

Динамика перепутывания кубитов в трехкубитной модели Джейнса – Каммингса для бисепарабельных начальных состояний

А.Р. Багров , Е.К. Башкиров 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
443086, Россия, г. Самара,
Московское шоссе, 34

Аннотация – Обоснование. Для работы квантового компьютера должен быть реализован набор универсальных вентилей, например двухкубитный вентиль типа контролируемое отрицание плюс однокубитные вращения. В качестве универсальной альтернативы возможно использование трехкубитных вентилей. В этой связи представляется весьма актуальной задача исследования динамики систем трех кубитов в микроволновых резонаторах, в частности изучение наиболее эффективных схем генерации, управления и контроля перепутанных состояний кубитов. **Цель.** Исследовать особенности динамики перепутывания пар кубитов для системы, в которой два кубита заперты в одномодовом резонаторе и взаимодействуют с модой теплового поля, а третий кубит находится в свободном состоянии. **Методы.** Для анализа динамики рассматриваемой системы исследовано решение квантового уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности. Найдено точное решение указанного уравнения в случае начальных бисепарабельных состояний кубитов. Точное решение уравнения эволюции использовано для вычисления критерия перепутывания пар кубитов – отрицательности. Проведено численное моделирование отрицательности для бисепарабельных состояний кубитов, а также различных значений интенсивности теплового поля резонатора. **Результаты.** Показано, что для интенсивных тепловых полей резонатора наблюдается эффект мгновенной смерти перепутывания, при этом интервалы времени между смертью и возрождением перепутывания кубитов существенно зависят от выбора их начального бисепарабельного состояния. Найдено, что для одного из бисепарабельных состояний перепутывание кубитов, запертых в резонаторе, не возникает ни при каких интенсивностях поля резонатора. **Заключение.** Установлено, что особенности динамики перепутывания кубитов, в частности интервалы времени между смертью и рождением перепутывания кубитов, определяются выбором начального бисепарабельного состояния кубитов, а также значениями интенсивности поля резонатора. Полученные результаты могут быть использованы для эффективного контроля и управления степенью перепутывания кубитов в трехкубитных системах в микроволновых резонаторах.

Ключевые слова – кубиты; резонатор; квантовое тепловое поле; бисепарабельные состояния; перепутывание; отрицательность; мгновенная смерть перепутывания.

Введение

Многокубитные перепутанные состояния – ключевой ресурс для многих квантовых информационных задач [1–4]. В настоящее время известны различные типы и классы перепутанных состояний [5–7]. К наиболее известным перепутанным состояниям относятся белловские перепутанные состояния, бисепарабельные перепутанные состояния, истинно перепутанные состояния Гринбергера – Хорна – Цайлингера (GHZ-состояния), истинно перепутанные состояния Вернера (W-состояния) и др. Для каждого из указанных состояний предложены многочисленные способы применения в области физики квантовых вычислений, в частности для коррекции ошибок, квантовых коммуникаций, квантовой криптографии, квантовой метрологии и др. [8–11]. В последнее время появилось множество экспериментальных работ, в которых показана возможность генерации многокубитных перепутанных состояний для кубитов

различной физической природы [1–4]. В настоящее время предложен ряд количественных критериев перепутывания двухкубитных систем: отрицательность и ее расширения, согласованность, G-согласованность, геометрическая мера перепутывания и др. [5–7; 12–16]. Однако для многокубитных квантовых систем ситуация становится более сложной, поскольку для таких систем существует несколько различных классов перепутанных состояний [17–19]. Трудности теоретического описания перепутанных состояний существенно возрастают с увеличением числа кубитов в системе. Поэтому в настоящее время особый интерес вызывает изучение динамики перепутывания трехкубитных систем. Для трехкубитных систем существуют три типа чистых перепутанных состояний: сепарабельные или полностью разделимые, бисепарабельные и истинно перепутанные состояния. Мы имеем дело с сепарабельным состоянием, если трехкубитный вектор состояния

системы является тензорным произведением трех однокубитных векторов состояния. Если трехкубитное состояние сепарабельное по отношению к двум подсистемам, одна из которых состоит из двух перепутанных кубитов, а вторая – из независимого кубита, то состояние называется бисепарабельным. Состояния, которые не являются ни сепарабельными, ни бисепарабельными, называются истинно перепутанными. Для трехкубитных систем существуют два типа истинно перепутанных состояний, которые представляют собой так называемые состояния GHZ- и W-типа. Для трехкубитных смешанных состояний также существуют сепарабельные, бисепарабельные или истинно запутанные состояния. Если тип чистого состояния многокубитной системы определяется свойствами вектора состояния, то для смешанных состояний аналогичные свойства должны выполняться для выпуклой суммы чистых состояний. Перепутанные состояния трехкубитных систем можно использовать для квантовой обработки информации, детерминированной телепортации, плотного кодирования и т. д. Трехкубитные перепутанные состояния различных типов в настоящее время экспериментально реализованы для различных типов кубитов, в частности для ионов в магнитных ловушках и сверхпроводящих цепях [8; 9]. В работе [20] было предсказано, что перепутывание пары кубитов, взаимодействующих с полем резонатора, может полностью исчезнуть за времена, значительно меньшие времени декогеренции. Это явление получило название внезапной смерти запутанности. Позднее этот эффект для двухкубитной системы был обнаружен экспериментально [21]. Для трехкубитной системы эффект был впервые предсказан в [22]. В настоящее время изучению данного эффекта уделяется особое внимание, поскольку указанный эффект оказывает существенное влияние на динамику систем кубитов, используемых в устройствах квантовой обработки информации (см. ссылки в [23]). В ряде недавних работ эффект мгновенной смерти перепутывания рассматривался для различных систем кубитов, взаимодействующих с тепловыми шумами резонаторов [12–16]. Недавно в работе [24] мы исследовали динамику перепутывания кубитов для трехкубитной модели, в которой два кубита заперты в резонаторе и взаимодействуют с модой теплового поля этого резонатора, а третий кубит находится в свободном состоянии. В частности, нами исследовались особенности проявления эффекта мгновенной смерти и рождения перепу-

тывания кубитов в такой модели. Однако в указанной работе мы ограничились рассмотрением динамики модели для начального истинно перепутанного состояния кубитов W-типа. Представляет значительный интерес расширить данное исследование, включив в рассмотрение возможные начальные бисепарабельные состояния кубитов.

В настоящей работе нами найдена точная динамика трехкубитной модели, состоящей из свободного кубита и пары кубитов, резонансно взаимодействующих с модой поля идеального резонатора. Рассмотрение проведено для начальных бисепарабельных состояний кубитов и теплового шума резонатора. Точное решение использовано для расчета параметра перепутывания пар кубитов. Проведен анализ особенностей проявления эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов в рассматриваемой модели.

1. Модель и точное решение квантового уравнения Лиувилля

Рассмотрим модель, которая состоит из трех одинаковых кубитов Q_1 , Q_2 и Q_3 . Пусть два кубита Q_2 и Q_3 находятся внутри резонатора и резонансно взаимодействуют с его квантованным электромагнитным полем, а первый кубит Q_1 может свободно перемещаться вне резонатора. Гамильтониан взаимодействия такой системы в стандартных приближениях имеет вид

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\gamma \sum_{i=2}^3 \left(\hat{\sigma}_i^+ \hat{a} + \hat{\sigma}_i^- \hat{a}^+ \right). \quad (1)$$

где $\hat{\sigma}_i^{\pm}$ – повышающий и понижающий операторы в i -м кубите; $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ – операторы уничтожения и рождения фотонов в моде резонатора; γ – константа кубит-фотонной связи.

В качестве начальных состояний кубитов выберем бисепарабельные состояния:

$$|\psi_1(0)\rangle = \cos\alpha |+, -, -\rangle + \sin\alpha |-, +, -\rangle, \quad (2)$$

$$|\psi_2(0)\rangle = \cos\alpha |+, -, +\rangle + \sin\alpha |-, +, +\rangle. \quad (3)$$

В качестве начального состояния поля резонатора определим тепловое состояние с матрицей плотности вида

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|. \quad (4)$$

Здесь p_n – весовые коэффициенты:

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}},$$

где $\bar{n}$ – среднее число тепловых фотонов, которое задается следующей формулой:

$$\bar{n} = \left(\exp \left[\hbar \omega_{\text{cav}} / k_B T \right] - 1 \right)^{-1}.$$

Здесь k_B – постоянная Больцмана; T – температура резонатора; ω_{cav} – частота резонатора.

Найдем решение квантового уравнения Лиувилля для начальных состояний кубитов (2) и (3) и теплового состояния поля резонатора. Для каждого начального состояния кубитов мы вначале вычислим временную волновую функцию для фоковского начального состояния поля $|n\rangle$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, а затем обобщим полученное решение на случай теплового поля. Для чистых начальных состояний кубитов и чистого фоковского состояния поля рассматриваемая система в каждый момент времени также будет находиться в чистом состоянии. Поэтому состояние системы в произвольный момент времени t можно будет задать волновой функцией $|\psi_n(t)\rangle$. Временная волновая функция «три кубита + мода поля» подчиняется уравнению Шредингера, которое в картине взаимодействия может быть записано как:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_n(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{\text{int}} |\psi_n(t)\rangle. \quad (5)$$

Заметим, что решение уравнения Шредингера (5) для каждого из начальных состояний кубитов необходимо искать независимо для различных чисел фотонов в моде.

Рассмотрим начальное бисепарабельное состояние кубитов (2). В рассматриваемом случае решение уравнения (5) для числа фотонов в моде $n = 0$ можно определить как

$$|\psi_{n=0}(t)\rangle = \cos \alpha |+, -, -, 0\rangle + y_1(t) |-, +, -, 0\rangle + y_2(t) |-, -, +, 0\rangle + y_3(t) |-, -, -, 1\rangle, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos^2 \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} \right) \sin \alpha, \\ y_2(t) &= -\sin^2 \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} \right) \sin \alpha, \\ y_3(t) &= -\frac{i \sin(\sqrt{2} \gamma t)}{\sqrt{2}} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Для числа фотонов в моде $n = 1$ соответствующее решение принимает вид

$$\begin{aligned} |\psi_{n=1}(t)\rangle &= x_1^1(t) |1, 1, 0, 0\rangle + x_2^1(t) |1, 0, 1, 0\rangle + \\ &+ x_3^1(t) |1, 0, 0, 1\rangle + z_1^1(t) |0, 1, 1, 0\rangle + \\ &+ z_2^1(t) |0, 1, 0, 1\rangle + z_3^1(t) |0, 0, 1, 1\rangle + \end{aligned} \quad (8)$$

$$+ z_4^1(t) |0, 0, 0, 2\rangle,$$

где

$$x_1^1(t) = -\frac{i \cos \alpha \sin(\sqrt{2} \gamma t)}{\sqrt{2}}, \quad (9)$$

$$x_3^1(t) = \cos \alpha \cos(\sqrt{2} \gamma t), \quad x_2^1(t) = -\frac{i \cos \alpha \sin(\sqrt{2} \gamma t)}{\sqrt{2}},$$

$$z_1^1(t) = -\frac{i \sin(\sqrt{6} \gamma t) \sin \alpha}{\sqrt{6}}, \quad z_2^1(t) = \sin \alpha \cos^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \gamma t \right),$$

$$z_3^1(t) = -\sin \alpha \sin^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \gamma t \right),$$

$$z_4^1(t) = -\frac{i \sin(\sqrt{6} \gamma t) \sin \alpha}{\sqrt{3}}.$$

Наконец, для $n \geq 2$ имеем:

$$\begin{aligned} |\psi_{n \geq 2}(n, t)\rangle &= X_1^1(n, t) |1, 1, 1, n-2\rangle + \\ &+ X_2^1(n, t) |1, 1, 0, n-1\rangle + X_3^1(n, t) |1, 0, 1, n-1\rangle + \\ &+ X_4^1(n, t) |1, 0, 0, n\rangle + Y_1^1(n, t) |0, 1, 1, n-1\rangle + \\ &+ Y_2^1(n, t) |0, 1, 0, n\rangle + Y_3^1(n, t) |0, 0, 1, n\rangle + \\ &+ Y_4^1(n, t) |0, 0, 0, n+1\rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$X_1^1(n, t) = \frac{2\sqrt{n(n-1)} \cos \alpha \sin^2 \left(\gamma t \sqrt{n - \frac{1}{2}} \right)}{1 - 2n}, \quad (11)$$

$$X_2^1(n, t) = -\frac{i\sqrt{n} \cos \alpha \sin(\gamma t \sqrt{4n-2})}{\sqrt{4n-2}},$$

$$X_3^1(n, t) = -\frac{i\sqrt{n} \cos \alpha \sin(\gamma t \sqrt{4n-2})}{\sqrt{4n-2}},$$

$$X_4^1(n, t) = \frac{(n-1 + n \cos(\gamma t \sqrt{4n-2})) \cos \alpha}{2n-1},$$

$$Y_1^1(n, t) = -\frac{i\sqrt{n} \sin \alpha \sin(\gamma t \sqrt{4n+2})}{\sqrt{4n+2}},$$

$$Y_2^1(n, t) = \sin \alpha \cos^2 \left(\gamma t \sqrt{n + \frac{1}{2}} \right),$$

$$Y_3^1(n, t) = -\sin \alpha \sin^2 \left(\gamma t \sqrt{n + \frac{1}{2}} \right),$$

$$Y_4^1(n, t) = -\frac{i\sqrt{n+1} \sin \alpha \sin(\gamma t \sqrt{4n+2})}{\sqrt{4n+2}}.$$

В случае сепарабельного начального состояния кубитов (3) соответствующее решение уравнения (5) есть:

– для $n = 0$

$$\begin{aligned} |\psi_{n=0}(t)\rangle &= x_1^2(t) |1, 1, 0, 0\rangle + x_2^2(t) |1, 0, 1, 0\rangle + \\ &+ x_3^2(t) |1, 0, 0, 1\rangle + z_1^2(t) |0, 1, 1, 0\rangle + \\ &+ z_2^2(t) |0, 1, 0, 1\rangle + z_3^2(t) |0, 0, 1, 1\rangle + \\ &+ z_4^2(t) |0, 0, 0, 2\rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$x_1^2(t) = -\cos\alpha \sin^2\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}}\right), \quad (13)$$

$$x_2^2(t) = \cos\alpha \cos^2\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}}\right), \quad x_3^2(t) = -\frac{i \cos\alpha \sin(\sqrt{2}\gamma t)}{\sqrt{2}},$$

$$z_1^2(t) = \frac{1}{3} \left(2 + \cos(\sqrt{6}\gamma t)\right) \sin\alpha,$$

$$z_2^2(t) = -\frac{i \sin\alpha \sin(\sqrt{6}\gamma t)}{\sqrt{6}},$$

$$z_3^2(t) = -\frac{i \sin\alpha \sin(\sqrt{6}\gamma t)}{\sqrt{6}},$$

$$z_4^2(t) = \frac{1}{3} \sqrt{2} \sin\alpha \left(\cos(\sqrt{6}\gamma t) - 1\right);$$

– для $n \geq 1$

$$\begin{aligned} |\psi_{n \geq 1}(n, t)\rangle &= X_1^2(n, t) |+, +, +, n-1\rangle + \\ &+ X_2^2(n, t) |+, +, -, n\rangle + X_3^2(n, t) |+, -, +, n\rangle + \\ &+ X_4^2(n, t) |+, -, -, n+1\rangle + Y_1^2(n, t) |-, +, +, n\rangle + \\ &+ Y_2^2(n, t) |-, +, -, n+1\rangle + Y_3^2(n, t) |-, -, +, n+1\rangle + \\ &+ Y_4^2(n, t) |-, -, -, n+2\rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$X_1^2(n, t) = -\frac{i\sqrt{n} \cos\alpha \sin(\gamma t \sqrt{4n+2})}{\sqrt{4n+2}}, \quad (15)$$

$$X_2^2(n, t) = -\cos\alpha \sin^2\left(\gamma t \sqrt{n + \frac{1}{2}}\right),$$

$$X_3^2(n, t) = \cos\alpha \cos^2\left(\gamma t \sqrt{n + \frac{1}{2}}\right),$$

$$X_4^2(n, t) = -\frac{i\sqrt{n+1} \cos\alpha \sin(\gamma t \sqrt{4n+2})}{\sqrt{4n+2}},$$

$$Y_1^2(n, t) = \frac{\sin\alpha \left(n+2 + (n+1)\cos(\gamma t \sqrt{4n+6})\right)}{2n+3},$$

$$Y_2^2(n, t) = -\frac{i\sqrt{n+1} \sin\alpha \sin(\gamma t \sqrt{4n+6})}{\sqrt{4n+6}},$$

$$Y_3^2(n, t) = -\frac{i\sqrt{n+1} \sin\alpha \sin(\gamma t \sqrt{4n+6})}{\sqrt{4n+6}},$$

$$Y_4^2(n, t) = -\frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \sin\alpha \sin^2\left(\gamma t \sqrt{n + \frac{3}{2}}\right)}{2n+3}.$$

Теперь, зная явный вид волновых функций благодаря выражениям (6)–(15), можно построить матрицу плотности полной системы «три кубита + мода поля» для теплового состояния поля резонатора:

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)|. \quad (16)$$

Матрица плотности (13) для начального состояния (2) может быть переписана в виде

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n |\psi_{n \geq 2}(n, t)\rangle \langle \psi_{n \geq 2}(n, t)| + \quad (17)$$

$$+ p_1 |\psi_{n=1}(t)\rangle \langle \psi_{n=1}(t)| + p_0 |\psi_{n=0}(t)\rangle \langle \psi_{n=0}(t)|,$$

а для состояния (3) как:

$$\begin{aligned} \rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n |\psi_{n \geq 1}(n, t)\rangle \langle \psi_{n \geq 1}(n, t)| + \\ &+ p_0 |\psi_{n=0}(t)\rangle \langle \psi_{n=0}(t)|. \end{aligned} \quad (18)$$

2. Вычисление отрицательности

Для вычисления любых известных критериев перепутывания трехкубитной подсистемы необходимо вычислить редуцированную матрицу плотности трех кубитов следующим образом:

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3} = \text{Tr}_F \rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}. \quad (19)$$

При исследовании динамики перепутывания кубитов для бисепарабельных начальных состояний (2) и (3) наиболее информативным критерием перепутывания является отрицательность пар кубитов [25; 26]. Для нахождения указанного параметра необходимо вычислить редуцированную матрицу плотности соответствующей пары кубитов:

$$\rho_{Q_i Q_j} = \text{Tr}_k \rho_{Q_1 Q_2 Q_3} (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k).$$

Определим критерий отрицательности стандартным образом:

$$\varepsilon_{ij} = -2 \sum_l (v_{ij})_l^-, \quad (20)$$

где v_{ij} – отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы

плотности $\rho_{Q_i Q_j}^T(t)$, которая имеет для состояний (2)–(3) следующий вид:

$$\rho_{Q_i Q_j}^T(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{Q_i Q_j} & 0 & 0 & \left(\rho_{23}^{Q_i Q_j}\right)^* \\ 0 & \rho_{22}^{Q_i Q_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}^{Q_i Q_j} & 0 \\ \rho_{23}^{Q_i Q_j} & 0 & 0 & \rho_{44}^{Q_i Q_j} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Для состояния (2) и кубитов Q_1 и Q_2 элементы матрицы плотности (21) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{Q_1 Q_2}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^1(n, t) \right|^2 + \left| X_2^1(n, t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left| x_1^1(t) \right|^2, \\ \rho_{22}^{Q_1 Q_2}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_3^1(n, t) \right|^2 + \left| X_4^1(n, t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| x_2^1(t) \right|^2 + \left| x_3^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \cos^2 \alpha, \\ \rho_{33}^{Q_1 Q_2}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| Y_1^1(n, t) \right|^2 + \left| Y_2^1(n, t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| z_1^1(t) \right|^2 + \left| z_2^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \left| y_1(t) \right|^2, \\ \rho_{44}^{Q_1 Q_2}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| Y_3^1(n, t) \right|^2 + \left| Y_4^1(n, t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| z_3^1(t) \right|^2 + \left| z_4^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \left(\left| y_2(t) \right|^2 + \left| y_3(t) \right|^2 \right), \\ \rho_{23}^{Q_1 Q_2}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[X_4^1(n, t) Y_2^{1*}(n, t) + \right. \\ &+ X_3^1(n, t) Y_1^{1*}(n, t) \left. \right] + p_1 \left(x_2^1(t) z_1^{1*}(t) + x_3^1(t) z_2^{1*}(t) \right) + \\ &+ p_0 \cos \alpha y_1^*(t). \end{aligned}$$

Для состояния (2) и кубитов Q_1 и Q_3 элементы матрицы плотности (18) есть:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{Q_1 Q_3}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^1(n, t) \right|^2 + \left| X_3^1(n, t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left| x_2^1(t) \right|^2, \\ \rho_{22}^{Q_1 Q_3}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_2^1(n, t) \right|^2 + \left| X_4^1(n, t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| x_1^1(t) \right|^2 + \left| x_3^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

$$\rho_{33}^{Q_1 Q_3}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| Y_1^1(n, t) \right|^2 + \left| Y_3^1(n, t) \right|^2 \right] +$$

$$+ p_1 \left(\left| z_1^1(t) \right|^2 + \left| z_3^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \left| y_2(t) \right|^2,$$

$$\rho_{44}^{Q_1 Q_3}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| Y_2^1(n, t) \right|^2 + \left| Y_4^1(n, t) \right|^2 \right] +$$

$$+ p_1 \left(\left| z_2^1(t) \right|^2 + \left| z_4^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \left(\left| y_1(t) \right|^2 + \left| y_3(t) \right|^2 \right),$$

$$\rho_{23}^{Q_1 Q_3}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[X_1^1(n, t) Y_3^{1*}(n, t) + \right.$$

$$+ X_4^1(n, t) Y_2^{1*}(n, t) \left. \right] + p_1 \left(x_1^1(t) z_3^{1*}(t) + x_3^1(t) z_2^{1*}(t) \right) + \\ + p_0 \cos \alpha y_2^*(t).$$

Для состояния (2) и кубитов Q_2 и Q_3 элементы матрицы плотности (21) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{Q_2 Q_3}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^1(n, t) \right|^2 + \left| Y_1^1(n, t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left| z_1^1(t) \right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{22}^{Q_2 Q_3}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_2^1(n, t) \right|^2 + \left| Y_2^1(n, t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| x_1^1(t) \right|^2 + \left| z_2^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \left| y_1(t) \right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{33}^{Q_2 Q_3}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_3^1(n, t) \right|^2 + \left| Y_3^1(n, t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| x_2^1(t) \right|^2 + \left| z_3^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \left| y_2(t) \right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{44}^{Q_2 Q_3}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_4^1(n, t) \right|^2 + \left| Y_4^1(n, t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| x_3^1(t) \right|^2 + \left| z_4^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \left(\cos^2 \alpha + \left| y_3(t) \right|^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{23}^{Q_2 Q_3}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[X_2^1(n, t) X_3^{1*}(n, t) + \right. \\ &+ Y_2^1(n, t) Y_3^{1*}(n, t) \left. \right] + p_1 \left(x_1^1(t) x_2^{1*}(t) + z_2^1(t) z_3^{1*}(t) \right) + \\ &+ p_0 y_1(t) y_2^*(t). \end{aligned}$$

Для состояния (3) и кубитов Q_1 и Q_2 элементы матрицы плотности (21) определяются как

$$\rho_{11}^{Q_1 Q_2}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^2(n, t) \right|^2 + \left| X_2^2(n, t) \right|^2 \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + p_0 \left| x_1^2(t) \right|^2, \\
\rho_{22}^{Q_1 Q_2}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_3^2(n, t) \right|^2 + \left| X_4^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left(\left| x_2^2(t) \right|^2 + \left| x_3^2(t) \right|^2 \right), \\
\rho_{33}^{Q_1 Q_2}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| Y_1^2(n, t) \right|^2 + \left| Y_2^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left(\left| z_1^2(t) \right|^2 + \left| z_2^2(t) \right|^2 \right), \\
\rho_{44}^{Q_1 Q_2}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| Y_3^2(n, t) \right|^2 + \left| Y_4^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left(\left| z_3^2(t) \right|^2 + \left| z_4^2(t) \right|^2 \right), \\
\rho_{23}^{Q_1 Q_2}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[X_4^2(n, t) Y_2^{2*}(n, t) + \right. \\
& \left. + X_3^2(n, t) Y_1^{2*}(n, t) \right] + p_0 \left(x_2^2(t) z_1^{2*}(t) + x_3^2(t) z_2^{2*}(t) \right).
\end{aligned}$$

Для состояния (3) и кубитов Q_1 и Q_3 элементы матрицы плотности (21) имеют вид

$$\begin{aligned}
\rho_{11}^{Q_1 Q_3}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^2(n, t) \right|^2 + \left| X_3^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left| x_2^2(t) \right|^2, \\
\rho_{22}^{Q_1 Q_3}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_2^2(n, t) \right|^2 + \left| X_4^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left(\left| x_1^2(t) \right|^2 + \left| x_3^2(t) \right|^2 \right), \\
\rho_{33}^{Q_1 Q_3}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| Y_1^2(n, t) \right|^2 + \left| Y_3^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left(\left| z_1^2(t) \right|^2 + \left| z_3^2(t) \right|^2 \right), \\
\rho_{44}^{Q_1 Q_3}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| Y_2^2(n, t) \right|^2 + \left| Y_4^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left(\left| z_2^2(t) \right|^2 + \left| z_4^2(t) \right|^2 \right), \\
\rho_{23}^{Q_1 Q_3}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[X_2^2(n, t) Y_1^{2*}(n, t) + \right. \\
& \left. + X_4^2(n, t) Y_3^{2*}(n, t) \right] + p_0 \left(x_1^2(t) z_2^{2*}(t) + x_3^2(t) z_4^{2*}(t) \right).
\end{aligned}$$

Для состояния (3) и кубитов Q_2 и Q_3 элементы матрицы плотности (21), соответственно, есть:

$$\begin{aligned}
\rho_{11}^{Q_2 Q_3}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^2(n, t) \right|^2 + \left| Y_1^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left| z_1^2(t) \right|^2, \\
\rho_{22}^{Q_2 Q_3}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_2^2(n, t) \right|^2 + \left| Y_2^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left(\left| x_1^2(t) \right|^2 + \left| z_2^2(t) \right|^2 \right), \\
\rho_{33}^{Q_2 Q_3}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_3^2(n, t) \right|^2 + \left| Y_3^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left(\left| x_2^2(t) \right|^2 + \left| z_3^2(t) \right|^2 \right), \\
\rho_{44}^{Q_2 Q_3}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_4^2(n, t) \right|^2 + \left| Y_4^2(n, t) \right|^2 \right] + \\
& + p_0 \left(\left| x_3^2(t) \right|^2 + \left| z_4^2(t) \right|^2 \right), \\
\rho_{23}^{Q_2 Q_3}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[X_2^2(n, t) X_3^{2*}(n, t) + \right. \\
& \left. + Y_2^2(n, t) Y_3^{2*}(n, t) \right] + p_0 \left(x_1^2(t) x_2^{2*}(t) + z_2^2(t) z_3^{2*}(t) \right).
\end{aligned}$$

Для всех рассматриваемых случаев матрица плотности (21) имеет всего одно собственное значение, которое может быть меньше нуля. В этом случае формула для отрицательности (20) принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{\left(\rho_{44}^{Q_i Q_j} - \rho_{11}^{Q_i Q_j} \right)^2 + 4 \rho_{23}^{Q_i Q_j} - \rho_{11}^{Q_i Q_j} - \rho_{44}^{Q_i Q_j}}. \quad (22)$$

Результаты численных расчетов отрицательности пар кубитов (22) для начальных бисепарабельных состояний (2) и (3) представлены на рис. 1–4.

3. Результаты и обсуждение

На рис. 1, а показана зависимость параметра перепутывания ε_{12} для кубитов Q_1 и Q_2 от безразмерного времени γt для бисепарабельного начального состояния кубитов (2) с $\alpha = \pi/4$ и различных значений среднего числа фотонов в моде резонатора. Для сравнения, на рис 1, б представлены аналогичные зависимости для модели, состоящей из трех кубитов, запертых в одномодовом резонаторе и резонансно взаимодействующих с выделенной модой поля (соответствующие формулы для отрицательностей представлены в нашей предыдущей работе [27]). При усреднении по состояниям третьего кубита состояния кубитов Q_1 и Q_2 в начальный момент времени максимально

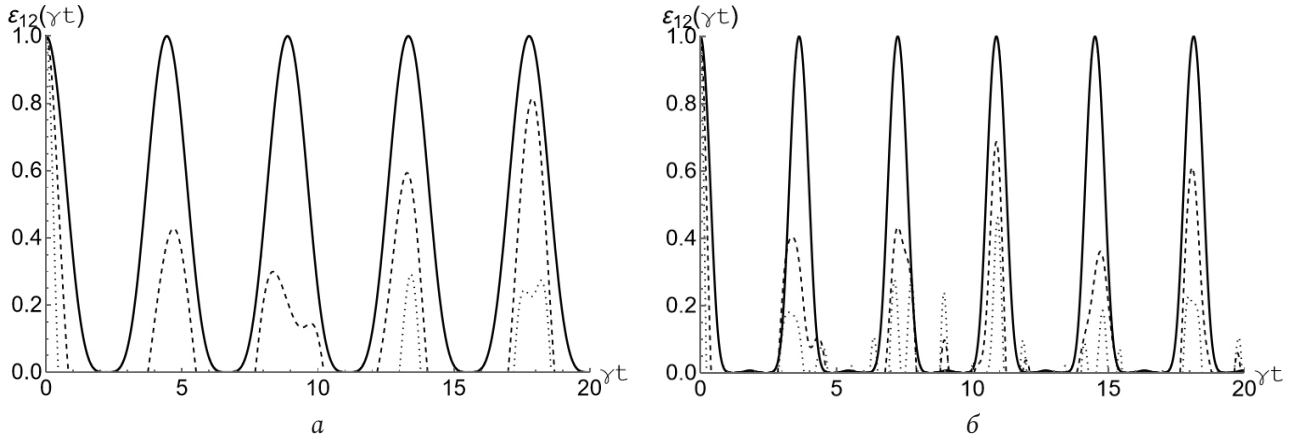


Рис. 1. Графики зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{12}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния (2) с изменением среднего числа тепловых фотонов $\bar{n}$ в модели с двумя кубитами в резонаторе (а) и с тремя кубитами в резонаторе (б) при $\alpha = \pi/4$. На обоих графиках: $\bar{n} = 0,0001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 4$ (точечная линия)
Fig. 1. Graphs of the dependence of the negativity criterion $\varepsilon_{12}(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial biseparable state (2) with a change in the average number of thermal photons $\bar{n}$ in the model with two qubits in the resonator (a) and with three qubits in the resonator (b) at $\alpha = \pi/4$. On both graphs: $\bar{n} = 0,0001$ (solid line), $\bar{n} = 1$ (dashed line), $\bar{n} = 4$ (dotted line)

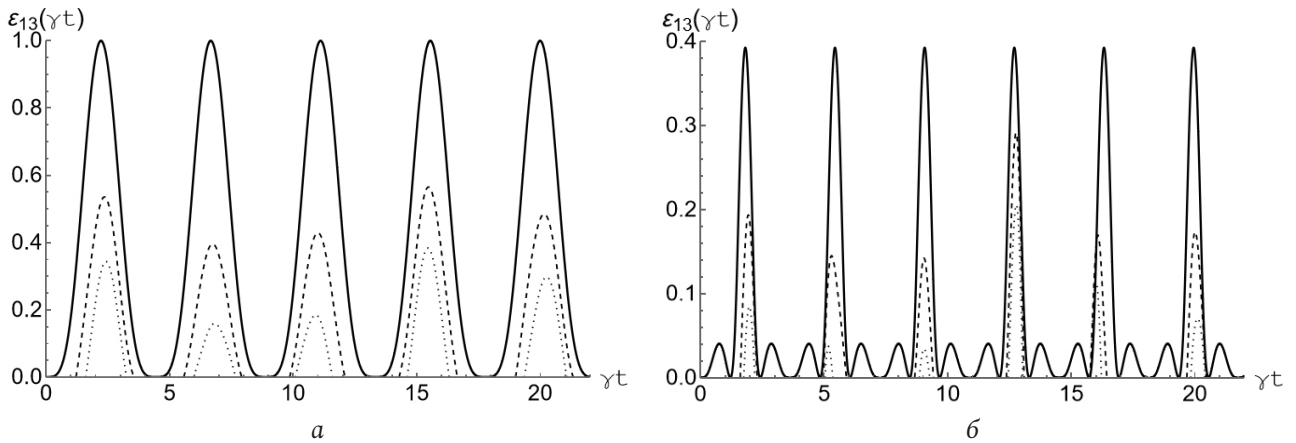


Рис. 2. Графики зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{13}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния (2) с изменением среднего числа тепловых фотонов $\bar{n}$ в модели с двумя кубитами в резонаторе (а) и с тремя кубитами в резонаторе (б) при $\alpha = \pi/4$. На обоих графиках: $\bar{n} = 0,0001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 0,5$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 1$ (точечная линия)
Fig. 2. Graphs of the dependence of the negativity criterion $\varepsilon_{13}(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial biseparable state (2) with a change in the average number of thermal photons $\bar{n}$ in the model with two qubits in the resonator (a) and with three qubits in the resonator (b) at $\alpha = \pi/4$. On both charts: $\bar{n} = 0,0001$ (solid line), $\bar{n} = 0,5$ (dashed line), $\bar{n} = 1$ (dotted line)

перепутаны. Этому соответствует начальное значение $\varepsilon_{12} = 1$. Из рисунка хорошо видно, что на некоторых временах перепутывание резко исчезает и остается нулевым в течение конечного времени, прежде чем возродиться. Это означает наличие в системе эффекта мгновенной смерти перепутывания. Из рисунка также видно, что с увеличением среднего числа тепловых фотонов максимальная степень перепутывания кубитов быстро уменьшается. Важно отметить, что эффект мгновенной смерти перепутывания отсутствует в случае малых интенсивностей теплового поля ($\bar{n} \rightarrow 0$) при любых значениях начального параметра α как в модели с двумя кубитами в резонаторе, так и с тремя. С увеличением числа тепловых фотонов в моде промежутки времени, для которых в системе

отсутствует перепутывание, увеличиваются. Отличие в поведении отрицательности для модели трех кубитов, запертых в резонаторе, сводится к уменьшению периода осцилляций и увеличению времени смерти перепутывания. На рис. 2, а показана зависимость параметра перепутывания ε_{13} для кубитов Q_1 и Q_3 от безразмерного времени γt для бисепарабельного начального состояния кубитов (2) с $\alpha = \pi/4$ и различных значений теплового поля резонатора. Соответственно, на рис. 2, б показаны аналогичные зависимости для модели с тремя кубитами в резонаторе. В отличие от предыдущего случая, в начальный момент времени пара кубитов Q_1 и Q_3 находится в сепарабельном состоянии, что соответствует начальному значению $\varepsilon_{13} = 0$.

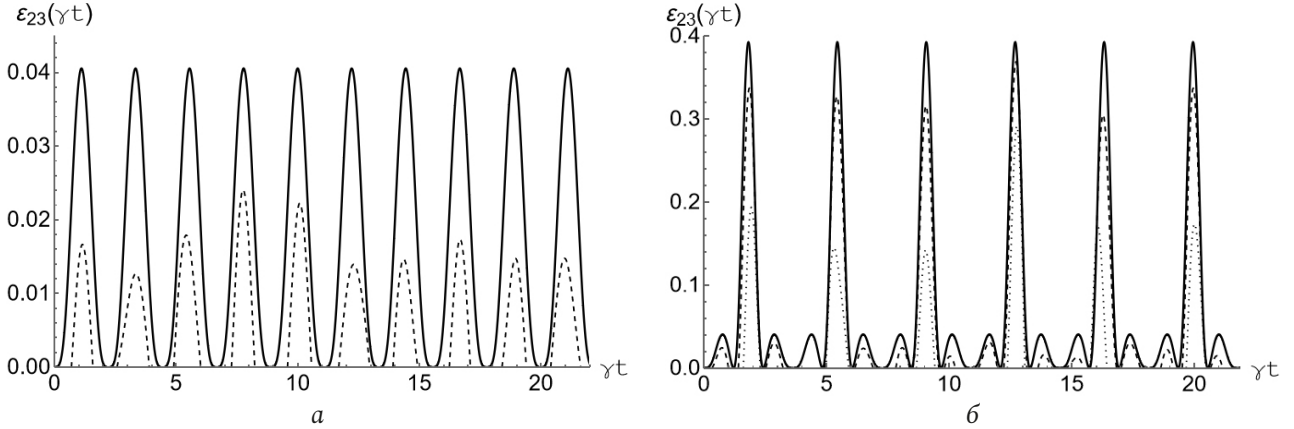


Рис. 3. Графики зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{23}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния (2) с изменением среднего числа тепловых фотонов $\bar{n}$ в модели с двумя кубитами в резонаторе (а) и с тремя кубитами в резонаторе (б) при $\alpha = \pi/4$. На графиках обоих: $\bar{n} = 0,0001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 0,1$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 0,5$ (точечная линия)

Fig. 3. Graphs of the dependence of the negativity criterion $\varepsilon_{23}(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial biseparable state (2) with a change in the average number of thermal photons $\bar{n}$ in the model with two qubits in the resonator (a) and with three qubits in the resonator (b) at $\alpha = \pi/4$. On both graphs: $\bar{n} = 0,0001$ (solid line), $\bar{n} = 0,1$ (dashed line), $\bar{n} = 0,5$ (dotted line)

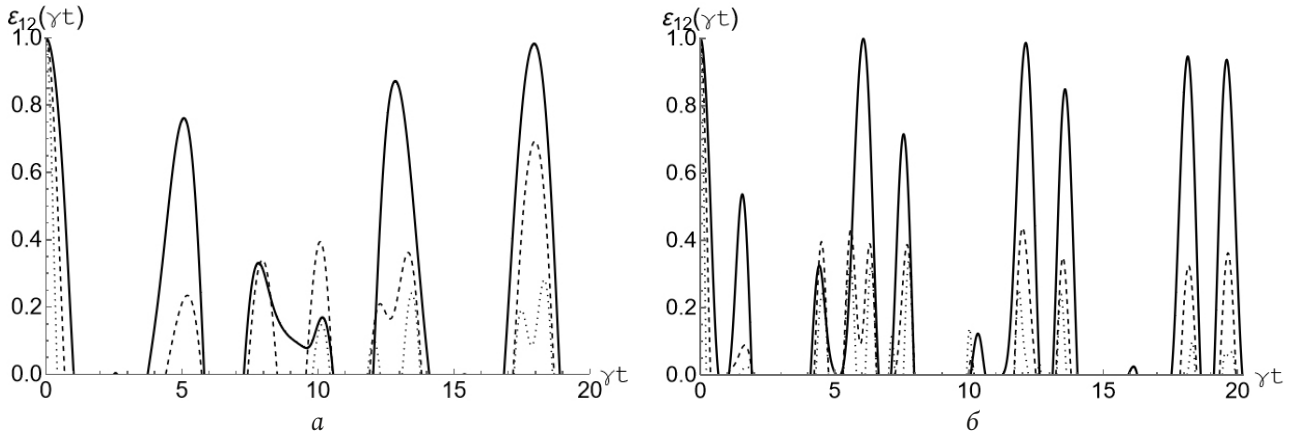


Рис. 4. Графики зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{12}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния (3) с изменением среднего числа тепловых фотонов $\bar{n}$ в модели с двумя кубитами в резонаторе (а) и с тремя кубитами в резонаторе (б) при $\alpha = \pi/4$. На обоих графиках: $\bar{n} = 0,0001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 4$ (точечная линия)

Fig. 4. Graphs of the dependence of the negativity criterion $\varepsilon_{12}(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial biseparable state (3) with a change in the average number of thermal photons $\bar{n}$ in the model with two qubits in the resonator (a) and with three qubits in the resonator (b) at $\alpha = \pi/4$. On both graphs: $\bar{n} = 0,0001$ (solid line), $\bar{n} = 1$ (dashed line), $\bar{n} = 4$ (dotted line)

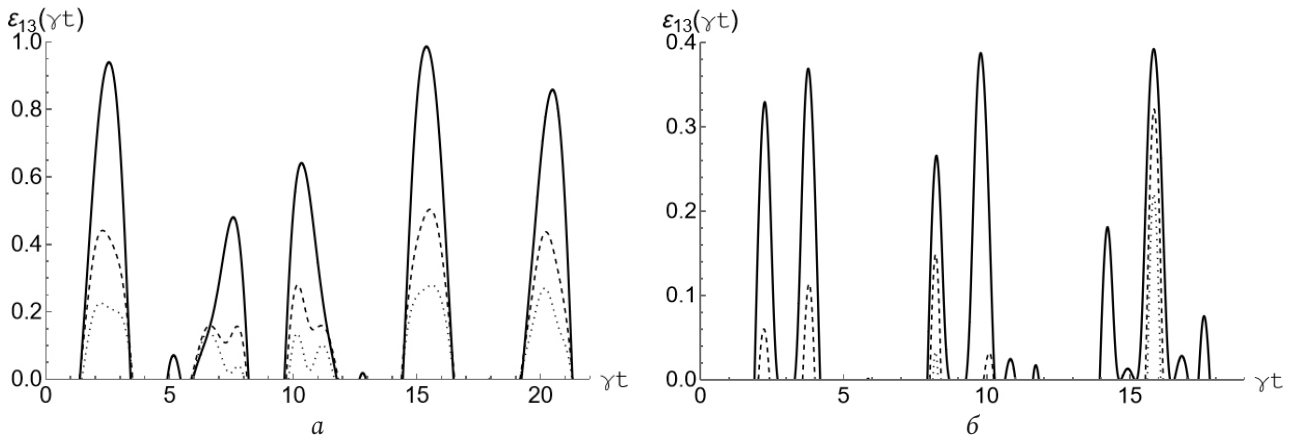


Рис. 5. Графики зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{13}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния (3) с изменением среднего числа тепловых фотонов $\bar{n}$ в модели с двумя кубитами в резонаторе (а) и с тремя кубитами в резонаторе (б) при $\alpha = \pi/4$. На обоих графиках: $\bar{n} = 0,0001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 0,5$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 1$ (точечная линия)

Fig. 5. Graphs of the dependence of the negativity criterion $\varepsilon_{13}(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial biseparable state (3) with a change in the average number of thermal photons $\bar{n}$ in the model with two qubits in the resonator (a) and with three qubits in the resonator (b) at $\alpha = \pi/4$. On both graphs: $\bar{n} = 0,0001$ (solid line), $\bar{n} = 0,5$ (dashed line), $\bar{n} = 1$ (dotted line)

Максимальная степень перепутывания кубитов для модели с тремя кубитами в общем резонаторе существенно меньше соответствующей величины для модели с двумя кубитами в резонаторе. Остальные выводы, касающиеся поведения отрицательности пары кубитов Q_1 и Q_2 , для обеих рассмотренных моделей оказываются справедливыми и для кубитов Q_1 и Q_3 . На рис. 3, а показана зависимость параметра перепутывания ε_{23} для кубитов Q_2 и Q_3 от безразмерного времени γt для бисепарабельного начального состояния кубитов (2) с $\alpha = \pi/4$ и различных значений среднего числа фотонов в моде резонатора. Для сравнения, на рис. 3, б представлены аналогичные зависимости для модели, состоящей из трех кубитов в общем резонаторе. Аналогично предыдущему случаю в начальный момент времени пара кубитов Q_1 и Q_3 находится в сепарабельном состоянии. На рис. 3 хорошо видно, что максимальная степень перепутывания кубитов Q_2 и Q_3 для рассматриваемой модели на порядок меньше аналогичной величины для модели с тремя кубитами в резонаторе. Интересной особенностью динамики перепутывания кубитов Q_2 и Q_3 выбранного бисепарабельного состояния (2) является отсутствие какого-либо перепутывания даже при относительно небольших значениях интенсивности теплового поля, в то время как в модели с тремя кубитами в резонаторе с той же интенсивностью теплового поля перепутывание для данной пары наблюдается.

На рис. 4, а построена зависимость параметра перепутывания ε_{12} для кубитов Q_1 и Q_2 от безразмерного времени γt для бисепарабельного начального состояния кубитов (3) с $\alpha = \pi/4$ и различных значений среднего числа фотонов в моде резонатора. Для сравнения, на рис. 4, б представлены аналогичные зависимости для модели, состоящей из трех кубитов в общем резонаторе. При усреднении по состояниям третьего кубита, как и в случае начального состояния (2), кубиты Q_1 и Q_2 в начальный момент времени максимально перепутаны. Сравнение рис. 1 и 4 выявляет, что для начального состояния кубитов (3) существенно возрастает длительность временных интервалов, на которых состояния кубитов распутаны, а также присутствует эффект мгновенной смерти перепутывания даже в случае малых интенсивностей теплового поля. На рис. 5, а отражена зависимость параметра перепутывания ε_{13} для кубитов Q_1 и Q_3 от безразмерного времени γt для бисепарабельного начального состояния кубитов (3)

с $\alpha = \pi/4$ и различных значений интенсивностей поля резонатора. Видно, что в случае малых интенсивностей теплового поля присутствует эффект мгновенной смерти перепутывания в отличие от аналогичной пары кубитов для начального состояния (2). На рис. 5, б приведены аналогичные зависимости для модели с тремя кубитами в резонаторе. Для рассматриваемых кубитов Q_1 и Q_3 начальное состояние является сепарабельным, для которого $\varepsilon_{13} = 0$. Для состояния (3) максимальная степень перепутывания кубитов для модели с тремя кубитами в общем резонаторе также существенно меньше соответствующей величины для модели с двумя кубитами в резонаторе. Для кубитов Q_1 и Q_3 существенно возрастают промежутки времени, для которых перепутывание кубитов Q_1 и Q_3 отсутствует. Наиболее интересными представляются расчеты отрицательности пары кубитов Q_2 и Q_3 для начального бисепарабельного состояния (3). Указанные расчеты указывают на отсутствие в рассматриваемой модели перепутывания кубитов в процессе их эволюции при любых интенсивностях теплового поля. В то время как для модели с тремя кубитами в общем резонаторе поведение отрицательности тех же кубитов Q_2 и Q_3 полностью аналогично поведению отрицательности кубитов Q_1 и Q_3 .

Заключение

В настоящей работе мы исследовали динамику системы трех идентичных кубитов, два из которых заперты в идеальном резонаторе и резонансно взаимодействуют с модой электромагнитного поля этого резонатора, а третий кубит находится в свободном состоянии. Получено точное решение квантового уравнения Лиувилля рассматриваемой модели для начальных бисепарабельных состояний кубитов и теплового поля резонатора. На основе точного решения рассчитаны отрицательности всех пар кубитов. Расчеты проведены для двух типов бисепарабельных состояний и тепловых состояний электромагнитного поля резонатора для различных средних чисел фотонов. Проведено также сравнение динамики перепутывания кубитов для рассматриваемой модели и модели, в которой три кубита заперты в общем резонаторе. Показано, что тепловое поле резонатора не разрушает полностью начальное перепутывание пар кубитов даже для относительно высоких интенсивностей теплового шума резонатора. Для сепарабельных состояний кубитов взаимодействие с тепловым полем индуцирует их перепутывание в

процессе эволюции. Отмечено, что для больших интенсивностей теплового поля резонатора имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Указанный эффект отсутствует только для начального бисепарабельного состояния (2) для всех пар кубитов в случае малых интенсивностей теплового

поля при любых значениях начального параметра α . Расчеты также показали, что продолжительность промежутков времени между мгновенной смертью и возобновлением перепутывания кубитов существенно зависит от выбора начального бисепарабельного состояния кубитов.

Список литературы

1. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Reviews of Modern Physics*. 2014. Vol. 88. P. 153–186. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>
2. Superconducting qubits: Current state of play / M. Kjaergaard [et al.] // *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*. 2020. Vol. 11. P. 369–395. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>
3. Superconducting quantum computing: A review / H.-L. Huang [et al.] // *Science China Information Sciences*. 2020. Vol. 63. P. 180501. DOI: <https://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>
4. Shi J. Entanglement research for the coupled superconducting phase qubit and a two-level system // *Advances in Condensed Matter Physics*. 2020. Vol. 2020. P. 3838106. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/3838106>
5. Quantum entanglement / R. Horodecki [et al.] // *Reviews of Modern Physics*. 2009. Vol. 81, no. 2. P. 865–942. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865>
6. Brass D., Leuchs G., Quantum Information: From Foundations to Quantum Technology Applications. Cambridge: Wiley-VCH, 2019. 892 p.
7. Luo M.-X., Fe S.-M. Genuinely multipartite entanglement via shallow quantum circuits // *Advanced Quantum Technologies*. 2023. Vol. 6, no. 2. P. 2200089. DOI: <https://doi.org/10.1002/qute.202200089>
8. Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits / M. Neeley [et al.] // *Nature*. 2010. Vol. 467, no. 7315. P. 570–573. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature09418>
9. Dissipative preparation of W states in trapped ion systems / D.C. Cole [et al.] // *New Journal of Physics*. 2021. Vol. 23, no. 7. P. 073001. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/ac09c8>
10. Gühne O., Tóth G. Entanglement detection // *Physics Reports*. 2009. Vol. 474, no. 1–6. P. 1–75. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.02.004>
11. Entanglement certification from theory to experiment / N. Friis [et al.] // *Nature Reviews Physics*. 2019. Vol. 1. P. 72–87. DOI: <https://doi.org/10.1038/s42254-018-0003-5>
12. Башкиров Е.К. Тепловое перепутывание в двухатомной модели Тависа – Каммингса с учетом диполь-дипольного взаимодействия // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2023. Т. 26, № 2. С. 9–17. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.2.9-17>
13. Башкиров Е.К. Перепутывание двух сверхпроводящих кубитов, индуцированное тепловым шумом резонатора со средой Керра, при наличии начальной атомной когерентности // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2022. Т. 25, № 1. С. 7–15. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.1.7-15>
14. Захаров Р.К., Башкиров Е.К. Влияние расстройки и керровской нелинейности на атом-атомное перепутывание в двойной двухфотонной модели Джейнса – Каммингса // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2021. Т. 24, № 1. С. 9–14. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.1.9-14>
15. Башкиров Е.К. Перепутывание атомов, индуцированное тепловым шумом при наличии начальной атомной когерентности // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2020. Т. 23, № 3. С. 10–17. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.10-17>
16. Башкиров Е.К., Гуслинникова М.О. Перепутывание атомов с двухфотонными переходами при наличии динамического штарковского сдвига энергетических уровней // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2019. Т. 22, № 3. С. 36–43. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.36-43>
17. Filippov S.N. Quantum mappings and characterization of entangled quantum states // *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 241, no. 2. P. 210–236. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04418-3>
18. Quantum fidelity measures for mixed states / Y.-C. Liang [et al.] // *Reports on Progress in Physics*. 2019. Vol. 82, no. 7. P. 076001. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab1ca4>
19. Ma M., Li Y., Shang J. Multipartite entanglement measures: A review // *arXiv:2309.09459*. 2023. P. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.09459>
20. Yu T., Eberly J.H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 93, no. 14. P. 140404. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.140404>
21. Environment-induced sudden death of entanglement / M.P. Almeida [et al.] // *Science*. 2007. Vol. 316, no. 5824. P. 579–582. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1139892>
22. Ge M., Zhu L.-F., Qui L. Three-qubit entanglement sudden death // *Communications in Theoretical Physics*. 2008. Vol. 49, no. 6. P. 1443–1448. DOI: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/49/6/20>
23. Xie S., Younis D., Eberly J.H. Evidence for unexpected robustness of multipartite entanglement against sudden death from spontaneous emission // *Physical Review Research*. 2023. Vol. 5, no. 3. P. L032015. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.5.L032015>

24. Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика теплового перепутывания пар кубитов в трехкубитной модели Тависа – Каммингса // Журнал технической физики. 2024. Т. 94, № 4. (Принято к печати).
25. Peres A. Separability criterion for density matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, no. 8. P. 1413–1415. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>
26. Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of mixed states: Necessary and sufficient condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223, no. 1–2. P. 1–8. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2)
27. Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика трехкубитной модели Тависа – Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 95–105. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>

Информация об авторах

Багров Александр Романович, магистрант физического факультета Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. В 2023 г. окончил бакалавриат физического факультета Самарского университета по специальности «Физика». Автор 6 научных работ.

Область научных интересов: квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика.

E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1098-0300>

Башкиров Евгений Константинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. В 1978 г. окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета и в 1984 г. – аспирантуру при Московском государственном университете. Автор более 360 научных работ.

Область научных интересов: квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика, теория неравновесных явлений.

E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2024, vol. 27, no. 4, pp. 7–19

DOI [10.18469/1810-3189.2024.27.4.7-19](https://doi.org/10.18469/1810-3189.2024.27.4.7-19)

UDC 537.86:530.145

Original Research

Received 4 April 2024

Accepted 6 May 2024

Published 28 December 2024

Dynamics of qubit entanglement in three-qubit Jaynes–Cummings model for biseparable initial states

Alexander R. Bagrov , Eugene K. Bashkirov 

Samara National Research University
34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Russia

Abstract – Background. To operate a quantum computer, a set of universal gates must be implemented, such as a two-qubit gate of the controlled negation type plus one-qubit spins. As a universal alternative, three-qubit gates may be used. In this regard, it seems very relevant to investigate the dynamics of three-qubit systems in microwave resonators, in particular to study the most efficient schemes for generating, controlling, and monitoring entangled qubit states. **Aim.** To investigate the features of the dynamics of entangled pairs of qubits for a system in which two qubits are locked in a single-mode resonator and interact with the thermal field mode, and the third qubit is in a free state. **Methods.** To analyze the dynamics of the considered system, the solution of the quantum Liouville equation for the full density matrix is investigated. The exact solution of the above equation in the case of initial biseparable states of the qubits is found. The exact solution of the evolution equation is used to calculate the criterion of entanglement of qubit pairs – negativity. Numerical simulations of negativity for biseparable qubit states as well as different values of the thermal field intensity of the resonator have been carried out. **Results.** It is shown that for intense thermal fields of the resonator the effect of instantaneous death of entanglement is observed, while the time intervals between death and revival of entanglement of qubits depend essentially on the choice of their initial biseparable state. It is found that for one of the biseparable states, entanglement of qubits trapped in the resonator does not occur at any field intensities of the resonator. **Conclusion.** It is found that the peculiarities of the dynamics of entanglement of qubits, in particular the time intervals between the death and birth of entangled qubits, are determined by the choice of the initial biseparable state of qubits, as well as by the values of the field intensity of the resonator. The results obtained can be used to effectively control and manage the degree of qubit entanglement in three-qubit systems in microwave resonators.

Keywords – qubits; resonator; quantum thermal field; biseparable states; entanglement; negativity; sudden death of entanglement.

References

1. I. M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori, “Quantum simulation,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 88, pp. 153–186, 2014, doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
2. M. Kjaergaard et al., “Superconducting qubits: Current state of play,” *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*, vol. 11, pp. 369–395, 2020, doi: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
3. H.-L. Huang et al., “Superconducting quantum computing: A review,” *Science China Information Sciences*, vol. 63, p. 180501, 2020, doi: <http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>.
4. J. Shi, “Entanglement research for the coupled superconducting phase qubit and a two-level system,” *Advances in Condensed Matter Physics*, vol. 2020, p. 3838106, 2020, doi: <https://doi.org/10.1155/2020/3838106>.
5. R. Horodecki et al., “Quantum entanglement,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, no. 2, pp. 865–942, 2009, doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865>.
6. D. Bruss and G. Leuchs, *Quantum Information: From Foundations to Quantum Technology Applications*. Cambridge: Wiley-VCH, 2019.
7. M.-X. Luo and S.-M. Fe, “Genuinely multipartite entanglement via shallow quantum circuits,” *Advanced Quantum Technologies*, vol. 6, no. 2, p. 2200089, 2023, doi: <https://doi.org/10.1002/qute.202200089>.
8. M. Neeley et al., “Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits,” *Nature*, vol. 467, no. 7315, pp. 570–573, 2010, doi: <https://doi.org/10.1038/nature09418>.
9. D. C. Cole et al., “Dissipative preparation of W states in trapped ion systems,” *New Journal of Physics*, vol. 23, no. 7, p. 073001, 2021, doi: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/ac09c8>.
10. O. Gühne and G. Tóth, “Entanglement detection,” *Physics Reports*, vol. 474, no. 1–6, pp. 1–75, 2009, doi: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.02.004>.
11. N. Friis et al., “Entanglement certification from theory to experiment,” *Nature Reviews Physics*, vol. 1, pp. 72–87, 2019, doi: <https://doi.org/10.1038/s42254-018-0003-5>.
12. E. K. Bashkirov, “Thermal entanglement in two-atom Tavis–Cummings model with taking into account the dipole-dipole interaction,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 9–17, 2023, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.2.9-17>. (In Russ.)
13. E. K. Bashkirov, “Entanglement of two superconducting qubits induced by a thermal noise of a cavity with Kerr medium taking into account the atomic coherence,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 1, pp. 7–15, 2022, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.1.7-15>. (In Russ.)
14. R. K. Zakharov and E. K. Bashkirov, “Influence of detuning and Kerr nonlinearity on atom-atom entanglement in the double two-photon Jaynes–Cummings model,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 24, no. 1, pp. 9–14, 2021, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.1.9-14>. (In Russ.)
15. E. K. Bashkirov, “Entanglement of atoms induced by thermal noise in the presence of initial atomic coherence,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 3, pp. 10–17, 2020, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.10-17>. (In Russ.)
16. E. K. Bashkirov and M. O. Guslyannikova, “The entanglement of atoms with two-photon transitions in the presence of ac Stark shift of energy levels,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 22, no. 3, pp. 36–43, 2019, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.36-43>. (In Russ.)
17. S. N. Filippov, “Quantum mappings and characterization of entangled quantum states,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 241, no. 2, pp. 210–236, 2019, doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04418-3>.
18. Y.-C. Liang et al., “Quantum fidelity measures for mixed states,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 82, no. 7, p. 076001, 2019, doi: <https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab1ca4>.
19. M. Ma, Y. Li, and J. Shang, “Multipartite entanglement measures: A review,” *arXiv:2309.09459*, pp. 1–14, 2023, doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.09459>.
20. T. Yu and J. H. Eberly, “Finite-time disentanglement via spontaneous emission,” *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 14, p. 140404, 2003, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.140404>.
21. M. P. Almeida et al., “Environment-induced sudden death of entanglement,” *Science*, vol. 316, no. 5824, pp. 579–582, 2007, doi: <https://doi.org/10.1126/science.1139892>.
22. M. Ge, L.-F. Zhu, and L. Qui, “Three-qubit entanglement sudden death,” *Communications in Theoretical Physics*, vol. 49, no. 6, pp. 1443–1448, 2008, doi: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/49/6/20>.
23. S. Xie, D. Younis, and J. H. Eberly, “Evidence for unexpected robustness of multipartite entanglement against sudden death from spontaneous emission,” *Physical Review Research*, vol. 5, no. 3, p. L032015, 2023, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.5.L032015>.
24. A. R. Bagrov and E. K. Bashkirov, “Dynamics of thermal entanglement of pairs of qubits in the three-qubit Tavis–Cummings model,” *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, vol. 94, no. 4, 2024, to be published. (In Russ.)
25. A. Peres, “Separability criterion for density matrices,” *Physical Review Letters*, vol. 77, no. 8, pp. 1413–1415, 1996, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
26. R. Horodecki, M. Horodecki, and P. Horodecki, “Separability of mixed states: Necessary and sufficient condition,” *Physics Letters A*, vol. 223, no. 1–2, pp. 1–8, 1996, doi: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
27. A. R. Bagrov and E. K. Bashkirov, “Dynamics of the three-qubit Tavis–Cummings model,” *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*, vol. 28, no. 1–2, pp. 95–105, 2022, doi: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>. (In Russ.)

Information about the Authors

Alexander R. Bagrov, master's student of the Physical Department, Samara National Research University, Samara, Russia. In 2023, he graduated from the Faculty of Physics of the Samara National Research University. Author of 6 scientific papers.

Research interests: quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics.

E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1098-0300>

Eugene K. Bashkirov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia. In 1978, he graduated from the Faculty of Physics of the Kuibyshev State University and in 1984 – postgraduate studies at the Moscow State University. Author of more than 360 scientific papers.

Research interests: quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics, theory of nonequilibrium phenomena.

E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

РЕКЛАМА

Неганов, В.А.

Современная теория и практические применения антенн: монография / В.А. Неганов, Д.П. Табаков, Г.П. Яровой; предисл. акад. Ю.В. Гуляева; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радиотехника, 2009. – 720 с.

Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Г.П.

ISBN 978-5-88070-222-0

УДК 621.396.67

ББК 32.845

Современная теория
и практические применения
антенн

Издательство «Радиотехника»
Москва, 2009

Рассмотрены основные разделы теории и техники антенн. Освещены вопросы расчета и построения различных типов антенн (от вибраторных до рупорных и антенных решеток, включая фазированные). Основное внимание уделено антеннам СВЧ и расчетам их электромагнитных полей в ближней зоне, т. е. вопросам электромагнитной совместимости.

Принципиальное отличие книги от известных заключается в последовательном применении метода физической регуляризации (самосогласованного метода) к расчету электромагнитного поля антенн, позволяющего осуществлять непрерывный переход с излучающей поверхности антенны к пространству вне ее. С помощью самосогласованного метода получены новые результаты по теории антенн: установлены связь между поверхностной плотностью тока на вибраторной антенне и напряженностью электромагнитного поля, однонаправленный режим излучения для кольцевой (рамочной антенны), режимы стоячих и бегущих волн в цилиндрической спиральной антенне, входное сопротивление практически для всех типов антенн. Теоретический материал подкреплен примерами применения многолучевых антенн.

Предназначено для разработчиков антенно-фидерных устройств, аспирантов и докторантов, занимающихся вопросами проектирования антенных систем различного назначения, студентов радиотехнических специальностей высших учебных заведений.