

УДК 539.211

## ОТРАЖЕНИЕ ЛЕГКИХ ИОНОВ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ: АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

© 2023 г. В. П. Афанасьев<sup>a</sup>, \*, Л. Г. Лобанова<sup>a</sup>, \*\*, В. И. Шульга<sup>b</sup>, \*\*\*

<sup>a</sup>Национальный исследовательский университет “МЭИ”,  
Москва, 111250 Россия

<sup>b</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
НИИЯФ им. Д.В. Скobelцына, Москва, 119991 Россия

\*e-mail: v.af@mail.ru

\*\*e-mail: lida.lobanova.2017@mail.ru

\*\*\*e-mail: vish008@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.06.2022 г.

После доработки 22.07.2022 г.

Принята к публикации 22.07.2022 г.

Получено аналитическое решение уравнения для распределения плотности потока отраженных легких ионов по длине пробега и по потерям энергии в мишени. Оно основано на решении граничных задач для уравнения переноса методом инвариантного погружения в малоугловом приближении. В случае отражения протонов от медной и вольфрамовой мишени проведено сравнение аналитических результатов с данными компьютерного моделирования, выполненного с использованием программы OKSANA, а также с экспериментальными данными. Отмечена возможность верификации тормозной способности материала мишени на основе созданной методики.

**Ключевые слова:** отражение легких ионов, аналитическая модель, метод инвариантного погружения, малоугловое приближение, компьютерное моделирование, тормозная способность.

**DOI:** 10.31857/S102809602301003X, **EDN:** BKNAPR

### ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое описание процессов взаимодействия ускоренных ионов с поверхностью твердого тела необходимо для создания новых материалов методами ионной имплантации, послойного анализа материалов, совершенствования методик ионно-рассеивательной спектроскопии и других целей. Наиболее активные исследования в этой области были выполнены в 80-е годы прошлого века [1–5], что связано в основном с проблемой “первой стенки” в установках управляемого термоядерного синтеза. Однако количественной модели, точно и последовательно описывающей процессы взаимодействия легких ионов с твердым телом, не существует. Упрощенные аналитические модели, используемые для описания процесса ионного рассеяния в твердых телах [1–3], часто ориентированы на объяснение конкретных экспериментов и не позволяют в полной мере описать процессы отражения легких ионов с энергией от единиц до десятков кэВ. Поэтому основным методом теоретического анализа в этой области исследований стало компьютерное моделирование процессов взаимодействия потоков легких ионов с поверхностью твердого тела [6, 7].

Следует, однако, отметить, что последние десятилетия ознаменовались созданием эффективных методов расчета энергетических спектров электронов, отраженных от поверхности твердого тела [8–26], описания процессов неупругих потерь электронов с энергией более сотен эВ [8–11, 26]. Наличие вычислительных продуктов для решения интегро-дифференциальных уравнений типа Риккатти позволило решить граничные задачи для уравнения переноса электронов в твердых телах [19, 22] с использованием метода инвариантного погружения Амбарцумяна [27–31]. Были установлены границы применимости малоугловых приближений [17–19, 22, 23] и определена их погрешность [19, 22]. Созданные методики позволили получить ряд аналитических решений, эффективно описывающих сигналы электронной спектроскопии с необходимой точностью [9, 13, 19, 22, 23].

Возникает вопрос, можно ли применить указанные наработки теории электронного рассеяния в задачах отражения ионов от поверхности, учитывая, что малоугловые подходы, применяемые в задачах электронного рассеяния, в задачах ионного рассеяния применимы в гораздо более

широком интервале энергии. В настоящей работе сделана попытка использовать для расчета энергетических и угловых спектров отраженных ионов аналитическую модель Освальда–Каспера–Гауклера (ОКГ) [12, 13, 19]. В рамках этой модели рассчитывают распределение отраженных частиц по длине пробега  $s$  в мишени. Подход ОКГ основан на решении граничных задач для уравнения переноса в малоугловом приближении [19].

Проведено сравнение результатов аналитического рассмотрения с результатами компьютерного моделирования и экспериментальными данными. Численные расчеты выполнены для протонов с энергией порядка кэВ при различных углах падения на медную и вольфрамовую мишени.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В модели ОКГ уравнение для плотности потока частиц  $R(s, \mu_0, \mu)$ , отразившихся от мишени и прошедших в ней путь  $s$ , имеет вид [19]:

$$(1 + \partial/\partial s) R(s, \mu_0, \mu) = \frac{\mu_0 |\mu|}{\mu_0 + |\mu|} x(\mu_0, \mu) + \\ + \int_{-1}^0 R(s, \mu_0, \mu') x(\mu', \mu) d\mu', \quad (1)$$

где  $\mu_0, \mu$  – косинусы углов падения и отражения. Углы отсчитываются от нормали к поверхности, а пробег  $s$  измеряется в длинах среднего пробега между упругими соударениями. Уравнение (1) получено в малоугловом приближении, подразумевающем малость параметра

$$\zeta = x_{\text{el}}(\pi)/x_{\text{el}}(0) \ll 1, \quad (2)$$

где  $x_{\text{el}}(\theta)$  – нормированное на единицу сечение упругого рассеяния электронов или ионов на угол  $\theta$  – ионов. Следует отметить, что для ионов неравенство (2) справедливо в более широком интервале значений энергии, чем для электронов.

Для ионов и электронов уравнение (1) отличается лишь видом сечения упругого рассеяния  $x(\mu)$ . Решение уравнения (1) строится на основе методики аналитического продолжения интегралов по полярному углу рассеяния на интервал  $-1 < \mu < 1$ . Это приводит к решению для функции отражения:

$$R(s, \mu_0, \mu) = \frac{\mu_0 |\mu|}{\mu_0 + |\mu|} 1/s \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l \times \\ \times \left( \mu_0 \mu + (1 - \mu_0^2)^{1/2} (1 - \mu^2)^{1/2} \right) \times \\ \times (\exp(-1 - x_l) s) - \exp(-s)), \quad (3)$$

где  $P_l(\mu)$  – полиномы Лежандра,  $x_l$  – коэффициенты разложения нормированного на единицу

сечения упругого рассеяния  $x(\mu)$  в ряд по полиномам Лежандра.

Проинтегрировав уравнение (3) по пробегам, приходим к формуле, описывающей угловое распределение отраженных ионов:

$$R(\mu_0, \mu) = -\frac{\mu_0 |\mu|}{\mu_0 + |\mu|} \exp(-V/V_{\perp}) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l \times \\ \times \left( \mu_0 \mu + (1 - \mu_0^2)^{1/2} (1 - \mu^2)^{1/2} \right) \ln(1 - x_l), \quad (4)$$

где  $V_{\perp}$  – составляющая скорости иона, перпендикулярная поверхности образца, а множитель  $\exp(-V/V_{\perp})$  учитывает вероятность “выживания” ионов в результате перезарядки на поверхности.

Энергетические спектры отраженных частиц будем определять формулой:

$$R(\Delta, \mu_0, \mu) = \int_0^{\infty} R(z/l_{\text{el}}, \mu_0, \mu) T(z/l_{\text{in}}, \Delta) dz, \quad (5)$$

где  $T(z/l_{\text{in}}, \Delta)$  – функция, описывающая неупругие потери энергии ионов и  $l_{\text{in}}$  – средняя длина свободного неупругого пробега ионов. Эта формула является следствием гипотезы Ферми о возможности представления дифференциального сечения элементарного акта рассеяния в виде суммы:

$$\omega(\Delta, \mu_0, \mu, \phi_0, \phi) = \omega_{\text{in}}(\Delta) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\phi - \phi_0) + \\ + \omega_{\text{el}}(\mu_0, \mu, \phi_0, \phi) \delta(\Delta), \quad (6)$$

где  $\omega$  – дифференциальное сечение рассеяния,  $\omega_{\text{in}}$ ,  $\omega_{\text{el}}$  – дифференциальное сечение неупругого и упругого рассеяния соответственно.

Формула (6) указывает на то, что акт элементарного рассеяния можно разбить на два независимых процесса – упругое и неупругое рассеяние. В результате акта неупругого рассеяния теряется энергия, но не меняется направление движения быстрой частицы, упругое рассеяние идет без потерь энергии, однако с изменением направления движения.

Функция  $T(\tau, \Delta)$  – функция неупрого процесса, описывающая энергетический спектр частиц, прошедших в мишени путь  $\tau$ . В случае электронного рассеяния функция  $T(\tau, \Delta)$  является функцией Ландау и представима в виде ряда:

$$T(\tau, \Delta) = \exp(-\tau) \times \\ \times \left[ \delta(\Delta) + \tau x_{\text{in}}(\Delta) + \tau^2 / 2! \int_0^{\Delta} x_{\text{in}}(\Delta - \varepsilon) x_{\text{in}}(\varepsilon) d\varepsilon + \dots \right. \\ \left. + \dots + \tau^k / k! \int_0^{\Delta} x_{\text{in}}^{k-1}(\Delta - \varepsilon) x_{\text{in}}(\varepsilon) d\varepsilon + \dots \right], \quad (7)$$

где  $\int_0^\Delta x_{in}(\Delta - \varepsilon)x_{in}(\varepsilon)d\varepsilon = x^2(\Delta)$ ,  $\int_0^\Delta x_{in}^{k-1}(\Delta - \varepsilon) \times x_{in}(\varepsilon)d\varepsilon = x^k(\Delta)$ . Если  $x_{in}(\Delta)$  – вероятность потери энергии  $\Delta$  в результате одного акта неупругого рассеяния то,  $x^k(\Delta)$  имеет смысл потери энергии  $\Delta$  в результате  $k$  актов неупругого рассеяния.

Функция  $T(\tau, \Delta)$  в случае ионного рассеяния определяется в приближении Фоккера–Планка лишь двумя параметрами сечения неупругого рассеяния, а именно средними потерями энергии на единице длины  $\bar{\varepsilon}$  (stopping power) и средним квадратом потерь энергии  $\bar{\varepsilon}^2$  (straggling):

$$T(s, \Delta) = \frac{1}{(2\pi\bar{\varepsilon}^2 s)^{1/2}} \exp\left(-(\Delta - \bar{\varepsilon}s)^2 / 2\bar{\varepsilon}^2 s\right). \quad (8)$$

Отметим, что приближение Фоккера–Планка верно, если  $x_{in}(\Delta)$  имеет резкий максимум при  $\Delta \rightarrow 0$  и справедливо, например, для модели атома Томсона [32]. Но в теории Линдхарда, используемой для определения  $\bar{\varepsilon}$  в случае торможения ионов с энергией несколько кэВ, сечение  $x_{in}(\Delta)$  не имеет особенностей при  $\Delta \rightarrow 0$ , и приближение Фоккера–Планка становится неприемлемым.

Подставив формулу (3) в формулу для расчета энергетических спектров отраженных ионов (5), получим:

$$\begin{aligned} R(\Delta, \mu_0, \mu) &= \\ &= \frac{\mu_0 |\mu|}{\mu_0 + |\mu|} \frac{(1 - x_l)(1 - \Delta)}{\Delta \bar{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{A}{(1 - \Delta)^{1/2}}\right) \times \\ &\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l \left( \mu_0 \mu + (1 - \mu_0^2)^{1/2} (1 - \mu^2)^{1/2} \right) \times \quad (9) \\ &\times \left[ \exp\left(-\frac{\Delta(1 - x_l)\sigma^*}{(1 - x_l)(1 - \Delta)^{5/2}}\right) - \right. \\ &\left. - \exp\left(-\frac{\Delta\sigma^*}{(1 - x_l)(1 - \Delta)^{5/2}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь множители  $(1 - \Delta)^{5/2}$  и  $(1 - \Delta)$  учитывают зависимость сечений упругого и неупругого рассеяния от энергии, а функция  $\exp\left(-\frac{A}{(1 - \Delta)^{1/2}}\right)$  связана с учетом перезарядки отраженных ионов водорода [3, 4],  $A$  – подгоночный параметр.

В формуле (9) присутствует также безразмерный параметр  $\sigma^*$ , который является определяющим при аналитическом описании процесса формирования энергетических спектров отраженных ионов:

$$\sigma^* = E_0 / l_{tr} \bar{\varepsilon}, \quad (10)$$

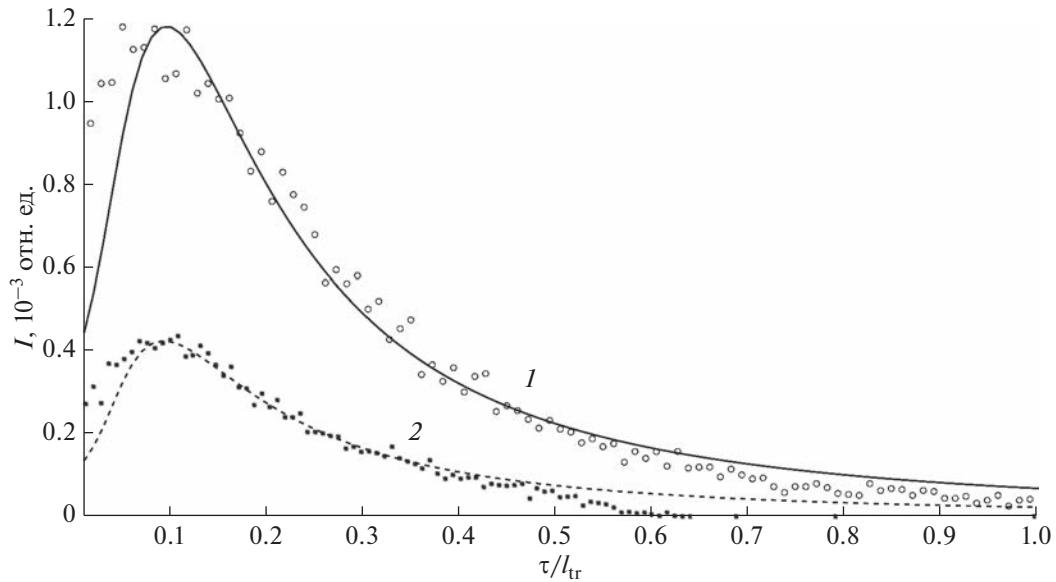
где  $E_0/l_{tr}$  имеет смысл и порядок длины пробега иона до полной остановки (residual range)  $R_0$ ,  $l_{tr}$  – транспортный пробег иона, или длина полной изотропизации.

Отметим, что именно процесс изотропизации исходящего потока электронов позволил Г. Бете [33] создать простую теорию отражения электронов, удовлетворительно описывающую интегральные коэффициенты отражения электронов от мишней с  $Z > 30$ . Теория Бете базируется на двух длинах: длине полной изотропизации  $l_{tr, tot}$  и длине полного торможения  $R_0$ . Из данной теории следует, что при  $R_0/l_{tr, tot} \rightarrow 0$  полный коэффициент отражения электронов стремится к 0.5, что удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

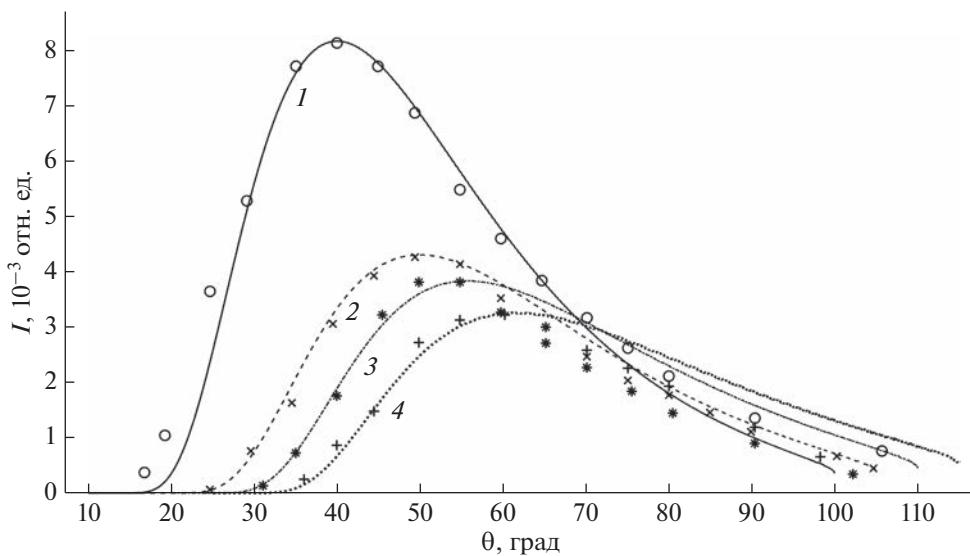
## СРАВНЕНИЕ С МОДЕЛИРОВАНИЕМ И ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Моделирование выполнено с использованием компьютерной программы OKSANA в том ее варианте, который описан в [34]. Программа основана на приближении парных столкновений и моделирует взаимодействие ионов с аморфными, монокристаллическими и поликристаллическими материалами. В настоящей работе рассмотрены только аморфные мишени. Как и в программе MARLOWE [35], аморфная мишень моделируется вращением кристаллического атомного блока, процедура вращения повторяется от столкновения к столкновению. Углы рассеяния в парных столкновениях рассчитываются с использованием табулированных значений, найденных заранее путем решения уравнений движения для заданного межатомного потенциала (молекулярная динамика). В качестве межатомного потенциала использован потенциал Kr–C [6]. С целью сравнения с теорией, изложенной выше, для каждого бомбардирующего иона рассчитывали длину его траектории в мишени до момента остановки частицы или ее выхода из мишени. Поверхность мишени считали гладкой, какие-либо изменения в мишени, вызванные ионной бомбардировкой, не учитывали.

В целях апробации методики ОКГ, хорошо выверенной в задачах электронного рассеяния [13, 19], для задач рассеяния легких ионов в работе проведено сравнение расчетов на основе (3) и (4) с результатами моделирования методом Монте-Карло (рис. 1) и с экспериментальными данными (рис. 2) соответственно. Рис. 1 и 2 показывают удовлетворительные результаты сравнения расчетных данных с данными компьютерного моделирования и экспериментальными данными. Наличие хорошо выверенного решения задачи упругого рассеяния будет надежной базой для



**Рис. 1.** Распределение по длине пробега протонов, отраженных от медной мишени. Угол падения  $80^\circ$ , угол отражения  $110^\circ$ , начальная энергия протонов  $E_0$ : 6 (1); 20 кэВ (2). Линии – расчет на основе формулы (3), символы – компьютерное моделирование.

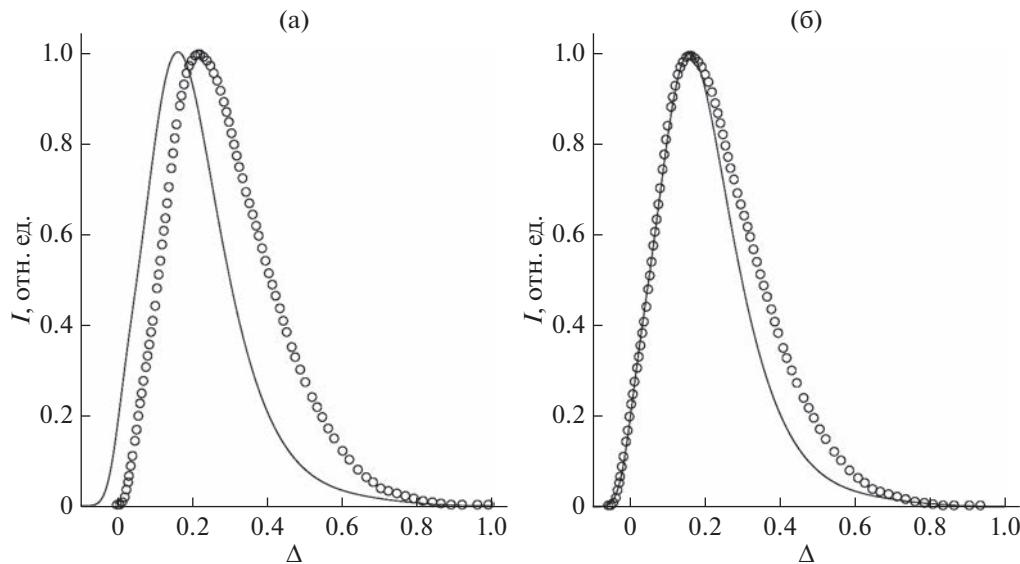


**Рис. 2.** Угловые распределения протонов, отраженных от медной мишени. Начальная энергия протонов  $E_0 = 21.6$  кэВ, угол падения:  $80^\circ$  (1);  $75^\circ$  (2);  $70^\circ$  (3);  $65^\circ$  (4). Линии – расчет по формуле (4), символы – эксперимент [36].

определения и верификации параметров неупругого рассеяния: средних потерь энергии на единице длины (stopping power) и параметра флюктуаций энергетических потерь (straggling).

Представленные на рис. 3 графики указывают на удовлетворительное соответствие расчетов экспериментальным данным. В расчетах использовали данные базы NIST о средних потерях энергии протонов в W на единице длины, транспортное сечение протонов вычисляли по формуле Фирсова [38], параметр перезарядки  $A = 1$ . Наи-

меньшее доверие в расчетных величинах вызывают данные о средних потерях энергии на единице длины  $\bar{\Sigma}$ . Достаточно взглянуть на разброс данных о торможении протонов в золоте, для которого выполнено наибольшее число экспериментов [5]. Изменение средних потерь энергии от значения  $\bar{\Sigma} = 137.6$  эВ/нм, представленного в данных NIST, до  $\bar{\Sigma} = 110.1$  эВ/нм приводит к совпадению максимумов расчетного и экспериментального спектров (рис. 3б). По оси ординат на рис. 3 отложена безразмерная потеря энергии:  $(E_0 - E)/E_0$ , учет



**Рис. 3.** Энергетические спектры протонов, отраженных от вольфрамовой мишени: а – расчет на основе данных NIST; б – результат подгонки по  $\bar{\epsilon}$ . Начальная энергия  $E_0 = 25$  кэВ, угол падения  $71^\circ$ , угол отражения  $109^\circ$ . Сплошные линии – расчет на основе (9), символы – эксперимент [37].

кинематического фактора [3] приведет в данном масштабе к сдвигу в область больших потерь энергии на величину 0.0023, которая более чем на порядок меньше погрешности эксперимента.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе модель формирования энергетических спектров отраженных частиц, использованная ранее в задачах электронного рассеяния, распространена на случай ионного рассеяния. Получены аналитические формулы (3), (4), (9) для плотности потока отраженных легких ионов, справедливые в более широком диапазоне энергии по сравнению с электронным рассеянием. Основным критерием, определяющим область применимости полученных выражений, является малость отношения параметра экранирования, определяемого квадратом отношения де бройлевской длины волны частицы, к дебаевскому радиусу тормозящей среды. Параметр экранирования при фиксированном материале среды и энергии частицы на порядки меньше в случае легких ионов. Показано, что основным параметром, определяющим характеристики энергетического спектра отраженных ионов, является величина  $\sigma^*$ , зависящая от величины транспортного пробега  $l_{tr}$  и тормозной способности  $\bar{\epsilon}$  (формула (10)).

Численные расчеты проведены для отражения протонов с энергией 6 и 20 кэВ от медной мишени. Экспериментальные данные приведены для отражения протонов с энергией 21.6 и 25 кэВ от медной и вольфрамовой мишеней. Показано, что результаты аналитического рассмотрения находятся в хорошем согласии с данными компьютерного моделирования (программа OKSANA) и экспериментальными данными. Отмечена возможность верификации тормозной способности материала мишени на основе предложенной методики.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование проведено в Национальном исследовательском университете “МЭИ” при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № FSWF-2020-0023.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Машкова Е.С., Молчанов В.А.* Рассеяние ионов средних энергий поверхностями твердых тел. М.: Атомиздат, 1980. 256 с.
2. *Курнаев В.А., Машкова Е.С., Молчанов В.А.* Отражение легких ионов от поверхности твердого тела. М.: Энергоатомиздат, 1985. 192 с.
3. *Mashkova E.S., Molchanov V.A.* Medium Energy Ion Reflection from Solids. Amsterdam: North-Holland, 1985. 444 p.
4. *Рязанов М.И., Тилинин И.С.* Исследование поверхности по обратному рассеянию частиц. М.: Энергоатомиздат, 1985. 150 с.
5. *Ziegler J.F., Biersack J.P., Littmark U.* The Stopping and Range of Ions in Solids. N.Y.: Pergamon, 1985. 321 p.
6. *Экштайн В.* Компьютерное моделирование взаимодействия частиц с поверхностью твердого тела. М.: Мир, 1995. 319 с.

7. Булгадарян Д.Г. Рассеяние протонов кэвных энергий как инструмент анализа тонких слоев на поверхности материалов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.08. Москва: МИФИ, 2020. 116 с.
8. Tougaard S., Kraer J. // Phys. Rev. B. 1991. V. 43. № 2. P. 1651. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.43.1651>
9. Afanas'ev V.P., Lubchenko A.V., Gubkin M.K. // Eur. Phys. J. B. 2004. V. 37. № 1. P. 117. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2004-0036-x>
10. Werner W.S.M. // Surf. Sci. 2005. V. 588. № 1–3. P. 26. <https://doi.org/10.1016/j.susc.2005.05.023>
11. Werner W.S.M. // Surf. Sci. 2007. V. 601. № 10. P. 2125. <https://doi.org/10.1016/j.susc.2007.03.001>
12. Oswald R., Kasper E., Gaukler K.H. // J. Electron. Spectrosc. Relat. Phenom. 1993. V. 61. № 3–4. P. 251. [https://doi.org/10.1016/0368-2048\(93\)80019-i](https://doi.org/10.1016/0368-2048(93)80019-i)
13. Salvat-Pujol F., Werner W.S.M. // Phys. Rev. B. 2011. V. 83. № 19. P. 195416. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.83.195416>
14. Bronshtein I.M., Pronin V.P. // Sov. Phys. Solid State. 1975. V. 17. № 8. P. 2502.
15. Pronin V.P. Elastic and Inelastic Interaction of Medium Energy Electrons with Surface of Solids. Thesis for the Degree of Doctor of Science. Saint-Petersburg: Herzen State Pedagogical University, 2014.
16. Powell C.J., Jablonski A. // J. Electron. Spectrosc. Relat. Phenom. 2010. V. 178–179. № 3–4. P. 331. <https://doi.org/10.1016/j.elspec.2009.05.004>
17. Афанасьев В.П. // Элементарные процессы и кинетика высокотемпературной неравновесной плазмы. М.: Изд-во МЭИ, 1988. С. 82.
18. Afanas'ev V.P., Naujoks D. // Phys. Stat. Sol. 1991. V. 164. № 1. P. 133. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221640113>
19. Afanas'ev V.P., Efremenko D.S., Kaplya P.S. // J. Electron. Spectrosc. Relat. Phenom. 2016. V. 210. P. 16. <https://doi.org/10.1016/j.elspec.2016.04.006>
20. Salvat-Pujol F., Jablonski A., Powell C.J. // Comput. Phys. Commun. 2005. V. 165. № 2. P. 157. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2004.09.006>
21. Werner W.S.M. // Surf. Interface Anal. 2005. V. 37. № 11. P. 846. <https://doi.org/10.1002/sia.2103>
22. Afanas'ev V.P., Kaplya P.S. // J. Surf. Invest.: X-Ray, Synchrotron Neutron Tech. 2015. V. 9. № 4. P. 715. <https://doi.org/10.1134/s1027451015020238>
23. Afanas'ev V.P., Naujoks D. // Z. Phys. B. 1991. V. 84. № 3. P. 397. <https://doi.org/10.1007/bf01314014>
24. Zemek J., Jiricek P., Werner W.S.M., Lesiak B., Jablonski A. // Surf. Interface Anal. 2006. V. 38. № 4. P. 615. <https://doi.org/10.1002/sia.2147>
25. Jablonski A., Hansen H.S., Jansson C., Tougaard S. // Phys. Rev. B. 1992. V. 45. № 7. P. 3694. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.45.3694>
26. Tougaard S., Chorkendorff I. // Phys. Rev. B. 1987. V. 35. № 13. P. 6570. <https://doi.org/10.1103/physrevb.35.6570>
27. Dashen R.F. // Phys. Rev. B. 1964. V. 134. № 4A. P. A1025. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.134.A1025>
28. Ambartsumian V.A. // J. Phys. 1941. V. 5. № 1. P. 93.
29. Ambartsumian V.A. // Izv. AN SSSR. 1942. V. 3. P. 97.
30. Ambartsumian V.A. // J. Phys. 1944. V. 8. № 2. P. 65.
31. Sobolev V.V. Light Scattering in Planetary Atmospheres. N.Y.: Pergamon Press, 1975. 256 p.
32. Thomson J.J. // Phil. Mag. 1912. V. 23. № 136. P. 449.
33. Bethe H. // Z. Phys. B. 1930. V. 397. № 3. P. 325. <https://doi.org/10.1002/andp.19303970303>
34. Shulga V.I., Schinner A., Sigmund P. // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B. 2020. V. 467. P. 91. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2020.01.029>
35. Robinson M.T., Torrens I.M. // Phys. Rev. B. 1974. V. 9. № 12. P. 5008. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.9.5008>
36. Morita K., Akimune H., Suita T. // Jpn. J. Appl. Phys. 1968. V. 7. № 8. P. 916. <https://doi.org/10.1143/JJAP.7.916>
37. Булгадарян Д.Г., Синельников Д.Н., Ефимов Н.Е., Курнаев В.А. // Изв. РАН. Сер. Физ. 2020. Т. 84. № 6. С. 903. <https://doi.org/10.31857/S036767652006006X>
38. Firsov O.B. // JETP. 1959. V. 9. № 5. P. 1076.

## Reflection of Light Ions from a Solid Surface: Analytical Model and Computer Simulation

V. P. Afanas'ev<sup>1, \*</sup>, L. G. Lobanova<sup>1, \*\*</sup>, V. I. Shulga<sup>2, \*\*\*</sup>

<sup>1</sup>National Research University "MPEI", Moscow, 111250 Russia

<sup>2</sup>Moscow State University, Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow, 119991 Russia

\*e-mail: v.af@mail.ru

\*\*e-mail: lida.lobanova.2017@mail.ru

\*\*\*e-mail: vish008@yandex.ru

An analytical solution of the equation for the distribution of the flux density of reflected light ions over the path length and energy losses in the target is obtained. It is based on the solution of boundary problems for the transport equation using the invariant imbedding method in the small-angle approximation. In the case of proton reflection from copper and tungsten targets, the analytical results are compared with computer simulation data obtained using the OKSANA program, as well as with experimental data. The possibility of verifying the stopping power of the target material based on the created methodology is noted.

**Keywords:** reflection of light ions, analytical model, invariant imbedding method, small-angle approximation, computer simulation, stopping power.