

УДК 37.016: 51
<https://doi.org/10.23951/1609-624X-2023-2-16-25>

Методические аспекты обучения школьников решению математических задач повышенной сложности

Наталья Владимировна Леонтьева

*Глазовский государственный педагогический институт имени В. Г. Короленко, Глазов, Россия,
leonteva-natalia-0812@yandex.ru*

Аннотация

Решение различных математических задач может вызвать у школьников определенные трудности. Применение схемы, позволяющей упорядочить и систематизировать процесс решения задачи, дает возможность обеспечить взаимодействие между участниками образовательного процесса, направленное на формирование творческой инициативы, математической интуиции, активности, независимости в рассуждениях. Результатом является способность школьников самостоятельно решать задачи различного уровня сложности.

Цель – обосновать поэтапную схему решения задачи для ее применения в процессе обучения школьников математике.

Основу исследования составляют системный и деятельностный подходы. В процессе применялись такие методы, как обобщение, систематизация, классификация, анализ российских и зарубежных исследований.

Российские и зарубежные исследователи в своих работах разделяют деятельность школьников по решению задач на отдельные этапы, что способствует формированию основных способов действий, направленных на получение образовательных результатов. Предлагаемые схемы отличаются содержанием, а также числом выделяемых этапов. Обобщение и систематизация изученного опыта позволили модифицировать их с учетом потребностей участников образовательного процесса. Во время обучения задачу повышенной сложности решает не только ученик, но и учитель. Приведенная схема обобщает их деятельность, дает возможность не только провести анализ задачи, но и охарактеризовать методологические и методические аспекты решения. Соответственно, в нее включены следующие этапы: аналитический, схематический, методологический, описательный, проверочный, исследовательский, методический. На аналитическом и схематическом этапах проводится собственно поиск решения задачи, ее основное содержание представляется с помощью математических моделей и различных схем. На методологическом этапе дается характеристика задачи с точки зрения используемых методов и применяемых мысленных операций. Описательный и проверочный этапы направлены на оформление найденного решения и его проверку, которая включает поиск логических, вычислительных и иных видов ошибок. Во время исследовательского этапа проводится анализ условий задачи, определяется существование ее решения при их изменении. Методический этап дает возможность учителю обобщить и систематизировать вопросы, связанные с обучением решению задачи.

Рассмотренная в данной работе схема систематизирует и структурирует деятельность как учителя, так и обучающихся по решению задач для постепенного формирования умения осуществлять его поиск.

Ключевые слова: обучение школьников математике, задачи повышенной сложности, этапы решения задачи по математике, олимпиадные задачи по математике, развитие обучающихся

Для цитирования: Леонтьева Н. В. Методические аспекты обучения школьников решению математических задач повышенной сложности // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2023. Вып. 2 (226). С. 16–25. <https://doi.org/10.23951/1609-624X-2023-2-16-25>

Methodological aspects of teaching schoolchildren to solve mathematical problems of increased complexity

Natalia V. Leontiyeva

*Glazov State Pedagogical Institute by V. G. Korolenko, Glazov, Russian Federation,
leonteva-natalia-0812@yandex.ru*

Abstract

Various solutions to mathematical problems can cause certain difficulties for schoolchildren. The use of a scheme allowing to organize and systematize the search for a solution to a problem makes it possible to ensure the interaction of participants in the educational process, aimed at creative initiative, mathematical intuition, activity, and independence in reasoning. The result is the ability of the student to solve various problems individually.

The goal is to substantiate a step-by-step scheme for solving the problem for its application in the process of teaching mathematics to schoolchildren. The system and activity approach compose the research base. The work used such methods as generalization, systematization, classification, analysis of domestic and foreign studies. Russian and foreign researchers in their works divide the activity of schoolchildren in solving problems into separate stages, which contributes to the formation of the main methods of action aimed at obtaining educational results. The proposed schemes differ in content, as well as in the number of allocated stages. Generalization and systematization of the studied experience made it possible to modify them taking into account the needs of the participants in the educational process. During training, the task of increased complexity is solved not only by the student, but also by the teacher. The above scheme summarizes their activities, makes it possible not only to analyze the problem, but also to characterize the methodological and methodological aspects of the solution. Accordingly, it includes the following stages: analytical, schematic, methodological, descriptive, verification, research, methodical. At the analytical and schematic stages, the actual search for a solution to the problem is carried out, its main content is represented using mathematical models and various schemes. At the methodological stage, the task is characterized from the point of view of the methods used and the mental operations used. The descriptive and verification stages are directed by recording the problem solution and his validate that includes logical, computing and other mistakes. During the research phase, an analysis of the conditions of the problem is carried out, the existence of its solution is determined when they change. The methodological stage enables the teacher to generalize and systematize issues related to learning to solve a problem.

The scheme considered in this paper systematizes and structures the activities of both the teacher and students in solving problems for the gradual formation of the ability to search for it.

Keywords: *teaching mathematics to schoolchildren, difficult problem, mathematic problem solution stages, student development*

For citation: Leontiyeva N. V. Methodological aspects of teaching schoolchildren to solve mathematical problems of increased complexity [Metodicheskiye aspekty obucheniya shkol'nikov resheniyu matematicheskikh zadach povyshennoy slozhnosti]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – Tomsk State Pedagogical University Bulletin*, 2023, vol. 2 (226), pp. 16–25 (in Russ.). <https://doi.org/10.23951/1609-624X-2023-2-16-25>

Введение

Современный уровень развития общества требует от выпускников, планирующих связать свое будущее с естественно-научным и инженерным направлениями, высокого уровня математической подготовки. Как отмечают авторы Концепции развития математического образования в Российской Федерации, изучение математики обеспечивает готовность учащихся к применению математики в других областях, существенно влияет на интеллектуальную готовность школьников и студентов к обучению [1]. В первую очередь это связано с тем влиянием, которое математика оказывает на развитие логического, пространственного, алгоритмического мышления, интуиции, воображения и вычислительной культуры.

Одним из основных образовательных средств, применяемых при обучении математике, являются задачи. При этом могут возникнуть сложности, связанные с тем, как научить школьников их решать. Использование поэтапной схемы дает возможность систематизировать и упорядочить процесс работы над задачей.

Цель работы – обосновать поэтапную схему решения задачи для ее применения в процессе обучения школьников математике.

Материал и методы

Основу исследования составляют системный и деятельностный подходы. Организация обучения школьников решению задач повышенной сложности

разделена на отдельные этапы, приведено их содержание и внутренняя структура, описаны связи между ними. Также охарактеризована организация деятельности учителя и обучающихся на каждом этапе. В процессе подготовки работы использованы такие методы теоретического исследования, как обобщение, систематизация, классификация, анализ трудов российских и зарубежных авторов.

Результаты и обсуждение

В своей работе Я. С. Гриншпон и А. Г. Подстригич указывают, что основным структурным компонентом учебно-познавательной деятельности является учебная задача [2, с. 48]. Развитие обучающихся происходит в результате выполнения различных видов деятельности в процессе решения разнообразных математических задач. По мнению А. Д. Нахмана, к ним относятся: постановка задач, приводящих школьников к новым понятиям и фактам, активизация познавательной деятельности школьников за счет использования различных методов и приемов, формирование выводов, гипотез, обобщений и другие [3, с. 35]. Перечисленные виды деятельности применяются на различных этапах в процессе работы над задачей. Обратим внимание на содержание понятия «задача», которое в него вкладывают исследователи.

Понятие «задача» является одним из ведущих при организации обучения математике. Как указывают В. А. Далингер и Е. А. Пустовит, с образовательной точки зрения задача представляет собой

одно из основных средств обучения [4, с. 52]. С ее помощью формируются основные способы преобразования математических объектов, логическое, пространственное, критическое мышление, создаются условия для развития интуиции, умений выполнять различные мыслительные операции.

Существуют различные подходы к классификации задач, некоторые из которых приведены в исследовании [4, с. 53]. В данной работе будем придерживаться классификации, приведенной В. А. Далингером и Е. А. Пустовит, которые выделяют алгоритмические, эвристические и исследовательские задачи [4, с. 53]. Решение задач первого типа основано на использовании известных алгоритмов, что в первую очередь предполагает воспроизведение изученного материала. Задачи второго и третьего типов требуют от обучающихся применения нестандартных действий, известных алгоритмов в новых ситуациях, анализа неопределенных условий.

Как отмечают Г. А. Клековкин и А. А. Максютин, понятие трудности задачи не является однозначным и представляет собой интегративную характеристику [5, с. 58]. В связи с этим не всегда представляется возможным однозначно рассчитать ее уровень. В общем случае алгоритмические задачи можно рассматривать как базовые, а эвристические и исследовательские – как задачи повышенной трудности. Отыскание их решения может вызвать существенные затруднения у обучающихся. Как отмечают J. Jäder, J. Sidenvall, L. Sumpter, некоторые ученики, столкнувшись с трудностями в процессе решения задачи, не готовы продолжать работу [6]. В связи с этим возникает необходимость описания последовательности логически взаимосвязанных шагов, позволяющих упорядочить и систематизировать деятельность учеников при решении задачи.

Процесс решения задачи исследователями описывается различно. Часть из них за основу берут краткие схемы решения задач. Подобную предлагал Д. Пойа, включив в нее следующие этапы: понимание постановки задачи, составление плана решения, осуществление плана решения, взгляд назад [7, с. 16]. Ее отличает универсальный характер, что позволяет применять ее при решении математических задач любого типа. В работе А. М. Асифа предложена ее адаптация в условиях использования прикладных математических пакетов, в частности среды GeoGebra [8]. Указанную схему дополняет Р. Ю. Костюченко за счет описания структуры отдельных этапов. Так, на этапе осмысления задачи автор выделяет следующие компоненты: ознакомление с ситуацией, описанной в задаче, выявление условий и требований, установление вида и типа задачи, фиксация результатов анализа [9, с. 122]. Этап изучения найденного решения разделен на следующие шаги: проверка, исследование

задачи, формулировка ответа [9, с. 122]. Обоснование более подробной структуры этапов дает возможность упорядочить их применение в процессе решения математической задачи.

Я. С. Гриншпон и А. Г. Подстригич предложили иную схему, состоящую из трех основных этапов: угадывание одного или нескольких решений задачи, поиск всех возможных решений или обоснование того, что они все найдены, строгое оформление решения [1, с. 48]. Сами авторы отмечают, что описанная схема не претендует на универсальность, ориентирована на отдельные типы задач, в рамках которых ее применение достаточно эффективно.

Еще один вариант предложен в монографии Г. Н. Васильевой и содержит следующие этапы: изучение структуры задачи, поиск плана решения задачи, осуществление плана решения, проверка решения задачи, изучение решения задачи [10, с. 102–115]. Приведенная автором характеристика каждого этапа определяет сущность тех действий, которые должны выполнить обучающиеся в процессе решения задачи.

Обсуждению этапов решения задач по математике посвящена работа Y. Jiang, T. Gong, L. E. Saldivia и др. [11]. Основой явилась схема, предложенная Д. Пойа, которую авторы дополнили следующим образом: понимание задачи, постановка цели, выстраивание планов и применение различных методов для их достижения, корректировка выбранных планов и методов. Решение задачи с использованием указанных этапов позволяет систематизировать мыслительные процессы, выполняемые обучающимися.

Расширенная схема, описывающая этапы решения математической задачи, представлена в работе Л. М. Фридмана и Е. Н. Турецкого, в которую включают: анализ задачи, схематическую запись задачи, поиск способа решения задачи, осуществление решения задачи, проверку решения задачи, исследование задачи, оформление ответа задачи, анализ решения задачи [12, с. 29]. Данная схема достаточно полно описывает список возможных действий, которые должны выполнить обучающиеся в процессе решения задачи. Как отмечают сами авторы, не все из них являются обязательными для выполнения в каждом отдельном случае.

Иную схему описывают Н. И. Попов и Е. В. Яковлева. Они включают в нее следующие основные этапы: выделение условий и требований к задаче, краткая запись текста, составление схем и рисунков, выявление основного соотношения, актуализация теории и практики, выяснение стратегии решения задачи, составление уравнений и неравенств, осуществление плана решения, проверка решения и ответа [13, с. 80]. Предложенная структура в первую очередь направлена на решение задач, связанных с необходимостью применять уравнения и неравенства.

Достаточно подробная схема работы над задачей повышенной сложности, представленная Н. Jacinto, S. Carreira, включает этапы: понимание, внимание, интерпретация, исследование, планирование, создание, проверка, представление результатов [14, с. 109]. Особенностью выделенных этапов является применение технических средств при их реализации, что требует достаточно хорошей математической подготовки.

В большинстве работ анализ подходов к решению задач повышенной сложности рассматривается с точки зрения тех действий, которые могут быть выполнены любым участником образовательного процесса. Учителю самому необходимо пони-

мать, как провести решение задачи в соответствии с выбранной схемой, а затем объяснить ее обучающимся. В связи с этим возникает необходимость преобразования описанной схемы.

В первую очередь опишем аналитический этап, предполагающий изучение условий и заключения задачи, направленное на поиск пути ее решения. Фактически он приводит к выявлению ряда действий, выполнение которых дает возможность получить ответ.

Возможны два основных способа организации поиска: прямой и обратный. В первом случае задача решается путем формулирования выводов из исходных данных, что последовательно приводит к требуемому ответу (рис. 1).

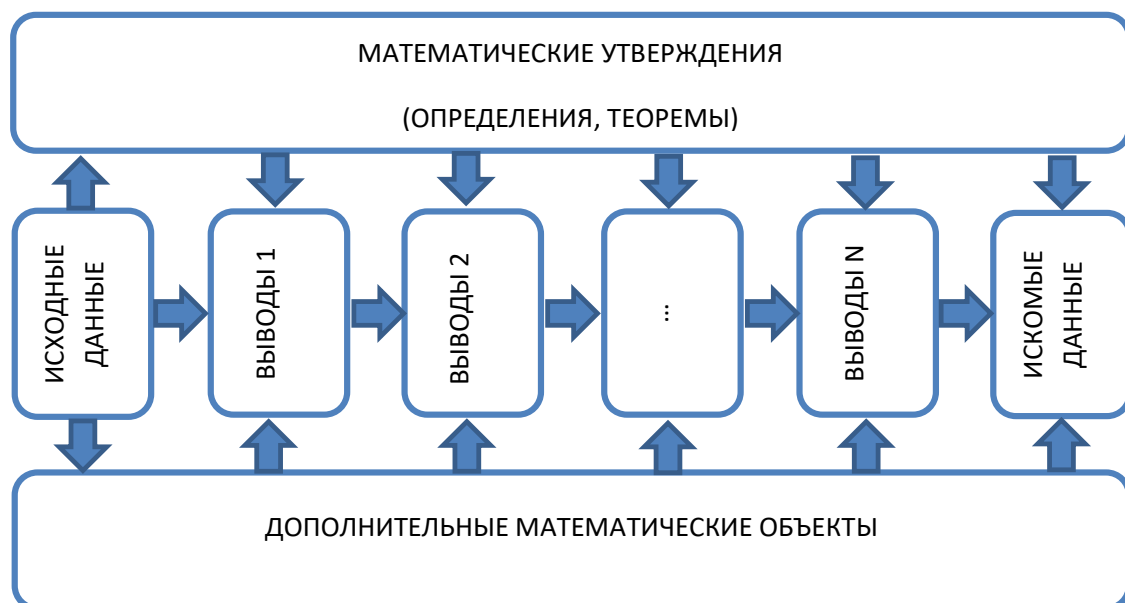


Рис. 1. Логика рассуждений от исходных данных к искомым

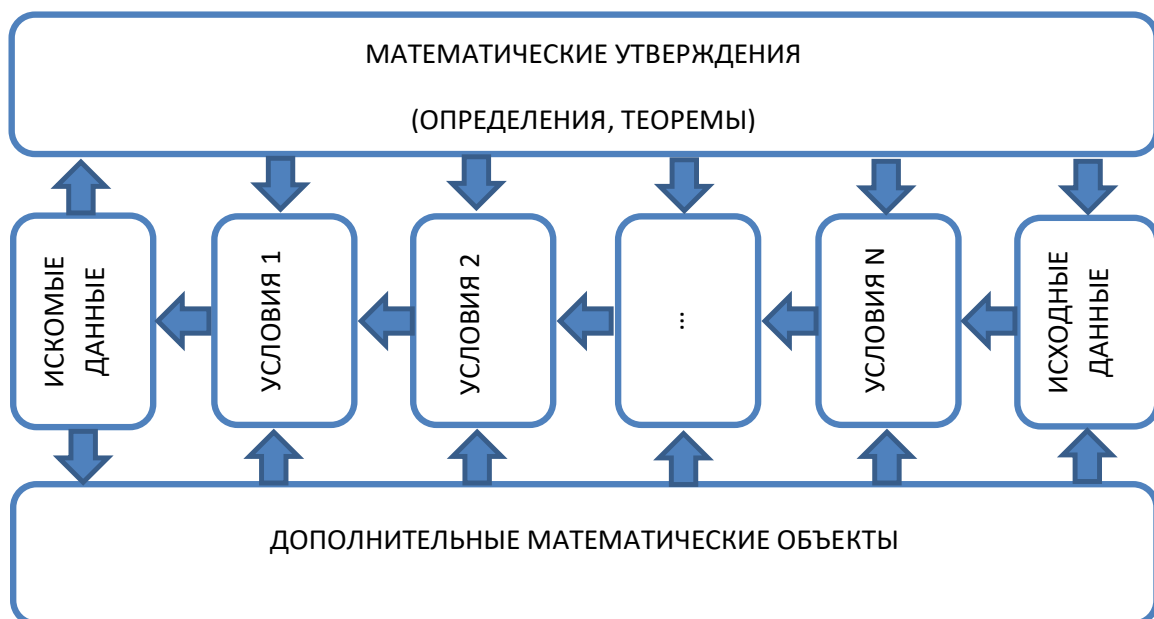


Рис. 2. Логика рассуждений от искомым данным к исходным

Во втором случае на каждом шаге требуется определить условия, из которых можно сделать вывод, требуемый в задаче (рис. 2).

На практике при решении сложных задач возможен комбинированный вариант рассуждений, когда определяются условия, обеспечивающие искомые выводы, а также формулируются выводы из исходных данных.

Обучение умению формулировать выводы может быть основано на выстраивании серии вопросов, позволяющих проследить цепочку рассуждений, которая даст возможность найти решение.

Одновременно в процессе анализа достаточно активно применяются различные мыслительные операции, с помощью которых осуществляются рассуждения. Подробно эти операции описал Д. Пойа в своей работе [15]. Разделим их на две группы. К организационной группе отнесем операции, направленные на организацию поиска решения задачи в целом (табл. 1) [15, с. 245–249].

Описанные операции носят универсальный характер и не всегда осознаются в явном виде. Одна-

ко они представляют собой общие организационные границы, в рамках которых производится поиск решения задачи.

Операционная группа включает в себя те непосредственные действия, которые выполняет обучающийся при переходе от исходных или промежуточных условий к выводам (табл. 2) [15, с. 249–253].

Выполнение указанных операций позволяет систематизировать и упорядочить деятельность, направленную на поиск решения задачи. Осознание того, какие действия для этого необходимо выполнить, позволяет проводить анализ целенаправленно. Один этап мыслительного процесса можно представить следующей схемой (рис. 3).

Указанная последовательность мыслительных операций может быть выполнена в двух направлениях: для нахождения выводов из исходных условий, а также для поиска условий по искомым данным.

По результатам выполнения анализа формируется структурно-символическое представление задачи, которое может быть представлено в различных формах.

Таблица 1

Организационные мыслительные операции

Операция	Содержание	Механизм формирования
Мотивация	Заинтересованность обучающегося в процессе решения задачи	Создание ситуации успеха, основанной на достижениях обучающихся
Направленность мышления	Повышенное внимание к объектам, которые могут быть связаны с задачей	
Интуиция	Осознание степени продвижения в решении задачи	Накопленный опыт, формируемый в процессе решения различных задач
Предвидение	Оценка успешности выдвинутой идеи	
Описание области поисков	Определение математического содержания, в рамках которого следует искать решение	Акцентирование внимания обучающихся на данном аспекте в процессе решения задачи
Поиск промежуточных решений	Оценка области поисков, ее изучение и расширение	

Таблица 2

Операционные мыслительные операции

Операция	Содержание	Механизм формирования
Мобилизация	Целенаправленное извлечение из памяти необходимого математического материала	Знание необходимого теоретического материала.
Организация	Привлечение математического материала к решению задачи	Работа с понятиями, определениями, теоремами
Распознавание	Опознавание конкретных математических объектов	Работа с математическими объектами (формулами, уравнениями, неравенствами, геометрическими фигурами и другими). Знание необходимого теоретического материала
Вспоминание	Определение различных свойств и признаков выделенного объекта	
Пополнение	Дополнение множества исходных элементов новыми объектами	Накопленный опыт, формируемый в процессе решения различных задач
Перегруппировка	Изучение соотношений между объектами, изменение этих соотношений	
Изоляция	Выделение отдельного элемента и изучение его свойств	
Комбинация	Соединение отдельных деталей в новую конструкцию	

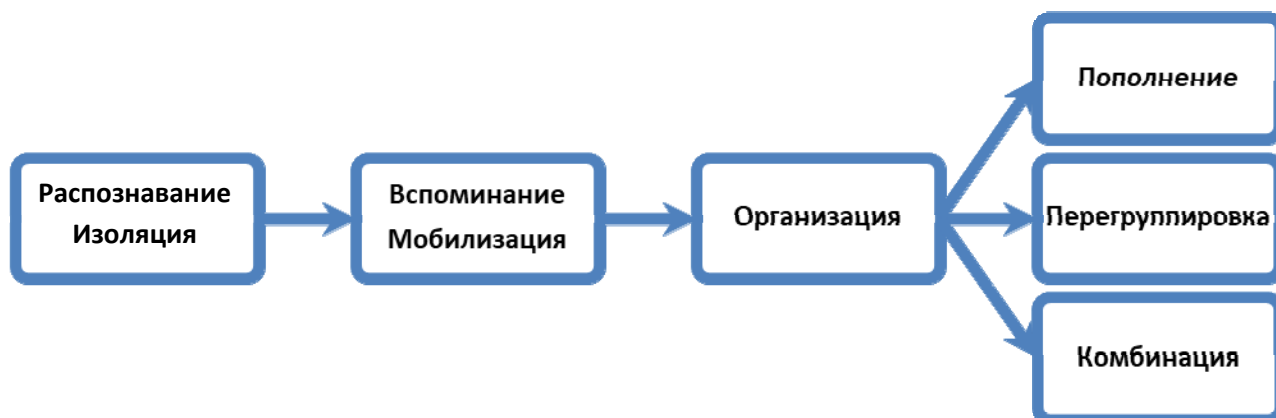


Рис. 3. Последовательность выполнения мысленных операций

Назовем данный этап работы над задачей схематичным. В. А. Тестов определяет изучение математики как знаково-символическую деятельность, что позволяет ее свести к двум основным типам: моделированию и схематизации [16, с. 8]. Результатом моделирования является применение математических структур, которые позволяют описать систему связей между объектами. Схематизация предполагает создание схем, рисунков, чертежей, позволяющих в наглядной форме представить соотношения между отдельными объектами задачи. Как отмечает И. К. Бердникова, применение схем при их решении оказывает положительное влияние на развитие различных видов мышления [17, с. 24]. Представление описанных в задаче математических объектов в знаковом и схематичном виде дает возможность иначе взглянуть на ее содержание, увидеть новые связи и соотношения.

По результатам проведенного анализа, выполненного моделирования и схематизации задачи можно описать методы, универсальные или специальные, которые применялись при ее решении. Подобная характеристика задачи, выполняемая на методологическом этапе, позволяет обосновать корректность их выбора и реализации. Систематическое включение данного этапа в процесс решения задачи позволяет учителю постепенно сформировать у обучающихся представления о различных методах решения задач, условиях и возможностях их осознанного применения. Кроме того, на данном этапе желательно по результатам проделанной работы определить, какие мысленные операции были использованы для решения задачи.

Описательный этап предполагает последовательное оформление решения задачи, во время которого

обучающиеся обобщают и систематизируют результаты, полученные на трех предыдущих этапах. Определенные на методологическом этапе методы формируют базовую основу логики изложения решения задачи. Значимость разделения аналитического и описательного этапов заключается в том, что поиск решения задачи, проводимый в процессе анализа, включает обсуждение неудачных идей. Как отмечает в своей работе Ю. М. Колягин, результатом этого может быть ценная мысль, которая позволяет ответить на вопрос задачи [18, с. 130]. В таком случае обучающиеся могут увидеть процесс выдвижения гипотез, их принятия или опровержения, что способствует становлению умения проводить самостоятельные рассуждения. Кроме того, нужно показать ученикам, что в итоговый вариант оформленного решения подобные рассуждения не всегда включаются.

На проверочном этапе необходимо выполнить проверку найденного решения задачи. Как отмечает Р. Ю. Костюченко, необходимость выполнения данного этапа во многом зависит от особенностей самой задачи [9, с. 120]. Анализ работ [2, 7, 12] позволяет выделить следующие критерии проверки правильности решения, описание которых представлено в табл. 3.

На исследовательском этапе желательно провести более подробное изучение решенной задачи. Т. А. Иванова, И. В. Ульянова указывают, что данный этап способствует формированию творческой инициативы обучающихся, вариативности и самостоятельности их мышления [19, с. 214].

Исследования Ю. М. Колягина [18], Р. Ю. Костюченко [9], Л. М. Фридмана, Е. Н. Турецкого [12] позволяют выделить следующие основные направления проведения исследования.

Таблица 3

Критерии проверки правильности решения

Критерий	Характеристика
Непротиворечивость	Найденное решение удовлетворяет всем условиям задачи
Полнота	Рассмотрены все возможные случаи в решении
Достоверность	Отсутствие различных ошибок (вычислительных, логических и других)

В частности, Л. М. Фридман и Е. Н. Турецкий предлагают определить, при каких условиях задача не имеет решения, а также имеет решение, в последнем случае требуется установить их количество [12, с. 28]. Такой подход чаще всего реализуется в задачах на построение.

Еще одним направлением исследования, как отмечает Р. Ю. Костюченко [9], является поиск альтернативных способов решения задачи, что позволяет расширить представления школьников о методах решения, продемонстрировать вариативность математических обоснований, научиться выбирать рациональные способы действий.

Кроме того, Т. А. Иванова и И. В. Ульянова включают в исследование модификацию задачи, которая предполагает составление задач-аналогов, задач-обобщений, задач-конкретизаций и др. [19, с. 214]. Подобная работа может быть проведена за счет анализа условий и заключения задачи с целью их преобразования.

В качестве заключительного выделим методический этап, во время которого учитель анализирует все предыдущие этапы решения с методической точки зрения, что способствует организации его работы с обучающимися. Для каждого описанного ранее этапа решения устанавливается необходимость его включения в обсуждение со школьниками, а также формируется их методическое сопровождение. Так, на этапе анализа А. А. Аксёнов и В. А. Николаев [20] предлагают различные приемы, направленные на обучение поиску решения. Один из них – наводящие вопросы, которые позволяют постепенно переходить

от демонстрации процесса анализа к управлению самостоятельной деятельностью обучающихся при его проведении [20, с. 136]. Тем самым формируются условия для включения школьников в активную образовательную деятельность. В зависимости от вида и уровня сложности задачи, ее содержания, а также ее роли в учебном процессе учитель может рассмотреть только одно из направлений исследования, например поиск альтернативных решений. Проведенная методическая работа позволит спланировать ход обсуждения задачи с учениками, список дополнительных и наводящих вопросов, актуализировать необходимый теоретический материал, определить приемы, методы и формы работы с обучающимися.

Полный вариант схемы более удобен для самого учителя. Результатом ее применения будет не только решение задачи, но и структурный анализ, позволяющий охарактеризовать условия, выводы, дополнительные объекты, необходимые теоретические сведения, и методическое описание, дающее возможность спланировать работу с учениками. Исключение методического этапа позволяет адаптировать схему для обучающихся. Ее применение в полном объеме не всегда целесообразно, во многих задачах нет необходимости выделять все описанные этапы. Соответственно, их можно разделить на два уровня. К базовому отнесем те из них, которые применяются при решении практически любых задач, к углубленному – остальные этапы, выполнение которых обусловлено содержанием и особенностями рассматриваемой задачи (рис. 4).

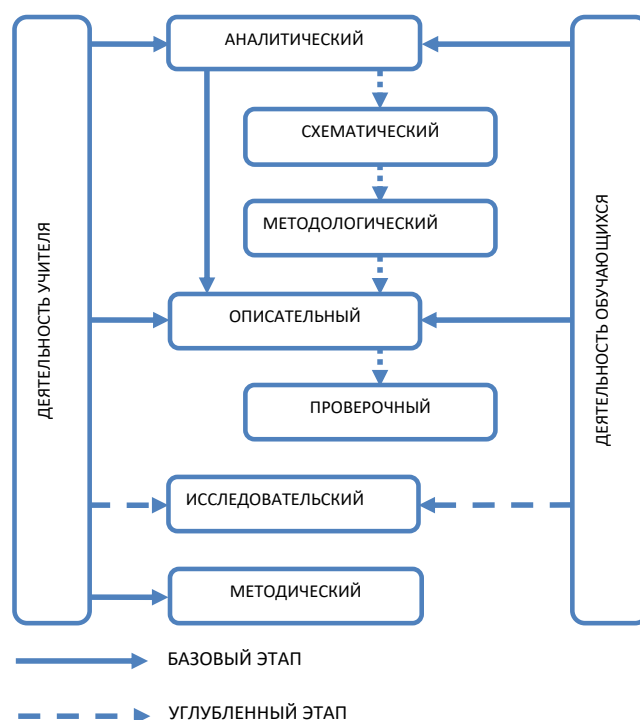


Рис. 4. Схема обучения решению задач повышенной сложности

Предложенная на рис. 4 схема позволяет упорядочить и организацию процесса решения задачи, и обучения в целом.

Заключение

Обучение решению задач представляет собой достаточно сложный процесс, который должен способствовать формированию самостоятельности, активности обучающихся, их творческой инициативы и вариативности мышления.

Предложенная схема обучения решению задач включает в себя следующие основные этапы: аналитический, схематический, методологический, описательный, проверочный, исследовательский, методический. На каждом из них решается отдельная учебная задача, направленная на развитие математических способностей и математической культуры обучающихся.

Список источников

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. URL: <https://docs.cntd.ru/document/499067348> (дата обращения: 15.09.2022).
2. Гриншпон Я. С., Подстригич А. Г. Особенности обучения школьников решению задач повышенной сложности по математике // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2015. Вып. 8 (161). С. 48–52.
3. Нахман А. Д. Задачный подход как технологическая основа процесса обучения математике // Международный журнал экспериментального образования. 2018. № 2. С. 34–39.
4. Далингер В. А., Пустовит Е. А. Роль и место задач в формировании учебно-исследовательской компетентности учащихся школы // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева. 2012. № 2. С. 51–55.
5. Клековкин Г. А., Максютин А. А. Задачный подход в обучении математике. М.; Самара: СФ ГОУ ВПО МГПУ, 2009. 184 с.
6. Jäder J., Sidenvall J., Sumpter L. Students' Mathematical Reasoning and Beliefs in Non-routine Task Solving // Int. J. of Sci. and Math. Educ. 2017. Vol. 15. P. 759–776. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9712-3>
7. Пойа Д. Как решать задачу / пер. с англ. В. Г. Звонаревой и Д. Н. Белла. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1961. 208 с.
8. Acuña A. M. Polya and GeoGebra: A dynamic approach to problem solving // European Journal of Science and Mathematics Education. 2014. Vol. 2 (2A). P. 231–235. <https://doi.org/10.30935/scimath/9649>
9. Костюченко Р. Ю. Методика обучения учащихся решению математических задач: содержание этапов решения // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. 2018. № 4 (28). С. 117–123.
10. Васильева Г. Н. Методические аспекты деятельностного подхода при обучении математике в средней школе. Пермь: ПГПУ, 2009. 136 с.
11. Jiang Y., Gong T., Saldivia L. E. et al. Using process data to understand problem-solving strategies and processes for drag-and-drop items in a large-scale mathematics assessment // Large-scale Assess Educ. 2021. Vol. 9, № 2. <https://doi.org/10.1186/s40536-021-00095-4>
12. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи. М.: Просвещение, 1989. 196 с.
13. Попов Н. И., Яковлева Е. В. Использование метода схематизации при обучении студентов и школьников математике // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4 (37). С. 74–87. DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_74
14. Jacinto H., Carreira S. Knowledge for teaching mathematical problem-solving with technology: An exploratory study of a mathematics teacher's proficiency // European Journal of Science and Mathematics Education. 2023. Vol. 11 (1). P. 105–122. <https://doi.org/10.30935/scimath/12464>
15. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / пер. с англ. В. С. Бермана; под ред. И. М. Яглома. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970. 452 с.
16. Тестов В. А. О некоторых видах метапредметных результатов обучения математике // Образование и наука. 2016. № 1 (130). С. 4–20. DOI: 10.17853/1994-5639-2016-1-4-20
17. Берникова И. К. Схемы как средства организации мышления в процессе обучения математике // Вестник Омского университета. 2015. № 1. С. 23–27.
18. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. Ч. 2: Обучение математике через задачи и обучение решению задач. М.: Просвещение, 1977. 144 с.
19. Иванова Т. А., Ульянова И. В. Методика работы с задачей на уроке математики в контексте ФГОС ООО нового поколения // Подготовка будущего учителя к проектированию современного урока / под ред. Н. В. Кузнецовой, Е. В. Белоглазовой. Саранск, 2016. С. 207–225.
20. Аксёнов А. А., Николаев В. А. Методические приемы объяснения в процессе обучения логическому поиску решения школьных математических задач // Ученые записки Орловского государственного университета. 2021. № 2 (91). С. 135–139.

References

1. *Kontsepsiya razvitiya matematicheskogo obrazovaniya v Rossiyskoy Federatsii* [Russian Federation mathematical education development conception] (in Russian). URL: <https://docs.cntd.ru/document/499067348> (accessed 15 September 2022).
2. Grinshpon Ya. S., Podstrigich A. G. Osobennosti obucheniya shkol'nikov resheniyu zadach povyshennoy slozhnosti po matematike [Special features of teaching high-school students skills for solving mathematics problems of higher complexity]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – Tomsk State Pedagogical University Bulletin*, 2015, vol. 8 (161), pp. 48–52 (in Russian).
3. Nakhman A. D. Zadachnyy podkhod kak tekhnologicheskaya osnova protsessa obucheniya matematike [Task approach as a technological basis of the process of teaching of mathematics]. *Mezhdunarodnyy zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya*, 2018, no. 2, pp. 34–39 (in Russian).
4. Dalinger V. A., Pustovit E. A. Rol' i mesto zadach v formirovaniі uchebno-issledovatel'skoy kompetentnosti uchashchikhsya shkoly [Problem role and place for schoolchildren educational and research competence forming]. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni V. P. Astaf'yeva – The bulletin of KSPU named after V. P. Astafyev*, 2012, no. 2, pp. 51–55 (in Russian).
5. Klekovkin G. A., Maksutin A. A. *Zadachnyy podkhod v obuchenii matematike* [Problem approach for mathematics learning]. Moscow, Samara, SF SEI HPE MSPU Publ., 2009. 184 p. (in Russian).
6. Jäder J., Sidenvall J., Sumpter L. Students' Mathematical Reasoning and Beliefs in Non-routine Task Solving. *Int. J. of Sci. and Math. Educ.*, 2017, no. 15, pp. 759–776. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9712-3>
7. Polya G. *Kak reshat' zadachu*. Perevod s angliyskogo V. G. Zvonarevoy i D. N. Bella [How to solve it. Translated from English by V. G. Zvonareva i D. N. Bell]. Moscow, Gosudarstvennoye uchebno-pedagogicheskoye izdatel'stvo Ministerstva prosveshcheniya RSFSR Publ., 1961. 208 p. (in Russian).
8. Acuña A. M. Polya and GeoGebra: A dynamic approach to problem solving. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 2014, no. 2 (2A), pp. 231–235. <https://doi.org/10.30935/scimath/9649>
9. Kostyuchenko R. Yu. Metodika obucheniya uchashchikhsya resheniyu matematicheskikh zadach: sodержaniye etapov resheniya [Methodology of teaching students of solving mathematical problems: solution steps and their content]. *Vestnik Sibirskogo instituta biznesa i informatsionnykh tekhnologiy – Herald of Siberian Institute of Business and Information Technologies*, 2018, no. 4 (28), pp. 117–123 (in Russian).
10. Vasil'yeva G. N. *Metodicheskiye aspekty deyatel'nostnogo podkhoda pri obuchenii matematike v sredney shkole* [Methodical aspects of activity approach by mathematics training at school]. Perm, PSPU Publ., 2009. 136 p. (in Russian).
11. Jiang Y., GongT., Saldivia L. E. et al. Using process data to understand problem-solving strategies and processes for drag-and-drop items in a large-scale mathematics assessment. *Large-scale Assess Educ.*, 2021, vol. 9, no. 2. <https://doi.org/10.1186/s40536-021-00095-4>
12. Fridman L. M., Turetskiy E. N. *Kak nauchit'sya reshat' zadachi* [How problem solving study]. Moscow, Prosveshcheniye Publ., 1989. 196 p. (in Russian).
13. Popov N. I., Yakovleva E. V. Ispol'zovaniye metoda skhematizatsii pri obuchenii studentov i shkol'nikov matematike [Use of the schematization method in teaching students and pupils in math]. *Vestnik Syktyvskarskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. Informatika – Siktivkar University Bulletin. Series 1. Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2020, no. 4 (37), pp. 74–87 (in Russian). DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_74
14. Jacinto H., Carreira S. Knowledge for teaching mathematical problem-solving with technology: An exploratory study of a mathematics teacher's proficiency. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 2023, no. 11 (1), pp. 105–122. <https://doi.org/10.30935/scimath/12464>
15. Polya G. *Matematicheskoye otkrytiye. Resheniye zadach: osnovnyye ponyatiya, izucheniye i prepodavaniye*. Perevod s angliyskogo V. S. Bermana, pod red. I. M. Yagloma [Mathematical discovery. On understanding, learning and teaching problem solving. Translate form English by V. S. Berman; edited by I. M. Yaglom]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 452 p. (in Russian).
16. Testov V. A. O nekotorykh vidakh metapredmetnykh resul'tatov obucheniya matematike [Some types of metasubject results when teaching mathematics]. *Obrazovaniye i nauka – Education and Science*, 2016, no. 1 (130), pp. 4–20. DOI: 10.17853/1994-5639-2016-1-4-20 (in Russian).
17. Bernikova I. K. Skhemy kak sredstva organizatsii myshleniya v protsesse obucheniya matematike [Schemes as thinking organization tools for mathematics learning]. *Vestnik Omskogo universiteta – Omsk University Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 23–27 (in Russian).
18. Kol'yagin Yu. M. *Zadachi v obuchenii matematike. Chast' 2. Obucheniye matematike cherez zadachi i obucheniye resheniyu zadach* [Problem for mathematics training. Part 2. Mathematics training by way of problems and problems solution training]. Moscow, Prosveshcheniye Publ., 1977. 144 p. (in Russian).
19. Ivanova T. A., Ul'yanova I. V. Metodika raboty s zadachey na uroke matematiki v kontekste FGOS OOO novogo pokoleniya [Methods of working with problems in the math lessons in the context of the new generation FSSES]. *Podgotovka budushchego uchitelya k proyektirovaniyu sovremennogo uroka*. Pod red. N. V. Kuznetsovoy, E. V. Beloglazovoy [Future mathematics teachers preparing for modern lesson designing. Edited by N. V. Kuznetsova, E. V. Beloglazova]. Saransk, 2016. Pp. 207–225 (in Russian).

20. Aksyonov A. A., Nikolaev V. A. Metodicheskiye priyomy ob''yasneniya v protsesse obucheniya logicheskomu poisku resheniya shkol'nykh matematicheskikh zadach [Methodological methods of explanation in the process of learning logical search for solving school mathematics problem]. *Uchyonyye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta – Scientific notes of Orel State University*, 2021, no. 2 (91), pp. 135–139 (in Russian).

Информация об авторе

Леонтьева Н. В., кандидат педагогических наук, доцент, Глазовский государственный педагогический институт имени В. Г. Короленко (ул. Первомайская, 25, Глазов, Россия, 427621).

Information about the author

Leontiyeva N. V., Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor, Glazov State Pedagogical Institute by V. G. Korolenko (ul. Pervomayskaya, 25, Glazov, Russian Federation, 427621).

Статья поступила в редакцию 28.10.2022; принята к публикации 03.02.2023

The article was submitted 28.10.2022; accepted for publication 03.02.2023