и неотражающей для падающего СВЧ-излучения линейной поляризации. В этих частотных диапазонах в метаматериале возникает частотно-селективный эффект, заключающийся в том, что нормально (радиально) падающее СВЧ-поле концентрируется в планарном слое кирального метаматериала. Ранее подобные эффекты были обнаружены в киральных метаматериалах на основе совокупностей одиночных, многозаходных, составных тонкопроволочных спиральных элементов и полосковых гаммадионов с произвольным числом заходов. Также доказано, что эффект частотно-селективной концентрации более выразительно протекает в киральных метаматериалах на основе трехмерных микроэлементов по сравнению с использованием плоских двумерных киральных включений.

Подобный эффект может быть использован для создания частотно-селективных концентраторов (хабов) СВЧ-энергии.

## Список литературы

1. Capolino F. Theory and Phenomena of Metamaterials. Boca Raton: Taylor & Francis – CRC Press, 2009. 992 p.
2. Engheta N., Ziolkowski R.W. Metamaterials: Physics and Engineering Explorations. Hoboken: Wiley, 2006. 414 p.
3. Iyer A.K., Alù A., Epstein A. Metamaterials and Metasurfaces – Historical Context, Recent Advances, and Future Directions // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2020. Vol. 68, no. 3. P. 1223–1231. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2020.2969732>
4. Pendry J. A chiral route to negative refraction // Science. 2004. Vol. 306, no. 5700. P. 1353–1355. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1104467>
5. Zheludev N.I. A Roadmap for metamaterials // Opt. Photonics News. 2011. Vol. 22, no. 3. P. 30–35. DOI: <https://doi.org/10.1364/OPN.22.3.000030>
6. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity / D.R. Smith [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84, no. 18. P. 4184–4187. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4184>
7. Veselago V.G. The Electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$  // Soviet Physics Uspekhi. 1968. Vol. 10, no. 4. P. 509–512. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1968v010n04ABEH003699>
8. Pendry J.B. Negative refraction makes a perfect lens // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85, no. 18. P. 3966–3969. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.3966>
9. Metamaterial analog of electromagnetically induced transparency / N. Papasimakis [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. P. 253903.
10. Аралкин М.В., Дементьев А.Н., Осипов О.В. Математические модели киральных метаматериалов на основе многозаходных проводящих элементов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 1. С. 8–19. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.1.8-19>
11. Аралкин М.В., Дементьев А.Н., Осипов О.В. Исследование электромагнитных характеристик планарных киральных метаструктур на основе составных спиральных компонентов с учетом гетерогенной модели Бруггемана // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 3. С. 44–55. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.44-55>
12. Осипов О.В., Плотников А.М., Салимова Н.Р. Использование эффекта азимутального рассеяния электромагнитных волн метаструктурой на основе элементов Телледжена в прикладных задачах электродинамики // Инфокоммуникационные технологии. 2012. Т. 10, № 1. С. 8–15.
13. Слюсар В.И. Метаматериалы в антенной технике: история и основные принципы // Электроника: НТБ. 2009. № 7. С. 10–19. URL: [https://www.electronics.ru/files/article\\_pdf/0/article\\_287\\_909.pdf](https://www.electronics.ru/files/article_pdf/0/article_287_909.pdf)
14. Вендик И.Б., Вендик О.Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот (Обзор) // Журнал технической физики. 2013. Т. 83, № 1. С. 3–28. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/41403>
15. Pozar D.M. Microstrip antennas and arrays on chiral substrates // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1992. Vol. 40, no. 10. P. 1260–1263. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.182462>
16. Решение электродинамической задачи для микрополосковой излучающей структуры с киральной подложкой / М.А. Бузова [и др.] // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44, № 11. С. 80–86. DOI: <https://doi.org/10.21883/PJTF.2018.11.46200.17147>
17. Перспективы использования метаматериалов в антеннах нового поколения / А.Л. Бузов [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, № 3. С. 15–20. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7078>
18. Импедансные характеристики двухэлементной антенной решетки с киральной подложкой / А.Л. Бузов [и др.] // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44, № 23. С. 37–45. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7078>
19. Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media / I.V. Lindell [et al.]. London: Artech House, 1994. 291 p.
20. Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V. Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 121 p.
21. Caloz C., Sihvola A. Electromagnetic chirality, Part 1: The microscopic perspective [electromagnetic perspectives] // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2020. Vol. 62, no. 1. P. 58–71. DOI: <https://doi.org/10.1109/MAP.2019.2955698>
22. Третьяков С.А. Электродинамика сложных сред: киральные, би-изотропные и некоторые бианизотропные материалы // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 10. С. 1457–1470.
23. Киральные электродинамические объекты / Б.З. Каценеленбаум [и др.] // Успехи физических наук. 1997. Т. 167, № 11. С. 1201–1212. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199711c.1201>
24. Осипов О.В., Юрасов В.И., Почепцов А.О. Киральный метаматериал для частотно селективной концентрации энергии сверхвысокочастотного излучения // Инфокоммуникационные технологии. 2014. Т. 12, № 4. С. 76–82.
25. Сушко М.Я., Криськив С.К. Метод компактных групп в теории диэлектрической проницаемости гетерогенных систем // Журнал технической физики. 2009. Т. 79, № 3. С. 97–101. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/9645>
26. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von eterogenen Substanzen, I. Dielektrizitatskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkorper aus isotropen Substanzen // Ann. Phys. 1935. Vol. 416, no. 7. P. 636–664. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19354160705>
27. Garnett J.C. Maxwell. Colours in metal glasses and in metallic films // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A. 1904. Vol. 203. P. 385–420.
28. Нещерет А.М. Разработка теоретических основ и методов исследований излучающих и переизлучающих структур на основе киральных метаматериалов: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. Самара, 2012. 379 с.
29. Semchenko I.V., Tretyakov S.A., Serdyukov A.N. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years // Progress in Electromagnetics Research. 1996. Vol. 12. P. 335–370.

30. Condon E.U. Theories of optical rotatory power // *Rev. Mod. Phys.* 1937. Vol. 9, no. 4. P. 432–457. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.9.432>
31. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и связь, 2006. 280 с.
32. Исследование антенных комплексов с использованием киральных метаматериалов и фрактальной геометрии излучателей для систем МИМО / А.Н. Беспалов [и др.] // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2020. Т. 23, № 4. С. 97–110. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.97-110>
33. Неганов В.А., Градинарь И.М. Электродинамические свойства упорядоченных метаматериалов // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2012. Т. 15, № 1. С. 18–24.
34. Зайцев В.В., Панин Д.Н., Яровой Г.П. Численный анализ отражений от неоднородного кирального слоя // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2001. Т. 4, № 2. С. 78.

## References

1. Capolino F. *Theory and Phenomena of Metamaterials*. Boca Raton: Taylor & Francis – CRC Press, 2009, 992 p.
2. Engheta N., Ziolkowski R.W. *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*. Hoboken: Wiley, 2006, 414 p.
3. Iyer A.K., Alù A., Epstein A. Metamaterials and metasurfaces – historical context, recent advances, and future directions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2020, vol. 68, no. 3, pp. 1223–1231. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2020.2969732>
4. Pendry J. A chiral route to negative refraction. *Science*, 2004, vol. 306, no. 5700, pp. 1353–1355. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1104467>
5. Zheludev N.I. A Roadmap for metamaterials. *Opt. Photonics News*, 2011, vol. 22, no. 3, pp. 30–35. DOI: <https://doi.org/10.1364/OPN.22.3.000030>
6. Smith D.R. et al. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 84, no. 18, pp. 4184–4187. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4184>
7. Veselago V.G. The Electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . *Soviet Physics Uspekhi*, 1968, vol. 10, no. 4, pp. 509–512. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1968v010n04ABEH003699>
8. Pendry J.B. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85, no. 18, pp. 3966–3969. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.3966>
9. Papasimakis N. et al. Metamaterial analog of electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 101, p. 253903.
10. Aralkin M.V., Dement'ev A.N., Osipov O.V. Mathematical models of chiral metamaterials based on multi-pass conducting elements. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2020, vol. 23, no. 1, pp. 8–19. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.1.8-19> (In Russ.)
11. Aralkin M.V., Dement'ev A.N., Osipov O.V. Investigation of the electromagnetic characteristics of planar chiral metastructures based on compound helical components, taking into account the heterogeneous Bruggeman model. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2020, vol. 23, no. 3, pp. 44–55. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.44-55> (In Russ.)
12. Osipov O.V., Plotnikov A.M., Salimova N.R. Using the effect of azimuthal scattering of electromagnetic waves by a metastructure based on Tellegen elements in applied problems of electrodynamics. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 8–15. (In Russ.)
13. Slyusar V.I. Metamaterials in antenna technology: history and basic principles. *Elektronika: NTB*, 2009, no. 7, pp. 10–19. URL: [https://www.electronics.ru/files/article\\_pdf/0/article\\_287\\_909.pdf](https://www.electronics.ru/files/article_pdf/0/article_287_909.pdf) (In Russ.)
14. Vendik I.B., Vendik O.G. Metamaterials and their application in microwave technology (Review). *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2013, vol. 83, no. 1, pp. 3–28. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/41403> (In Russ.)
15. Pozar D.M. Microstrip antennas and arrays on chiral substrates. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1992, vol. 40, no. 10, pp. 1260–1263. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.182462>
16. Buzova M.A. et al. Solution of an electrodynamic problem for a microstrip radiating structure with a chiral substrate. *Pis'ma v ZhTF*, 2018, vol. 44, no. 11, pp. 80–86. DOI: <https://doi.org/10.21883/PJTF.2018.11.46200.17147> (In Russ.)
17. Buzov A.L. et al. Prospects for the use of metamaterials in new generation antennas. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2017, vol. 20, no. 3, pp. 15–20. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7078> (In Russ.)
18. Buzov A.L. et al. Impedance characteristics of a two-element antenna array with a chiral substrate. *Pis'ma v ZhTF*, 2018, vol. 44, no. 23, pp. 37–45. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7078> (In Russ.)
19. Lindell I.V. et al. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*. London: Artech House, 1994, 291 p.
20. Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media. Lecture Notes in Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 121 p.
21. Caloz C., Sihvola A. Electromagnetic chirality, Part 1: The microscopic perspective [electromagnetic perspectives]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2020, vol. 62, no. 1, pp. 58–71. DOI: <https://doi.org/10.1109/MAP.2019.2955698>
22. Tret'yakov S.A. Electrodynamics of complex media: chiral, bi-isotropic and some bianisotropic materials. *Radiotekhnika i elektronika*, 1994, vol. 39, no. 10, pp. 1457–1470. (In Russ.)
23. Katsenelenbaum B.Z. et al. Chiral electrodynamic objects. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1997, vol. 167, no. 11, pp. 1201–1212. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199711c.1201> (In Russ.)
24. Osipov O.V., Yurasov V.I., Pocheptsov A.O. Chiral metamaterial for frequency selective energy concentration of microwave radiation. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2014, vol. 12, no. 4, pp. 76–82. (In Russ.)

25. Sushko M.Ya., Kris'kiv S.K. Compact group method in the theory of permittivity of heterogeneous systems. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2009, vol. 79, no. 3, pp. 97–101. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/9645> (In Russ.)
26. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von eterogenen Substanzen, I. Dielektrizitatskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkorper aus isotropen Substanzen. *Ann. Phys.*, 1935, vol. 416, no. 7, pp. 636–664. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19354160705>
27. Garnett J.C. Maxwell. Colours in metal glasses and in metallic films. *Phylos. Trans. R. Soc. London. Ser. A*, 1904, vol. 203, pp. 385–420.
28. Neshcheret A.M. Development of theoretical foundations and methods for studying radiating and reradiating structures based on chiral metamaterials: dis. ... dok. fiz.-mat. nauk. Samara, 2012, 379 p.
29. Semchenko I.V., Tretyakov S.A., Serdyukov A.N. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years. *Progress in Electromagnetics Research*, 1996, vol. 12, pp. 335–370.
30. Condon E.U. Theories of optical rotatory power. *Rev. Mod. Phys.*, 1937, vol. 9, no. 4, pp. 432–457. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.9.432>
31. Neganov V.A., Osipov O.V. *Reflective, Waveguide and Radiating Structures with Chiral Elements*. Moscow: Radio i svyaz', 2006, 280 p. (In Russ.)
32. Bepalov A.N. et al. Study of antenna complexes using chiral metamaterials and fractal geometry of emitters for MIMO systems. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2020, vol. 23, no. 4, pp. 97–110. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.97-110> (In Russ.)
33. Neganov V.A., Gradinar' I.M. Electrodynamic properties of ordered metamaterials. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2012, vol. 15, no. 1, pp. 18–24. (In Russ.)
34. Zaytsev V.V., Panin D.N., Yarovoy G.P. Numerical analysis of reflections from an inhomogeneous chiral layer. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2001, vol. 4, no. 2, pp. 78. (In Russ.)

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2023, vol. 26, no. 1, pp. 79–92

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.79-92

Received 7 December 2022  
Accepted 9 January 2023

### Investigation of the microwave chiral metamaterial based on a uniform set of C-shaped conductive inclusions

*Ivan Yu. Buchnev, Dmitry S. Kushnir, Oleg V. Osipov, Margarita A. Frolova*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – The paper considers an artificial chiral metamaterial created on a homogeneous container base from foamed dielectric, in which flat conducting S-shaped microelements are evenly placed and arbitrarily oriented. To describe the metamaterial, a particular mathematical model was constructed that takes into account chirality, dispersion, and heterogeneity of the structure. The Maxwell Garnett model was used to account for heterogeneity. To take into account the dispersion of the chirality parameter, the Condon model known from the theory of optically active media was used. The partial domain method was used to solve the problem of the incidence of a plane electromagnetic wave of linear polarization on a planar layer created on the base of the investigated chiral metamaterial. The solution of the problem was reduced to an inhomogeneous system of linear algebraic equations for unknown reflection and transmission coefficients, taking into account the cross-polarization of the electromagnetic field. An analysis of the numerical results showed that the structure has pronounced frequency selective properties, in particular, as in the case of chiral metamaterial based on three-dimensional conductive elements, discrete frequencies were determined at which the structure is transparent to microwave radiation. Chiral metamaterial based on C-shaped microelements can be used to create narrow-band frequency-selective microwave energy concentrators of planar type.

*Keywords* – chiral media; chiral metamaterial; metamaterial; metastructure; C-element; spatial dispersion; frequency selectivity; Maxwell Garnett model; Condon model; microwave energy.

---

### Информация об авторах

**Бучнев Иван Юрьевич**, 1995 г. р., аспирант кафедры высшей математики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика метаматериалов.  
*E-mail:* v.buchnev@psuti.ru

**Кушнир Дмитрий Сергеевич**, 1990 г. р., ассистент кафедры информационных систем и технологий Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика метаматериалов.  
*E-mail:* d.kushnir@psuti.ru

**Осипов Олег Владимирович**, 1975 г. р., доктор физико-математических наук, и.о. заведующего кафедрой высшей математики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика метаматериалов, устройства СВЧ и антенны, нелинейная оптика.

*E-mail:* o.osipov@psuti.ru

**Фролова Маргарита Александровна**, 1983 г. р., аспирант кафедры прикладной информатики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика метаматериалов.

*E-mail:* m.frolova@psuti.ru

### Information about the Authors

**Ivan Yu. Buchnev**, born in 1995, post-graduate student of the Department of Higher Mathematics, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics of metamaterials.

*E-mail:* v.buchnev@psuti.ru

**Dmitry S. Kushnir**, born in 1990, assistant of the Department of Information Systems and Technologies, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics of metamaterials.

*E-mail:* d.kushnir@psuti.ru

**Oleg V. Osipov**, born in 1975, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, acting head of the Department of Higher Mathematics, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics of metamaterials, microwave devices and antennas, nonlinear optics.

*E-mail:* o.osipov@psuti.ru

**Margarita A. Frolova**, born in 1983, post-graduate student of the Department of Applied Informatics, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

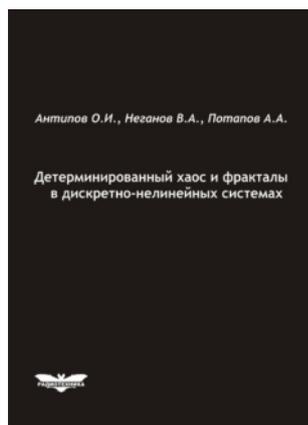
*Research interests:* electrodynamics of metamaterials.

*E-mail:* m.frolova@psuti.ru

#### РЕКЛАМА

**Антипов, О.И.**

**Детерминированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах** / О.И. Антипов, В.А. Неганов, А.А. Потапов. – М.: Радиотехника, 2009. – 235 с., ил.



ISBN 978-5-88070-237-4

УДК 530.1:621.372+621.396

ББК 32.96

В монографии рассмотрены явления детерминированного хаоса и фрактальности в дискретно-нелинейных системах на примере устройств импульсной силовой электроники, приведены некоторые основные определения современной нелинейной динамики и некоторые математические методы целочисленных и дробных мер.

Представленные явления стохастической работы могут наблюдаться в широком классе систем с переменной структурой, действие которых может быть описано системами дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, скачкообразно меняющими свои значения с течением времени в зависимости от состояния системы. Объектами исследования явились импульсные стабилизаторы напряжения различных типов и структур. Научной новизной является применение как фрактальных, так и мультифрактальных мер детерминированного хаоса к анализу стохастической работы импульсных стабилизаторов.

*Для специалистов, интересующихся проблемами детерминированного хаоса, численным моделированием дискретно-нелинейных систем.*

## Исследование электромагнитных свойств поперечной вставки на основе планарного слоя кирального метаматериала в прямоугольном волноводе

И.Ю. Бучнев, О.В. Осипов

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – В работе рассмотрено решение задачи дифракции основной волны прямоугольного волновода  $H_{10}$  на планарной поперечной вставке из кирального метаматериала, созданного на основе тонкопроволочных проводящих спиральных микроэлементов. Для описания кирального слоя построена частная математическая модель, учитывающая свойства гетерогенности и дисперсии диэлектрической проницаемости и параметра киральности искусственной среды. Для учета свойства гетерогенности использовалась известная в физике модель Максвелла Гарнетта. Для учета дисперсии диэлектрической проницаемости была применена формула Друде – Лоренца, а для параметра киральности – формула Кондона. Решение задачи дифракции основной волны прямоугольного волновода на планарном слое из кирального метаматериала проводилось методом частичных областей и было сведено к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов отражения и прохождения. Показано, что при наличии поперечного кирального слоя в волноведущей структуре возникает кросс-поляризованная по отношению к основной волна типа  $H_{01}$ . Анализ частотных зависимостей модулей коэффициентов отражения и прохождения основной  $H_{10}$  и кросс-поляризованной  $H_{01}$  показал, что в некоторых узких интервалах частот в одноволновом режиме возникают ситуации, когда реализуется режим замены основного типа волны с  $H_{10}$  на  $H_{01}$  вблизи резонансных частот. Рассматриваемая линия передачи может найти применение при создании частотно-селективных фильтров и преобразователей поляризации СВЧ-диапазона.

*Ключевые слова* – киральная среда; киральный метаматериал; метаматериал; спираль; пространственная дисперсия; частотная селективность; модель Максвелла Гарнетта; модель Кондона; прямоугольный волновод; одноволновый режим; основная волна; кросс-поляризация.

### Введение

В настоящее время активно изучаются электромагнитные свойства широкого разнообразия искусственных структур, называемых метаматериалами [1–5]. Это связано с тем, что использование композиционных сред позволяет получить новые электромагнитные свойства, недостижимые при использовании «классических» материалов. Любой метаматериал представляет собой пространственную композицию среды, выполняющей роль контейнера, в которой некоторым образом замещены области (объемы) на основе материала другого типа. В СВЧ-диапазоне контейнеры обычно являются диэлектрическими, а внедряемые области – проводящими. Уже на этапе разработки возможно проектирование структуры метаматериала с целью получения заранее требуемых свойств взаимодействия электромагнитного поля с метаматериалом. В большинстве случаев внедряемые области представляют собой резонансные проводящие микроэлементы. В случае когда микроэлементы обладают зеркально асимметричной формой, метаматериал принято называть киральным (от греч.  $\chi\rho\omicron$  – «рука») [6–10]. В классиче-

ском понимании киральный метаматериал – это композиционная среда, состоящая из диэлектрического контейнера, в котором равномерно размещены и хаотически ориентированы проводящие микроэлементы зеркально асимметричной формы. В научной литературе рассмотрено большое количество разных типов киральных элементов: трехмерные (элементы Теллеждена, одно- и многозаходные спирали, взаимоортогональные спирали и т. п.) и двумерные (S-элементы, гамма-дионы, разомкнутые кольца, спирали Архимеда и т. п.). Основными свойствами кирального метаматериала являются: распространение двух волн с право и левокруговыми поляризациями, а также кросс-поляризация поля. Киральные метаматериалы в настоящее время активно применяются в СВЧ- и антенной технике. Основными применениями КММ являются циркуляторы, фазовращатели, фильтры, антенны на подложках из КММ, киральные линии передачи и т. п. [11–13]. Здесь уместно заметить, что в силу того, что киральные микроэлементы являются резонансными частями, то устройства СВЧ на основе КММ будут обладать частотно-селективными свойствами.

Значительный интерес представляет использование КММ в структурах линий передачи СВЧ. Первая работа по этой тематике была опубликована в 1988 году [14]. В ней исследовались собственные волны плоского кирального волновода, ограниченного идеально проводящими плоскостями. Подробно изучено распространение волн в открытых и закрытых круглых однородно заполненных киральных волноводах [15–17]. В работе [18] исследовались собственные волны плоского двухслойного кирально-диэлектрического волновода без ограничения на толщину структуры. В [19] изложена подробная теория распространения собственных волн в кироволноводах. Проанализированы также волны в киральных волноводах с импедансными стенками [20]. Анализ волноводов прямоугольного сечения требует применения численных методов [21]. В работе [22] проведен анализ собственных волн планарного кирального волновода. Технологии создания киральных и бианизотропных волноводов рассмотрены в [23].

Заметим, что в большинстве приведенных выше работ использовалась стандартная математическая модель киральной среды, основанная на использовании материальных уравнений в формализме Линделла-Сиволы [6] (в режиме гармонического сигнала при зависимости векторов от времени в виде  $\exp(i\omega t)$ ):

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \mp i\chi \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \pm i\chi \vec{E}, \quad (1)$$

где  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  – комплексные амплитуды векторов напряженностей и индукций электрического и магнитного полей;  $i$  – мнимая единица;  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость КММ;  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость КММ;  $\chi$  – относительный параметр киральности. В (1) верхние знаки соответствуют КММ на основе зеркально асимметричных микроэлементов с правой закруткой, а нижние знаки – на основе зеркально асимметричных микроэлементов с левой закруткой. Соотношения (1) записаны в Гауссовой системе единиц.

При этом в большинстве работ авторы предполагают, что, во-первых, материальные параметры являются постоянными и не зависят от частоты падающего электромагнитного поля, а во-вторых, что КММ является однородным, то есть не учитывают при расчете эффективной диэлектрической проницаемости различие в значениях этого параметра для контейнера и областей, занятых киральными микроэлементами.

В работах [24–26] предложены обобщенные и частные математические модели киральных метаматериалов, учитывающие дисперсию и гетерогенность. Гетерогенность возникает вследствие того, что КММ представляет собой совокупность среды-контейнера и областей с другими значениями материальных параметров, в которых найдутся зеркально асимметричные микроэлементы.

Некоторые математические модели КММ описаны в [34; 35].

В данной работе предлагается для описания электромагнитных свойств кирального слоя использовать частную математическую модель для метаматериала, учитывающую киральность, дисперсию и гетерогенность. Метаматериал при этом создается на основе равномерной совокупности тонкопроволочных проводящих спиральных элементов.

Основной целью работы является решение задачи дифракции основной волны прямоугольного волновода  $H_{10}$  на поперечной вставке из КММ. При этом для описания кирального слоя будет использоваться модель, в которой материальные параметры  $\epsilon(\omega)$ ;  $\chi(\omega)$  являются частотно-зависимыми.

## 1. Разработка частной математической модели КММ на основе тонкопроволочных спиральных микроэлементов

Рассмотрим структуру метаматериала, состоящего из диэлектрического контейнера с относительными проницаемостями  $\epsilon_c$ ,  $\mu_c$ , в котором размещены зеркально асимметричные проводящие микроэлементы. Области, в которых расположены зеркально асимметричные элементы, обладают относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon_s$ ,  $\mu_s$ . Линейные размеры областей обозначим через  $d$ , а расстояние между соседними элементами – через  $l$ . Общая структурная схема КММ приведена на рис. 1.

Эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости метаматериала будут функционально зависеть от проницаемостей контейнера и киральных областей:  $\epsilon = \epsilon(\epsilon_c, \epsilon_s)$ ;  $\mu = \mu(\mu_c, \mu_s)$ .

Указанные функциональные зависимости для гетерогенных сред определяются различными моделями (модель Максвелла Гарнетта, модель Бругемана и т. п.) [27–29].

В модели Максвелла Гарнетта используются следующие функциональные соотношения:

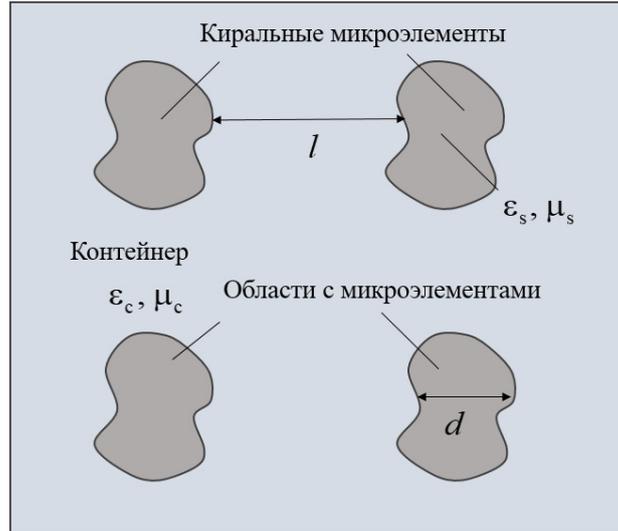


Рис. 1. Структурная общая схема метаматериала  
 Fig. 1. Structural general scheme of the metamaterial

$$\varepsilon = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_x}{1 - \alpha\varepsilon_x}; \quad \varepsilon_x = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_c}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – относительная эффективная диэлектрическая проницаемость метаматериала;  $\varepsilon_c$  – относительная диэлектрическая проницаемость контейнера;  $\varepsilon_s$  – относительная диэлектрическая проницаемость киральных областей;  $\alpha$  – объемная концентрация киральных областей.

Для учета дисперсии диэлектрической проницаемости киральных областей будем использовать формулу Друде – Лоренца:

$$\varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty)\omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i\delta_e\omega - \omega^2}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_\infty$  – асимптотическое значение диэлектрической проницаемости при  $\omega \rightarrow \infty$ ;  $\delta_e$  – коэффициент демпфирования;  $\omega_p^2$  – резонансная частота поглощения;  $\omega_0^2$  – резонансная частота микроэлемента, которая затем вычисляется для конкретного кирального микроэлемента в квазистационарном приближении.

Для учета дисперсии параметра киральности воспользуемся формулой Кондона [30–31]:

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_0^2\beta_0\omega}{\omega_0^2 + 2i\delta_x\omega_0\omega - \omega^2}, \quad (4)$$

где  $\beta_0$  – постоянная, имеющая обратную времени размерность и описывающая степень зеркальной асимметрии микроэлемента;  $\delta_x$  – коэффициент демпфирования параметра киральности.

С учетом (2) и (3) получаем формулу для частотно-зависимой эффективной диэлектрической проницаемости КММ:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_x(\omega)}{1 - \alpha\varepsilon_x(\omega)}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty)\omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i\delta_e\omega - \omega^2} - \varepsilon_c}{\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty)\omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i\delta_e\omega - \omega^2} + 2\varepsilon_c},$$

Материальные уравнения для кирального метаматериала (без учета типа микроэлемента) с учетом (1), (4) и (5) имеют следующий вид:

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E} \mp i\chi(\omega)\vec{H}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \pm i\chi(\omega)\vec{E}; \quad (6)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_x(\omega)}{1 - \alpha\varepsilon_x(\omega)}; \quad \chi(\omega) = \frac{\omega_0^2\beta_0\omega}{\omega_0^2 + 2i\delta_x\omega_0\omega - \omega^2};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_s(\omega) - \varepsilon_c}{\varepsilon_s(\omega) + 2\varepsilon_c}; \quad \varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty)\omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i\delta_e\omega - \omega^2}.$$

Математическая модель (6) справедлива для случая, когда все киральные микроэлементы имеют тождественную форму и линейные размеры; расположены эквидистантно и хаотически ориентированы; магнитная проницаемость КММ является частотно-независимой.

На базе соотношений (6) строится частная математическая модель для КММ на основе конкретного типа зеркально асимметричного элемента.

Рассмотрим расчет резонансной частоты тонкопроволочного проводящего элемента в квазистационарном приближении [32].

Структура ячейки КММ на основе тонкопроволочного спирального элемента показана на рис. 2.

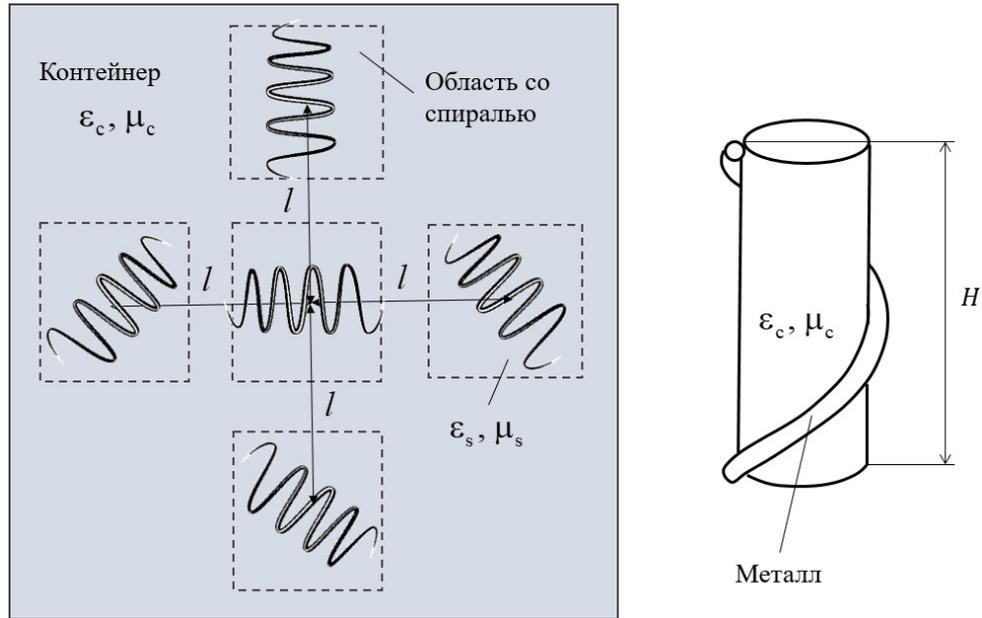


Рис. 2. Структура ячейки кирального метаматериала на основе тонкопроволочной спирали  
Fig. 2. Cell structure of a chiral metamaterial based on a thin-wire helix

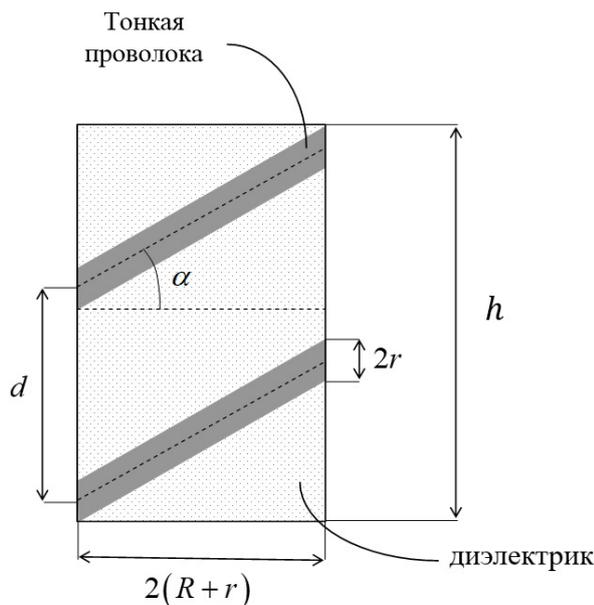


Рис. 3. Поперечный разрез цилиндрической оправки, на которую накручен тонкопроволочный спиральный элемент  
Fig. 3. Cross section of a cylindrical mandrel, on which a thin-wire spiral element is wound

На рис. 3 показан поперечный разрез спирального микроэлемента.

На рис. 3 введены следующие обозначения:  $H$  – высота контейнера;  $d$  – расстояние между витками спирали;  $R$  – внутренний радиус спирали;  $r$  – радиус проволоки;  $\alpha$  – угол накрутки спирали;  $N$  – число витков спирали.

В квазистатическом приближении для расчета резонансной частоты воспользуемся в этом случае формулой Томсона:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (7)$$

где  $L$  – индуктивность спирали;  $C$  – емкость спирали.

Индуктивность спирали вычисляется по формуле

$$L = \mu_c \frac{N^2 S}{g} = \mu_c \frac{\pi N^2 R^2}{g}, \quad (8)$$

где  $S$  – площадь витка спирали;  $g$  – длина развернутой проволоки;  $R$  – внутренний радиус спирали.

Емкость спирального элемента определяется емкостью проволоки, межвитковой емкостью и межэлементной емкостью:

$$C = C_{\text{пр}} + C_{\text{мв}} + C_{\text{мэ}}. \quad (9)$$

Емкость самой проводящей проволоки определяется из формулы для емкости прямолинейного проводника:

$$C_{\text{пр}} = \epsilon_c \frac{g}{18 \ln \left( \frac{2g}{r} \right) - 1}, \quad (10)$$

где  $r$  – радиус проволоки.

Межвитковая емкость спирали определяется следующим образом:

$$C_{\text{мв}} = \frac{\epsilon_c S_{\text{мв}} (N-1)}{d}, \quad (11)$$

где

$$S_{\text{мв}} = \pi \left[ (R+2r)^2 - R^2 \right]$$

– площадь кольца, образуемого проволочным элементом;  $d$  – шаг спирали;  $N$  – число витков.

Расстояние между витками спирали можно выразить через высоту контейнера  $h$  и число витков спирали  $N$  следующим образом:

$$d = \frac{h}{N+1}, \quad (12)$$

Подставляя в формулу (11) выражение (12), получаем:

$$C_{\text{мв}} = \frac{\varepsilon_c \pi \left[ (R+2r)^2 - R^2 \right] (N^2 - 1)}{h}. \quad (13)$$

Межэлементная емкость спирали определяется следующим образом:

$$C_{\text{мэ}} = \frac{\varepsilon_c S_{\text{мэ}}}{4l}, \quad (14)$$

где

$$S_{\text{мэ}} = \frac{4Nr(R+r)}{\cos \alpha}$$

– площадь пространства заполненного спиралью;  $r$  – радиус проволоки;  $l$  – расстояние между киральными элементами;  $\alpha = \pi / [2(N+1)]$  – угол накрутки спирали. Коэффициент  $1/4$  связан с пространственным расположением киральных элементов в контейнере.

Подставляя в формулу (14) выражения для угла накрутки спирали и площади, занимаемой киральным элементом, получаем:

$$C_{\text{мэ}} = \frac{\varepsilon_c Nr(R+r)}{l \cos \left[ \frac{\pi}{2(N+1)} \right]}, \quad (15)$$

где  $R$  – внутренний радиус спирали;  $\alpha$  – угол накрутки спирали;  $r$  – радиус проволоки;  $A$  – расстояние между киральными элементами;  $N$  – число витков;  $\varepsilon_c$  – диэлектрическая проницаемость контейнера.

Подставляя выражения (11), (13) и (15) в выражение для полной емкости (10), получаем:

$$C = \varepsilon_c \frac{g}{18 \ln \left( \frac{2g}{r} \right) - 1} + \frac{\varepsilon_c r N (R+r)}{l \cos \left[ \frac{\pi}{2(N+1)} \right]} + \frac{\varepsilon_c \pi \left[ (R+2r)^2 - R^2 \right] (N^2 - 1)}{h}. \quad (16)$$

С учетом соотношений (7), (8) и (16) для резонансной частоты однозаходного спирального элемента получаем:

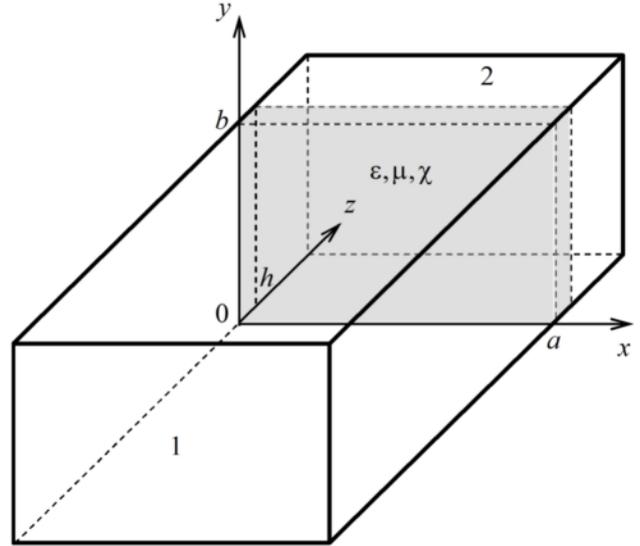


Рис. 4. Геометрия задачи  
 Fig. 4. Geometry of the problem

$$\omega_0 = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{\pi \varepsilon_c \mu_c N R K_x}}; \quad (17)$$

$$K_x = \sqrt{\frac{g}{18 \ln \left( \frac{2g}{r} \right) - 1}}$$

$$+ \frac{\pi \left[ (R+2r)^2 - R^2 \right] (N^2 - 1)}{h} + \frac{rN(R+r)}{l \cos \left[ \frac{\pi}{2(N+1)} \right]}.$$

Формула (17) получена в квазистатическом приближении, и ее использование возможно только в диапазоне  $\omega \in (0; \omega_{\text{max}})$ , где  $\omega_{\text{max}}$  – максимальная частота, при которой элементы можно считать квазистационарными:  $cT \gg 1$  (где  $c$  – скорость света;  $T$  – период колебаний электромагнитного поля).

Таким образом, частная математическая модель кирального метаматериала на основе равномерной совокупности тонкопроволочных спиральных элементов с учетом (1), (6) и (17) имеет следующий вид:

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E} \mp i\chi(\omega) \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \pm i\chi(\omega) \vec{E}; \quad (18)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_c \frac{1 + 2\alpha \varepsilon_x(\omega)}{1 - \alpha \varepsilon_x(\omega)}; \quad \chi(\omega) = \frac{\omega_0^2 \beta_0 \omega}{\omega_0^2 + 2i\delta_x \omega - \omega^2};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_s(\omega) - \varepsilon_c}{\varepsilon_s(\omega) + 2\varepsilon_c}; \quad \varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \omega_p^2}{\omega_0^2 + 2i\delta_e \omega - \omega^2};$$

$$\omega_0 = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{\pi \varepsilon_c \mu_c N R K_x}},$$

где

$$K_x = \frac{\sqrt{\frac{g}{18 \ln \left( \frac{2g}{r} \right) - 1}}}{\pi \left[ \frac{(R+2r)^2 - R^2}{h} \right] (N^2 - 1) + \frac{rN(R+r)}{l \cos \left[ \frac{\pi}{2(N+1)} \right]}}$$

## 2. Задача дифракции основной волны прямоугольного волновода $H_{10}$ на планарной поперечной вставке из кирального метаматериала, созданного на основе тонкопроволочных проводящих спиральных микроэлементов

В работе проведено решение задачи дифракции волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе на тонком киральном слое, который расположен перпендикулярно направлению передачи мощности. Геометрия задачи приведена на рис. 4.

При  $z=0$  расположен тонкий киральный слой с материальными параметрами  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\chi$ . Толщина кирального слоя меньше длины волны:  $k_0 h \ll 1$  ( $h$  – толщина слоя;  $k_0 = \omega/c$  – волновое число для плоской однородной электромагнитной волны в вакууме). Ограничивающие волновод стенки при  $x=0; a$  и  $y=0; b$  предполагаются идеально проводящими ( $\sigma = \infty$ ).

Задача дифракции волны на поперечном киральном слое в прямоугольном волноводе решалась методом двухсторонних граничных условий (ДПГУ) для тонкого кирального слоя [33].

Предположим, на киральный слой из области  $z < 0$  падает волна  $H_{10}$  с составляющими комплексных амплитуд электромагнитного поля  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_z$ . Для данной геометрии задачи запишем двухсторонние приближенные граничные условия для тонкого кирального слоя следующим образом [33]:

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} - E_y^{(2)} &= \frac{\chi h}{2k_0 n_c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( E_x^{(1)} + E_x^{(2)} \right) + \\ &+ \frac{ik_0 h}{2} \left\{ \mu \left( H_x^{(1)} + H_x^{(2)} \right) + i\chi \left( E_x^{(1)} + E_x^{(2)} \right) \right\}, \\ H_y^{(1)} - H_y^{(2)} &= \frac{i\epsilon' h}{2k_0 n_c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( E_x^{(1)} + E_x^{(2)} \right) - \\ &- \frac{ik_0 h}{2} \left\{ \epsilon \left( E_x^{(1)} + E_x^{(2)} \right) - i\chi \left( H_x^{(1)} + H_x^{(2)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} E_x^{(1)} - E_x^{(2)} &= -\frac{\chi h}{2k_0 n_c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E_y^{(1)} + E_y^{(2)} \right) - \\ &- \frac{ik_0 h}{2} \left\{ \mu \left( H_y^{(1)} + H_y^{(2)} \right) + i\chi \left( E_y^{(1)} + E_y^{(2)} \right) \right\}, \\ H_x^{(1)} - H_x^{(2)} &= \frac{i\epsilon' h}{2k_0 n_c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E_y^{(1)} + E_y^{(2)} \right) + \\ &+ \frac{ik_0 h}{2} \left\{ \epsilon \left( E_y^{(1)} + E_y^{(2)} \right) - i\chi \left( H_y^{(1)} + H_y^{(2)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где  $n_c^2(\omega) = \epsilon(\omega)\mu - \chi^2(\omega)$ ; индексы «1» и «2» соответствуют областям волновода, расположенным при  $z < 0$  и  $z > h$ .

Предположим, что падающая волна  $H_{10}$  падает на киральный слой из  $z = -\infty$  и волновод согласован при  $z = +\infty$ . Поле падающей волны на любой неоднородности создает отражение и прохождение основной волны  $H_{10}$ . Из решения однородных уравнений Гельмгольца с учетом граничных условий при  $x=0; a$  и уравнений Максвелла запишем выражения для тангенциальных составляющих  $E_y^{(j)}$  и  $H_x^{(j)}$  ( $j=1, 2$ ) поля волны  $H_{10}$  в первой и второй изотропных областях [33]:

$$E_y^{(1)} = \left( e^{-i\gamma_{10}z} + R_{10} e^{i\gamma_{10}z} \right) \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right); \quad (20)$$

$$E_y^{(2)} = T_{10} e^{-i\gamma_{10}z} \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right),$$

$$H_x^{(1)} = -\frac{\gamma_{10}}{k_0} \left( e^{-i\gamma_{10}z} - R_{10} e^{i\gamma_{10}z} \right) \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right); \quad (21)$$

$$H_x^{(2)} = -\frac{\gamma_{10}}{k_0} T_{10} e^{-i\gamma_{10}z} \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right),$$

где  $\gamma_{10} = \sqrt{k_0^2 - (\pi/a)^2}$  – постоянная распространения волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе с вакуумным заполнением;  $R_{10}$ ,  $T_{10}$  – неизвестные коэффициенты отражения и прохождения волны  $H_{10}$ . Амплитуда падающей волны  $H_{10}$  предполагалась равной 1.

Вследствие кросс-поляризации поля при падении волны  $H_{10}$  на киральный слой в областях 1 и 2 волновода будут также появляться тангенциальные составляющие  $E_x^{(j)}$  и  $H_y^{(j)}$  ( $j=1, 2$ ) и возникнуть кросс-поляризованная волна  $H_{01}$  с составляющими (когда  $a \geq 2b$ ):

$$E_x^{(1)} = R_{01} e^{i\gamma_{01}z} \sin \left( \frac{\pi y}{b} \right); \quad (22)$$

$$E_x^{(2)} = T_{01} e^{-i\gamma_{01}z} \sin \left( \frac{\pi y}{b} \right);$$

$$H_y^{(1)} = -\frac{\gamma_{01}}{k_0} R_{01} e^{i\gamma_{01}z} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right);$$

$$H_y^{(2)} = \frac{\gamma_{01}}{k_0} T_{01} e^{-i\gamma_{01}z} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

где  $\gamma_{01} = \sqrt{k_0^2 - (\pi/b)^2}$  – постоянная распространения волны  $H_{01}$  в прямоугольном волноводе с вакуумным заполнением;  $R_{01}$ ,  $T_{01}$  – коэффициенты отражения и прохождения волны  $H_{01}$  соответственно.

Следовательно, выражения для тангенциальных к слою составляющих векторов электромагнитного поля имеют следующий вид:

$$E_y^{(1)} = \left( e^{-i\gamma_{10}z} + R_{10} e^{i\gamma_{10}z} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right); \quad (23)$$

$$H_y^{(1)} = -\frac{\gamma_{01}}{k_0} R_{01} e^{i\gamma_{01}z} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right);$$

$$E_x^{(1)} = R_{01} e^{i\gamma_{01}z} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right);$$

$$H_x^{(1)} = -\frac{\gamma_{10}}{k_0} \left( e^{-i\gamma_{10}z} - R_{10} e^{i\gamma_{10}z} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right);$$

в области 1;

$$E_y^{(2)} = T_{10} e^{-i\gamma_{10}z} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right); \quad (24)$$

$$H_y^{(2)} = \frac{\gamma_{01}}{k_0} T_{01} e^{-i\gamma_{01}z} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right);$$

$$E_x^{(2)} = T_{01} e^{-i\gamma_{01}z} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right);$$

$$H_x^{(2)} = -\frac{\gamma_{10}}{k_0} T_{10} e^{-i\gamma_{10}z} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right);$$

в области 2.

Подставляя в ДПГУ (19) выражения (23) и (24), получаем систему из четырех алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $R_{10}$ ,  $R_{01}$ ,  $T_{10}$ ,  $T_{01}$ :

$$\vec{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}, \quad (25)$$

где

$$\vec{\mathbf{R}} = \{R_{10}, R_{01}, T_{10}, T_{01}\};$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \left\{ \left[ -1 - \frac{i\mu\gamma_{10}h}{2} \right], \left[ \frac{\chi\gamma_{10}h}{2} \right], \right.$$

$$\left. \left[ -\frac{\chi k_0 h}{2} (1 + \alpha_{10}^2) \right], \left[ -\frac{\gamma_{10}}{k_0} - \frac{i\varepsilon' k_0 h}{2} (1 + \alpha_{10}^2) \right] \right\}^T.$$

Элементы матрицы  $\vec{\mathbf{A}}$  имеют вид

$$A_{11} = 1 - \frac{i\mu\gamma_{10}h}{2}; \quad A_{12} = \frac{\chi k_0 h}{2} (1 + \alpha_{01}^2);$$

$$A_{13} = \left[ -1 + \frac{i\mu\gamma_{10}h}{2} \right] e^{-i\gamma_{10}h};$$

$$A_{14} = \frac{\chi k_0 h}{2} (1 + \alpha_{01}^2) e^{-i\gamma_{01}h}; \quad A_{21} = \frac{\chi\gamma_{10}h}{2};$$

$$A_{22} = -\frac{\gamma_{01}}{k_0} + \frac{i\varepsilon k_0 h}{2} (1 + \alpha_{01}^2);$$

$$A_{23} = -\frac{\chi\gamma_{10}h}{2} e^{-i\gamma_{10}h};$$

$$A_{24} = \left[ -\frac{\gamma_{01}}{k_0} + \frac{i\varepsilon k_0 h}{2} (1 + \alpha_{01}^2) \right] e^{-i\gamma_{01}h};$$

$$A_{31} = \frac{\chi k_0 h}{2} (1 + \alpha_{10}^2); \quad A_{32} = \left[ -1 + \frac{i\mu\gamma_{01}h}{2} \right];$$

$$A_{33} = \frac{\chi k_0 h}{2} (1 + \alpha_{10}^2) e^{-i\gamma_{10}h};$$

$$A_{34} = \left[ 1 - \frac{i\mu\gamma_{01}h}{2} \right] e^{-i\gamma_{01}h};$$

$$A_{41} = \left[ -\frac{\gamma_{10}}{k_0} + \frac{i\varepsilon k_0 h}{2} (1 - \alpha_{10}^2) \right]; \quad A_{42} = -\frac{\chi\gamma_{01}h}{2};$$

$$A_{43} = \left[ -\frac{\gamma_{10}}{k_0} + \frac{i\varepsilon k_0 h}{2} (1 - \alpha_{10}^2) \right] e^{-i\gamma_{10}h};$$

$$A_{44} = \frac{\chi\gamma_{01}h}{2} e^{-i\gamma_{01}h},$$

где  $\alpha_{10}^2 = \pi^2 / (k_0^2 a^2 n_c^2)$ ;  $\alpha_{01}^2 = \pi^2 / (k_0^2 b^2 n_c^2)$ . Остальные параметры определяются формулами (18).

Решая систему (25) в первом приближении по малому параметру  $k_0 h$ , в аналитическом виде получаем выражения для коэффициентов отражения и прохождения основной и кросс-поляризованной волн  $H_{10}$  и  $H_{01}$ :

$$R_{10} = \frac{k_0 h \varepsilon \left[ \frac{\beta_{01}}{\beta_{10}} \right] \left[ 1 + \alpha_{10} + \eta^2 \beta_{10}^2 \right]}{2i\beta_{10} + k_0 h \varepsilon (1 + \alpha_{01}) \left\{ 1 + \eta^2 \beta_{01}^2 (\beta_{10} - \beta_{01}) \right\}}; \quad (26)$$

$$T_{10} = \frac{k_0 h \varepsilon (1 + \alpha_{01} + \eta^2 \beta_{01}^2) e^{-i k_0 h \beta_{10}}}{2i\beta_{01} + k_0 h \varepsilon (1 + \alpha_{01}) \left\{ 1 + \eta^2 \beta_{01}^2 (\beta_{10} - \beta_{01}) \right\}};$$

$$R_{01} = \frac{i\chi k_0 h \left[ -\beta_{10} + \beta_{01} (1 - \alpha_{10}) \right]}{2i\beta_{01} + k_0 h \varepsilon (1 + \alpha_{01}) \left\{ 1 + \eta^2 \beta_{01}^2 (\beta_{10} - \beta_{01}) \right\}};$$

$$T_{01} = \frac{i\chi k_0 h \left[ \beta_{10} + \beta_{01} (1 - \alpha_{10}) \right] e^{-i k_0 h \beta_{01}}}{2i\beta_{01} + k_0 h \varepsilon (1 + \alpha_{01}) \left\{ 1 + \eta^2 \beta_{01}^2 (\beta_{10} - \beta_{01}) \right\}},$$

где

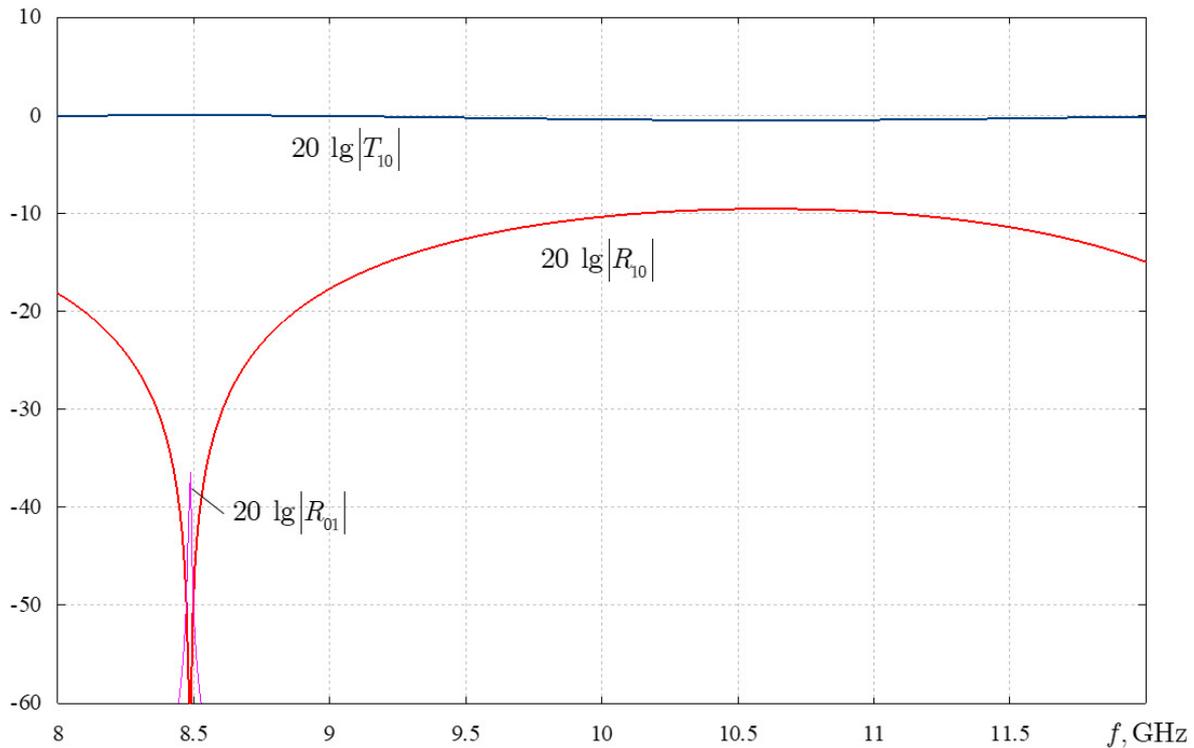


Рис. 5. Частотные зависимости прошедшей и отраженной мощностей для случая одновитковых спиралей  
Fig. 5. Frequency dependences of the transmitted and reflected powers for the case of single-turn spirals

$$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}; \quad \beta_{10} = \sqrt{1 - [\pi/(k_0 a)]^2};$$

$$\beta_{01} = \sqrt{1 - [\pi/(k_0 b)]^2}.$$

### 3. Численное моделирование

При численном моделировании рассматривался прямоугольный волновод, в поперечной плоскости которого был расположен слой из кирального метаматериала заранее заданной толщины. Контейнер метаматериала представлял собой пенополистирол с относительной диэлектрической проницаемостью 1,5. Волновод был заполнен вакуумом с относительной диэлектрической проницаемостью, равной 1. В работе были рассчитаны частотные зависимости прошедшей и отраженной мощностей основной  $H_{10}$  и кросс-поляризованной  $H_{01}$  волн при падении основной волны на киральный слой.

Рассмотрим случай, когда метаматериал образуют спирали с одним витком закрутки ( $N = 1$ ).

Исходные значения параметров метаматериала:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1; \quad \varepsilon_2 = 1,5 - 10^{-5}i; \quad N = 1;$$

$$R = 0,0025 \text{ м}; \quad r = 0,001 \text{ м};$$

$$d = 0,0015 \text{ м}; \quad h = 0,005 \text{ м}; \quad l = 0,0015 \text{ м}.$$

На рис. 5 приведены зависимости прошедшей  $20 \lg|T_{10}|$  и отраженной  $20 \lg|R_{10}|$  мощностей вол-

ны  $H_{10}$ , а также прошедшей  $20 \lg|T_{01}|$  и отраженной  $20 \lg|R_{01}|$  мощностей волны  $H_{01}$  от частоты в рабочем режиме прямоугольного волновода при  $N = 1$ .

Как видно из рис. 5, для КММ на основе одновитковых спиралей основная волна  $H_{10}$  проходит через киральный слой практически без ослабления, так как ослабление прошедшей мощности на всех частотах рабочего диапазона близко к 0 дБ. Отражение основной волны минимально и в максимуме достигает -10 дБ на частоте 10,5 ГГц; также имеется резонансный минимум отражения основной волны  $H_{10}$  вблизи частоты 8,5 ГГц. Вблизи этой же частоты отражается кросс-поляризованная волна  $H_{01}$ , однако уровень ее отражения в максимуме составляет -37,5 дБ.

Рассмотрим случай, когда метаматериал образуют спирали с двумя витками закрутки ( $N = 2$ ).

Значения параметров метаматериала:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1; \quad \varepsilon_2 = 1,5 - 10^{-5}i; \quad N = 2;$$

$$R = 0,0025 \text{ м}; \quad r = 0,001 \text{ м};$$

$$d = 0,0015 \text{ м}; \quad h = 0,005 \text{ м}; \quad l = 0,0015 \text{ м}.$$

На рис. 6 приведены зависимости прошедшей  $20 \lg|T_{10}|$  и отраженной  $20 \lg|R_{10}|$  мощностей волны  $H_{10}$ , а также прошедшей  $20 \lg|T_{01}|$  и отраженной  $20 \lg|R_{01}|$  мощностей волны  $H_{01}$  от частоты в рабочем режиме прямоугольного волновода при  $N = 2$ .

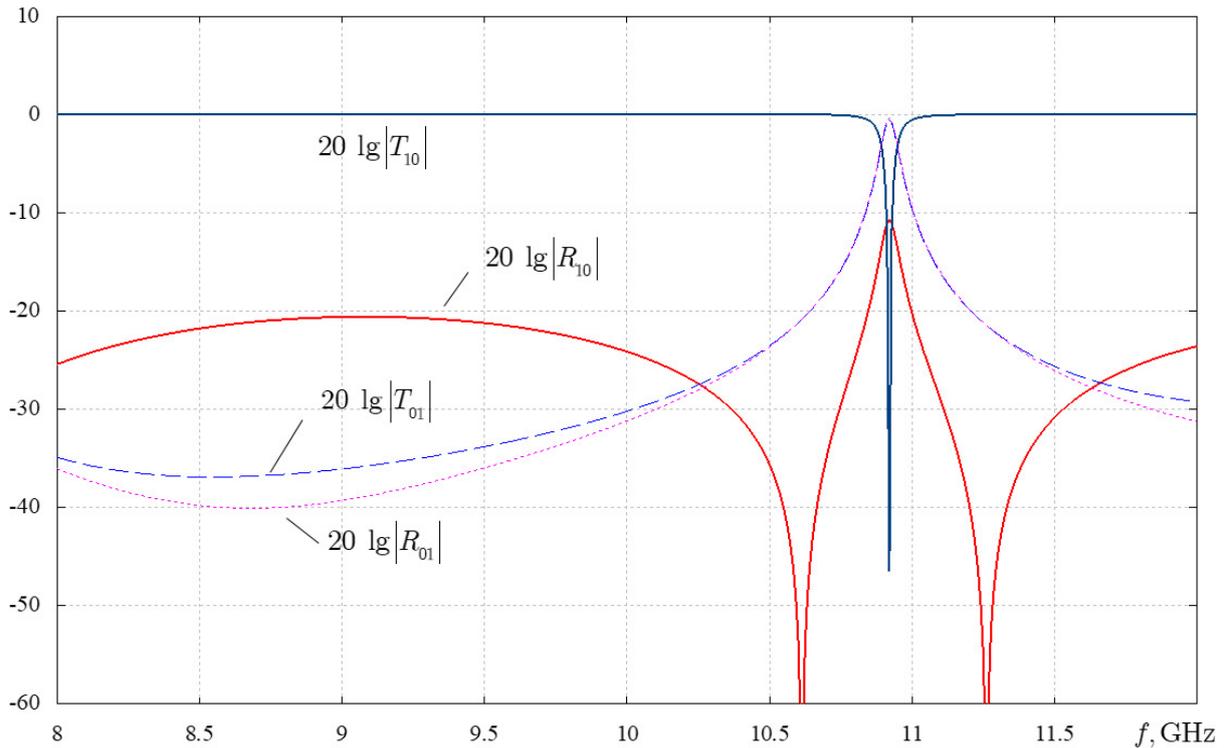


Рис. 6. Частотные зависимости прошедшей и отраженной мощностей для случая двухвитковых спиралей  
 Fig. 6. Frequency dependences of the transmitted and reflected powers for the case of two-turn spirals

Как видно из рис. 6, для двухвитковых спиралей возникает частотная селективность: на частоте 10,9 ГГц наблюдаются резкий минимум прохождения основной волны через киральный слой в волноводе, то есть вблизи данной частоты в прямоугольном волноводе основной становится волна  $H_{01}$ , так как прошедшая и отраженная мощности для нее имеют максимумы. Наличие кирального слоя на основе двухвитковых спиралей приводит к тому, что вблизи резонансной частоты волновод не пропускает изначально основную волну  $H_{10}$ , а происходит переход в режим работы на кросс-поляризованной волне  $H_{01}$ , которая становится основной. Кроме того, из рис. 6 видно, что во всем рабочем диапазоне частот существуют обе волны, хотя амплитуда кросс-поляризованной волны крайне мала (кроме области вблизи резонансной частоты).

Рассмотрим случай, когда метаматериал образуют спирали с тремя витками закрутки. Значения параметров метаматериала:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1; \quad \varepsilon_2 = 1,5 \cdot 10^{-5} i; \quad N = 3;$$

$$R = 0,0025 \text{ м}; \quad r = 0,001 \text{ м};$$

$$d = 0,0015 \text{ м}; \quad h = 0,005 \text{ м}; \quad l = 0,0015 \text{ м}.$$

На рис. 7 приведены зависимости прошедшей  $20 \lg |T_{10}|$  и отраженной  $20 \lg |R_{10}|$  мощностей волны  $H_{10}$ , а также прошедшей  $20 \lg |T_{01}|$  и отраженной  $20 \lg |R_{01}|$  мощностей волны  $H_{01}$  от частоты в

рабочем режиме прямоугольного волновода при  $N = 3$ .

Как видно из рис. 7, в этом случае также имеет место ярко выраженная частотная селективность: вблизи резонансной частоты 10,1 ГГц основная волна  $H_{10}$  перестает распространяться по волноводу и частично отражается от кирального слоя, в то время как кросс-поляризованная волна проходит в область за киральный слой с большей амплитудой, чем у основной волны. На частоте 11,4 ГГц наблюдаются минимум прохождения основной волны через киральный слой в волноводе, при этом наличие кирального слоя на основе трехвитковых спиралей приводит к тому, что вблизи резонансной частоты волновод не пропускает изначально основную волну  $H_{10}$ , а происходит переход в режим работы на кросс-поляризованной волне  $H_{01}$ , которая становится основной.

Таким образом, в результате анализа можно сделать вывод, что для получения сильного эффекта частотной селективности предпочтительно использовать в качестве киральных микроэлементов двух- и трехвитковые спирали, которые позволяют реализовать режим замены основного типа волны с  $H_{10}$  на  $H_{01}$  вблизи резонансных частот. Это явление не связано с волноводной дисперсией, а возникает вследствие вставки в волновод гетерогенного кирального метаматериала.

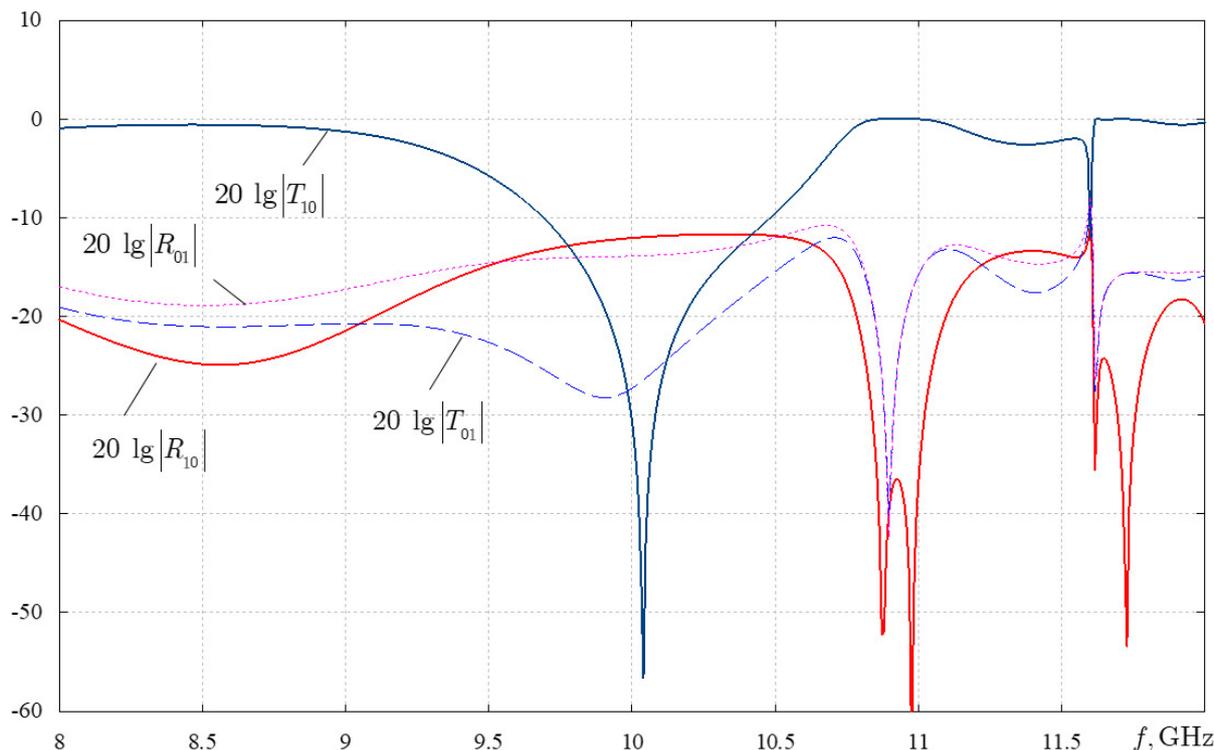


Рис. 7. Частотные зависимости прошедшей и отраженной мощностей для случая трехвитковых спиралей  
Fig. 7. Frequency dependences of transmitted and reflected powers for the case of three-turn spirals

## Заключение

В работе построена математическая модель кирального метаматериала на основе тонкопроволочных проводящих спиралей, учитывающая киральность, гетерогенность и дисперсию материальных параметров. В работе была доказана частотная селективность прохождения волны через киральный слой, расположенный в поперечной плоскости прямоугольного волновода, а также что максимальной степенью частотной селективности обладает киральный метаматериал на основе двухвитковых тонкопроволочных спиралей. Показано, что при вставке кирального мета-

материала в прямоугольный волновод неизбежно кроме волны основного типа  $H_{10}$  возникает кросс-поляризованная волна  $H_{01}$ .

Анализ частотных зависимостей модулей коэффициентов отражения и прохождения основной  $H_{10}$  и кросс-поляризованной  $H_{01}$  показал, что в некоторых узких интервалах частот в одноволновом режиме возникают ситуации, когда реализуется режим замены основного типа волны с  $H_{10}$  на  $H_{01}$  вблизи резонансных частот.

Рассматриваемая линия передачи может найти применение при создании частотно селективных фильтров и преобразователей поляризации СВЧ-диапазона.

## Список литературы

1. Capolino F. Theory and Phenomena of Metamaterials. Boca Raton: Taylor & Francis – CRC Press, 2009. 992 p.
2. Engheta N., Ziolkowski R.W. Metamaterials: Physics and Engineering Explorations. Hoboken: Wiley, 2006. 414 p.
3. Iyer A.K., Alù A., Epstein A. Metamaterials and Metasurfaces – Historical Context, Recent Advances, and Future Directions // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2020. Vol. 68, no. 3. P. 1223–1231. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2020.2969732>
4. Pendry J. A chiral route to negative refraction // Science. 2004. Vol. 306, no. 5700. P. 1353–1355. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1104467>
5. Zheludev N.I. A Roadmap for metamaterials // Opt. Photonics News. 2011. Vol. 22, no. 3. P. 30–35. DOI: <https://doi.org/10.1364/OPN.22.3.000030>
6. Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media / I.V. Lindell [et al.]. London: Artech House, 1994. 291 p.
7. Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V. Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 121 p.
8. Caloz C., Sihvola A. Electromagnetic chirality, Part 1: The microscopic perspective [electromagnetic perspectives] // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2020. Vol. 62, no. 1. P. 58–71. DOI: <https://doi.org/10.1109/MAP.2019.2955698>

9. Третьяков С.А. Электродинамика сложных сред: киральные, би-изотропные и некоторые бианизотропные материалы // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 10. С. 1457–1470.
10. Киральные электродинамические объекты / Б.З. Каценеленбаум [и др.] // Успехи физических наук. 1997. Т. 167, № 11. С. 1201–1212. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199711c.1201>
11. Слюсар В.И. Метаматериалы в антенной технике: история и основные принципы // Электроника: НТБ. 2009. № 7. С. 10–19. URL: [https://www.electronics.ru/files/article\\_pdf/0/article\\_287\\_909.pdf](https://www.electronics.ru/files/article_pdf/0/article_287_909.pdf)
12. Вендик И.Б., Вендик О.Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот (Обзор) // Журнал технической физики. 2013. Т. 83, № 1. С. 3–28. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/41403>
13. Pozar D.M. Microstrip antennas and arrays on chiral substrates // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1992. Vol. 40, no. 10. P. 1260–1263. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.182462>
14. Varadan V.K., Varadan V.V., Lakhtakia A. Propagation in parallel-plate wave-guide wholly filled with a chiral medium // Journal of Wave-Material Interaction. 1988. Vol. 3, no. 3. P. 267–272.
15. Cory H., Rosenhouse I. Electromagnetic wave propagation along a chiral slab // IEE Proceedings H (Microwaves, Antennas and Propagation). 1991. Vol. 138, no. 1. P. 51–54. DOI: <https://doi.org/10.1049/ip-h-2.1991.0009>
16. Oksanen M.I., Koivisto P., Tretyakov S.A. Vector circuit method applied for chiral slab waveguides // Journal of Lightwave Technology. 1992. Vol. 10, no. 2. P. 150–155. DOI: <https://doi.org/10.1109/50.120569>
17. Eftimiu C., Pearson L.W. Guided electromagnetic waves in chiral media // Radio Science. 1989. Vol. 24, no. 3. P. 351–359. DOI: <https://doi.org/10.1029/RS024i003p00351>
18. Неганов В.А., Осипов О.В. Собственные волны плоского двухслойного кирально-диэлектрического волновода // Радиотехника. 2003. № 5. С. 21–25.
19. Pelet P., Engheta N. The theory of chirowaveguides // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1990. Vol. 38, no. 1. P. 90–98. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.43593>
20. Oksanen M.I., Koivisto P.K., Tretyakov S.A. Plane chiral waveguides with boundary impedance conditions // Microwave and Optical Technology Letters. 1992. Vol. 5, no. 2. P. 68–72. DOI: <https://doi.org/10.1002/mop.4650050207>
21. Pelet P., Engheta N. Modal analysis for rectangular chirowaveguides with metallic walls using the finite-difference method // Journal Electromagnetic Waves and Applications. 1992. Vol. 6, no. 9. P. 1277–1285. DOI: <https://doi.org/10.1163/156939392X00724>
22. Moiseeva N.M. Eigen modes of planar chiral waveguides // Computer Optics. 2014. Vol. 38, no. 2. P. 198–203. DOI: <https://doi.org/10.18287/0134-2452-2014-38-2-198-203>
23. Kamenetskii E.O. On the technology of making chiral and bianisotropic waveguides for microwave propagation // Microwave and Optical Technology Letters. 1996. Vol. 11, no. 2. P. 103–107. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1098-2760\(19960205\)11:2%3C103::AID-MOP17%3E3.0.CO;2-F](https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2760(19960205)11:2%3C103::AID-MOP17%3E3.0.CO;2-F)
24. Аралкин М.В., Дементьев А.Н., Осипов О.В. Математические модели киральных метаматериалов на основе многозаходных проводящих элементов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 1. С. 8–19. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.1.8-19>
25. Аралкин М.В., Дементьев А.Н., Осипов О.В. Исследование электромагнитных характеристик планарных киральных метаструктур на основе составных спиральных компонентов с учетом гетерогенной модели Бруггемана // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2020. Т. 23, № 3. С. 44–55. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.44-55>
26. Нещерет А.М. Разработка теоретических основ и методов исследований излучающих и переизлучающих структур на основе киральных метаматериалов: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. Самара, 2012. 379 с.
27. Сушко М.Я., Криськив С.К. Метод компактных групп в теории диэлектрической проницаемости гетерогенных систем // Журнал технической физики. 2009. Т. 79, № 3. С. 97–101. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/9645>
28. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von eterogenen Substanzen, I. Dielektrizitatskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen // Ann. Phys. 1935. Vol. 416, no. 7. P. 636–664. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19354160705>
29. Garnett J.C. Maxwell. Colours in metal glasses and in metallic films // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A. 1904. Vol. 203. P. 385–420.
30. Semchenko I.V., Tretyakov S.A., Serdyukov A.N. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years // Progress in Electromagnetics Research. 1996. Vol. 12. P. 335–370.
31. Condon E.U. Theories of optical rotatory power // Rev. Mod. Phys. 1937. Vol. 9, no. 4. P. 432–457. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.9.432>
32. Осипов О.В., Юрасов В.И., Почепцов А.О. Киральный метаматериал для частотно-селективной концентрации энергии сверхвысокочастотного излучения // Инфокоммуникационные технологии. 2014. Т. 12, № 4. С. 76–82.
33. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и связь, 2006. 280 с.
34. Исследование антенных комплексов с использованием киральных метаматериалов и фрактальной геометрии излучателей для систем МІМО / А.Н. Беспалов [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 4. С. 97–110. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.97-110>
35. Неганов В.А., Градинарь И.М. Электродинамические свойства упорядоченных метаматериалов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15, № 1. С. 18–24.

## References

1. Capolino F. *Theory and Phenomena of Metamaterials*. Boca Raton: Taylor & Francis – CRC Press, 2009, 992 p.
2. Engheta N., Ziolkowski R.W. *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*. Hoboken: Wiley, 2006, 414 p.
3. Iyer A.K., Alù A., Epstein A. Metamaterials and metasurfaces – historical context, recent advances, and future directions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2020, vol. 68, no. 3, pp. 1223–1231. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2020.2969732>
4. Pendry J. A chiral route to negative refraction. *Science*, 2004, vol. 306, no. 5700, pp. 1353–1355. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1104467>
5. Zheludev N.I. A Roadmap for metamaterials. *Opt. Photonics News*, 2011, vol. 22, no. 3, pp. 30–35. DOI: <https://doi.org/10.1364/OPN.22.3.000030>
6. Lindell I.V. et al. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*. London: Artech House, 1994, 291 p.
7. Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media. Lecture Notes in Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 121 p.
8. Caloz C., Sihvola A. Electromagnetic chirality, Part 1: The microscopic perspective [electromagnetic perspectives]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2020, vol. 62, no. 1, pp. 58–71. DOI: <https://doi.org/10.1109/MAP.2019.2955698>
9. Tretyakov S.A. Electrodynamics of complex media: chiral, bi-isotropic and some bianisotropic materials. *Radiotekhnika i elektronika*, 1994, vol. 39, no. 10, pp. 1457–1470. (In Russ.)
10. Katsenelenbaum B.Z. et al. Chiral electrodynamic objects. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1997, vol. 167, no. 11, pp. 1201–1212. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199711c.1201> (In Russ.)
11. Slyusar V.I. Metamaterials in antenna technology: history and basic principles. *Elektronika: NTB*, 2009, no. 7, pp. 10–19. URL: [https://www.electronics.ru/files/article\\_pdf/0/article\\_287\\_909.pdf](https://www.electronics.ru/files/article_pdf/0/article_287_909.pdf) (In Russ.)
12. Vendik I.B., Vendik O.G. Metamaterials and their application in microwave technology (Review). *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2013, vol. 83, no. 1, pp. 3–28. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/41403> (In Russ.)
13. Pozar D.M. Microstrip antennas and arrays on chiral substrates. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1992, vol. 40, no. 10, pp. 1260–1263. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.182462>
14. Varadan V.K., Varadan V.V., Lakhtakia A. Propagation in parallel-plate wave-guide wholly filled with a chiral medium. *Journal of Wave-Material Interaction*, 1988, vol. 3, no. 3, pp. 267–272.
15. Cory H., Rosenhouse I. Electromagnetic wave propagation along a chiral slab. *IEE Proceedings H (Microwaves, Antennas and Propagation)*, 1991, vol. 138, no. 1, pp. 51–54. DOI: <https://doi.org/10.1049/ip-h-2.1991.0009>
16. Oksanen M.I., Koivisto P., Tretyakov S.A. Vector circuit method applied for chiral slab waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 1992, vol. 10, no. 2, pp. 150–155. DOI: <https://doi.org/10.1109/50.120569>
17. Eftimiou C., Pearson L.W. Guided electromagnetic waves in chiral media. *Radio Science*, 1989, vol. 24, no. 3, pp. 351–359. DOI: <https://doi.org/10.1029/RS024i003p00351>
18. Neganov V.A., Osipov O.V. Eigenwaves of a plane two-layer chiral-dielectric waveguide. *Radiotekhnika*, 2003, no. 5, pp. 21–25. (In Russ.)
19. Pelet P., Engheta N. The theory of chirowaveguides. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1990, vol. 38, no. 1, pp. 90–98. DOI: <https://doi.org/10.1109/8.43593>
20. Oksanen M.I., Koivisto P.K., Tretyakov S.A. Plane chiral waveguides with boundary impedance conditions. *Microwave and Optical Technology Letters*, 1992, vol. 5, no. 2, pp. 68–72. DOI: <https://doi.org/10.1002/mop.4650050207>
21. Pelet P., Engheta N. Modal analysis for rectangular chirowaveguides with metallic walls using the finite-difference method. *Journal Electromagnetic Waves and Applications*, 1992, vol. 6, no. 9, pp. 1277–1285. DOI: <https://doi.org/10.1163/156939392X00724>
22. Moiseeva N.M. Eigen modes of planar chiral waveguides. *Computer Optics*, 2014, vol. 38, no. 2, pp. 198–203. DOI: <https://doi.org/10.18287/0134-2452-2014-38-2-198-203>
23. Kamenetskii E.O. On the technology of making chiral and bianisotropic waveguides for microwave propagation. *Microwave and Optical Technology Letters*, 1996, vol. 11, no. 2, pp. 103–107. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1098-2760\(19960205\)11:2%3C103::AID-MOP17%3E3.0.CO;2-F](https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2760(19960205)11:2%3C103::AID-MOP17%3E3.0.CO;2-F)
24. Aralkin M.V., Dement'ev A.N., Osipov O.V. Mathematical models of chiral metamaterials based on multi-pass conducting elements. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2020, vol. 23, no. 1, pp. 8–19. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.1.8-19> (In Russ.)
25. Aralkin M.V., Dement'ev A.N., Osipov O.V. Investigation of the electromagnetic characteristics of planar chiral metastructures based on compound helical components, taking into account the heterogeneous Bruggeman model. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2020, vol. 23, no. 3, pp. 44–55. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.44-55> (In Russ.)
26. Neshcheret A.M. Development of theoretical foundations and methods for studying radiating and reradiating structures based on chiral metamaterials: dis. ... d-ra. fiz.-mat. nauk. Samara, 2012, 379 p.
27. Sushko M.Ya., Kris'kiv S.K. Compact group method in the theory of permittivity of heterogeneous systems. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2009, vol. 79, no. 3, pp. 97–101. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/9645> (In Russ.)
28. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von eterogenen Substanzen, I. Dielektrizitatskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen. *Ann. Phys.*, 1935, vol. 416, no. 7, pp. 636–664. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19354160705>
29. Garnett J.C. Maxwell. Colours in metal glasses and in metallic films. *Phylos. Trans. R. Soc. London. Ser. A*, 1904, vol. 203, pp. 385–420.
30. Semchenko I.V., Tretyakov S.A., Serdyukov A.N. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years. *Progress in Electromagnetics Research*, 1996, vol. 12, pp. 335–370.

31. Condon E.U. Theories of optical rotatory power. *Rev. Mod. Phys.*, 1937, vol. 9, no. 4, pp. 432–457. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.9.432>
32. Osipov O.V., Yurasov V.I., Pocheptsov A.O. Chiral metamaterial for frequency selective energy concentration of microwave radiation. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2014, vol. 12, no. 4, pp. 76–82. (In Russ.)
33. Neganov V.A., Osipov O.V. *Reflective, Waveguide and Radiating Structures with Chiral Elements*. Moscow: Radio i svyaz', 2006, 280 p. (In Russ.)
34. Bepalov A.N. et al. Study of antenna complexes using chiral metamaterials and fractal geometry of emitters for MIMO systems. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2020, vol. 23, no. 4, pp. 97–110. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.97-110> (In Russ.)
35. Neganov V.A., Gradinar' I.M. Electrodynamic properties of ordered metamaterials. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2012, vol. 15, no. 1, pp. 18–24. (In Russ.)

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2023, vol. 26, no. 1, pp. 93–105

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.93-105

Received 6 December 2022

Accepted 9 January 2023

### Investigation of the electromagnetic properties of a transverse insert based on a planar layer of a chiral metamaterial in a rectangular waveguide

*Ivan Yu. Buchnev, Oleg V. Osipov*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – The paper considers the solution of the problem of diffraction of the fundamental wave of a rectangular waveguide  $H_{10}$  on a planar transverse insert based on a chiral metamaterial created on the thin-wire conducting helices. To describe the chiral layer, a particular mathematical model is constructed that takes into account the properties of heterogeneity and dispersion of the permittivity and the chirality parameter of the artificial media. The well-known in physics model of Maxwell Garnett was used to take into account the heterogeneity property. To take into account the permittivity dispersion the Drude–Lorentz formula was applied and for the chirality parameter was used the Condon formula. The problem of diffraction of the rectangular waveguide main wave on a planar layer of a chiral metamaterial was solved by the partial regions method and was reduced to a system of linear algebraic equations for unknown reflection and transmission coefficients. It is shown that in the presence of a transverse chiral layer in the waveguide structure, a wave of the  $H_{01}$  type cross-polarized with respect to the main one arises. An analysis of the frequency dependences of the moduli of the reflection and transmission coefficients of the fundamental  $H_{10}$  and cross-polarized  $H_{01}$  showed that in some narrow frequency intervals in the single-mode gap, situations arise when the fundamental wave type is replaced from  $H_{10}$  to  $H_{01}$  near resonant frequencies. The transmission line under consideration can find application in the creation of frequency selective filters and polarization converters in the microwave range.

*Keywords* – chiral media; chiral metamaterial; metamaterial; helix; spatial dispersion; frequency selectivity; Maxwell Garnett model; Condon model; rectangular waveguide; single-mode; fundamental mode; cross-polarization.

---

### Информация об авторах

**Бучнев Иван Юрьевич**, 1995 г. р., аспирант кафедры высшей математики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика метаматериалов.

*E-mail:* v.buchnev@psuti.ru

**Осипов Олег Владимирович**, 1975 г. р., доктор физико-математических наук, и.о. заведующего кафедрой высшей математики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика метаматериалов, устройства СВЧ и антенны, нелинейная оптика.

*E-mail:* o.osipov@psuti.ru

### Information about the Authors

**Ivan Yu. Buchnev**, born in 1995, post-graduate student of the Department of Higher Mathematics, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics of metamaterials.

*E-mail:* v.buchnev@psuti.ru

**Oleg V. Osipov**, born in 1975, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, acting head of the Department of Higher Mathematics, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics of metamaterials, microwave devices and antennas, nonlinear optics.

*E-mail:* o.osipov@psuti.ru

## Поиск оптимальной формы огибающей сверхвысокочастотного импульса мощного генератора в предельно допустимом режиме излучения

А.А. Волков

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»  
394064, Россия, г. Воронеж,  
ул. Старых Большевиков, 54а

*Аннотация* – В статье сформулирована задача выбора формы огибающей сверхвысокочастотного импульса мощного генератора, обеспечивающей максимум излучаемой поверхностной антенной энергии в предпробойном режиме, в виде изопериметрической задачи вариационного исчисления и получено ее решение. Оптимизация проводилась при фиксированной эффективной длительности огибающей. Установлено, что оптимальная форма зависит от эффективной длительности импульса и представляет собой усеченный овал. При увеличении длительности импульса оптимальная форма стремится к прямоугольной. Получены аналитические выражения, связывающие эффективную длительность и предельно допустимую энергию с пробойным полем для импульсов с оптимальной, прямоугольной, гауссовой и треугольной огибающими. Проведен расчет зависимостей пробойного поля и предельно допустимой энергии импульсов с указанными формами огибающих от эффективной длительности импульса в диапазоне реализуемых длительностей мощных релятивистских сверхвысокочастотных генераторов. Дан сравнительный анализ полученных результатов.

*Ключевые слова* – пробой воздуха; электрическая прочность; поверхностная антенна; электромагнитное поле; сверхвысокочастотный генератор; изопериметрическая задача.

### Введение

В ряде важнейших практических приложений радиоэлектроники, таких как радиолокация, радиосвязь, радиоэлектронное противодействие и др., могут найти применение импульсные релятивистские сверхвысокочастотные (СВЧ) генераторы [1]. Класс данных приборов характеризуется наивысшими в диапазоне СВЧ показателями излучаемой мощности, верхний предел которой у некоторых образцов превосходит уровень 10 ГВт [2; 3].

Эффективность решения задач с использованием радиоизлучающих средств в значительной степени определяется энергией и мощностью излучения, формируемого системой «генератор – антенна». Однако возможности по увеличению энергетических параметров излучения всегда ограничены, с одной стороны, предельно допустимыми режимами работы генератора, а с другой – электрической прочностью антенно-фидерного тракта. При формировании электромагнитных полей (ЭМП) сверхбольшой мощности электрический пробой в антенне может оказаться решающим фактором, ограничивающим энергию и мощность излучения.

Вывод электромагнитной энергии релятивистского СВЧ-генератора в атмосферу осуществляется через диэлектрическую перегородку, разделяющую вакуумные тракты прибора и окружающее

воздушное пространство. Эта перегородка, как правило, размещается в раскрыте поверхностной антенны (рупора или открытого конца волновода), соединенной с рабочей камерой генератора, или же в торце самой рабочей камеры. При излучении ЭМП большой мощности вблизи поверхности перегородки со стороны атмосферы может возникнуть СВЧ-пробой воздуха, что, в свою очередь, приведет к снижению эффективности излучения.

Обеспечение электрической прочности антенно-фидерных трактов является одной из основных проблем при проектировании радиоизлучающих средств большой мощности. Особенно остро эта проблема стоит при разработке автономных формирователей ЭМП, размещаемых на носителях с жесткими массогабаритными ограничениями. Из теории пробоя газов [4] известно, что повышению электрической прочности воздуха в нормальных атмосферных условиях способствует укорочение импульса ЭМП. Однако при этом в диапазоне реализуемых мощными релятивистскими СВЧ-генераторами длительностей импульсов (десятки – сотни наносекунд) предельно допустимая энергия импульса ЭМП уменьшается [5], что в большинстве практических задач приводит к снижению предельной эффективности радиоизлучающего средства. Поэтому поиск возможностей повышения предельно допустимых энергетиче-

ских параметров СВЧ-импульса в излучающей антенне остается актуальным.

Одним из основных параметров СВЧ-импульса, помимо длительности, частоты и пиковой амплитуды, является форма его огибающей. Она определяет энергию импульса, а также плотность образующихся под воздействием импульса электронов и, следовательно, условия пробоя воздуха в излучающей антенне. Поэтому предельно допустимые пробойные параметры СВЧ-импульса будут зависеть не только от его длительности и частоты, но и от формы огибающей. Однако в известной литературе закономерности, связывающие форму огибающей с пробойными параметрами СВЧ-импульса, как правило, не рассматриваются.

Цель статьи – поиск формы огибающей импульса электрического поля мощного СВЧ-генератора, обеспечивающей максимум его энергии в предельно допустимом режиме излучения. Под предельно допустимым режимом излучения в настоящей работе понимается такой режим, при котором за время действия импульса ЭМП плотность электронов в воздухе вблизи излучающей поверхности антенны достигает критической величины.

## 1. Исходные соотношения и постановка задачи

Энергия импульса ЭМП, выводимого в атмосферу, в общем случае определяется соотношением

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{МГН}}(t) dt, \quad (1)$$

где  $P_{\text{МГН}}(t)$  – мгновенная мощность импульса на излучающей поверхности антенны.

Ниже будет рассмотрен случай, когда антенна СВЧ-генератора возбуждается синхронно, а вектора напряженностей электрического и магнитного полей ортогональны вектору нормали к излучающей поверхности. В этом случае пространственно-временное распределение напряженности электрического поля в антенне можно представить выражением

$$E_S(\mathbf{r}, t) = E(t) f(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где  $E(t)$  – временная зависимость напряженности электрического поля;  $f(\mathbf{r})$  – безразмерная нормированная функция, описывающая распределение поля по поверхности антенны;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, указывающий положение излучающей элементарной площадки  $dS$  на поверхности антенны.

Мощность импульса ЭМП в антенне будет равна

$$P_{\text{МГН}}(t) = \frac{1}{Z_0} \int_S E_S^2(\mathbf{r}, t) dS, \quad (3)$$

где  $Z_0 = 120\pi$  Ом – волновое сопротивление свободного пространства.

Импульсы излучения мощных релятивистских СВЧ-генераторов, как правило, имеют амплитудную модуляцию и узкий спектр. Временная зависимость напряженности электрического поля таких импульсов имеет вид

$$E(t) = E_m(t) \sin(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

где  $E_m(t)$  – огибающая импульса (функция амплитудной модуляции);  $\omega$  – круговая частота;  $\varphi$  – начальная фаза. Огибающая  $E_m(t)$  меняется медленно на периоде СВЧ-колебания, т. е. выполняется условие

$$\frac{dE_m(t)}{dt} \ll \omega E_m(t). \quad (5)$$

Подстановка (3) в (1) с учетом выражений (2), (4) и условия (5) приводит к формуле

$$W = \frac{\alpha S}{2Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_m^2(t) dt, \quad (6)$$

где  $S$  – площадь излучающей поверхности;  $\alpha$  – коэффициент формы пространственного распределения возбуждающего поля по излучающей поверхности

$$\alpha = \frac{1}{S} \int_S f^2(r) dS. \quad (7)$$

Выражение (6) представляет собой интегральный функционал огибающей. При наличии ограничений на функцию  $E_m(t)$  этот функционал может достигать экстремальных значений.

В предельно допустимом режиме излучения ограничение на функцию  $E_m(t)$  вытекает из условия достижения плотностью электронов в воздушной среде вблизи излучающей поверхности антенны критического значения  $n_{\text{кр}}$  за время действия импульса ЭМП. Этому условию соответствует равенство [6]:

$$n_{\text{кр}} = n_0 \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} v(E_m(t)) dt\right), \quad (8)$$

где  $n_0$  – начальная плотность электронов;  $v(E_m(t))$  – скорость появления свободных электронов.

Стандартная для задач вариационного исчисления форма записи равенства, выражающего ограничение на искомую функцию, и соответствующая (8), имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(E_m(t)) dt = \gamma, \quad (9)$$

где  $\gamma = \ln(n_{кр}/n_0)$ .

Практический интерес представляет сравнение энергетических параметров импульсов разной формы и примерно одинаковой длительности. Длительность импульса СВЧ-генераторов определяет их импульсную мощность и может принимать значения из ограниченного временного диапазона.

Для оценки длительности импульсов используются разные подходы, зависящие от вида импульсов. Наиболее общим подходом, позволяющим оценивать длительности импульсов разных видов, является метод моментов [7], в соответствие с которым эффективная длительность импульса и, соответственно, его огибающей  $\tau_{эф}$  определяется выражением

$$\tau_{эф} = 2 \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-t_0)^2 E_m^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} E_m^2(t) dt}}, \quad (10)$$

где  $t_0$  – временная координата середины импульса

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t E_m^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} E_m^2(t) dt}. \quad (11)$$

Начало координат оси времени можно выбрать так, чтобы оно совпало с серединой импульса. В этом случае  $t_0 = 0$ , а условия, накладываемые на функцию  $E_m(t)$ , согласно (10) и (11), примут вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - 0,25\tau_{эф}^2) E_m^2(t) dt = 0, \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t E_m^2(t) dt = 0. \quad (13)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию функции  $E_m(t)$ , доставляющей экстремум функционалу (6) при выполнении условий (9), (12) и (13).

## 2. Решение задачи выбора формы огибающей

Решаемая задача представляет собой изопериметрическую задачу вариационного исчисления [8]. В соответствии с методикой решения

таких задач составляется и исследуется на экстремум вспомогательный интегральный функционал:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(E_m, t) dt, \quad (14)$$

где  $\Phi(E_m, t)$  – вспомогательная подинтегральная функция

$$\Phi(E_m, t) = \frac{\alpha S}{2Z_0} (E_m^2 + k_1 v(E_m) + k_2 (t^2 - 0,25\tau_{эф}^2) E_m^2 + k_3 t E_m^2), \quad (15)$$

где  $k_1, k_2, k_3$  – неизвестные коэффициенты, определяемые из условий (9), (12) и (13). Искомая функция  $E_m(t)$  должна обеспечивать требование конечности энергии СВЧ-импульса.

Для составления уравнения Эйлера [8] необходимо задать явный вид зависимости  $v(E_m)$ . В моноимпульсном режиме релятивистских СВЧ-генераторов основными процессами, определяющими скорость нарастания электронной концентрации в раскрые антенны, являются процессы ионизации молекул газов, составляющих воздух, и прилипания к ним свободных электронов. Процессы рекомбинации, диффузии и отлипания электронов для рассматриваемых диапазонов частот и длительностей СВЧ-импульсов малосущественны [6; 9] и далее учитываться не будут.

Увеличение электронной концентрации происходит в тот интервал времени, когда амплитуда импульса СВЧ-поля превосходит статический пробойный уровень [6]. Поэтому в принятых допущениях скорость появления свободных электронов можно представить как

$$v(E_m) = \begin{cases} v_i(E_m) - v_a, & E_m \geq E_{ст пр}, \\ 0, & E_m < E_{ст пр}, \end{cases} \quad (16)$$

где  $v_a$  – частота прилипания электронов к молекулам газов, из которых состоит воздух;  $v_i(E_m)$  – зависимость частоты ионизации молекул газов, из которых состоит воздух, от амплитуды электрического поля;  $E_{ст пр}$  – статический пробойный уровень.

При относительно невысокой надкритичности возбуждающего антенну поля ( $E_{ст пр} \leq E_m \leq 3...4E_{ст пр}$ ), что характерно для мощных релятивистских СВЧ-генераторов, зависимость частоты ионизации от амплитуды напряженности электрического поля можно аппроксимировать степенной функцией [10]:

$$v_i(E_m) = v_a \left( E_m / E_{ст пр} \right)^\beta, \quad (17)$$

где  $\beta \approx 5,3$  – параметр аппроксимации.

При  $E_m \geq E_{\text{ст пр}}$  скорость появления свободных электронов отлична от нуля. Поскольку  $\Phi(E_m, t)$  не зависит от производных искомой функции, уравнение Эйлера будет иметь вид  $\partial\Phi(E_m, t)/\partial E_m = 0$ . Подстановка (15) в данное уравнение приводит к соотношению

$$\frac{1}{E_m} \frac{dv(E_m)}{dE_m} = -\frac{2}{k_1} \left( 1 + k_2 (t^2 - 0,25\tau_{\text{эф}}^2) + k_3 t \right). \quad (18)$$

С учетом (16) и (17) из (18) следует, что

$$E_m(t) = E_{\text{max}} \left( 1 + \frac{k_2 t^2 + k_3 t}{1 - 0,25k_2 \tau_{\text{эф}}^2} \right)^{\frac{1}{\beta-2}}, \quad (19)$$

где  $E_{\text{max}}$  – предельно допустимая пиковая амплитуда, однозначно связанная с коэффициентом  $k_1$ :

$$E_{\text{max}} = \left( \frac{2E_{\text{ст пр}}^\beta (1 - 0,25k_2 \tau_{\text{эф}}^2)}{k_1 \beta v_a} \right)^{\frac{1}{\beta-2}}. \quad (20)$$

При  $E_m < E_{\text{ст пр}}$  предельно допустимый режим излучения не достигается. Скорость появления свободных электронов в данном случае равна нулю. Условие (9), которому должна удовлетворять функция  $E_m(t)$ , не может быть выполнено. Поэтому в рамках сформулированной задачи импульсы, для которых  $E_m < E_{\text{ст пр}}$ , не являются решением и далее не рассматриваются.

Таким образом, учитывая условие (13), для выполнения которого нужно положить  $k_3 = 0$ , оптимальную форму огибающей можно представить выражением

$$E_m(t) = E_{\text{max}} \begin{cases} 0, & t < -\tau/2, \\ 1 - 4 \left( 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\text{max}}} \right)^{\beta-2} \right) \frac{t^2}{\tau^2} \right)^{\frac{1}{\beta-2}}, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & t > \tau/2, \end{cases} \quad (21)$$

где  $\pm\tau/2$  – корни уравнения  $E_m(t) = E_{\text{ст пр}}$ , определяющие границы интервала времени, в котором происходит рост электронной концентрации. Величина  $\tau$  представляет собой длительность СВЧ-импульса с оптимальной огибающей:

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{1 - 0,25k_2 \tau_{\text{эф}}^2}{k_2}} \sqrt{1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\text{max}}} \right)^{\beta-2}}, \quad (22)$$

На рис. 1 показаны графики временных зависимостей нормированных оптимальных огибающих

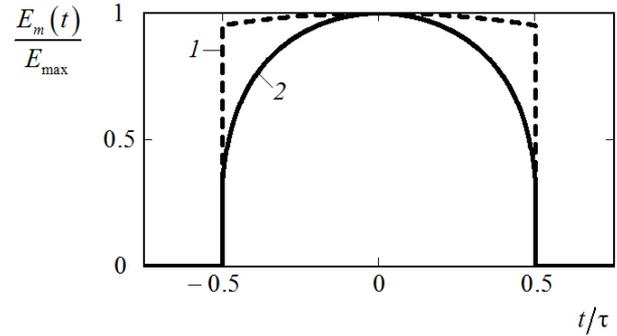


Рис. 1. Оптимальные огибающие СВЧ-импульса: 1 –  $E_{\text{max}}/E_{\text{ст пр}} = 1,05$ ; 2 –  $E_{\text{max}}/E_{\text{ст пр}} = 3$   
 Fig. 1. Optimal microwave pulse envelopes: 1 –  $E_{\text{max}}/E_{\text{ст пр}} = 1,05$ ; 2 –  $E_{\text{max}}/E_{\text{ст пр}} = 3$

СВЧ-импульса при различных значениях отношения  $E_{\text{max}}/E_{\text{ст пр}}$ . При пиковом поле, незначительно превышающем статический пробойный уровень (при длинных импульсах), оптимальная форма близка к прямоугольной. При увеличении надкритичности огибающая все сильнее отличается от прямоугольного импульса и приобретает овальную форму (при коротких импульсах).

Длительность оптимальной огибающей, как и коэффициент  $k_2$ , может быть определена из условия (12). В этом случае нет необходимости в отдельном определении коэффициента  $k_2$ .

Подстановка (21) в (12) приводит к уравнению

$$\int_0^{\tau/2} (t^2 - 0,25\tau_{\text{эф}}^2) \times \quad (23)$$

$$\times \left( 1 - 4 \left( 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\text{max}}} \right)^{\beta-2} \right) \frac{t^2}{\tau^2} \right)^{\frac{2}{\beta-2}} dt = 0.$$

Для разрешения уравнения (23) относительно  $\tau$  удобно перейти к безразмерной переменной

$$\xi = 4 \left( 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\text{max}}} \right)^{\beta-2} \right) \frac{t^2}{\tau^2}. \quad (24)$$

Такая подстановка и ряд математических преобразований позволяют представить длительность импульса с оптимальной амплитудой в виде

$$\tau = \sqrt{3} \tau_{\text{эф}} \sqrt{\frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{-2}{\beta-2}, \frac{3}{2}, 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\text{max}}} \right)^{\beta-2}\right)}{F\left(\frac{3}{2}, \frac{-2}{\beta-2}, \frac{5}{2}, 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\text{max}}} \right)^{\beta-2}\right)}}, \quad (25)$$

где  $F(a, b, c, z)$  – гипергеометрическая функция аргумента  $z$  с параметрами  $a, b$  и  $c$  [11].

Предельно допустимая пиковая амплитуда, как и коэффициент  $k_1$ , может быть определена из условия (9). В этом случае нет необходимости в отдельном определении коэффициента  $k_1$ . Подстановка (21) в (9) с учетом (16) и (17) приводит к уравнению

$$2v_a \int_0^{\tau/2} \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta \times \left( 1 - 4 \left( 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} \right)^{\beta-2} \right) \frac{t^2}{\tau^2} \right) dt = \gamma. \quad (26)$$

Уравнение (26) определяет зависимость пробойного поля от длительности импульса. Данную зависимость в явном виде выразить не удастся. Однако использование замены переменной интегрирования (24) и переход к эффективной длительности дают возможность записать выражение обратной зависимости в виде

$$\tau_{\text{эф}} = \frac{\gamma / (\sqrt{3}v_a)}{\left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta F \left( \frac{1}{2}, \frac{-\beta}{\beta-2}, \frac{3}{2}, 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} \right)^{\beta-2} \right)} \times \left( \frac{F \left( \frac{3}{2}, \frac{-2}{\beta-2}, \frac{5}{2}, 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} \right)^{\beta-2} \right)}{F \left( \frac{1}{2}, \frac{-2}{\beta-2}, \frac{3}{2}, 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} \right)^{\beta-2} \right)} \right). \quad (27)$$

Энергия СВЧ-импульса с оптимальной огибающей в предельно допустимом режиме излучения, согласно (6), определяется формулой:

$$W_{\max} = \frac{\alpha S E_{\max}^2}{Z_0} \times \int_0^{\tau/2} \left( 1 - 4 \left( 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} \right)^{\beta-2} \right) \frac{t^2}{\tau^2} \right)^{\frac{2}{\beta-2}} dt. \quad (28)$$

Использование замены переменной интегрирования (24) в (28) и выполнение математических преобразований с учетом (27) приводят к формуле

$$W_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\gamma / v_a}{\left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta - 1}. \quad (29)$$

$$= W_0 \gamma \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^2 F \left( \frac{1}{2}, \frac{-2}{\beta-2}, \frac{3}{2}, 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} \right)^{\beta-2} \right) / \left[ \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta F \left( \frac{1}{2}, \frac{-\beta}{\beta-2}, \frac{3}{2}, 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} \right)^{\beta-2} \right) - 1 \right],$$

где  $W_0$  – нормировочная величина, не зависящая от параметров огибающей:

$$W_0 = \frac{\alpha S E_{\text{ст пр}}^2}{2v_a Z_0}. \quad (30)$$

Таким образом, определена оптимальная форма огибающей, обеспечивающая наибольшую энергию СВЧ-импульса в предельно допустимом режиме излучения при заданной эффективной длительности. Определены соотношения, связывающие эффективную длительность оптимальной огибающей и ее предельно допустимую энергию с пробойным полем.

### 3. Сравнение предельно допустимых параметров импульсов с различными формами огибающих

Огибающие реальных СВЧ-импульсов мощных релятивистских генераторов [12; 13] имеют в основном неправильную форму, но при этом могут быть с достаточной точностью аппроксимированы некоторыми элементарными функциями. Наиболее распространенной аппроксимацией является прямоугольный импульс, подходящий для моделирования огибающих, фронт и срез которых существенно короче плоской части [14], а также времени развития пробоя. В выбранной системе отсчета времени прямоугольная огибающая длительностью  $\tau$  описывается выражением

$$E_m(t) = E_{\max} \begin{cases} 0, & t < -\tau/2, \\ 1, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & t > \tau/2. \end{cases} \quad (31)$$

Эффективная длительность данной огибающей, согласно (10), равна

$$\tau_{\text{эф}} = \tau / \sqrt{3}. \quad (32)$$

Подстановка (31) в (9) с учетом (17), (18) и (32) позволяет представить соотношение между эффективной длительностью и пробойным полем в виде

$$\tau_{\text{эф}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\gamma / v_a}{\left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta - 1}. \quad (33)$$

Предельно допустимая энергия СВЧ-импульса с прямоугольной огибающей, согласно (6), равна

$$W_{\max} = \frac{\gamma W_0 \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^2}{\left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta - 1}. \quad (34)$$

На практике также часто встречаются огибающие колоколообразной формы. Для их описания удобно использовать гауссову кривую

$$E_m(t) = E_{\max} \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_{\text{эф}}^2}\right). \quad (35)$$

Огибающая (35) не имеет конечной длительности по основанию импульса. Подстановка (35) в (9) с учетом (17) и (18) приводит к соотношению

$$v_a \int_{-t_i}^{t_i} \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta \exp\left(-\beta \frac{t^2}{\tau_{\text{эф}}^2}\right) - 1 dt = \gamma. \quad (36)$$

В (36) величина  $t_i$  равна

$$t_i = \tau_{\text{эф}} \sqrt{\ln \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}}}. \quad (37)$$

Используя замену переменной интегрирования  $\xi = \sqrt{\beta} t / \tau_{\text{эф}}$  в (36), с учетом (37) нетрудно получить соотношение

$$\tau_{\text{эф}} = \frac{\gamma}{v_a} / \left[ \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta \operatorname{erf} \left( \sqrt{\beta \ln \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}}} \right) - 2 \sqrt{\ln \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}}} \right], \quad (38)$$

где  $\operatorname{erf}(z)$  – интеграл вероятностей [11].

Предельно допустимая энергия СВЧ-импульса с гауссовой огибающей, согласно (6), равна

$$W_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} W_0 \gamma \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^2 / \left[ \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta \operatorname{erf} \left( \sqrt{\beta \ln \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}}} \right) - 2 \sqrt{\ln \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}}} \right], \quad (39)$$

В некоторых случаях огибающие СВЧ-импульсов имеют треугольную форму, т. е. не имеют плоской части, а их фронт и срез можно приближенно описать линейными функциями времени. В выбранной системе отсчета времени симметричную

треугольную огибающую длительностью  $\tau$  по основанию импульса можно представить в виде

$$E_m(t) = E_{\max} \begin{cases} 0, & t < -\tau/2, \\ 1 - 2|t|/\tau, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & t > \tau/2. \end{cases} \quad (40)$$

Эффективная длительность данной огибающей, согласно (10), равна

$$\tau_{\text{эф}} = \tau / \sqrt{10}. \quad (41)$$

Подстановка (40) в (9) с учетом (17) и (18) приводит к соотношению

$$v_a \int_{-t_i}^{t_i} \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta \left( 1 - \frac{2|t|}{\tau} \right)^\beta - 1 dt = \gamma. \quad (42)$$

В (42) величина  $t_i$  равна

$$t_i = \frac{\tau}{2} \left( 1 - \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} \right). \quad (43)$$

Вычисление интеграла в (42) и выполнение математических преобразований приводят к формуле

$$\tau_{\text{эф}} = \frac{\gamma}{\sqrt{10} v_a} / \left[ \frac{1}{\beta + 1} \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta \left( 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} \right)^{\beta + 1} \right) + \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} - 1 \right]. \quad (44)$$

Предельно допустимая энергия СВЧ-импульса с треугольной огибающей, согласно (6), равна

$$W_{\max} = \frac{1}{3} W_0 \gamma \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^2 / \left[ \frac{1}{\beta + 1} \left( \frac{E_{\max}}{E_{\text{ст пр}}} \right)^\beta \left( 1 - \left( \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} \right)^{\beta + 1} \right) + \frac{E_{\text{ст пр}}}{E_{\max}} - 1 \right]. \quad (45)$$

Сравнение предельно допустимых параметров СВЧ-импульсов проводилось для исходных данных, соответствующих нормальным атмосферным условиям [15]:  $v_a = 10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $n_0 = 10^3 \text{ см}^{-3}$ ,  $n_{\text{кр}} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ . Расчет проводился в характерном для класса мощных релятивистских СВЧ-генераторов диапазоне эффективных длительностей импульсов 10...1000 нс.

На рис. 2 показаны графики зависимостей нормированных пробойных полей от эффективной длительности СВЧ-импульсов с рассматриваемыми видами огибающих. Графики построены в программе Mathcad с использованием выражений (27), (33), (38), (44). Из графиков видно, что при

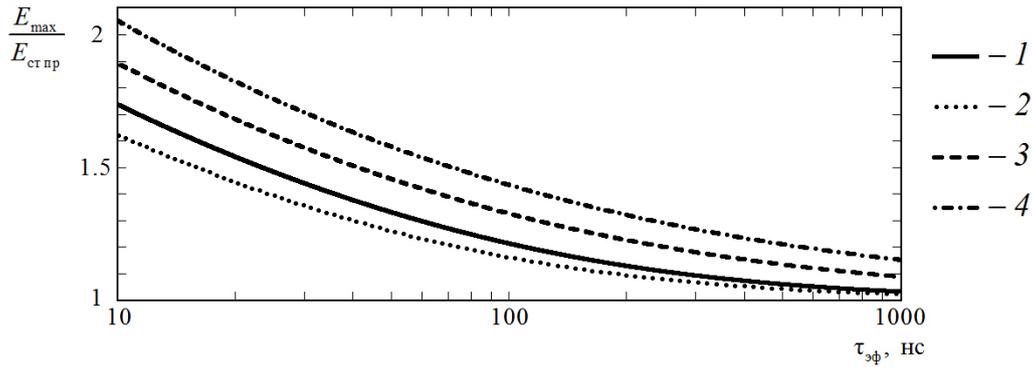


Рис. 2. Зависимости пробойного поля от эффективной длительности огибающей СВЧ-импульса: 1 – оптимальная огибающая; 2 – прямоугольная огибающая; 3 – гауссова огибающая; 4 – треугольная огибающая  
Fig. 2. Dependences of the breakdown field on the effective duration of the microwave pulse envelope: 1 – optimal envelope; 2 – rectangular envelope; 3 – Gaussian envelope; 4 – triangular envelope

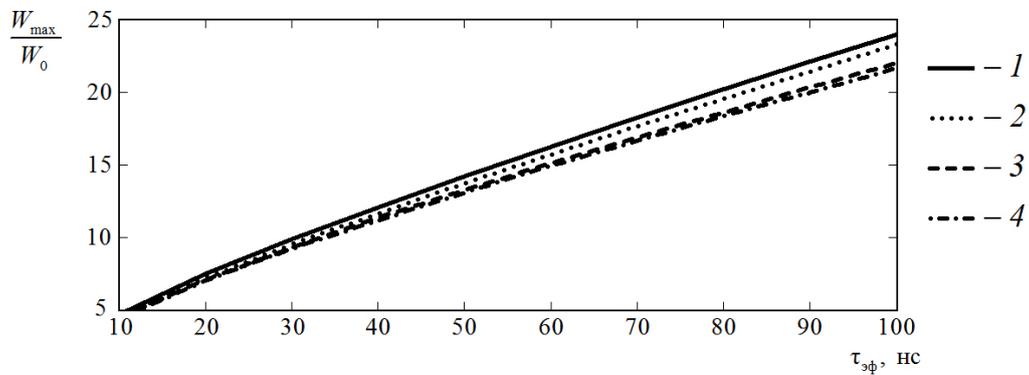


Рис. 3. Зависимости предельно допустимой энергии коротких СВЧ-импульсов от эффективной длительности огибающей: 1 – оптимальная огибающая; 2 – прямоугольная огибающая; 3 – гауссова огибающая; 4 – треугольная огибающая  
Fig. 3. Dependences of the maximum allowable energy of short microwave pulses on the effective duration of the envelope: 1 – optimal envelope; 2 – rectangular envelope; 3 – Gaussian envelope; 4 – triangular envelope

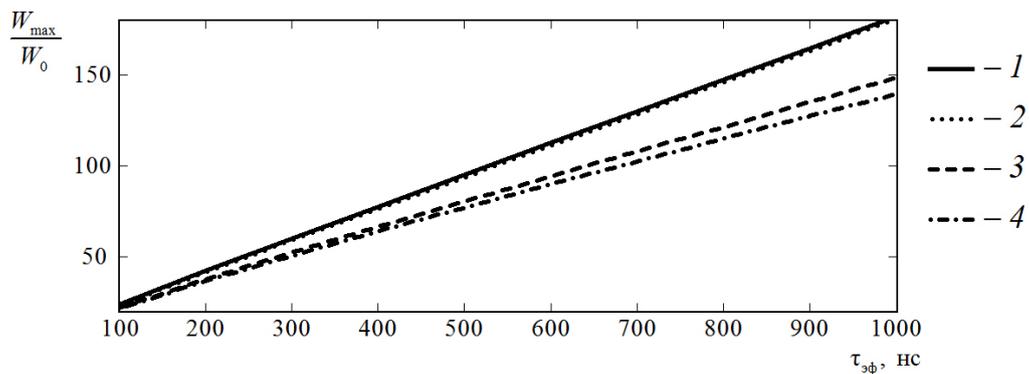


Рис. 4. Зависимости предельно допустимой энергии длинных СВЧ-импульсов от эффективной длительности огибающей: 1 – оптимальная огибающая; 2 – прямоугольная огибающая; 3 – гауссова огибающая; 4 – треугольная огибающая  
Fig. 4. Dependences of the maximum allowable energy of long microwave pulses on the effective duration of the envelope: 1 – optimal envelope; 2 – rectangular envelope; 3 – Gaussian envelope; 4 – triangular envelope

одинаковых эффективных длительностях наибольшее пробойное поле имеет импульс с треугольной огибающей, а наименьшее – импульс с прямоугольной огибающей. На нижней границе рассматриваемого диапазона длительностей указанные поля отличаются в 1,27 раза, а на верхней границе – в 1,05 раза. При увеличении эффектив-

ной длительности различия между пробойными полями уменьшаются, а их значения стремятся к статическому пробойному уровню.

На рис. 3 и 4 показаны графики зависимостей нормированных, предельно допустимых энергий от эффективной длительности СВЧ-импульсов с рассматриваемыми видами огибающих, соответ-

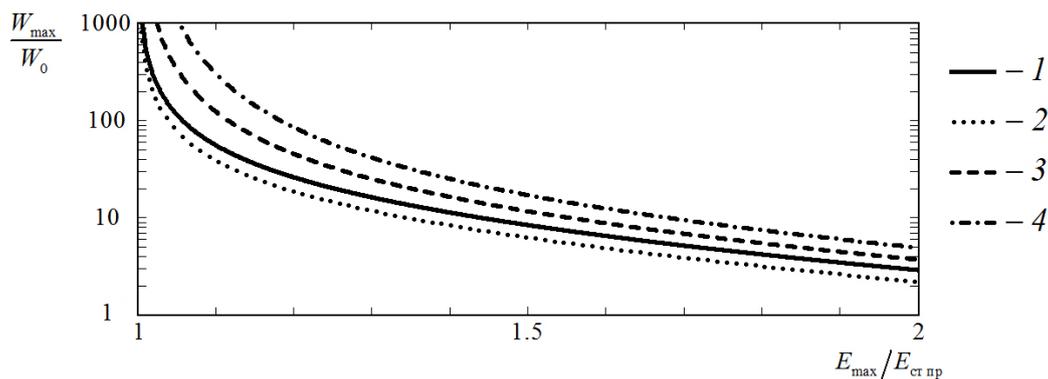


Рис. 5. Зависимости предельно допустимой энергии от пробойного поля СВЧ-импульса: 1 – оптимальная огибающая; 2 – прямоугольная огибающая; 3 – гауссова огибающая; 4 – треугольная огибающая  
Fig. 5. Dependences of the maximum allowable energy on the breakdown field of the microwave pulse: 1 – optimal envelope; 2 – rectangular envelope; 3 – Gaussian envelope; 4 – triangular envelope

ственно, в поддиапазонах коротких (10...100 нс) и длинных (100...1000 нс) импульсов. Графики построены в программе Mathcad с использованием выражений (29), (34), (39), (45) и результатов предыдущего расчета.

Из графиков видно, что при одинаковых эффективных длительностях наибольшей предельно допустимой энергией обладает импульс с оптимальной огибающей, а наименьшей – импульс с треугольной огибающей. Вблизи нижней границы рассматриваемого диапазона длительностей ( $\tau_{\text{эф}} = 20$  нс) предельно допустимые энергии указанных импульсов отличаются в 1,07 раза, а вблизи верхней границы ( $\tau_{\text{эф}} = 900$  нс) – в 1,29 раза. При уменьшении эффективной длительности предельно допустимые энергии уменьшаются, как и различия между ними. В поддиапазоне длинных импульсов оптимальная огибающая близка по форме к прямоугольной, поэтому предельно допустимые энергии импульсов с данными огибающими почти не отличаются.

При выборе формы огибающей СВЧ-импульса интерес также могут представлять зависимости предельно допустимой энергии от пробойного поля. Для рассматриваемых СВЧ-импульсов данные зависимости показаны на рис. 5. Графики построены в программе Mathcad с использованием выражений (29), (34), (39), (45). Из графиков видно, что при одинаковых пробойных полях наибольшей энергией обладает импульс с треугольной огибающей, а наименьшей – импульс с прямоугольной огибающей. На данной диаграмме СВЧ-импульс с

оптимальной огибающей, однако не обеспечивает максимальную энергию при фиксированном поле пробоя.

### Заключение

Таким образом, аналитически решена задача поиска оптимальной формы огибающей СВЧ-импульса, обеспечивающей при фиксированной эффективной длительности максимум излучаемой поверхностной антенной энергии в предельно допустимом предпробойном режиме. Оптимальная форма зависит от эффективной длительности импульса и представляет собой в общем случае усеченный овал. При длинных импульсах (сотни нс) оптимальная форма близка к прямоугольной. Получены соотношения, связывающие эффективную длительность и предельно допустимую энергию с пробойным полем для СВЧ-импульсов с оптимальной, прямоугольной, гауссовой и треугольной огибающими. При одинаковой эффективной длительности наибольшее пробойное поле имеет импульс с треугольной огибающей, а наименьшее – импульс с прямоугольной огибающей. Определены закономерности, связывающие предельно допустимую энергию и пробойное поле для рассматриваемых СВЧ-импульсов. При одинаковом пробойном поле наибольшую энергию имеет импульс с треугольной огибающей, а наименьшую – импульс с прямоугольной огибающей. Полученные результаты могут быть использованы при обосновании требований к параметрам излучения мощных СВЧ-генераторов.

## Список литературы

1. Диденко А.Н. СВЧ-энергетика: Теория и практика. М.: Наука, 2003. 446 с.
2. Preliminary results from a reflex diode experiment aurora intense pulsed relativistic electron beam generator / A. Bromborsky [et al.] // 1987 IEEE International Conference on Plasma Science. 1987. P. 39.
3. Взаимодействие электронного потока и электромагнитного поля в многоволновом черенковском генераторе с мощностью  $10^{10}$  ватт / С.П. Бугаев [и др.] // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32, № 7. С. 1488–1498.
4. Мак-Доналд А. Сверхвысокочастотный пробой в газах. М.: Мир, 1969. 212 с.
5. Волков А.А. Энергия пробоя воздуха в поверхностной антенне // Электромагнитные волны и электронные системы. 2020. № 1–2. С. 96–101. DOI: <https://doi.org/10.18127/j15604128-202001-2-11>
6. Gould L., Roberts L.W. Breakdown of air at microwave frequencies // Journal of Applied Physics. 1956. Vol. 27, no. 10. P. 1162–1170. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1722222>
7. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
9. Ионизация воздуха в околокритическом электрическом поле / А.Ф. Александров [и др.] // Журнал технической физики. 2006. Т. 76, № 3. С. 38–43. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/8793>
10. Гуревич А.В. Ионизация нижней ионосферы под действием мощных радиоимпульсов // Геомагнетизм и аэронавигация. 1979. Т. 19, № 4. С. 633–640.
11. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
12. Жерлицин А.Г., Мельников Г.В. Исследование эффективности генерации СВЧ-излучения в виркаторе типа триод с виртуальным катодом // Известия томского политехнического университета. Технические науки. 2003. Т. 306, № 1. С. 105–110.
13. Superradiant Ka-band Cherenkov oscillator with 2-GW peak power / V.V. Rostov [et al.] // Physics of Plasmas. 2016. Vol. 23, no. 9. P. 093103. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4962189>
14. Генерация мощного СВЧ-излучения в триодной системе сильноточным пучком микросекундной длительности / А.Н. Диденко [и др.] // Письма в журнал технической физики. 1983. Т. 9, № 24. С. 1510–1513.
15. Зарин А.С., Кузовников А.А., Шибков В.М. Свободно локализованный СВЧ-разряд в воздухе. М.: Нефть и газ, 1996. 204 с.

## References

1. Didenko A.N. *Microwave Energy: Theory and Practice*. Moscow: Nauka, 2003, 446 p. (In Russ.)
2. Bromborsky A. et al. Preliminary results from a reflex diode experiment aurora intense pulsed relativistic electron beam generator. *1987 IEEE International Conference on Plasma Science*, 1987, p. 39.
3. Bugaev S.P. et al. Interaction of an electron beam and an electromagnetic field in a multiwave Cherenkov generator with a power of 1010 watts. *Radiotekhnika i elektronika*, 1987, vol. 32, no. 7, pp. 1488–1498. (In Russ.)
4. Mak-Donald A. *Microwave Breakdown in Gases*. Moscow: Mir, 1969, 212 p. (In Russ.)
5. Volkov A.A. Air breakdown energy in a surface antenna. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy*, 2020, no. 1, pp. 96–101. DOI: <https://doi.org/10.18127/j15604128-202001-2-11> (In Russ.)
6. Gould L., Roberts L.W. Breakdown of air at microwave frequencies. *Journal of Applied Physics*, 1956, vol. 27, no. 10, pp. 1162–1170. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1722222>
7. Gonorovskiy I.S. *Radio Circuits and Signals*. Moscow: Radio i svyaz', 1986, 512 p. (In Russ.)
8. El'sgol'ts L.E. *Differential Equations and the Calculus of Variations*. Moscow: Nauka, 1969, 424 p. (In Russ.)
9. Aleksandrov A.F. et al. Air ionization in a near-critical electric field. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2006, vol. 76, no. 3, pp. 38–43. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/8793> (In Russ.)
10. Gurevich A.V. Ionization of the lower ionosphere under the action of powerful radio pulses. *Geomagnetizm i aeronomiya*, 1979, vol. 19, no. 4, pp. 633–640. (In Russ.)
11. *Special Functions Reference. With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Ed. by M. Abramovits, I. Stigan. Moscow: Nauka, 1979, 832 p. (In Russ.)
12. Zherlitsin A.G., Mel'nikov G.V. Investigation of the efficiency of microwave radiation generation in a triode-type vircator with a virtual cathode. *Izvestiya tomского politekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskies nauki*, 2003, vol. 306, no. 1, pp. 105–110. (In Russ.)
13. Rostov V.V. et al. Superradiant Ka-band Cherenkov oscillator with 2-GW peak power. *Physics of Plasmas*, 2016, vol. 23, no. 9, p. 093103. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4962189>
14. Didenko A.N. et al. Generation of high-power microwave radiation in a triode system by a high-current microsecond beam. *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 1983, vol. 9, no. 24, pp. 1510–1513. (In Russ.)
15. Zarin A.S., Kuzovnikov A.A., Shibkov V.M. *Freely Localized Microwave Discharge in Air*. Moscow: Neft' i gaz, 1996, 204 p. (In Russ.)

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2023, vol. 26, no. 1, pp. 106–115

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.106-115

Received 10 January 2023  
Accepted 10 February 2023

### Search for the optimal shape of the envelope of a microwave pulse of a powerful generator in the maximum permissible radiation mode

*Aleksey A. Volkov*

Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin  
Air Force Academy (Voronezh) the Ministry of Defence of the Russian Federation  
54a, Staryh Bolshevikov Street,  
Voronezh, 394064, Russia

*Abstract* – In the article, the problem of choosing the shape of the envelope of the microwave pulse of a powerful generator, which provides the maximum radiated surface antenna energy in the pre-breakdown mode, is formulated in the form of an isoperimetric problem of the calculus of variations, and its solution is obtained. Optimization was carried out at a fixed effective duration of the envelope. It has been established that the optimal shape depends on the effective pulse duration and is a truncated oval. As the pulse duration increases, the optimal shape tends to be rectangular. Analytical expressions are obtained that relate the effective duration and maximum allowable energy to the breakdown field for pulses with optimal, rectangular, Gaussian, and triangular envelopes. The dependences of the breakdown field and the maximum allowable energy of pulses with the indicated envelope shapes on the effective pulse duration are calculated in the range of realizable durations of powerful relativistic microwave generators. A comparative analysis of the obtained results is given.

*Keywords* – air breakdown; electric strength; surface antenna; electromagnetic field; microwave generator; isoperimetric problem.

---

### Информация об авторе

**Волков Алексей Анатольевич**, кандидат технических наук, преподаватель Военно-воздушной академии имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Россия.

*Область научных интересов:* радиоп физика и электроника, антенны и распространение радиоволн.

*E-mail:* volkov\_aa@autorambler.ru

### Information about the Author

**Aleksey A. Volkov**, Candidate of Technical Sciences, Lecturer of Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy (Voronezh) the Ministry of Defence of the Russian Federation, Voronezh, Russia.

*Research interests:* antennas and radio-wave propagation, radio physics and electronics.

*E-mail:* volkov\_aa@autorambler.ru

## Определение влияния помех на изображения разных цветов посредством ПО

Д.Л. Мясников, Л.Д. Ложкин, Ю.В. Соколова 

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара,  
ул. Л. Толстого, 23

**Аннотация** – В данной работе производится исследование влияния помехи на изображения различных цветов и определение разницы в уровне этих влияний. Получены значения, характеризующие отношение сигнала к шуму в децибелах. Произведено сравнение значений, полученных в результате моделирования, со значениями математических расчетов. В результатах работы представлены подученные опытным путем данные. Благодаря использованию ПО, уникальной структуры, которой удалось добиться в результате собственного его написания, был проведен ряд моделирований и получено несколько групп значений. Компьютерную колориметрию по праву можно назвать цифровой колориметрией. Эта статья рассчитана для студентов старших курсов вузов, аспирантов и специалистов, работающих в области цветовоспроизведения, обработки изображений, цветовых измерений и других областях, связанных с цветовосприятием.

**Ключевые слова** – влияние помех на изображения; основные цвета экрана; колориметрическая система МКО; телевизионное изображение; колориметрическое воспроизведение; компьютерная колориметрия; цветовой locus; цветовые искажения.

### Введение

В ходе практической исследовательской работы, опираясь на статьи схожей тематики, представленные в журнале «Физика волновых процессов и радиотехнические системы», было определено влияние помех на изображения разных цветов по модели RGB [1]. Получены числовые значения сигнал/шум (дБ) при изменении уровня этой помехи по формуле:

$$S = 20 \text{Lg}(U_c / U_{\text{ш}}). \quad (1)$$

Пример расчета по формуле: если взять красный цвет со значением основных компонент (R, G, B), равным 246, 0, 0, то по формуле выше получаем  $S = 20 \text{Lg}(246/1)$ , при значении помехи, равном единице. Отсюда  $S = 47,82$  дБ для чисто красного цвета.

Для анализа было выбрано несколько основных и несколько второстепенных цветов. На каждом этапе работы увеличивался уровень помехи, вплоть до максимального, равного 246, и производился анализ отношения сигнал/шум, а также фактическое сравнение изображения, подверженного помехе, с оригиналом.

### 1. Функционал программы

Программа позволяет добавить до 10 линий цветов (рис. 1) для дальнейшего изучения влияния

помех на них. Происходит это путем указания координат основных цветов в системе RGB.

Функционал данного ПО позволяет путем изменения уровня влияния помех на изображения добиться наглядного представления о нем (рис. 2), а также получить числовые значения отношения сигнал/шум (дБ).

### 2. Влияния помех на изображения разных цветов

Для получения точных данных о степени влияния помехи на изображение в программе предусмотрено поле с данными отношения сигнал/шум в дБ. Благодаря этим значениям можно получить представление об уровне искажения оригинала изображения каждого конкретного цвета, что, в свою очередь, дает более полную картину о степени влияния помехи.

В качестве основных цветов для анализа были выбраны следующие: красный, зеленый, синий, белый, черный и желтый, а также несколько вспомогательных [2].

Из рис. 3 видно, что при минимальном уровне помехи изображения разных цветов практически не подвержены искажениям, кроме двух последних. Значение сигнал/шум у основных компонент (R, G, B) для каждой цветовой линии имеет около 50 % от первоначального (при наличии самой минимальной помехи).

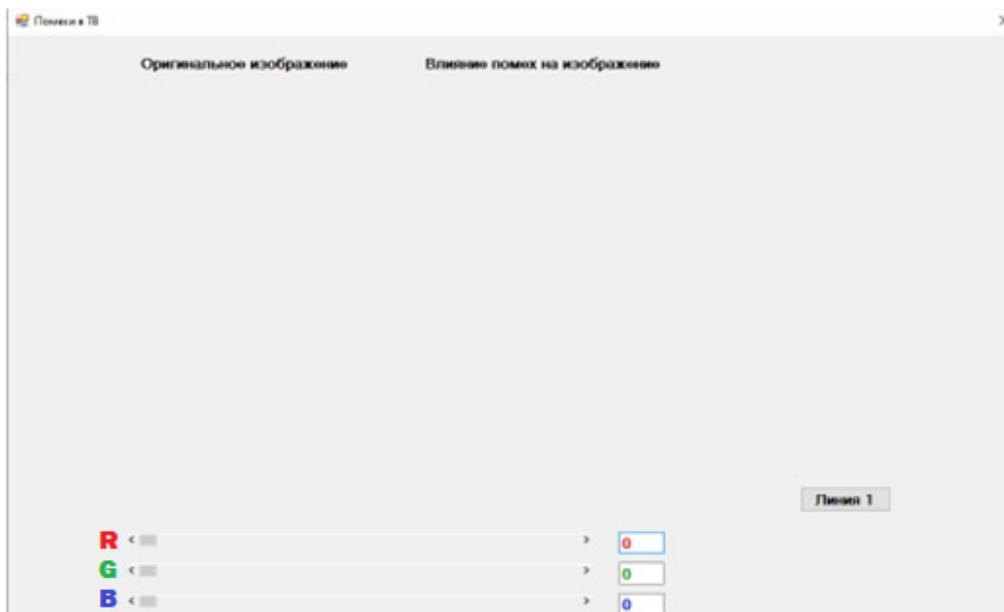


Рис. 1. Добавление линии цвета путем выставления его координат по модели RGB  
 Fig. 1. Adding a color line by setting its coordinates according to the RGB model

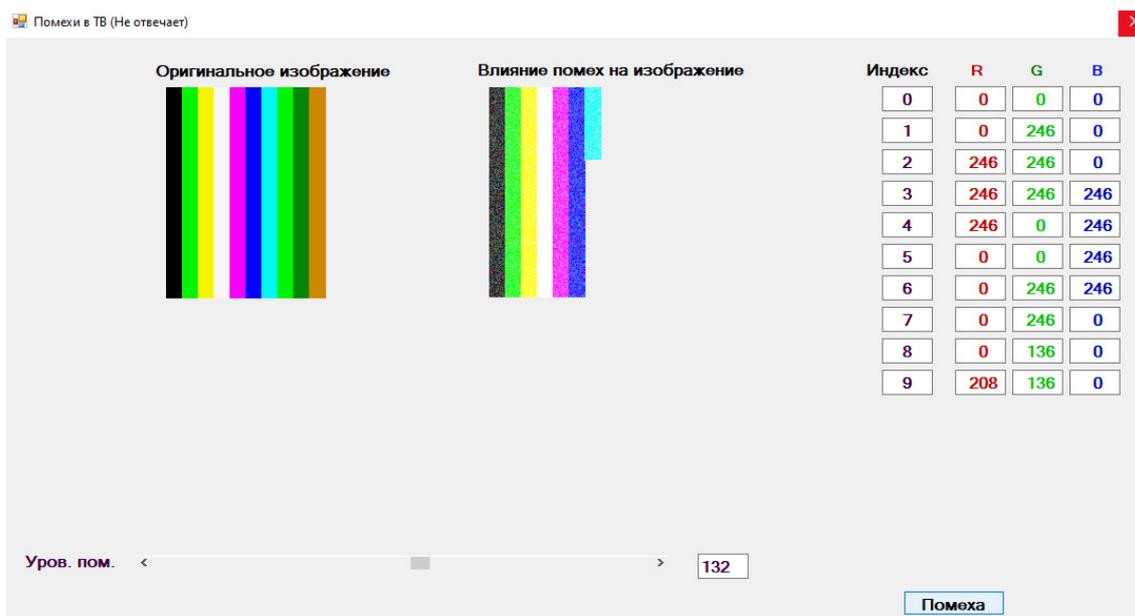


Рис. 2. Процесс отрисовки изображения, подверженного среднему уровню помехи, для наглядного сравнения с оригиналом  
 Fig. 2. The process of rendering an image subject to an average level of interference, for visual comparison with the original



Рис. 3. Влияние помехи на изображение с уровнем, равным 15  
 Fig. 3. Effect of interference on the image with a level, equal to 15



а



б

Рис. 4. Увеличение уровня помехи до 35 и влияние на изображения (а); детальное сравнение изображений с оригиналом (б)  
 Fig. 4. Increasing the noise level up to 35 and the effect on the images (a); detailed comparison of images with the original (b)



Рис. 5. Влияние помехи с уровнем, равным 65  
 Fig. 5. Influence of interference with level, equal to 65

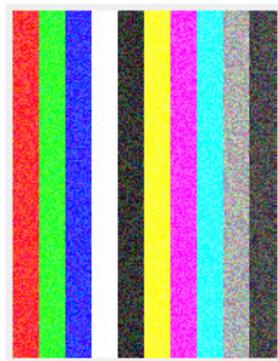


Рис. 6. Подверженное влиянию помехи изображение на уровне 105  
 Fig. 6. Interference-affected image at level 105

На рис. 4, б можно видеть различное влияние помехи на изображения сразу двух основных цветов – синего и черного. Воздействие помехи нельзя назвать критическим, но оно вполне различимо для обычного наблюдателя. Значение сигнал/шум у основных компонент (R, G, B) для каждой цветовой линии имеет около 35 % от первоначального (при наличии самой минимальной помехи).

На рис. 5 можно видеть закономерное ухудшение качества изображений, описанных ранее, вследствие увеличения воздействия помехи. Здесь также можно отметить начало пагубных влияний



Рис. 7. Подверженное влиянию помехи изображение: а – на уровне 155; б – на уровне 195  
 Fig. 7. Image affected by noise: a – at level 155; b – at level 195

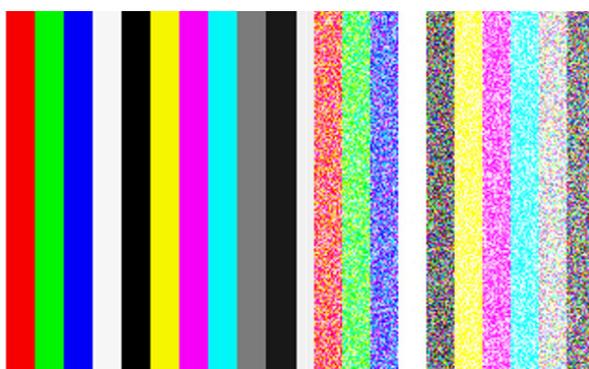


Рис. 8. Подверженное влиянию помехи изображение на максимальном уровне, равном 246, в сравнении с исходным  
 Fig. 8. Interference-affected image at maximum level of 246 compared to original

на изображение красного цвета. Значение сигнал/шум у основных компонент (R, G, B) для каждой цветовой линии имеет около 25 % от первоначального (при наличии самой минимальной помехи).

Как видно на рис. 6, изображение красного цвета изменилось в значительной мере, а также влияние помехи теперь можно наблюдать и на зеленом цвете. Белый и желтый цвета в большей степени не искажаются, а все остальные цвета – наоборот, изменяются все больше и больше. Значение сигнал/шум у основных компонент (R, G, B) для каждой цветовой линии имеет 15 % от первоначального (при наличии самой минимальной помехи).

Исходя из рис. 7, б, можно сделать вывод о начале заметного влияния помехи на изображение желтого цвета, ну и, конечно, серьезному ухудшению качества всех остальных цветов. Основные составляющие (R, G, B) для каждой цветовой линии имеют менее 5 % от первоначального (при наличии самой минимальной помехи) значения сигнал/шум.

На рис. 8 отчетливо видна разница между исходным изображением и оригиналом, все цвета подверглись значительной деформации и не могут в

Таблица 1. Соотношения уровня помехи и значения сигнал/шум (%)  
 Table 1. Interference level and signal-to-noise ratios (%)

Величина помехи	Уровень сигнал/шум (%)
1	99
2	85
3	80
4	73
5	69
7	62
10	56
15	50
35	35
65	25
105	15
155	9
195	4
245	0,1

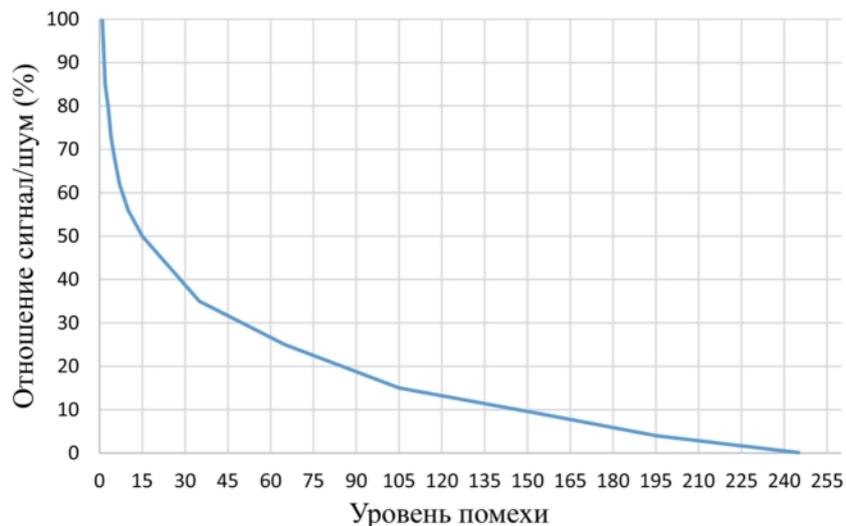


Рис. 9. График зависимости отношения сигнал/шум (дБ) трех основных цветов от уровня помех  
Fig. 9. Graph of the signal-to-noise ratio (dB) of the three primary colors on the level of interference

Таблица 2. Соотношения уровня помехи визуального отличия цветов на экране (%)  
Table 2. Ratios of the interference level of the visual difference of colors on the screen (%)

Величина помехи	Red	Green	Blue	White	Black
1	100	100	100	100	100
2	100	100	100	100	100
3	100	100	100	100	100
4	100	100	100	100	100
5	100	100	100	100	100
7	100	100	100	100	100
10	100	100	100	100	95
15	100	100	95	100	90
35	95	100	90	100	85
65	80	95	75	100	70
105	70	90	60	100	58
155	60	80	50	100	45
195	40	50	30	100	25
245	10	15	5	100	5

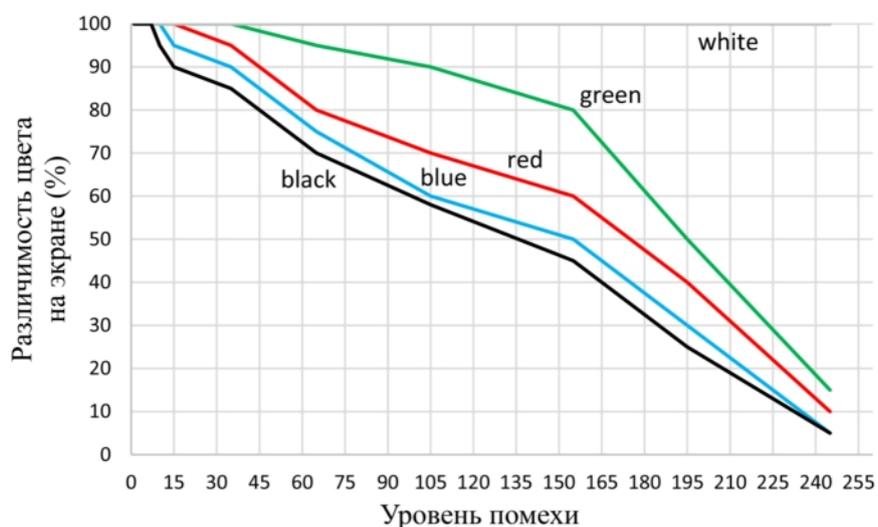


Рис. 10. График зависимости различимости цвета на экране (для стандартного наблюдателя) от уровня помех  
Fig. 10. Graph of the dependence of color visibility on the screen (for a standard observer) on the level of interference

должной мере способствовать передаче информации. Для всех представленных цветов шум превышает или равен значению сигнала.

### Заключение

Применяя указанную во введении, формулу ( $S = 20 \text{Lg}(U_c / U_{\text{ш}})$ ), для каждого уровня помехи и каждой линии цвета были получены точные данные об отношении сигнал/шум (дБ). На основании этих данных построены графики зависимостей отношения сигнал/шум (дБ) трех основных цветов от уровня помех и различимости цвета на экране (для стандартного наблюдателя) от уровня помех [3].

Пользуясь данными, занесенными в таблицу 1, получен график зависимости для наглядного представления (на рис. 9).

В результате работы была определена степень влияния помех на изображения разных цветов по модели RGB. Полученные числовые значения сигнал/шум (дБ) при изменении уровня этой помехи, а также непосредственный анализ стандартного наблюдателя дают понять, что для каждого цвета существует свое критическое значение уровня помехи [4].

При использовании данных, занесенных в таблицу 2, получен график зависимости на рис. 10.

### Список литературы

1. Ложкин Л.Д., Солдатов А.А., Вороной А.А. Определение цветовых различий между двумя цветами // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, № 4. С. 55–62. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7075>
2. Вычисление цветовых различий между двумя цветами / Л.Д. Ложкин [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, № 3-1. С. 100–109. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7091>
3. Ложкин Л.Д. Цвет, его измерение и восприятие // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15, № 3. С. 110–122.
4. Джадд Д., Выщетки Г. Цвет в науке и технике / пер. с англ. под ред. Л.Ф. Артюшина. М.: Мир, 1978. 428 с.

### References

1. Lozhkin L.D., Soldatov A.A., Voronoy A.A. Determining color differences between two colors. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2017, vol. 20, no. 4, pp. 55–62. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7075> (In Russ.)
2. Lozhkin L.D. et al. Computing color differences between two colors. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2017, vol. 20, no. 3-1, pp. 100–109. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7091> (In Russ.)
3. Lozhkin L.D. Color, its measurement and perception. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2012, vol. 15, no. 3, pp. 110–122. (In Russ.)
4. Dzhadd D., Vyshchetski G. *Color in Science and Technology* / trans. from English. Ed. by L.F. Artyushin. Moscow: Mir, 1978, 428 p. (In Russ.)

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems 2023, vol. 26, no. 1, pp. 116–122

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.1.116-122

Received 23 November 2022  
Accepted 23 December 2022

### Determination of the effect of noise on the image using software

Danil L. Myasnikov, Leonid D. Lozhkin, Yulia V. Sokolova 

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

**Abstract** – In this paper, we study the influence of noise on images of different colors and determine the difference in the level of these influences. Values characterizing the signal-to-noise ratio in decibels are obtained. The comparison of the values obtained as a result of modeling with the values of mathematical calculations is made. The results of the work present the data learned empirically. Thanks to the use of software, a unique structure that was achieved as a result of its own writing, it was possible to carry out a number of simulations and obtain several groups of values. Computer colorimetry can rightly be called digital colorimetry. This article is intended for senior students of universities, graduate students and professionals working in the field of color reproduction, image processing, color measurements and other areas related to color perception.

**Keywords** – noise effects on images; primary screen colors; CIE colorimetric system; television image; colorimetric reproduction; computer colorimetry; color locus; color distortions.

---

## Информация об авторах

**Мясников Данил Львович**, 1997 г. р., магистрант Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия. В 2019 г. окончил Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (ПГУТИ) по специальности «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». В том же году поступил в магистратуру ПГУТИ на специальность «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

*Область научных интересов:* электропитание узлов связи, колориметрия, экология.

*E-mail:* danil1232011@mail.ru

**Ложкин Леонид Дидимович**, 1946 г. р., доктор технических наук, профессор кафедры радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия. В 1972 г. окончил Куйбышевский институт связи по специальности «Радиосвязь и радиовещание». В 2014 г. успешно защитил диссертацию на соискание доктора технических наук по специальности 05.12.04 – «Радиотехника и в том числе и системы телевидения» в г. Санкт-Петербурге.

*Область научных интересов:* обработка графических изображений, программирование, колориметрия.

*E-mail:* leon.lozhkin@yandex.ru

**Соколова Юлия Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиоэлектронных систем Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

*Область научных интересов:* электродинамика, устройства СВЧ, антенны, метаматериалы.

*E-mail:* ula.81.81@mail.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2873-8675>

## Information about the Authors

**Danil L. Myasnikov**, born in 1997, master student of the Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia. In 2019, he graduated from the Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (PSUTI) with a degree in Infocommunication Technologies and Communication Systems. In the same year, he entered the master's program at PSUTI with a degree in Infocommunication Technologies and Communication Systems.

*Research interests:* power supply of communication nodes, colorimetry, ecology.

*E-mail:* danil1232011@mail.ru

**Leonid D. Lozhkin**, born in 1946, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Radio Electronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia. In 1972, he graduated from the Kuibyshev Institute of Communications with a degree in Radio Communications and Broadcasting. In 2014, he successfully defended his dissertation for the Doctor of Technical Sciences in the specialty 05.12.04 – «Radio engineering, including television systems» in Saint Petersburg.

*Research interests:* graphic image processing, programming, colorimetry.

*E-mail:* leon.lozhkin@yandex.ru

**Yulia V. Sokolova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Radio Electronic Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics, microwave devices, antennas, metamaterials.

*E-mail:* ula.81.81@mail.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0003-2873-8675>

## К сведению авторов

В журнале «Физика волновых процессов и радиотехнические системы» могут быть опубликованы материалы, касающиеся оригинальных исследований и разработок, не публиковавшиеся ранее и не предназначенные для публикации в других изданиях. В зависимости от характера представляемых работ они классифицируются по следующим разделам: общая теория волновых процессов, математические методы в теории волновых процессов, вопросы анализа и синтеза радиотехнических устройств и систем, передача и обработка информации в радиотехнических системах, электродинамика и техника СВЧ и КВЧ, антенно-фидерные системы и распространение радиоволн, теория средств функциональной электроники, нелинейная электродинамика и хаос в радиотехнических системах, экологические и медико-биологические аспекты теории волновых процессов.

Все статьи проходят рецензирование и проверку в программе «Антиплагиат».

Материалы, сопровождаемые актом экспертизы о возможности опубликования, представляются в редакцию по почте и e-mail: klyuevd@yandex.ru). Текст статьи должен быть сохранен в формате **Microsoft Word**. Текст статьи печатается шрифтом **Times New Roman Cyr** (размер 14 пт) через 1,5 интервала на одной стороне стандартного листа формата А4. При использовании других TrueType шрифтов их необходимо прилагать в виде файлов.

Рисунки следует представлять только в виде файлов графических форматов **CDR, VSD, WMF** или **EPS** (векторная графика). Формат CDR предпочтительней. Текст на рисунках печатается шрифтом **Times New Roman Cyr** (размер 10 пт). В случае большой сложности рисунков допускается представление в виде графических форматов TIFF Bitmap и Windows Bitmap (растровая графика) и в виде распечатки на отдельных листах. Все рисунки должны быть приложены в виде отдельных графических файлов (для растровой графики – разрешением 600 dpi).

**Все формулы**, переменные, константы, а также размерности величин, содержащие надстрочные и(или) подстрочные символы, **в том числе и в рисунках**, должны быть набраны в редакторе формул **MathType 5**. Не допускается набор формул в текстовом виде без использования указанного редактора.

**Один из двух экземпляров распечатки должен быть размечен по общепринятым правилам:**

- во всех случаях, когда строчные и прописные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своими размерами (например, С и с, W и w и др.), необходимо подчеркивать прописные буквы двумя чертами снизу, а строчные – двумя чертами сверху;
- для различия между О (буквой) и 0 (нулем) букву О следует подчеркивать двумя чертами снизу;
- надстрочные знаки отчеркиваются дугой  $\cup$ , подстрочные – дугой  $\cap$  (например,  $a_k$ ;  $a^k$ );
- индексы, являющиеся сокращениями от русских слов, поясняются отдельно (предпочтительно использование индексов с латинскими символами);
- греческие буквы подчеркиваются красным карандашом (например,  $\beta$ );
- матрицы подчеркиваются синим карандашом (например,  $\underline{a}$ );
- векторы обозначаются стрелками над буквами, усредненные величины – чертой сверху.

**Внимание! Список литературы должен быть набран с соблюдением ГОСТ Р 7.0.5-2008 Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления.**

– Статьи должны присылаться с указанием авторов, названия (обязательно), полного названия журнала, года, тома, номера или выпуска, страниц. Инициалы следуют после фамилии авторов, в качестве разделителя между страницами используется среднее тире без пробелов, например, 67–78:

Житнюк В.С., Мелков Г.А., Соловьев Д.А. Исследование включения полупроводникового диода в диэлектрический резонатор // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1998. Т. 31. № 7. С. 76–79.

– Книги должны присылаться с указанием авторов, названия, места издания, названия издателя, года, количества страниц. Если авторов трое, то они указываются в начале библиографического описания (Иванов В.П., Архатов З.И., Пономарев С.С. Исследования...); если авторов больше трех, то сначала идет название книги или статьи, а затем через косую фамилия первого автора и слова «и др.» в квадратных скобках, т. е. Исследования... / С.С. Иванов [и др.]:

Кинг Р., Тай-Цзунь У. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн / пер. с англ. Г.В. Воскресенского; под ред. Э.Л. Бурштейна. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 195 с.

Полупроводники / С.С. Игнашевич [и др.]; под ред. К.Т. Андреева. СПб., 1978. 34 с.

Жилищное право: электрон. журн. 2007. № 1. URL: <http://www.gilpravo.ru> (дата обращения: 20.08.07).

– Патенты должны присылаться с указанием авторов, названия, номера патента, даты приоритета:

Патент 2003109213/09 (009761 Российская Федерация. Селективное экранирующее покрытие для защиты от электромагнитного излучения / А.А. Долбичкин, В.А. Неганов, О.В. Осипов; приоритет от 01.04.2003. 3 с.

Статья представляется в редакцию в двух экземплярах. Незамеченный экземпляр распечатки должен быть подписан всеми авторами. Отдельно должен быть приложен реферат для ВИНИТИ в двух экземплярах.

Представленные материалы **обязательно** должны включать следующую информацию:

- индекс универсальной десятичной классификации (УДК);
- инициалы и фамилии авторов, ORCID ([orcid.org](http://orcid.org)) на русском и английском языках;
- название статьи на русском и английском языках;
- краткую аннотацию (100–200 слов) и ключевые слова на русском и английском языках;
- реферат для ВИНИТИ (в двух экземплярах);
- краткую (10–15 строк) творческо-биографическую справку, включающую фамилию, имя, отчество (полностью), ученую степень (звание, должность), область научных интересов;
- служебные и домашние адреса с обязательным указанием почтового индекса и номеров средств связи (телефон, e-mail).

При оформлении работ редакция просит руководствоваться приведенными ниже правилами:

- объем материала должен составлять не более 35 машинописных страниц формата А4, отпечатанных через полтора интервала;
- иллюстрации, таблицы выполняются в виде отдельного файла, нумерация проставляется только на распечатке. Обязательны названия на русском и английском языках;
- термины и определения, единицы физических величин, используемые в статье, должны соответствовать действующим ГОСТам;
- нумерация формул проставляется в круглых скобках, ссылки на использованные источники – в квадратных, сноски отмечаются звездочками.

*Рукописи, в которых не соблюдены данные правила, возвращаются авторам без рассмотрения.*

Редакция не ставит в известность авторов об изменениях и сокращениях рукописи, имеющих редакционный характер и не затрагивающих принципиальных вопросов.