

Решение электромагнитной обратной задачи восстановления неоднородности в диэлектрическом теле двухшаговым методом по измерениям ближнего поля

Ю.Г. Смирнов , А.О. Лапич 

Пензенский государственный университет
440026, Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40

Аннотация – Обоснование. Обратные электромагнитные задачи восстановления неоднородности в диэлектрическом теле по измерениям поля в ближней зоне возникают, например, при ранней диагностике рака молочной железы методом СВЧ-томографии. Решение таких обратных задач является основой для разработки технологии обнаружения неоднородностей с помощью СВЧ-устройств. От точности решения обратной задачи зависит эффективность соответствующей технологии. Поэтому разработка новых, более точных, методов решения обратной задачи СВЧ-томографии весьма актуальна. **Цель.** Работа посвящена разработке метода решения электромагнитной обратной задачи СВЧ-томографии по измерениям ближнего поля, то есть восстановления структуры неоднородного диэлектрического тела по значениям электромагнитного поля вне этого тела с помощью измерительной установки. **Методы.** Для решения обратной задачи используется двухшаговый метод определения неоднородности тела, заключающийся в нахождении сначала функции тока внутри тела, а затем в вычислении функции диэлектрической проницаемости. Метод не является итерационным и не требует знания «хорошего» начального приближения. **Результаты.** Применен двухшаговый метод решения для обратной задачи СВЧ-томографии. Представлены численные результаты. Рассмотрены неоднородные тела в форме полушара. Приведены экспериментальные результаты. **Заключение.** Показана эффективность предложенной технологии обнаружения неоднородностей в диэлектрическом теле методом СВЧ-томографии. Приведены результаты расчетов и экспериментальные данные.

Ключевые слова – задача электродинамики; система уравнений Максвелла; интегральное уравнение; численный метод; микроволновая томография; векторный анализатор цепей.

Введение

Обратные электромагнитные (векторные) задачи восстановления структуры неоднородного тела вызывают большой интерес на протяжении нескольких десятилетий. Одним из наиболее популярных подходов к их решению является минимизация некоторых функционалов ошибок (с помощью регуляризации Тихонова) и использование итерационных методов, требующих выбора хорошего начального приближения.

В данной работе мы используем неитерационный метод к решению обратной электромагнитной задачи восстановления структуры неоднородного тела, на которое падает монохроматическая электромагнитная волна. Задача состоит в нахождении неизвестной диэлектрической проницаемости (или соответствующего ей показателя преломления) ограниченного объемного рассеивателя, расположенного в пространстве, по результатам измерений ближнего поля вне тела. В статье представлено описание, обоснование и применение двухшагового метода.

Сформулирована прямая задача о дифракции монохроматической электромагнитной волны на

ограниченном объемном рассеивателе с заданной постоянной магнитной проницаемостью и известной диэлектрической проницаемостью. Исходная краевая задача для уравнений Максвелла сводится к системе, состоящей из сингулярного интегро-дифференциального уравнения электрического поля по области неоднородности и интегрального представления полного электрического поля вне рассеивателя. Приведены основные результаты о разрешимости прямой задачи дифракции.

Затем решается обратная задача, заключающаяся в нахождении неизвестной диэлектрической проницаемости объемного тела заданной формы. Показано, что интегро-дифференциальное уравнение первого рода имеет не более одного решения в конечномерных пространствах кусочно-постоянных функций.

Постановка задачи

Пусть дано некоторое тело $Q \subset \mathbb{R}^3$ – полушар, ∂Q – кусочно-гладкая граница. Предполагаем, что диэлектрическое тело Q является изотропным и неоднородным.

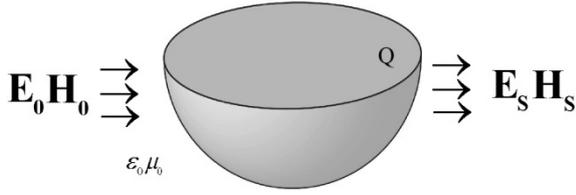


Рис. 1. Графическая иллюстрация задачи
Fig. 1. Graphic illustration of the problem

В пространстве вне тела предполагается, что среда однородна и имеет постоянные значения магнитной проницаемости μ_0 и диэлектрической проницаемости ε_0 .

Поле возбуждается точечным источником излучения в точке $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$, порождающим электромагнитную волну \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 , удовлетворяющую системе уравнений Максвелла вне этой точки:

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}_0, \\ \text{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega \mu_0 \mathbf{H}_0. \end{cases} \quad (1)$$

Полное электромагнитное поле в точке можно представить как сумму двух компонент: падающего поля \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 и поля \mathbf{E}_s , \mathbf{H}_s , рассеянного от объекта (рис. 1):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s. \quad (2)$$

Решение прямой задачи дифракции – полное электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} – удовлетворяет в $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$ уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{cases} \quad (3)$$

Предполагаем, что на границе раздела двух сред выполняются условия непрерывности касательных компонент поля на границе области неоднородности:

$$[\mathbf{E}_\tau] |_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau] |_{\partial Q} = 0, \quad (4)$$

условия конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,loc}(\mathbb{R}^3). \quad (5)$$

Подробная постановка задачи (1)–(5) и исследование ее разрешимости имеются в [1].

Краевую задачу (1)–(5) можно свести [1] к системе, состоящей из интегро-дифференциального уравнения по области неоднородности:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \\ = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (6)$$

и интегрального представления поля вне тела:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + \\ + (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy, \end{aligned} \quad (7)$$

$$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q},$$

где

$$G(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|},$$

а $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ – относительная диэлектрическая проницаемость.

Магнитное поле всюду выражается через электрическое по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega \mu_0} \text{rot} \mathbf{E}.$$

Введем в области Q вектор-функцию

$$\mathbf{J}(x) := (\varepsilon_r(x) - 1) \mathbf{E}(x),$$

предполагая, что всюду в Q выполнено условие $|\varepsilon_r(x)| \geq \tilde{\varepsilon} > 1$. Тогда из представления поля вне рассеивателя получим уравнение для $\mathbf{J}(x)$:

$$\begin{aligned} (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \\ = \mathbf{E}(x) - \mathbf{E}_0(x), \quad x \in D, \end{aligned} \quad (8)$$

а уравнение в области неоднородности перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}(x)}{\varepsilon_r(x) - 1} - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \\ = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (9)$$

Для решения обратной задачи нахождения неизвестной диэлектрической проницаемости (или соответствующего ей показателя преломления) ограниченного объемного рассеивателя, расположенного в пространстве, по результатам измерений ближнего поля вне тела применим двухшаговый метод [2–3]. Первый шаг двухшагового метода заключается в решении линейного интегрального уравнения первого рода относительно тока поляризации (по известным значениям падающего поля $\mathbf{E}_0(x)$ и полного поля $\mathbf{E}(x)$ в некоторой области D вне тела необходимо найти ток $\mathbf{J}(x)$ в Q из уравнения (8)). На втором шаге $\varepsilon(x)$ явно выражается через известную функцию $\mathbf{J}(x)$ с использованием уравнения (9).

Численная реализация двухшагового метода подробно описана в [4–7]. Ниже представлены результаты расчетов этим методом в случае тела в форме полусфера.

Рис. 2 демонстрирует решение прямой (слева) и обратной (справа) задач для полусферы, содержащей неравномерно распределенные неоднородности с различными показателями преломления, значения которых отображены на цветовой шкале. Неоднородности визуализированы цветными фигурами внутри полусферы. Из рис. 2 видно, что

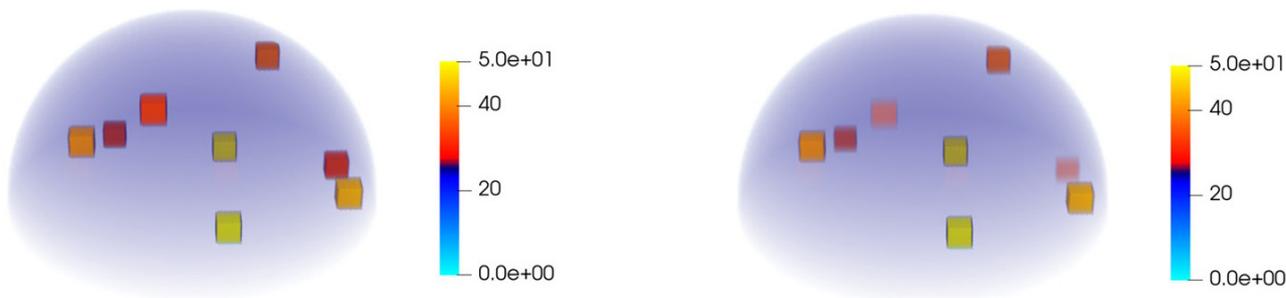


Рис. 2. Решение прямой и обратной задачи для тела формы полусфера
 Fig. 2. Solving the direct and inverse problem for a hemisphere-shaped body

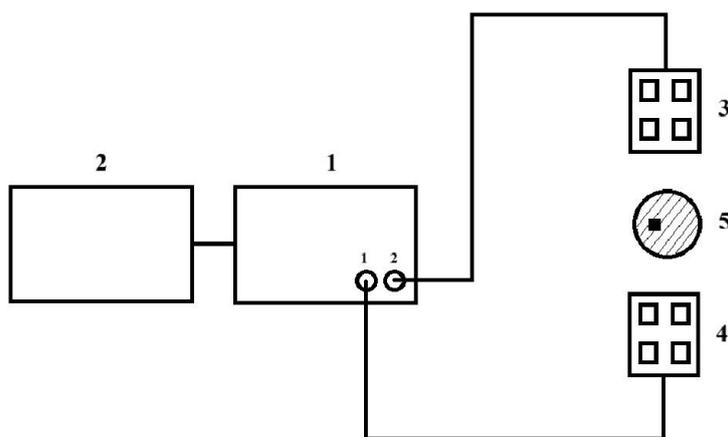


Рис. 3. Схематичное представление измерительной установки
 Fig. 3. Schematic representation of the measuring unit

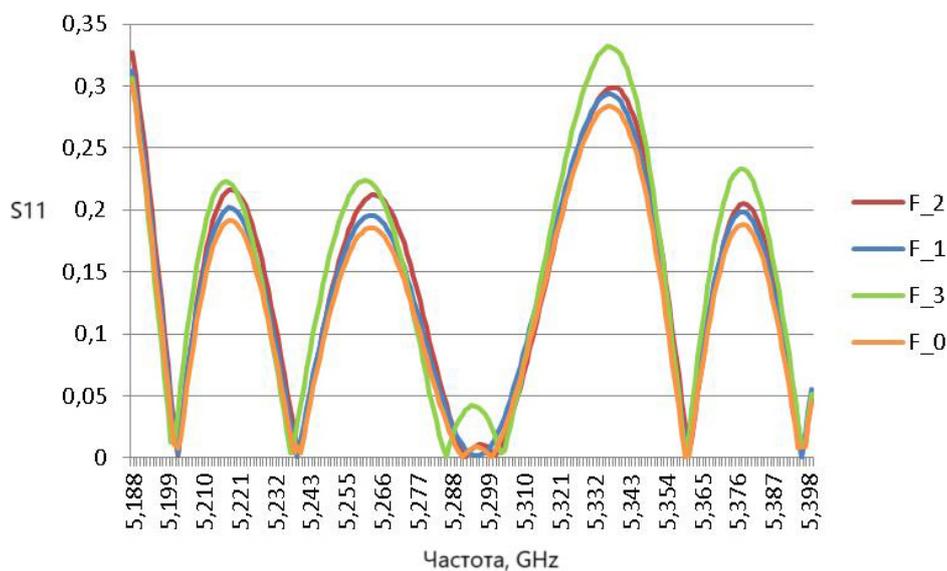


Рис. 4. Значение параметра S11 для объектов F_0, F_1, F_2, F_3
 Fig. 4. Value of the S11 parameter for objects F_0, F_1, F_2, F_3

изменения значений неоднородностей в прямой (точные значения) и обратной (вычисленные приближенные значения) задачах незначительны. Восстановленные данные, отражающие их положение и параметры неоднородности, хорошо различимы.

На рис. 3 представлена принципиальная схема измерительной установки, реализованная с использованием двухпортового векторного анализатора цепей (vector network analyzer) ZNLE6 производства компании Rohde&Schwarz (1) и персонального компьютера для анализа и обработки

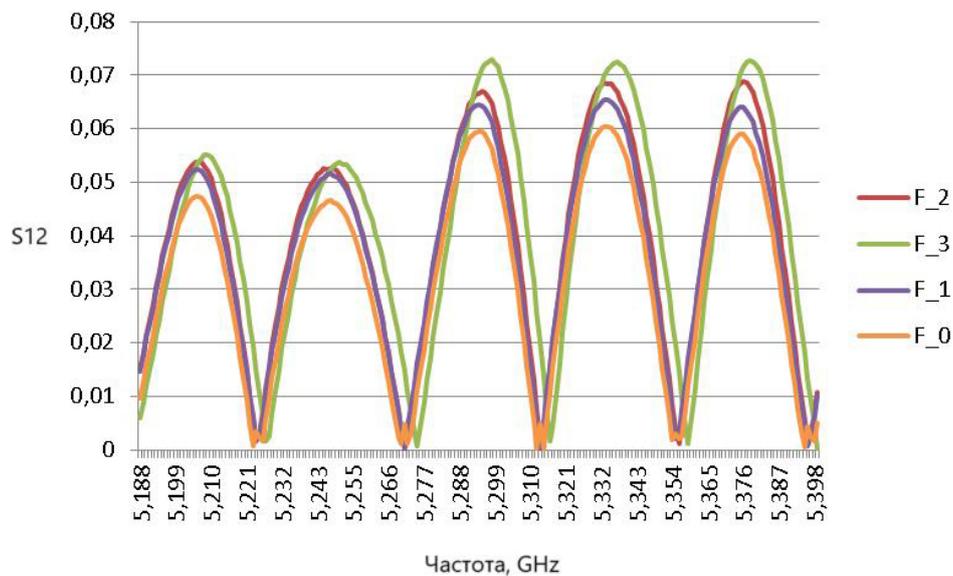


Рис. 5. Значение параметра S12 для объектов F_0, F_1, F_2, F_3
Fig. 5. Value of the S12 parameter for objects F_0, F_1, F_2, F_3

полученных измерений (2). Измерения проводились в диапазоне частот от 5 до 5,5 ГГц с применением микрополосковых печатных антенн, которые направлены друг на друга (3) и (4). При проведении измерений исследуемый образец с некоторой неоднородностью внутри (5) помещается между двух антенн. Объектами исследования являются полусферы с наличием внутри неоднородностей различных размеров: кубических неоднородностей со сторонами 1, 2, 3 см и эталонный объект с однородной структурой. Ниже эти варианты обозначены, соответственно, F_1, F_2, F_3, F_0 .

На рис. 4 и 5 представлены значения модуля вещественной части измеренных коэффициентов отражения и прохождения при помещении объектов с неоднородностями и без. Из графиков видно, что значения параметров заметно изменяются в зависимости от размера неоднородности. Также проводились эксперименты при изменении положения неоднородностей (поворот образца), показывающие изменение S-параметров и в этих случаях.

Экспериментальные данные выявляют принципиальную возможность обнаружения неоднородностей в диэлектрическом теле с помощью измерений электромагнитного поля в ближней зоне.

Заключение

В статье рассмотрен метод решения электромагнитной обратной задачи СВЧ-томографии по измерениям ближнего поля, то есть восстановления структуры неоднородного диэлектрического тела по значениям электромагнитного поля вне этого тела с помощью измерительной установки. Для решения обратной задачи применялся двухшаговый неитерационный метод.

Приведенные численные результаты в случае тела в форме полусфера показывают возможность достаточно точного восстановления структуры неоднородного тела по измерениям поля вне тела.

Экспериментальные данные, полученные с помощью измерительной установки, демонстрируют возможность обнаружения сравнительно небольших по размеру произвольно расположенных неоднородностей в диэлектрическом теле посредством измерений электромагнитного поля на различных частотах в ближней зоне.

Финансирование

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ по гранту Государственного Задания (Рег. № 124020200015-7).

Список литературы

1. Смирнов Ю.Г. Задача дифракции электромагнитной волны на системе произвольно расположенных тел и экранов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, № 3. С. 36–42. URL: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7081>
2. Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г., Цупак А.А. Решение векторной трехмерной обратной задачи дифракции на объемном неоднородном теле двухшаговым методом // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. Т. 56, № 4. С. 5–23. DOI: <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2020-4-1>

3. Medvedik M.Y., Smirnov Y.G., Tsupak A.A. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2023. Vol. 32, no. 3. P. 453–465. DOI: <https://doi.org/10.1515/jiip-2022-0060>
4. Smirnov Y.G., Tsupak A.A., Medvedik M.Y. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020. Vol. 28, no. 10. P. 1474–1492. DOI: <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1727466>
5. Lapich A.O., Medvedik M.Y. Microwave tomography method for solving the inverse problem on cylindrical bodies // *Technical Physics Letters*. 2024. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785024700469>
6. Лапич А.О., Медведик М.Ю. Метод восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. 2023. № 4. С. 142–153. DOI: <https://doi.org/10.21685/2227-8486-2023-4-9>
7. Лапич А.О., Медведик М.Ю. Метод обобщенных и объединенных расчетных сеток для восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // *Математическое моделирование*. 2024. Т. 36, № 4. С. 24–36. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2024-04-02>

Информация об авторах

Смирнов Юрий Геннадьевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования Пензенского государственного университета, г. Пенза, Россия.

Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ.

E-mail: smirnovyug@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9040-628X>

SPIN-код (eLibrary): 1415-9378

AuthorID (eLibrary): 8341

ResearcherID (WoS): A-4813-2014

Лапич Андрей Олегович, аспирант, ассистент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования Пензенского государственного университета, г. Пенза, Россия.

Область научных интересов: математические модели электродинамики.

E-mail: lapich.a@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5827-0298>

SPIN-код (eLibrary): 1057-4361

AuthorID (eLibrary): 1100465

ResearcherID (WoS): HTN-6344-2023

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2025, vol. 28, no. 1, pp. 33–38

DOI [10.18469/1810-3189.2025.28.1.33-38](https://doi.org/10.18469/1810-3189.2025.28.1.33-38)

UDC 517.968, 517.983.37

Original Research

Received 20 October 2024

Accepted 21 November 2024

Published 31 March 2025

Solution of electromagnetic inverse problem of inhomogeneity reconstruction in dielectric body by near-field measurements using two-step method

Yury G. Smirnov , Andrey O. Lapich 

Penza State University
40, Krasnaya Street,
Penza, 440026, Russia

Abstract – Background. The inverse electromagnetic problems of restoring inhomogeneity in a dielectric body from near-field measurements arise, for example, in the early diagnosis of breast cancer by microwave tomography. The solution of such inverse problems is the basis for the development of technology for detecting inhomogeneities using microwave devices. The effectiveness of the corresponding technology depends on the accuracy of solving the inverse problem. Therefore, the development of new, more accurate methods for solving the inverse problem of microwave tomography is very relevant. **Aim.** The work is devoted to the development of a method for solving the electromagnetic inverse problem of microwave tomography using near-field measurements, that is, restoring the structure of an inhomogeneous dielectric body based on the values of the electromagnetic field outside this body using a measuring installation. **Methods.** The method of solving the inverse problem is a two-step one for determining the inhomogeneity of a body, which consists in first finding the current function inside the body, and then calculating the permittivity function. The method is not iterative and does not require knowledge of a «good» initial approximation. **Results.** A two-step method has been applied for the inverse problem of microwave tomography. Numerical results are presented. Inhomogeneous bodies in the shape of a hemisphere are considered. Experimental results are presented. **Conclusion.** The effectiveness of the proposed technology for detecting inhomogeneities in a dielectric body by microwave tomography is shown. The results of calculations and experimental data are presented.

Keywords – electrodynamics problem; Maxwell's system of equations; integral equation; numerical method; microwave tomography; vector network analyzer.

✉ lapich.a@yandex.ru (Andrey O. Lapich)



© Yury G. Smirnov, Andrey O. Lapich, 2025

References

1. Yu. G. Smirnov, "Diffraction problem of electromagnetic wave propagation on system of arbitrary located screens and bodies," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 20, no. 3, pp. 36–42, 2017, url: <https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7081>. (In Russ.)
2. M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, and A. A. Tsupak, "Solving a vector three-dimensional inverse diffraction problem on a three-dimensional inhomogeneous body by a two-step method," *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki*, vol. 56, no. 4, pp. 5–23, 2020, doi: <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2020-4-1>. (In Russ.)
3. M. Y. Medvedik, Y. G. Smirnov, and A. A. Tsupak, "Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity," *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, vol. 32, no. 3, pp. 453–465, 2023, doi: <https://doi.org/10.1515/jiip-2022-0060>.
4. Y. G. Smirnov, A. A. Tsupak, and M. Y. Medvedik, "Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem," *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 28, no. 10, pp. 1474–1492, 2020, doi: <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1727466>.
5. A. O. Lapich and M. Y. Medvedik, "Microwave tomography method for solving the inverse problem on cylindrical bodies," *Technical Physics Letters*, 2024, doi: <https://doi.org/10.1134/S1063785024700469>.
6. A. O. Lapich and M. Yu. Medvedik, "Method for restoring the parameters of body inhomogeneities from the results of electromagnetic field measurements," *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve*, no. 4, pp. 142–153, 2023, doi: <https://doi.org/10.21685/2227-8486-2023-4-9>. (In Russ.)
7. A. O. Lapich and M. Yu. Medvedik, "The method of generalized and combined computational grids for restoring the parameters of inhomogeneities of a body based on the results of measurements of the electromagnetic field," *Matematicheskoe modelirovanie*, vol. 36, no. 4, pp. 24–36, 2024, doi: <https://doi.org/10.20948/mm-2024-04-02>. (In Russ.)

Information about the Authors

Yury G. Smirnov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematics and Supercomputer Modeling, Penza State University, Penza, Russia.

Research interests: mathematical modeling, numerical methods, mathematical physics, differential and integral equations, functional analysis.

E-mail: smirnovyug@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9040-628X>

SPIN-code (eLibrary): 1415-9378

AuthorID (eLibrary): 8341

ResearcherID (WoS): A-4813-2014

Andrey O. Lapich, postgraduate student, teaching assistant of the Department of Mathematics and Supercomputer Modeling, Penza State University, Penza, Russia.

Research interests: mathematical models of electrodynamics.

E-mail: lapich.a@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5827-0298>

SPIN-code (eLibrary): 1057-4361

AuthorID (eLibrary): 1100465

ResearcherID (WoS): HTN-6344-2023